arXiv:2304.00505v1 [math.NT] 2 Apr 2023

SU(3)算术子群的相对同调

Claudio Bravo [1]

Abstract. 设 $\mathcal{C}$ 是一条定义在有限域 $\mathbb{F}$上的光滑、射影且几何整的曲线。设 A 为 $\mathcal{C}$ 在闭点 P 之外正则的函数环，并设 $k = \mathrm{Quot}(A)$。令 $\mathcal{G}$ =SU(3) 为由一个三变量（各向同性）厄米形式定义的非分裂群概形。本文以欧拉-庞加莱′特征为依据，描述 $\mathcal{G}(A)$ 的某些算术子群 G模去其极大幺幂子群共轭类代表系 $\mathfrak{U}$ 后的相对同调群。换言之，我们衡量 G 的同调群在多大程度上偏离其子群 $U \in \mathfrak{U}$对应同调群的余积。

数学主题分类代码：55N10、20G30、11R58（主要），20E08、20E08、20E45（次要） 关键词：相对同调、代数函数域、特殊酉群、算术子群、极大幺幂子群、布鲁哈-蒂茨树、商图。

1. Introduction

设 $\mathcal{C}$ 是定义在域$\mathbb{F}$上的光滑、射影且几何整的曲线。设 P 是 $\mathcal{C}$中的一个闭点，并记 A 为在 $\mathcal{C}$ 上除 P之外处处正则的函数环。记 $k =$ 的商域为$\mathrm{Quot}(A)$。

实李群的离散子群 G 通常通过其在对称空间上的作用来研究，也就是在形如 $\mathcal{X} = K\backslash G$的齐性空间上的作用，其中 K 是 G的极大紧子群。与前述方法类似，布鲁哈和蒂茨在[3] 和 [4] 中提出了一套研究 k-点的约化准分裂 k-群概形的方案，通过它们在称为建筑的单纯复形上的作用来进行研究。这一观点过去曾有效地用于研究具有算术意义的群。例如， [14, 定理 3] 将分裂群概形的 $\mathbb{F}[t]$-点群表示为较简单子群的 amalgamated 自由积。接着，[14, 定理 5] 描述了这类群的同调。上述表示已在 k-群概形的等变情形中得到推广，见[11, 定理3。9]。关于算术群在建筑上的作用，最有力的结果之一见 [5, 命题13。6]。

在分裂秩一的群概形背景下，或者等价地说，在相应的建筑为树时，可以通过描述相关的商图和顶点稳定子来研究它们的算术子群。这种方法在[12, 第一章，第 §5]节中被称为 Bass-Serre 理论。在本书中，Serre 研究了由 $\mathrm{SL}_2(A)\backslash X$在布吕阿-蒂茨树 $X = X(\mathrm{SL}_2(k), P)$上的作用所定义的商图 $\overline{X}$ =SL。更具体地说，他证明了：

定理 1.1。 [12, 第二章，§2。3] 存在一个有界连通子图 $Y \subseteq \overline{X}$以及测地射线 $\mathfrak{r}(\sigma) \subseteq \overline{X}$，对于每个 $\sigma \in \mathrm{Pic}(A)$，使得 $\overline{X} = Y \cup \bigsqcup_{\sigma\in\mathrm{Pic}(A)} \mathfrak{r}(\sigma)$。

此外，当 $\mathbb{F}$ 有限时， Y 也是有限的。

然后，通过运用 Bass-Serre 理论，Serre 还将 $\mathrm{SL}_2(A)$ 表示为某些更简单子群的 amalgamated 自由积。

当 $\mathbb{F}$是一个有限域时，Serre 在 [12, 第二章§29], 中引入的定理 1.1 有一个有趣的应用，即对某些 $\mathrm{SL}_2(A)$子群的欧拉—庞加莱特征进行同调解释。为了详细说明这一点，我们来′特征

[1]劳朗·施瓦茨数学中心， ´巴黎综合理工学院，巴黎综合理工学院，邮编 91128，帕莱索 Cedex，法国。电子邮箱：claudio.bravo-castillo@polytechnique.edu1

引入以下定义。我们用 $\sharp S$ 表示集合 S的基数。类比于[13, 命题 14], Serre 将欧拉—庞加莱'特征 $\chi(G)$定义为任意有限指数子群 G $\mathrm{SL}_2(A)$的特征:

$$\chi(G)=\sum_v 1/\sharp\mathrm{Stab}_G(v)-\sum_e 1/\sharp\mathrm{Stab}_G(e), \tag{1}$$

其中 v （分别是 e）遍历 G 在顶点（分别是几何边）轨道中的一组代表，且位于 X 中。方程（1）中的两个级数均收敛（参见 [12, 第二章，第 2.3 节，习题 2]）。

定义在 $\mathcal{C}$ 上的 ζ函数 $\zeta_{\mathcal{C}}$ 的特殊值与 $\mathrm{SL}_2(A)$的欧拉－庞加莱特征数 '有关。更具体地说，若 G 在 $\mathrm{SL}_2(A)$ 中具有有限指数（参见[12, 第二章，第 2.3 节，习题 2]），则有 $\chi(\mathrm{SL}_2(A))=-(q^{\deg(P)}-1)\zeta_{\mathcal{C}}(-1)$和$\chi(G)=[\mathrm{SL}_2(A):\ G]\chi(\mathrm{SL}_2)$。关于单连通分裂单代数群概形的更一般结果见第 158] 页的脚注 [13, 和 [7] 。

现在，设 H 是一个群， $\mathfrak{H}=\{H_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ 是 H 的任意非空子群族。我们将 R 定义为增广 $\mathbb{Z}$-态射 ε 的核，其中 R 是一个 G-模，且该态射由 $\varepsilon(\delta)=1$ 定义，对所有 $\delta\in H/H_\sigma$ 和所有 $\sigma\in\Sigma$ 均成立。于是，给定一个 H-模 M，我们将 H 模 $\mathfrak{H}$ 的 M 值相对同调群定义为

$$H_i(H \bmod H_\sigma, M):=\mathrm{Tor}_{i-1}^{\mathbb{Z}[H]}(R,M)=H_{i-1}(H,R\otimes M). \tag{2}$$

H 模 $\mathfrak{H}$ 的相对同调群衡量，对于 $i>0$， $H_i(H,M)$距离成为余积 $\coprod_{\sigma\in\Sigma}H_i(H_\sigma,M)$还有多远。更明确地说，若 $H_i(H$ 模 $H_\sigma,M)$ $=H_{i+1}(H$ 模 $H_\sigma,M)=\{0\}$，则 $H_i(H,M)\cong\coprod_{\sigma\in\Sigma}H_i(H_\sigma,M)$。

若群 G 中有限阶元素的阶均为 p 的幂，我们就称该群没有 p'-挠元。由 [9, 引理 3.3] 可知，当 $\mathbb{F}=\mathbb{F}_{p^r}$ 时，$\mathrm{SL}_2(A)$ 的主合同子群总是没有 p'-挠元。

定理 1.2。 [12, 第二章，§2.9，页码 135] 假设 $\mathbb{F}=\mathbb{F}_{p^r}$。令 G 为 $\mathrm{SL}_2(A)$ 的一个不含 p'-挠元的有限指数子群。令 $\{\xi_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma_0}$ 为代表 X视觉极限中 G-轨道的集合，即 $G\backslash\mathbb{P}^1(k)$的代表元，并记 $G_\sigma=\mathrm{Stab}_G(\xi_\sigma)$。那么，集合 $\mathfrak{G}=\{G_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma_0}$ 是 G中极大幺幂子群的 G-共轭类的代表系。

以下结果根据 G的欧拉–庞加莱特征，描述了 G 模 $\mathfrak{G}$ 的相对同调群。

定理 1.3。[12, 第二章，定理 14] 假设 $\mathbb{F}=\mathbb{F}_{p^r}$。令 G 为 $\mathrm{SL}_2(A)$ 的一个不含 p'-挠元的有限指数子群。那么，对所有 $i\neq 1$，同调群 $H_i(G$模 G_σ， $M)$ 均为平凡群。此外，若 M是 $\mathbb{Z}$-有限生成的，则$H_1(G$模 G_σ， $M)\cong M^{-\chi(G)}$。

本工作的目的是将前述结果推广到以下情形：用特殊酉群 SU_2 取代 $\mathrm{SL}(3)=\mathrm{SU}(h)$ ，该群由三维厄米形式 h定义。这可以看作将 Serre 的结果自然推广到非分裂情形，因为 $\mathrm{SU}(3)$ 是唯一一个分裂秩为 1 的拟分裂非分裂单连通半单群（参见 [4, 4.1。4]）。此外，这表明定理 1.3 可推广到任意分裂秩为 1 的拟分裂单连通半单群。我们认为，对于具有更高分裂秩的拟分裂群，也可能存在沿此方向的更一般结果，并期待本文能带来启发。

2. Context and main results

设 $\mathbb{F}$ 是一个特征不为 2 的域。设 $\mathcal{C}$ 是定义在 $\mathbb{F}$上的光滑射影几何整曲线，并令 k 为 $\mathcal{C}$的函数域。设 ℓ是 k 的二次扩张，且 $\mathbb{F}$ 在 ℓ中代数闭；或者等价地，设有一个 2:1 态射 $\psi:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ ，其中 $\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ 是几何整曲线，并将 ℓ 定义为

$\mathcal{D}$的函数域。对于每个元素 $x \in \ell$，我们用 $\overline{x}$ 表示它在 Gal(ℓ/k)的唯一非平凡元素作用下的像。

我们引入如下的 $\mathcal{C}$-群概形。考虑 $\mathcal{C}$的一个仿射子集，将其记为 Spec(R)，其中 $R \subset k$ 满足 Quot$(R) = k$。令 $S \subset \ell$ 为 R 在 ℓ中的整闭包。于是，根据定义，Spec(S) 是 ψ 在 Spec(R)上的纤维。记 SU(h_R) 为由 R-厄米形式h_R 定义的特殊酉群概形： $S^3 \to R$ 给出为

$$h_R(x_{-1}, x_0, x_1) = x_{-1}\overline{x_1} + x_0\overline{x_0} + x_1\overline{x_{-1}}. \tag{3}$$

由于我们可以用具有仿射交的仿射子集 Spec(R_i) 覆盖 $\mathcal{C}$ ，因此可以将群 SU(h_{R_i}) 粘合起来，从而定义 $\mathcal{C}$-群概形 $\mathcal{G} =$ SU(h)，我们称之为 $\mathcal{C}$上的 $\mathcal{D}$ 的特殊酉群概形。

令 P为 $\mathcal{C}$上的一个闭点。记 A 为在 P之外正则的函数环。在本文所涉及的一切内容中，我们假设 ℓ/k 在 P处非分裂，即假设在 $\mathcal{D}$ 上方存在唯一的点 Q 。于是，A 在 L 中的整闭包 B 满足 Spec$(B) = \mathcal{D} \smallsetminus \{Q\}$。记 $\mathcal{G}$的 A-点群为 $\Gamma = \mathcal{G}(A)$ 。根据我们关于 ℓ 和 P的假设， $\mathcal{G}$ 是一个分裂秩 1 的拟分裂非分裂单连通半单群。于是，由 $\mathcal{G}$ 在 P 处定义的（有理）Bruhat-Tits 建筑是一棵树，我们将其记为 $X = X(\mathcal{G}, k, P)$。更多细节请参见 [3, §7.4] 。群 $\mathcal{G}(k)$ 通过单纯映射作用于 X 。

令 $N = N_{\ell/k}$ 和 $T =$Tr$^{\ell/k}$ 分别为二次扩张ℓ/k的范数与迹映射。为了描述 X的视觉极限 $\partial_\infty(X)$ ，即其模去平行关系后的射线类，方便起见，我们引入以下 k-簇:

$$H(\ell, k) := \{(u, v) \in R_{\ell/k}(\mathbb{G}_{a,\ell})^2 : N(u) + T(v) = 0\},$$
$$H(\ell, k)^0 := \{(0, v) \in 0 \times R_{\ell/k}(\mathbb{G}_{a,\ell}) : T(v) = 0\}.$$

事实上，存在一个双射 $f\colon H(\ell, k) \cup \{\infty\} \to \partial_\infty(X)$。更多详情请参见推论 3.3 。

本文的主要目标是将定理 1.3 推广到特殊酉群的算术子群。为此，我们研究子群 G 在 Γ 的视觉极限上的作用，或等价地，研究其在 X上的作用 $H(\ell, k) \cup \{\infty\}$。更具体地说，我们首先描述 Steinberg G-模 St，它定义为增广$\mathbb{Z}$态射 $\epsilon\colon \mathbb{Z}[H(\ell, k) \cup \{\infty\}] \to \mathbb{Z}$给出的核，其中 $\epsilon(z) = 1$，对所有 $z \in H(\ell, k) \cup \{\infty\}$。

定理 2.1. 假设 $\mathbb{F} = \mathbb{F}_{p^r}$。令 G 为 Γ 的一个不含 p'-挠元的有限指数子群。那么，斯坦伯格模 St 是一个有限生成的投射 $\mathbb{Z}[G]$-模，其稳定自由秩为 $-\chi(G)$；也就是说，存在两个有限生成自由 $\mathbb{Z}[G]$-模 L_0 和 L_1，其秩分别为 l_0 和 l_1 ，使得

$$\mathrm{St} \oplus L_0 \cong L_1, \ \textit{and}\ \chi(G) = l_0 - l_1.$$

与 SL$_2$, 的情形一样， G 不含 p'-挠元这一假设，对于 Γ 的一些在算术上颇有意义的子群族（如主合同子群）成立；参见[9,引理 3。3]。

第二步中，我们沿袭 Serre 的思路，根据G 在 $\partial_\infty(X) \cong H(\ell$上的作用， $k) \cup \{\infty\}$ 描述 G 的极大幺幂子群的共轭类的一个代表系（参见 §6）。即使 G 含有 p'-挠元，或 $\mathbb{F}$是无限的完美域，这一结论仍然成立。

定理 2.2. 假设 $\mathbb{F}$ 是完美的。设 G 是 Γ 的一个有限指数子群。设$\{\xi_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma_0}$ 是 $\partial_\infty(X)$ 中 G 轨道的一个代表元集合。对于每个 $\sigma \in \Sigma_0$，令 $(u、 v) = f^{-1}(\xi_\sigma) \in H(\ell、 k) \cup \{\infty\}$，并令

$$g_{u,v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -u \\ -1 & \bar{u} & -v \end{pmatrix}, \qquad g_\infty = \mathrm{id}.$$

令 $\mathcal{B}$ 为 $\mathcal{G}$ 的 Borel 子群，其定义为 $\mathcal{G}$ 中上三角矩阵构成的概形，并令 $\mathcal{U}_a$ 为其幺幂根。

对于每个 $\sigma \in \Sigma_0$，记 G_σ 为 G 中 ξ_σ 的稳定子，写作

$$G_\sigma = \mathrm{Stab}_{\mathcal{G}(k)}(\xi_\sigma) \cap G = g_{u,v}^{-1}\mathcal{B}(k)g_{u,v} \cap G.$$

对于每个 $\sigma \in \Sigma_0$，记

$$\mathcal{U}(G_\sigma) := g_{u,v}^{-1}\mathcal{U}_a(k)g_{u,v} \cap G.$$

则：

(1) $\mathcal{U}(G_\sigma)$ 是包含 G_σ 中所有幺幂元的子群，且 $G_\sigma/\mathcal{U}(G_\sigma)$ 同构于 $\mathbb{F}^*$ 的一个子群；(2) $\mathfrak{U} = \{\mathcal{U}(G_\sigma) : \sigma \in \Sigma_0\}$ 是 G 的极大幺幂子群的共轭类的一组代表；(3) 若 $\mathbb{F} = \mathbb{F}_{p^r}$ 和 G 不含 p'-挠元，则对所有 $\sigma \in \Sigma_0$，均有 $\mathcal{U}(G_\sigma) = G_\sigma$。

前述结果对 G 中极大幺幂子群的共轭类数量有一些有趣的推论（参见 §6.2）。

然后，通过大量运用定理 2.1 我们描述 G 模 $\mathfrak{U}$的同调，定义见定理 2.2，并将定理 1.3 推广到特殊酉群。

定理 2.3。假设 $\mathbb{F} = \mathbb{F}_{p^r}$。设 G 是 Γ 的一个有限指数子群，且不含p'-挠元。那么，对于所有 $i \neq 1$，同调群 $H_i(G$模 $G_\sigma, M)$ 均为平凡群。此外，若 M是 $\mathbb{Z}$-有限生成的，则 $H_1(G$模 $G_\sigma, M) \cong M^{-\chi(G)}$。特别地，对于每个 $i \in \mathbb{Z}_{>1}$，我们有 $H_i(G, M) \cong \coprod_{\sigma\in\Sigma_0} H_i(G_\sigma, M)$；而对于 $i = 1$，以下序列是正合的：

$$0 \to \coprod_{\sigma\in\Sigma_0} H_1(G_\sigma, M) \to H_1(G, M) \to H_1(G \ mod\ G_\sigma, M).$$

作为定理 2.3的一个应用，我们在命题 7.3 证明，挠群 $\mathrm{Tor}(G^{\mathrm{ab}})$ 自然同构于有限个 B-分式理想之积的一个有限指数子群，并且 G^{ab} 自由部分的秩有界于$-\chi(G)$。特别地，我们证明，尽管 Γ^{ab} 是有限生成的（参见 [2, 命题 9。7]），群 G^{ab} 却不是有限生成的。最后，我们描述 Γ中主合同子群的阿贝尔化的挠子群。

3. Conventions and preliminaries

3.1. 图的约定。图 $\mathfrak{g}$ 由两个集合 V =$\mathrm{V}(\mathfrak{g})$ 和 E =$\mathrm{E}(\mathfrak{g})$，以及三个映射组成

$$o : \mathrm{E} \to \mathrm{V},\ e \mapsto o(e), \qquad t : \mathrm{E} \to \mathrm{V},\ e \mapsto t(e), \qquad r : \mathrm{E} \to \mathrm{E},\ e \mapsto \overline{e},$$

它们满足以下条件：对于每个 $e \in \mathrm{E}$，都有 $r(r(e)) = e$, $r(e) \neq e$和 $o(e) = t(r(e))$。集合 V 和 E 分别称为顶点集和边集，函数 o, t 和 r 分别称为起点、终点和反向映射。顶点 $o(y) = t(r(y))$ 称为 y的起点，顶点 $t(y) = o(r(y))$ 称为 y的终点。图 $\mathfrak{g}$ 的一条几何边是形如 $\{e, r(e)\}$的集合，其中 $e \in \mathrm{E}$。图 $\mathfrak{g}$ 的几何边集记为 $\mathrm{geom}(\mathrm{E})(\mathfrak{g})$。图$\mathfrak{g}$的一个定向是 E^+ 的一个子集，使得 E 是 E^+ 和 $r(\mathrm{E}^+)$的不交并。不难看出，定向总是存在的；并且一旦固定一个定向，E^+ 与 $\mathrm{geom}(\mathrm{E})(\mathfrak{g})$之间就存在一个双射。

两个图之间的态射 $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ 是一对函数 $f_{\mathrm{V}} : \mathrm{V}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{V}(\mathfrak{g}')$ 和 $f_{\mathrm{E}} : \mathrm{E}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{E}(\mathfrak{g}')$，它们保持起点、终点和反向函数不变。群作用也遵循类似的约定。我们称群 H 在图 $\mathfrak{g}$ 上的作用没有反转，当它保持定向时；等价地，对每个 $y \in \mathrm{E}(\mathfrak{g})$ 和每个 $h \in H$，都有 $h{\cdot}y \neq r(y)$。若 H 在 $\mathfrak{g}$ 上的作用没有反转，则可以用显然的方式定义商图 $H\backslash\mathfrak{g}$； $H\backslash\mathfrak{g}$ 的顶点集（或边集）

是商集 $H\backslash \mathrm{V}(\mathfrak{g})$ ($H\backslash \mathrm{V}(\mathfrak{g})$，或边集）。这类商图用于 Bass-Serre 理论，以研究作用在树上的群的结构，正如我们在 §1 中提到的。

设 n 为正整数。定义图 $\mathfrak{path}_n$，令 $\mathrm{V} = \{0, 1, \cdots, n\}$，$\mathrm{E} = \{a_i, \overline{a_i} : 0 \leqslant i < n\}$，其中 $r(a_i) = \overline{a_i}$, $o(a_i) = i$ 和 $t(a_i) = i + 1$。接着，将图 $\mathfrak{g}$ 中长度为 n 的路径定义为单射态射 $\mathfrak{l} : \mathfrak{path}_n \to \mathfrak{g}$。若对所有 $0 \leqslant i \leqslant n$，都有 $v_i = \mathfrak{l}(i)$，则称 $\mathfrak{l}$ 是一条从 v_0 到 v_n 的路径。若图 $\mathfrak{g}$ 中任意两个顶点 $v, w \in \mathrm{V}(\mathfrak{g})$ 之间都存在一条路径 $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}(v, w)$，则称图 $\mathfrak{g}$ 是连通的。定义图 $\mathfrak{circ}_n$，令 $\mathrm{V} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$，$\mathrm{E} = \{e_i, \overline{e_i} : i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$，，其中 $r(e_i) = \overline{e_i}$, $o(e_i) = i$ 和 $t(e_i) = i + 1$。图 $\mathfrak{g}$ 中长度为 n 的圈是一个单射态射 $\mathfrak{circ}_n \to \mathfrak{g}$。树是没有圈的连通图。

设 $\mathfrak{g}$ 是一个图。我们将 $\mathfrak{g}$ 的一条射线 $\mathfrak{r}$ 定义为一个子复形，其顶点集 $\mathrm{V}(\mathfrak{r}) = \{v_i\}_{i=0}^{\infty}$ 和边集 $\mathrm{E}(\mathfrak{r}) = \{e_i\}_{i=0}^{\infty}$ 满足恒等式 $o(e_i) = v_i$、$t(e_i) = v_{i+1}$ 和 $v_i \neq v_j$，其中 (i, j) 为任意两个不同的指标。顶点 v_0 称为 $\mathfrak{r}$ 的初始顶点。注意，给定图的射线集合可能为空，例如当图的顶点数有限时。下文中，我们只讨论至少包含一条射线的图。为了定义一条射线的视觉极限，取两条射线 $\mathfrak{r}_1$ 和 $\mathfrak{r}_2$，并记 $\mathrm{V}(\mathfrak{r}_1) = \{v_i\}_{i=0}^{\infty}$ 和 $\mathrm{V}(\mathfrak{r}_2) = \{w_i\}_{i=0}^{\infty}$。于是，如果存在 i_0、$s \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$，使得对所有 $i \geqslant i_0$ 都有 $v_i = w_{i+s}$，我们就称 $\mathfrak{r}_1$ 和 $\mathfrak{r}_2$ 属于同一个视觉极限。这在 $\mathfrak{g}$ 的射线集合上定义了一个等价关系。我们用 $\partial_\infty(\mathfrak{r})$ 表示射线 $\mathfrak{r}$ 所属的等价类，称之为视觉极限。我们用 $\partial_\infty(\mathfrak{g})$ 表示 $\mathfrak{g}$ 中所有等价类构成的集合。

3.2. 关于特殊酉群的根数据。这里回顾关于 $\mathcal{C}$-群概形 $\mathcal{G}$的一些众所周知的事实。更详细的定义见例如 [4, 4.1], 或 [8, §4 情形 2，第 43 页-50]。首先回顾一下，$\mathcal{G}$ 嵌入到 SL_3 中，$\mathcal{C}$ (参见 [2, §3.2])。利用这一表示，我们将 $\mathcal{G}$ 与其像等同，并将 $\mathcal{G}(k)$ （分别是 $\mathcal{G}(A)$）中的元素视为系数属于 ℓ （分别是 B）的 3×3 矩阵。

给定一个域 F，令 $\mathbb{G}_{m,F}$ 为定义在 F上的乘法群。记作:

$$\mathrm{diag}(x, y, z) := \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{G}$ 的一个 k-分裂极大环面 $\mathcal{S}$ 由形如 $\mathsf{diag}(s, 1, s^{-1})$ 的对角矩阵子群构成，其中 $s \in \mathbb{G}_{m,k}$。$\mathcal{S}$的中心化子 $\mathcal{T} = \mathcal{Z}_{\mathcal{G}}(\mathcal{S})$ 是一个 k-极大环面，并且可参数化为 $\tilde{a} : \mathrm{R}_{\ell/k}(\mathbb{G}_{m,\ell}) \to \mathcal{T}$，其中 $\tilde{a}(t) = \mathsf{diag}(t, \overline{t}t^{-1}, \overline{t}^{-1})$。该环面 $\mathcal{T}$在 ℓ上分裂为一个二维环面 $\mathcal{T}_\ell \cong \mathbb{G}_{m,\ell}^2$。

ℓ-分裂环面 $\mathcal{T}_\ell$ 的特征标基由特征标 $\{\alpha, \overline{\alpha}\}$ 组成，它们定义为 $\alpha(\mathsf{diag}(x, y, z)) = yz^{-1}$，以及 $\overline{\alpha}(\mathsf{diag}(x, y, z)) = xy^{-1}.$。我们用 a （分别用 $2a$）表示 α （分别为 $\alpha + \overline{\alpha}$）在 $\mathcal{S}$ 上的限制。于是，$\mathcal{G}$ 的 k-根系为 $\Phi = \{\pm a, \pm 2a\}$。我们用 $a^\vee$ （分别用 $(2a)^\vee$）表示 a （分别为 $2a$）的余根。众所周知，a 生成 $\mathcal{S}$ 的 $\mathbb{Z}$-特征标模，而 $(2a)^\vee$ 生成其 $\mathbb{Z}$-余特征模。

我们选取 $\{a, 2a\}$ 作为 Φ 中的一组正根。此选择定义了 $\mathcal{G}$ 的一个 k-Borel 子群 $\mathcal{B}$，其中包含 $\mathcal{T}$。事实上，该群 $\mathcal{B}$ 对应于 $\mathcal{G}$ 中的上三角矩阵。我们将其幺幂根子群 $\mathcal{U}_a$ 和 $\mathcal{U}_{2a}$ 参数化为

$$\mathrm{u}_a : \begin{array}{ccc} H(\ell, k) & \to & \mathcal{U}_a \\ (u, v) & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & -\overline{u} & v \\ 0 & 1 & u \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \text{ and } \quad \mathrm{u}_{2a} : \begin{array}{ccc} H(\ell, k)^0 & \to & \mathcal{U}_{2a} \\ v & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 0 & v \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

那么，我们有 $\mathcal{B} = \{\tilde{a}(t)\mathrm{u}_a(x, y) : t \in \ell^*, (x, y) \in H(\ell, k)\}$. 与负根 $b \in \{-a, -2a\}$ 相对应的 $\mathcal{G}$ 的每个幺幂子群，都由同态 $\mathrm{u}_b := \mathsf{s} \cdot \mathrm{u}_{-b} \cdot \mathsf{s}$ 参数化，其中 s 是一个 3×3 矩阵，其副对角线上的元素为 -1，其他位置的元素均为 0。

3.3. 布吕阿-蒂茨树。这里我们定义由 $\mathcal{G}$ 和 P所定义的 k的离散赋值映射 $\nu=\nu_P$构造的（有理）布吕阿-蒂茨树 X $=X(\mathcal{G},k,P)$。为简便起见，也用 ν表示由 Q诱导的 ℓ 上的赋值，并假设 $\nu(\ell^*)=\mathbb{Z}/e_P\mathbb{Z},$，其中 e_P是 ℓ中 P的分歧指数。由 $\mathcal{S}$ 定义的 X 的标准公寓按定义为 $\mathbb{A}_0=X_*(\mathcal{S})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}\cong\mathbb{R}a^\vee$。 $\mathbb{A}_0$的顶点集对应于满足 $a(x)=2r$ 属于 Γ_a：$=\frac{1}{2}\nu(\ell^*)$的元素 $x=ra^\vee$。更多细节见[4, 4.2.21(4) 和 4.2.22]。由 [3, 6.2.10] 和 [4, 4.2.7] 可知，正规化子 $\mathcal{N}_{\mathcal{G}}(\mathcal{S})$ 的 k-点群 $\mathcal{N}_{\mathcal{G}}(\mathcal{S})(k)$ 通过以下方式作用于 $\mathbb{A}_0$：

$$\tilde{a}(t)\cdot x=x-\frac{1}{2}\nu(t)a^\vee,\ \text{and}\ \mathrm{s}\cdot x=-x,\quad \forall x\in\mathbb{A}_0,\ \forall t\in \mathrm{R}_{\ell/k}(\mathbb{G}_{m,\ell}).$$

对于每个 $b\in\{a、-a\}$，定义 $\mathcal{U}_{b,\ x}(k)$ 为群 $\{\mathrm{u}_b(x,y)\colon\ (x,y)\ \in H(\ell,k),\nu(y)\ \geqslant\ -2b(x)\}.$。于是，由 $\mathcal{G}(k)$定义的有理布吕阿-蒂茨树 X是将多个 $\mathbb{A}_0$副本粘合而成的图：

$$X=X(\mathcal{G},k,P):=\mathcal{G}(k)\times\mathbb{A}_0/\backsim, \tag{4}$$

关于等价关系： $(g,x)\backsim(h,y)$当且仅当存在 $n\in\mathcal{N}_{\mathcal{G}}(\mathcal{S})(k)$ 使得 $y=n\cdot x$ 且 $g^{-1}hn\in\mathcal{U}_x(k)$，其中 $\mathcal{U}_x(k)=\langle\mathcal{U}_{a,\ x}(k),\mathcal{U}_{-a,\ x}(k)\rangle$。

3.4. 布鲁哈-蒂茨树的视觉极限。回顾一下， $\mathcal{G}(k)$ 作用于 X。对于所有 $g\in\mathcal{G}(k)$，由于 $\partial_\infty(\mathfrak{r}_1)=\partial_\infty(\mathfrak{r}_2)$ 蕴含 $g\cdot\partial_\infty(\mathfrak{r}_1)=g\cdot\partial_\infty(\mathfrak{r}_2)$，该作用通过 $g\cdot\partial_\infty(\mathfrak{r}_1)=\partial_\infty(g\cdot\mathfrak{r}_1)$延拓到 X的视觉极限。

引理 3.1. $\mathcal{G}(k)$ 在 $\partial_\infty(X)$上传递地作用。

证明。设 $\mathfrak{r}_1$ 和 $\mathfrak{r}_2$ 是 X中的两条射线。设 $\mathbb{A}_1$ 和 $\mathbb{A}_2$ 是分别包含 $\mathfrak{r}_1$ 和 $\mathfrak{r}_2$的两个公寓。由于 $\mathcal{G}(k)$ 在 X的公寓上具有传递性，存在满足 $g\cdot\mathbb{A}_1=\mathbb{A}_2$的 $g\in\mathcal{G}(k)$。此外，将 $\mathbb{A}_2$ 乘以 $\mathcal{G}(k)$中的一个适当元素后，我们可以假设 $\mathbb{A}_2$ 是标准公寓 $\mathbb{A}_0\subset X$。于是， $g\cdot\mathfrak{r}_1$ 和 $\mathfrak{r}_2$ 都是 $\mathbb{A}_0$中的射线。由于 $\{\mathrm{id},\ \mathrm{s}\}$ 在 $\mathbb{A}_0$的视觉极限上传递地作用，我们得出存在 $\epsilon\in\{0、\ 1\}$ 使得$\mathrm{s}^\epsilon g\cdot\partial_\infty(\mathfrak{r}_1)=\partial_\infty(\mathfrak{r}_2)$，结论随即得证。□

我们将 $\mathfrak{r}(\infty)$ 记作由 $\{x\in\mathbb{A}_0$ 定义的射线： $a(x)\geqslant 0\}$，并将其视觉极限记作 ξ_∞。以下是建筑理论中的一个经典结果。

引理 3.2. [1,§6.2.4] ξ_∞ 在 $\mathcal{G}(k)$ 中的稳定子是 $\mathcal{B}(k)$。

对于每个 $(u、\ v)\in H(\ell、\ k)$，我们定义

$$g_{u,v}:=\mathrm{u}_{-a}(u,v)\cdot\mathrm{s}=\mathrm{s}\cdot\mathrm{u}_a(u,v)=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&-u\\-1&\bar{u}&-v\end{pmatrix}\ \text{and}\ \xi_{(u,v)}:=g_{u,v}^{-1}\cdot\xi_\infty.$$

为了统一视觉极限的表达方式，以下内容均采用如下约定：对于 $\xi=\xi_\infty$，我们记 $(u、\ v)=\infty$，并令 $g_\infty=\mathrm{id}$。

推论 3.3. 映射 $f\colon\ H(\ell,k)\cup\{\infty\}\to\partial_\infty(X)$，定义为 $f((u,v))=\xi_{(u,v)}$，其中 $(u,\ v)\in H(\ell,k)\cup\{\infty\}$，是一个双射。特别地，$\mathcal{G}(k)/\mathcal{B}(k)$ 与 $H(\ell,k)\cup\{\infty\}$之间存在一个双射。

证明. 首先，我们证明 f 是单射。事实上，若$g_{u_1,v_1}^{-1}\cdot\xi_\infty=g_{u_2,v_2}^{-1}\cdot\xi_\infty$，则由引理 3.2 可知，$g_{u_1,v_1}g_{u_2,v_2}^{-1}\in\mathcal{B}(k)$。特别地，若 $(u_1,v_1)=\infty$，则 $(u_1,v_2)=\infty$，反之亦然。在其他情况下，我们有$g_{u_1,v_1}g_{u_2,v_2}^{-1}=\mathrm{su}_a(u_1,v_1)\mathrm{u}_a(u_2,v_2)^{-1}\mathrm{s}^{-1}$属于 $\mathrm{s}\mathcal{B}(k)\mathrm{s}^{-1}\cap\mathcal{B}(k)$。于是，$\mathrm{u}_a(u_1,v_1)=\mathrm{u}_a(u_2,v_2)$，因为 $\mathrm{s}\mathcal{B}(k)\mathrm{s}^{-1}\cap\mathcal{B}(k)=\mathcal{T}(k)$。由此可知，在所有情况下， $(u_1,v_1)=(u_2,v_2)$。

现在，我们断言 f 是满射。事实上，任取 $\xi\in\partial_\infty(X)$。由引理 3.1 可知，存在 $g\in\mathcal{G}(k)$ 使得 $\xi=g\cdot\xi_\infty$。此外，由 Bruhat 分解可知 $\mathcal{G}(k)=\mathcal{B}(k)\cup\mathcal{U}_a(k)\mathrm{s}\mathcal{B}(k)$，其中 $\mathcal{B}(k)\cap\mathcal{U}_a(k)\mathrm{s}\mathcal{B}(k)=\varnothing$。根据引理 $\mathcal{B}(k)$ =稳定子$_{\mathcal{G}(k)}(\xi_\infty)$ 3.2，我们有 $\xi=$

$g \cdot \xi_\infty = \xi_\infty$，如果 $g \in \mathcal{B}(k)$，而当 $\xi = \mathrm{u}_a(x,y)\mathrm{s} \cdot \xi_\infty = (\mathrm{s}\,\mathrm{u}_a(-x,\overline{y}))^{-1} \cdot \xi_\infty = \xi_{(-x,\ \overline{y})}$ 时则在其他情况下成立。这就证明了该断言。因此，我们得出结论：f 是双射。

注意，引理 3.1 和引理 3.2 蕴含 $\partial_\infty(X) \cong \mathcal{G}(k)/\mathcal{B}(k)$。这证明了第二个结论。□

3.5. 布鲁哈-蒂茨树上的作用。由于 $\mathcal{G}$ 是一个半单群概形，因此布吕阿-蒂茨树 X 存在一种二分划分，并且该划分在 $\mathcal{G}(k)$的作用下保持不变。这意味着 $\mathcal{G}(k)$ 的任何子群都在 X 上作用且不发生反转。特别地，$\mathcal{G}(k)$ 的任何子群都定义一个商图（参见 §3.1）。以下结果描述了 $\Gamma = \mathcal{G}(A)$ 在 X上的作用所定义的商图。

定理 3.4. [2, 定理 2.1 和定理 7。1] 存在一个连通子图 Y属于 $\Gamma\backslash X$，以及测地射线 $\mathfrak{r}(\sigma) \subseteq \Gamma\backslash X$，其初始顶点为 v_σ；对每个 $\sigma \in \Gamma\backslash\partial_\infty(X)$，均有 $\mathrm{V}(Y) \cap \mathrm{V}(\mathfrak{r}(\sigma)) = \{v_\sigma\}$、$\mathrm{E}(Y) \cap \mathrm{E}(\mathfrak{r}(\sigma)) = \varnothing$，并且

$$\Gamma\backslash X = Y \cup \bigsqcup_{\sigma \in \Gamma\backslash\partial_\infty(X)} \mathfrak{r}(\sigma),$$

其中，轨道集合 $\Gamma\backslash\partial_\infty(X)$ 与戴德金环 B 的皮卡群 $\mathrm{Pic}(B)$ 存在双射。此外，当 $\mathbb{F}$ 有限时，Y 也是有限的。

特别是，在下文中，我们用 $\{\mathfrak{r}(\sigma) : \sigma \in \mathrm{Pic}(A)\}$ 表示定理 3.4中定义的测地射线集合。由Γ 对 X 的作用所定义的顶点稳定子可描述如下。

定理 3.5。[2, 引理 4.9 和命题 4。12] 对于每个 $\xi \in \partial_\infty(X)$，都存在一条射线 $\mathfrak{r}_\xi$，使得 $\mathrm{V}(\mathfrak{r}_\xi) = \{v_i(\xi)\}_{i=0}^{\infty}$，其中 $v_i(\xi)$ 和 $v_{i+1}(\xi)$ 是邻点，并且

(a) $\partial_\infty(\mathfrak{r}_\xi) = \xi$，(b) $\mathrm{Stab}_\Gamma(v_i(\xi))$ 严格包含于 $\mathrm{Stab}_\Gamma(v_{i+1}(\xi))$，且 (c) $\mathrm{Stab}_\Gamma(\xi) = \bigcup_{i=0}^{\infty}\mathrm{Stab}_\Gamma(v_i(\xi))$。

对于每个 $\xi \in \partial_\infty(X)$，我们设 $(u,v) = f^{-1}(\xi) \in H(\ell,k) \cup \{\infty\}$。记

$$\Gamma_\xi = g_{u,v}^{-1}\mathcal{B}(k)g_{u,v} \cap \Gamma, \quad U_\xi = g_{u,v}^{-1}\mathcal{U}_a(k)g_{u,v} \cap \Gamma, \quad U_\xi^0 = g_{u,v}^{-1}\mathcal{U}_{2a}(k)g_{u,v} \cap \Gamma.$$

则：

(d) Γ_ξ =稳定子$_\Gamma(\xi)$，

(e) U_ξ 是 Γ_ξ 的正规子群，并且 Γ_ξ/U_ξ 同构于 $\mathbb{F}^*$.的一个子群

此外，对于 $H(u,v) := \mathrm{u}_a^{-1}\left(g_{u,v}U_\xi g_{u,v}^{-1}\right)$ 以及 $H(u,v)^0 := \mathrm{u}_a^{-1}\left(g_{u,v}U_\xi^0 g_{u,v}^{-1}\right)$ 我们有：

(f) $U_\xi \cong H(u,v)$和 $U_\xi^0 \cong H(u,v)^0$，以及 (g) $H(u,v)^0$和 $H(u,v)/H(u,v)^0$，都同构于包含一个非零理想 $I \subseteq B$ 的 ℓ 的非平凡有限生成 A-模。

注意，对于 $\mathfrak{r}(\sigma)$ 中的每条测地射线 $\Gamma\backslash X$，都存在一条子射线 $\mathfrak{r}'(\sigma) \subseteq \mathfrak{r}(\sigma)$，其在 X 中的提升满足定理3.5。于是，当 $\mathbb{F}$ 有限时，如有必要，通过向 Y 附加一个有限图，我们可以假设每条尖点射线 $\mathfrak{r}(\sigma)$ 在 X 中的提升都满足定理 3.5。

推论 3.6. 假设 $\mathbb{F}$ 是有限的。那么，给定 $N \in \mathbb{Z}_{>0}$，存在有限多个顶点（分别为边）$\overline{v}$ 属于 $\Gamma\backslash X$（分别为 $\overline{e}$ 属于 $\Gamma\backslash X$），使得对于每个 $v' \in \Gamma \cdot v$（分别为 $e' \in \Gamma \cdot v$），都有 7稳定子$_\Gamma(v') \leqslant N$（分别为 7稳定子$_\Gamma(e') \leqslant N$）。

证明。令 $\{\mathfrak{r}(\sigma)$：如上所述的 $\sigma \in \mathrm{Pic}(B)\}$。对于每个 $\sigma \in \mathrm{Pic}(B)$，令 $\mathfrak{r}(\sigma)^\circ \subseteq X$ 为满足定理 3.5 的 $\mathfrak{r}(\sigma)$ 的一个提升。由定理 3.5(b) 可知，对于每个 $\sigma \in \mathrm{Pic}(B)$，存在一条射线 $\mathfrak{r}(\sigma)' \subset \mathfrak{r}(\sigma)^\circ$，使得对于所有 $v' \in \mathrm{V}(\mathfrak{r}(\sigma)')$（分别对于 $e' \in \mathrm{E}(\mathfrak{r}(\sigma)')$），都有 7$\mathrm{Stab}_\Gamma(v') > N$（分别有 7$\mathrm{Stab}_\Gamma(e') > N$）。因此，由定理 3.4 中定义的图 Y 的有限性可得所述结果。□

4. Fixed points in the visual limit

本节的主要目标是证明以下结果。

命题 4.1. 假设 $\mathbb{F} = \mathbb{F}_{p^r}$。设 P 是 $\Gamma = \mathcal{G}(A)$ 的一个非平凡有限 p-子群。那么，P 对 $\partial_\infty(X) \cong H(\ell, k) \cup \{\infty\}$ 的自然作用恰有一个不动点。

我们将命题 4.1 的证明分为两部分。第一部分旨在证明不动点的存在性，第二部分则证明其唯一性。

引理 4.2. 与 $\partial_\infty(X)$ 中关于厄米形式而言各向同性的直线集合之间存在 ℓ^3 一一对应，其中该厄米形式由等式 (3)定义。

证明。回忆一下，ℓ^3 中的每条各向同性直线都包含在一个双曲平面中，而该平面存在一个将两条各向同性直线互换的等距变换。于是，Witt 定理表明 $\mathcal{G}(k)$在这类直线集合上传递地作用。此外，不难证明，由 $(1,0,0)$ 生成的直线的稳定子是 $\mathcal{G}(k)$ 中的上三角矩阵群，即 $\mathcal{B}(k)$。因此，ℓ^3 中的各向同性直线集合与$\mathcal{G}(k)/\mathcal{B}(k)$自然对应。由推论 3.3 即得所求结果。□

引理 4.3. 假设 $\mathbb{F} = \mathbb{F}_{p^r}$。设 P 是 $\mathcal{G}(k)$ 的一个 p-子群，且 V 是 ℓ^3的一个P-稳定 $\mathbb{F}$-子空间。那么存在一个被 P 固定的非零向量 $w \in V$。

证明。固定 $v \in V \smallsetminus \{0\}$，并将 W 定义为由 P中 v的所有元素所生成的 $\mathbb{F}$-向量空间。由于 P是有限的，v的 P-轨道也有限。因此，W是有限维的。特别地，由于 $\mathbb{F} = \mathbb{F}_{p^r}$，$W$ 的基数为 p^n，其中 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$。此外，由于 $\mathcal{G}(k) \subseteq \mathrm{SL}_3(\ell)$，群 P通过线性变换作用于 $V \subseteq \ell^3$。于是，$P \cdot W \subseteq W$，这意味着 P作用于 W。由于 $0 \in W$是一个 P-不动点，由简单的轨道计数可知，$\{x \in W : P \cdot x = x\}$ 的基数可被 p整除。特别地，我们得出结论：W中存在一个非零的 P-不动点。□

引理 4.4. 假设 $\mathbb{F} = \mathbb{F}_{p^r}$。设 P是 $\mathcal{G}(k)$的一个非平凡有限 p-子群。那么 P 固定 $\partial_\infty(X)$ 中的一个点。

证明。根据引理 4.2，我们必须证明在ℓ^3 中存在一个非零向量，它被 P 固定，且关于方程（3）中定义的厄米形式是各向同性的。

将引理 4.3 应用于 $V = \ell^3$，可知存在一个被 P固定的 $w \in \ell^3 \smallsetminus \{0\}$。如果 w 是各向同性的，则结论成立。假设 w 是各向异性的。那么，ℓ^3 分解为两个由 $\ell[P]$稳定的模 $V_0 = \langle w \rangle$ 和 $V_1 = \langle w \rangle^\perp$的直和。将引理 4.3 应用于 $V = V_1$，可证明存在一个被 P固定的非零向量 $w_1 \in V_1$。如果 w_1 是各向同性的，则证明完成。如果 w_1 是各向异性的，那么 V_1 分解为两条由 $\ell[P]$稳定的直线的直和。在这种情况下，P 通过对角表示 $\rho : P \to \mathrm{GL}_3(\ell)$作用于 ℓ^3。令 $g \in P \smallsetminus \{e\}$，并如 §3.2 中所述，写作 $\rho(g) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$，其中 $\lambda_1 = \lambda_1(g)$、$\lambda_2 = \lambda_2(g)$、$\lambda_3 = \lambda_3(g) \in \ell^*$。由于$g^{p^t} = e$，对于某个 $t \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$，有 $\mathrm{diag}(\lambda_1^{p^t}, \lambda_2^{p^t}, \lambda_3^{p^t}) = \rho(g)^{p^t} = \mathrm{id}$。因此，得到$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$，因为 $\mathrm{char}(\ell) = p$。由此可推得 ρ 是平凡的。换言之，我们得出结论：ℓ中的任意向量，尤其是任意各向同性直线，均被 P固定。□

命题 *4.1* 的证明。设 $P \subset \Gamma = \mathcal{G}(A)$ 是一个非平凡有限 p-群。由引理 4.4 可知，P在 $\partial_\infty(X)$ 中有一个不动点。因此，只需证明其唯一性。为此，假设 P 固定了两个点 $\xi_1, \xi_2 \in \partial_\infty(X)$。换言之，假设

$$P \subseteq \mathrm{Stab}_{\mathcal{G}(k)}(\xi_1) \cap \mathrm{Stab}_{\mathcal{G}(k)}(\xi_2). \tag{5}$$

由于 $\mathcal{G}(k)$ 在 $\partial_\infty(X)$ 上传递地作用（参见引理 3.1），我们可以写成 $\xi_1 = g_1 \cdot \xi_\infty$ 和$\xi_2 = g_2 \cdot \xi_\infty$，其中 $g_1, g_2 \in \mathcal{G}(k)$。由 Bruhat 分解，我们还可以写成$g_1^{-1} g_2 = b\mathrm{s}^\epsilon b'$，其中 $b, b' \in \mathcal{B}(k)$，且 $\epsilon \in \{0, 1\}$。

首先，假设 $\epsilon = 0$。那么，由引理 3.2 可知 $g_1^{-1} g_2$ 属于稳定子$_{\mathcal{G}(k)}(\xi_\infty)$。因此，我们得出 $\xi_1 = g_1 \cdot \xi_\infty = g_1(g_1^{-1} g_2) \cdot \xi_\infty = g_2 \cdot \xi_\infty = \xi_2$。于是，本情形下结论成立。

现在，假设 $\epsilon = 1$。由等式（5）和引理3.2 可知 $P \subseteq g_1\mathcal{B}(k)g_1^{-1} \cap g_2\mathcal{B}(k)g_2^{-1}$。由于 $g_1^{-1}g_2 = b\mathrm{s}b'$，且 b，$b' \in \mathcal{B}(k)$，我们有

$$(g_1 b)^{-1}P(g_1 b) \subseteq \mathcal{B}(k) \cap \mathrm{s}\mathcal{B}(k)\mathrm{s}^{-1}.$$

设 $h = bg_1$。由于 $\mathcal{B}(k) \cap \mathrm{s}\mathcal{B}(k)\mathrm{s}^{-1} = \mathcal{T}(k)$ 且 $P \subset \mathcal{G}(A)$，我们推得 $h^{-1}Ph$ 包含于

$$\mathcal{T}(k) \cap h\mathcal{G}(A)h^{-1} = \left\{\mathrm{diag}(t, \overline{t}t^{-1}, \overline{t}^{-1}) : t \in \mathrm{R}_{\ell/k}(\mathbb{G}_{m,\ell})\right\} \cap h\mathcal{G}(A)h^{-1}. \tag{6}$$

回想一下，$\mathcal{G}$ 可嵌入 $\mathcal{G} \to \mathrm{R}_{\mathcal{D}/\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_3, \mathcal{D})$。通过这一表示，我们将 $\mathcal{G}(A)$ 中的元素识别为 3×3 系数取自 B 的矩阵（参见§3.2）。于是，任意矩阵 $\mathrm{diag}(t, \overline{t}t^{-1}, \overline{t}^{-1}) \in h\mathcal{G}(A)h^{-1}$ 的特征值 t，$\overline{t}t^{-1}$ 和 $\overline{t}^{-1}$ 都属于 B。由于 $\nu_Q(B \smallsetminus \{0\}) \subseteq \mathbb{Z}_{\leqslant 0}$，我们推得

$$0 \geqslant \nu_Q(t) = \nu_Q(\overline{t}) = -\nu(\overline{t}^{-1}) \geqslant 0.$$

这意味着 t 属于 $\{x \in B : \nu_Q(x) = 0\}$，它是 $\mathbb{F}$ 的一个扩张 $\mathbb{L}$，其次数至多为二。因此，我们得出结论：$P \subset h\left\{\mathrm{diag}(t, 1, t^{-1}) : t \in \mathbb{L}^*\right\}h^{-1}$。由于 $\mathbb{L}$ 的基数为 p^s，对于某个 $s \in \mathbb{Z}$，群 $\mathrm{diag}(t, 1, t^{-1}) : t \in \mathbb{L}^*\} \cong \mathbb{L}^*$ 的基数与 p 互素。因此，得到矛盾。□

5. On the Steinberg module

本节中，我们始终假设 $\mathbb{F} = \mathbb{F}_{p^r}$。根据推论 $\partial_\infty(X)$，我们将球形建筑 $H(\ell$与 $k) \cup \{\infty\}$等同起来。令3.3，$\mathbb{Z}[H(\ell, k) \cup \{\infty\}]$为以 $H(\ell, k) \cup \{\infty\}$为基的自由阿贝尔群，并令 ϵ：$\mathbb{Z}[H(\ell, k) \cup \{\infty\}] \to \mathbb{Z}$ 为由 $\epsilon(z) = 1$定义的增广同态，对所有 $z \in H(\ell, k) \cup \{\infty\}$。

定义 5.1. 我们将每个有限阶元素的阶均为 p 的幂的群称为无 p'-挠元群。

设 G 是 Γ 的无 p'-挠元有限指数子群。我们将由 G 在 X 上的作用诱导的斯坦伯格模 $\mathrm{St} = \mathrm{St}(G, X)$ 定义为 ϵ 的核。注意，St 是一个 $\mathbb{Z}[G]$-模，因为 $G \cdot \mathrm{St} = \mathrm{St}$。因此，我们自然得到以下 $\mathbb{Z}[G]$-模的正合列：

$$0 \to \mathrm{St} \to \mathbb{Z}[H(\ell, k) \cup \{\infty\}] \to \mathbb{Z} \to 0. \tag{7}$$

为了证明定理 2.1，我们引入以下定义。

定义 5.2。我们称 X 的一个顶点（相应地，一条边）是 G-稳定的，如果其稳定子是平凡的。在其他情况下，我们称其为 G-不稳定的。我们将 X_∞ 定义为 X 的由其 G-不稳定顶点和边组成的子图。这个定义是有意义的，因为如果 $e \in \mathrm{E}(X)$ 是 G-不稳定的，那么满足 v 的任意顶点 $o(e) = v$ 或 $t(e) = v$ 也同样是G-不稳定的。注意，根据定理 3.5（b），$X_\infty \neq \varnothing$。

由于 G 保持 X 中顶点的类型，因此存在一个在 G作用下不变的 X 的定向 $\mathrm{E}^+(X)$。

定义 5.3。记

$$S_0 = \mathrm{V}(X) \smallsetminus \mathrm{V}(X_\infty), \text{ and } S_1 = \mathrm{E}^+(X) \smallsetminus \mathrm{E}^+(X_\infty).$$

群 G 在每个 S_i 上自由作用。对于每个指标 $i \in \{0, 1\}$，我们将 L_i 记为$\mathbb{Z}[G]$-模 $L_i = \mathbb{Z}[S_i]$，其在 $\mathbb{Z}[G]$ 上的秩为 $l_i = \sharp(G\backslash S_i)$。

引理 5.4。l_0 和 l_1 是有限的。

证明。假设 $l_0 = \infty$。那么，根据 l_0 的定义，存在一个序列 $\mathfrak{v} = \{v_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathrm{V}(X)$ 使得 $G \cdot v_i \cap G \cdot v_j = \varnothing$，对所有 $i \neq j$ 均成立，且 $\mathrm{Stab}_G(v_i) = \{e\}$，对所有$i \in \mathbb{Z}_{>0}$ 均成立。由于 G 中每个顶点 v_i 的稳定子是平凡的，因此它在 Γ 中的稳定子至多有 $N := [\Gamma : G]$ 个元素。根据推论 Γ，这些顶点在 3.6 所示的作用下模去后构成有限集。于是，存在 $\{v_{i_s}\}_{s=1}^\infty$ 的一个子序列 $\mathfrak{v}$，其元素

属于同一个 Γ-轨道。特别地，对于任意 $s \in \mathbb{Z}_{>0}$，存在 $\gamma_s \in \Gamma$ 使得$v_{i_s} = \gamma_s \cdot v_{i_1}$。由于 $[\Gamma : G] = N < \infty$，存在一对 $(s_1、 s_2)$，满足 $s_1 \neq s_2$，使得 $\gamma_{s_1}\gamma_{s_2}^{-1} \in G$。因此 $G \cdot v_{i_{s_1}} \cap G \cdot v_{i_{s_2}} \neq \varnothing$，这就产生了矛盾。由此我们得出结论： $l_0 < \infty$。类似的论证表明， l_1 也是有限的。□

现在，我们从同调链的角度来解释 $\mathbb{Z}[G]$-模 L_0 和 L_1 。事实上，对每个 $i \in \{0, 1\}$ 都是 L_i ，即 X中 X_∞模去的 i维链群；换言之，它是 X/X_∞的约化链复形。相对同调的正合列给出

$$\{0\} \to H_1(X_\infty) \to H_1(X) \to H_1(X \bmod X_\infty) \to H_0(X_\infty) \to H_0(X) \to H_0(X \bmod X_\infty) \to \{0\}.$$

由于 X 是连通且可缩的，我们得到 $H_0(X) = \mathbb{Z}$ 和 $H_1(X) = \{0\}$。这意味着 $\{0\} \to H_1(X$ 模 $X_\infty) \to H_0(X_\infty) \to \mathbb{Z} \to H_0(X$ 模 $X_\infty) \to \{0\}$ 是正合的。

引理 5.5. $H_0(X$ 模 $X_\infty) = \{0\}$

证明. 由于 $H_0(X_\infty) \to \mathbb{Z}$ 是满射，结论得证。 □

特别是 $\{0\} \to H_1(X$ 模 $X_\infty) \to H_0(X_\infty) \to \mathbb{Z} \to \{0\}$ 是正合的。因此，群 $H_1(X$ 模 $X_\infty)$ 可与增广同态 $H_0(X_\infty) \to \mathbb{Z}$的核等同。下面的引理证明，这个核实际上就是式（7）中定义的斯坦伯格模。

引理 5.6。0 次同调群 $H_0(X_\infty)$ 与 $\mathbb{Z}[H(\ell, k) \cup \{0\}]$ 同构。特别地，我们有 $H_1(X \bmod X_\infty) \cong$St。

令 k_P 为 k 在 P 处的完备化。令 v 为 X_∞ 的一个顶点。那么，根据定义，Stab $_G(v) \neq \{e\}$。 $\mathcal{G}(k)$ 在 X 上的作用自然延拓到 $\mathcal{G}(k_P)$。此外，由于 $\mathbb{F}$ 是有限的，群 Stab $_{\mathcal{G}(k_P)}(v)$ 是 $\mathcal{G}(k_P)$ 的一个紧子群。又由于 $G \subseteq \Gamma$ 是离散的，我们得到 Stab$_G(v)$ 是有限的，因此它是一个挠群。此外，由于G 没有 p'-挠元，我们得出 Stab$_G(v)$ 是 $\mathcal{G}(k)$ 的一个非平凡有限 p-子群。于是，由命题 4.1 可知，这样的群在 $\partial_\infty(X)$ 中恰好固定一个视觉极限 ξ_v。

定义 5.7。 设 $v \in$V(X_∞)。记 $\mathfrak{r}_v$ 为 X 中连接 v且视觉极限为 ξ_v 的唯一射线，视觉极限已在上文引入（参见 §3.1）。

引理 *5.6* 的证明。 该结果是推论 3.3 和以下断言的结果。我们断言映射

$$\Theta : X_\infty \to \partial_\infty(X), \qquad v \mapsto \xi_v, \tag{8}$$

诱导出 Θ' 在 X_∞ 的连通分支集合与 $\partial_\infty(X)$ 之间的双射。为证明这一断言，我们分三步进行。

首先，假设 v 和 v' 属于 X_∞ 的同一个连通分支。我们需要证明 $\xi_v = \xi_{v'}$，也就是说， Θ' 是定义良好的。注意，根据 v 与 v' 之间距离作归纳论证，只需在 v 和 v' 相邻时证明上述断言。在这种情况下，设 X_∞ 中有一条边 e ，连接 v 与 v'。由于 $e \in$ E (X_∞)，我们有稳定子 $_G(e)$ 是 Γ 的一个非平凡 p-子群。因此，根据命题 4.1，稳定子 $_G(e)$ 唯一稳定 $\partial_\infty(X)$ 中的一个点 ξ_e。由于稳定子 $_G(e)$ 包含于稳定子 $_G(v)$ 和稳定子 $_G(v')$ 中，我们推得稳定子 $_G(e)$ 同时稳定 ξ_v 和 $\xi_{v'}$。根据 ξ_e 的唯一性，我们得出 $\xi_v = \xi_e = \xi_{v'}$。

其次，假设 v、 $v' \in X_\infty$ 满足 $\xi_v = \xi_{v'}$。那么，我们断言 v和 v'属于 X_∞的同一个连通分支，即 Θ' 是单射。事实上，若 $\xi_v = \xi_{v'}$，则$\mathfrak{r}_v \cap \mathfrak{r}_{v'}$ 包含一条射线。这意味着 $\mathfrak{r} := \mathfrak{r}_v \cup \mathfrak{r}_{v'}$ 是连通的。现在，由于稳定子$_G(v)$同时稳定 v 和 ξ_v，因此稳定子$_G(v)$ 稳定 $\mathfrak{r}_v$。特别地， $\mathfrak{r}_v \subseteq X_\infty$。

类似地，我们推得 $\mathfrak{r}_{v'} \subseteq X_\infty$。因此，我们得出 $\mathfrak{r}$ 是 X_∞的一个连通子图，其中包含 v 和 v'。于是，第二个断言得证。

最后，我们证明 $\partial_\infty(X)$ 中的每个元素都具有 ξ_v 的形式，其中某个 $v \in \mathrm{V}(X_\infty)$，也就是说 Θ' 是满射。设 ξ 是 X的一个视觉极限。由定理 3.5(c) 可知，存在一条射线 $\mathfrak{r}_\xi \subset X$ 使得

$$\mathrm{Stab}_\Gamma(\xi) = \bigcup \{\mathrm{Stab}_\Gamma(w) : w \in \mathrm{V}(\mathfrak{r}_\xi)\}.$$

因此，将前一个方程的两边与 G 相交，得到

$$\mathrm{Stab}_G(\xi) = \bigcup \{\mathrm{Stab}_G(w) : w \in \mathrm{V}(\mathfrak{r}_\xi)\}. \tag{9}$$

由于 $[\Gamma : G]$ 是有限的，因此 $[\mathrm{Stab}_\Gamma(\xi): \mathrm{Stab}_G(\xi)]$ 是有限的。又因为定理 3.5(b) 表明 $\mathrm{Stab}_\Gamma(\xi)$ 是无限的，所以我们推知 $\mathrm{Stab}_G(\xi)$ 是非平凡的。因此，由方程（9）可知，存在 $v \in \mathrm{V}(\mathfrak{r}_\xi)$，其在 G 中的稳定子是 $\mathrm{Stab}_G(\xi)$的一个非平凡子群。特别地，$v \in \mathrm{V}(X_\infty)$，由此存在唯一的视觉极限 ξ_v，它由 $\mathrm{Stab}_G(v)$固定。此外，由于 $\mathrm{Stab}_G(v) \subseteq \mathrm{Stab}_G(\xi)$，我们得出 $\xi_v = \xi$。□

命题 5.8。存在 $\chi(G) = l_0 - l_1 = \mathrm{rk}_{\mathbb{Z}[G]} L_0 - \mathrm{rk}_{\mathbb{Z}[G]} L_1$。

证明。我们将式（1）中引入的和分成两部分。一部分对应于 X_∞，另一部分对应于 X 模 X_∞。我们先研究后者。事实上，当 v（分别是 e）是不包含在 X_∞中的顶点（分别是边）时，我们有稳定子$_G(v) = \{e\}$（分别有稳定子$_G(v) = \{e\}$）。于是，X 模 X_∞ 对 $\chi(G)$ 的贡献等于

$$\chi(G)|_{X \bmod X_\infty} = \sharp(G\backslash S_0) - \sharp(G\backslash S_1) = l_0 - l_1.$$

因此，为了得出结论，我们只需证明 X_∞对 $\chi(G)$ 的贡献为零。换言之，我们需要证明

$$\sum_{v \in \mathrm{V}(G\backslash X_\infty)} 1/\sharp\mathrm{Stab}_G(v) - \sum_{e \in \mathrm{geom(E)}(G\backslash X_\infty)} 1/\sharp\mathrm{Stab}_G(e) = 0,$$

或者等价地（参见 §3.1），

$$\sum_{v \in \mathrm{V}(G\backslash X_\infty)} 1/\sharp\mathrm{Stab}_G(v) - \sum_{e \in \mathrm{E}^+(G\backslash X_\infty)} 1/\sharp\mathrm{Stab}_G(e) = 0,$$

其中 $\mathrm{E}^+(G\backslash X_\infty) = G\backslash \mathrm{E}^+(X_\infty)$，因为 G 保持了 X上的定向。设 v 是 X_∞中的一个顶点。设 $\mathfrak{r}_v$ 是定义 5.7中引入的射线。设 $e = e_v \in \mathrm{E}^+(X_\infty)$ 是 $\mathfrak{r}_v$ 中包含 v的唯一有向边。由于稳定子$_G(v)$ 稳定了 $\mathfrak{r}_v$，因此得到

$$\mathrm{Stab}_G(v) \subseteq \mathrm{Stab}_G(e_v).$$

此外，由于 $G \subseteq \Gamma$ 不会改变 X中顶点的类型，我们有 $\mathrm{Stab}_G(e_v) \subseteq \mathrm{Stab}_G(v)$，由此可推出 $\mathrm{Stab}_G(v) = \mathrm{Stab}_G(e_v)$。因此，$v$ 和e_v 对 $\chi(G)$ 的贡献相互抵消。于是，为了证明该命题，我们只需证明映射 $\mathrm{V}(X_\infty) \to \mathrm{E}^+(X_\infty)$ 是一个双射，该映射由 $v \mapsto e_v$定义。令 $e \in \mathrm{E}^+(X_\infty)$。由于 $\mathrm{Stab}_G(e)$ 是一个有限的非平凡 p-群，它在 $\partial_\infty(X)$中固定一个视觉极限 ξ_e。设 $\mathfrak{r}_e$ 是 X 中连接 e与 ξ_e 且包含 e的最小射线。那么，$\mathfrak{r}_e$的起点 v_e 是 $\{o(e), t(e)\}$ 中距离 ξ_e“最远”的顶点。不难验证，由 $e \mapsto v_e$ 定义的映射 $\mathrm{E}^+(X_\infty) \to \mathrm{V}(X_\infty)$ 是由 $v \mapsto e_v$定义的映射的逆映射。证明完毕。□

命题的证明 *2.1*。一方面，根据相对同调的定义，我们得到正合列

$$\{0\} \to H_1(X \bmod X_\infty) \to C_1(X \bmod X_\infty) \\ \to C_0(X \bmod X_\infty) \to H_0(X \bmod X_\infty) \to \{0\}.$$

另一方面，由引理 5.5 和 5.6 可知 $H_0(X \text{ 模 } X_\infty) = \{0\}$ 且$H_1(X \text{ 模 } X_\infty) \cong \mathrm{St}$。由于定义 5.3 表明 $L_i = C_i(X \text{ 模 } X_\infty)$，对所有$i \in \{0, 1\}$我们由前面的正合列推出

$$\{0\} \to \mathrm{St} \to L_1 \to L_0 \to \{0\}, \tag{10}$$

也是正合的。此外，由于 L_0 是自由的，正合列（10）分裂。这意味着 $L_1 \cong \mathrm{St} \oplus L_0$。因此，由于命题 5.8 表明 $\mathrm{rk}_{\mathbb{Z}[G]} L_1 - \mathrm{rk}_{\mathbb{Z}[G]} L_0 = -\chi(G)$，结论随之成立。□

6. Maximal unipotent subgroups

设 $\Gamma = \mathcal{G}(A)$，并设 G 为 Γ的有限指数子群。若$\mathcal{G}(k)$ 的一个子群仅含幺幂元，则称其为幺幂子群。上述定义是有意义的，因为 $\mathcal{G}(k)$ 在矩阵群 $\mathrm{SL}_3(\ell)$中有一个表示。本节的主要目标是描述 G中极大幺幂子群的共轭类。为此，我们不假设 $\mathbb{F}$ 是有限的，也不假设 G 不含p'-挠元。

6.1. 定理 **2.2**的证明。 为了证明定理 2.2 我们需要做一些准备工作，并将其分为四个引理。

引理 6.1. 假设 $\mathbb{F}$ 是完美的。设 U 是 $\mathcal{G}(k)$的一个幺幂子群。那么，存在 $(u, v) \in H(\ell, k) \cup \{\infty\}$ 使得 $U \subseteq g_u^{-1}{}_{,v}\mathcal{U}_a(k) g_{u,v}$。

证明。回忆一下，由于 k 是某条曲线的函数域，k 是$\mathbb{F}(u)$的有限扩张，其中 $u \in k$ 在 $\mathbb{F}$ 上是超越的。记 $k = \mathbb{F}(u, \theta_1, \cdots, \theta_r)$，其中$\theta_i$ 在 $\mathbb{F}(u)$上是代数的。由于 $\mathbb{F}$ 是完美的，我们有 $k^p = \mathbb{F}(u^p, \theta_1^p, \cdots, \theta_r^p)$。设 $f_i(T)$（分别为 $g_i(T)$）是 θ_i（分别为 θ_i^p）在 $L_i := \mathbb{F}(u, \theta_1, \cdots, \theta_{i-1})$中的不可约多项式（分别是在 $F_i := \mathbb{F}(u^p, \theta_1^p, \cdots, \theta_{i-1}^p)$中）。一方面，由于 $0 = g_i(\theta_i^p) = (\tilde{g}_i(\theta_i))^p$，对于某个与 g_i次数相同的 $\tilde{g}_i \in L_i[T]$，我们有 $\deg(g_i) \geqslant \deg(f_i)$。另一方面，由于 $0 = f_i(\theta_i)^p = f_i(\theta_i^p)$，对于与 f_i次数相同的 $f_i \in F_i[T]$，我们有 $\deg(g_i) \leqslant \deg(f_i)$。因此

$$[\mathbb{F}(u, \theta_1, \cdots, \theta_r) : \mathbb{F}(u)] = \prod_{i=1}^{r} \deg(f_i) = \prod_{i=1}^{r} \deg(g_i) = [\mathbb{F}(u^p, \theta_1^p, \cdots, \theta_r^p) : \mathbb{F}(u^p)],$$

由此得 $[k : k^p] = [\mathbb{F}(u) : \mathbb{F}(u^p)] = p$。

设 U 是 $\mathcal{G}(k)$的一个幺幂子群。由于 $\mathcal{G}$ 是一个半单、单连通的 k-群，且 $[k : k^p] \leqslant p$，由 [6, 定理 2] 可知，U 可 k-嵌入到 $\mathcal{G}$ 的某个 k-抛物子群 $\mathcal{P}$ 的幺幂根 $\mathcal{R}_u(\mathcal{P})$ 中。特别地，U 包含于 $\mathcal{R}_u(\mathcal{P})(k)$。此外，由于 $\mathcal{R}_u(\mathcal{P})$ 包含于 $\mathcal{G}$ 的某个 Borel 子群的幺幂根中，且任意两个 Borel 子群都属于同一个 $\mathcal{G}(k)$-共轭类，我们得到 $U \subseteq \tau^{-1}\mathcal{U}_a(k)\tau$，其中 $\tau \in \mathcal{G}(k)$ 取某个值。

由 Bruhat 分解，可写为 $\tau = b\mathrm{s}^\epsilon \mathrm{u}_a(u, v)$，其中 $b \in \mathcal{B}(k)$ 且 $\epsilon \in \{0, 1\}$。由于 $\mathcal{B}(k)$ 规范化 $\mathcal{U}_a(k)$，若 $\epsilon = 0$，则有 $\tau^{-1}\mathcal{U}_a(k)\tau = \mathcal{U}_a(k)$；若 $\epsilon = 1$，则有 $\tau^{-1}\mathcal{U}_a(k)\tau = (\mathrm{su}_a(u, v))^{-1}\mathcal{U}_a(k)(\mathrm{su}_a(u, v))$。因此，若记 $g_{u,v} =$，则当 $\epsilon = 0$时有 id，而当 $\epsilon = 1$时有 $g_{u,v} = \mathrm{su}_a(u, v)$。于是 $\tau^{-1}\mathcal{U}_a(k)\tau = g_u^{-1}{}_{,v}\mathcal{U}_a(k) g_{u,v}$。因此我们得出，$U$ 包含于 $g_u^{-1}{}_{,v}\mathcal{U}_a(k) g_{u,v}$，其中 $(u, v) \in H(\ell, k) \cup \{\infty\}$ 取某些值。□

引理 6.2. 对于每个 $(u、 v) \in H(\ell、 k) \cup \{\infty\}$，以及每个在 Γ 中具有有限指数的 G，令

$$\tilde{G}_{u,v} := (g_{u,v}^{-1}\mathcal{U}_a(k) g_{u,v} \cap G)/(g_{u,v}^{-1}\mathcal{U}_{2a}(k) g_{u,v} \cap G).$$

那么，$\tilde{G}_{u,\ v}$ 是 $\tilde{\Gamma}_{u,\ v}$ 的有限指数子群。特别地，$(g_u^{-1}{}_{,\ v}\mathcal{U}_a(k) g_{u,\ v} \cap G) \setminus (g_u^{-1}{}_{,\ v}\mathcal{U}_{2a}(k) g_{u,\ v} \cap G)$ 非空。

证明。注意，$Q_{u,\ v} := (g_u^{-1}{}_{,\ v}\mathcal{U}_a(k) g_{u,\ v} \cap \Gamma)/(g_{u,v}^{-1}\mathcal{U}_a(k) g_{u,v} \cap G)$ 嵌入集合Γ/G中。因此，$Q_{u,\ v}$ 是有限的。现在，令 $f : g_u^{-1}{}_{,\ v}\mathcal{U}_a(k) g_{u,\ v} \cap \Gamma \to \tilde{\Gamma}_{u,\ v}$ 为典范

投影。由于$f(g_u^{-1},{}_v\mathcal{U}_a(k)g_{u,\ v}\cap G)=\tilde{G}_{u,\ v}$，存在一个从~ ~$Q_{u,\ v}$到$\Gamma_{u,\ v}/G_{u,v}$的满射。因此，第一个结论得证。

注意，若$(g_u^{-1},{}_v\mathcal{U}_a(k)g_{u,v}\cap G)\setminus(g_u^{-1},{}_v\mathcal{U}_{2a}(k)g_{u,v}\cap G)=\varnothing$，则$\tilde{G}_{u,v}=\{\mathrm{id}\}$。这意味着$\tilde{\Gamma}_{u,v}$是有限的。但是，$\tilde{\Gamma}_{u,v}$由$H(u,v)/H(u,v)^0$，参数化，而后者根据定理3.5(g)与$\ell$的一个包含非零理想$I\subseteq B$的$A$-子模同构。特别地，$\Gamma_{u,v}$是无限的。□

引理 6.3. 设$g\in\mathcal{G}(k)$满足$g\mathfrak{u}_a(x,y)g^{-1}\in\mathcal{U}_a$，其中某个$\mathfrak{u}_a(x,y)\in\mathcal{U}_a(k)\setminus\mathcal{U}_{2a}(k)$。则$g\in\mathcal{B}(k)$。

证明。设$g\in\mathcal{G}(k)$满足$g\mathfrak{u}_a(x,y)g^{-1}\in\mathcal{U}_a(k)$，其中某个$\mathfrak{u}_a(x,y)\in\mathcal{U}_a(k)\setminus\mathcal{U}_{2a}(k)$。则$(x,y)\in H(\ell,k)$满足$x\neq0$。由于$\mathcal{G}(k)$嵌入$\mathrm{SL}_3(\ell)$，我们可以写成$g=(a_{i,\ j})_{i,\ j=1}^3\in\mathrm{SL}_3(\ell)$。此外，由于$g\mathfrak{u}_a(x,y)g^{-1}\in\mathcal{U}_a(k)$，存在$(z,w)\in H(\ell,k)$使得$g\mathfrak{u}_a(x,y)g^{-1}=\mathfrak{u}_a(z,w)$。换言之，我们有

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-\overline{x}&y\\0&1&x\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-\overline{z}&w\\0&1&z\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}.$$

那么，矩阵

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}-\overline{x}a_{11}&a_{13}+xa_{12}+ya_{11}\\a_{21}&a_{22}-\overline{x}a_{21}&a_{23}+xa_{22}+ya_{21}\\a_{31}&a_{32}-\overline{x}a_{31}&a_{33}+xa_{32}+ya_{31}\end{pmatrix}$$

等于

$$\begin{pmatrix}a_{11}-\overline{z}a_{21}+wa_{31}&a_{12}-\overline{z}a_{22}+wa_{32}&a_{13}-\overline{z}a_{23}+wa_{33}\\a_{21}+za_{31}&a_{22}+za_{32}&a_{23}+za_{33}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}.$$

因此，若我们分析前述矩阵最后一行中的坐标，由于$x\neq0$，可推出$a_{31}=0$，进而得到$a_{32}=0$。注意，若$z=0$（从而$w\neq0$），则通过比较前述矩阵的第二列，可得$a_{11}=a_{21}=0$，这与g可逆这一事实矛盾。因此，我们可以假设$z\neq0$。进而，通过比较前述矩阵的第一列，可推出$a_{21}=0$。由此g是一个上三角矩阵，因此我们得出$g\in\mathcal{B}(k)$。□

引理 6.4. 设$(u_1、\ v_1)、\ (u_2、\ v_2)$是$H(\ell、\ k)\cup\{\infty\}$中的两对。那么，$g_{u_1}^{-1},{}_{v_1}\mathcal{U}_a(k)g_{u_1,v_1}\cap G$包含于$g_{u_2}^{-1},{}_{v_2}\mathcal{U}_a(k)g_{u_2,\ v_2}\cap G$，当且仅当$g_{u_2,\ v_2}g_{u_1}^{-1},{}_{v_1}$属于$\mathcal{B}(k)$。此外，在这两种情况下，$g_{u_1}^{-1},{}_{v_1}\mathcal{U}_a(k)g_{u_1,\ v_1}\cap G$等于$g_{u_2}^{-1},{}_{v_2}\mathcal{U}_a(k)g_{u_2,\ v_2}\cap G$。

证明。由于$\mathcal{B}(k)$正规化$\mathcal{U}_a(k)$，如果$g_{u_2、\ v_2}g_{u_1}^{-1、\ v_1}$属于$\mathcal{B}(k)$，那么群$g_{u_1}^{-1、}{}_{v_1}\mathcal{U}_a(k)g_{u_1、\ v_1}\cap G$等于$g_{u_2}^{-1、}{}_{v_2}\mathcal{U}_a(k)g_{u_2、\ v_2}\cap G$。现在我们证明逆命题。事实上，由引理6.2可知，存在$\rho:=g_{u_1}^{-1、}{}_{v_1}\mathfrak{u}_a(x、\ y)g_{u_1、\ v_1}$属于$(g_{u_1}^{-1、}{}_{v_1}\mathcal{U}_a(k)g_{u_1、\ v_1}\cap G)\setminus(g_{u_1}^{-1、}{}_{v_1}\mathcal{U}_{2a}(k)g_{u_1、\ v_1}\cap G)$。于是，如果$g_{u_1}^{-1、}{}_{v_1}\mathcal{U}_a(k)g_{u_1、\ v_1}\cap G$包含于$g_{u_2}^{-1、}{}_{v_2}\mathcal{U}_a(k)g_{u_2、\ v_2}\cap G$，则元素$\rho$属于$g_{u_2}^{-1、}{}_{v_2}\mathcal{U}_a(k)g_{u_2、\ v_2}\cap G$。这意味着元素$g:=g_{u_2、\ v_2}g_{u_1}^{-1、}{}_{v_1}$满足$g\mathfrak{u}_a(x、\ y)g^{-1}\in\mathcal{U}_a(k)$，其中$\mathfrak{u}_a(x、\ y)\in\mathcal{U}_a(k)\setminus\mathcal{U}_{2a}(k)$。因此，根据引理 6.3，有$g\in\mathcal{B}(k)$。□

定理 2.2 的证明。首先，我们验证每个$\mathcal{U}(G_\sigma)$都是极大的幺幂子群。为此，假设$\mathcal{U}(G_\sigma)$包含于G的某个幺幂子群U中。由引理 6.1 可知，U包含于$g_u^{-1},{}_v\mathcal{U}_a(k)g_{u,\ v}\cap G$中，其中$(u、\ v)\in H(\ell、\ k)\cup\{\infty\}$。此外，根据$\mathcal{U}(G_\sigma)$的定义，$\mathcal{U}(G_\sigma)=g_{u_1}^{-1},{}_{v_1}\mathcal{U}_a(k)g_{u_1,v_1}\cap G$，其中$(u_1、\ v_1)\in H(\ell、\ k)\cup\{\infty\}$。于是，我们有

$$g_{u_1,v_1}^{-1}\mathcal{U}_a(k)g_{u_1,v_1}\cap G\subseteq U\subseteq g_{u,v}^{-1}\mathcal{U}_a(k)g_{u,v}\cap G.$$

因此$g_u^{-1},{}_v\mathcal{U}_a(k)g_{u,v}=g_{u_1}^{-1},{}_{v_1}\mathcal{U}_a(k)g_{u_1,v_1}$，根据引理 6.4。由此，我们得出

$$g_{u_1,v_1}^{-1}\mathcal{U}_a(k)g_{u_1,v_1}\cap G=U=g_{u,v}^{-1}\mathcal{U}_a(k)g_{u,v}\cap G,$$

由此可得$\mathcal{U}(G_\sigma)$的极大性。

我们能够证明命题 (1)。事实上，由于 $\mathcal{U}(G_\sigma) \subset G_\sigma$ 是幺幂的，它包含于群 $\mathcal{U}_\sigma$ 中，而该群包含 G_σ中的所有幺幂元素。但是，由于 $\mathcal{U}(G_\sigma)$是极大的，我们有 $\mathcal{U}(G_\sigma) = \mathcal{U}_\sigma$。令 $\xi = \xi_\sigma \in \partial_\infty(X)$ 为 $\sigma \in \Sigma_0$的一个代表元。那么， ξ_σ 在 G 中的稳定子 $G_\sigma = G_{\xi_\sigma}$ 是 G 与 $\Gamma_\xi = \Gamma_{\xi_\sigma}$ 在 Γ中的稳定子 ξ_σ 的交。因此，我们有一个单射态射 $G_\sigma/\mathcal{U}(G_\sigma) \to \Gamma_\sigma/\mathcal{U}(\Gamma_\sigma)$。由定义可知 $\mathcal{U}(\Gamma_\sigma) = U_{\xi_\sigma}$，由定理 3.5(e) 可推出 $G_\sigma/\mathcal{U}(G_\sigma)$同构于 $\mathbb{F}^*$的一个子群。

现在，我们证明陈述 (2)。首先，设 U 是G 中的一个极大幺幂子群。由引理 6.1 可知，对于某些 $(u、v) \in H(\ell、k) \cup \{\infty\}$， U 包含于 $g_u^{-1}、{}_v\mathcal{U}_a(k)g_u、{}_v \cap G$ 中。由于 U 是极大的，我们得到 $U = g_u^{-1}、{}_v\mathcal{U}_a(k)g_u、{}_v \cap G$。设 $\xi = g_u^{-1}、{}_v \cdot \xi_\infty$ 是 $\partial_\infty(X)$ 中的一个视觉极限。于是，根据定理 2.2 中集合 $\{\xi_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma_0}$ 的定义，存在 $g \in G$ 和 $\sigma \in \Sigma_0$ ，使得 $\xi = g \cdot \xi_\sigma$。因此，$U = g\mathcal{U}(G_\sigma)g^{-1}$。于是， U 和 $\mathcal{U}(G_\sigma)$ 属于同一个 G-共轭类。

其次，我们证明，给定两个群 $\mathcal{U}(G_{\sigma_1})$和 $\mathcal{U}(G_{\sigma_2})$，满足 $\sigma_1 \neq \sigma_2$，它们并非 G-共轭。假设存在 $g \in G$使得 $g\mathcal{U}(G_{\sigma_1})g^{-1} = \mathcal{U}(G_{\sigma_2})$。对于每个 $i \in \{1, 2\}$，令 $\xi_{\sigma_i} \in \partial_\infty(X)$ 为对应于 $\sigma_i、(u_i、v_i) = f^{-1}(\xi_{\sigma_i}) \in H(\ell、k) \cup \{\infty\}$以及 $g_{u_i、v_i} \in \mathcal{G}(k)$ 的视觉极限，使得 $\xi_{\sigma_i} = g_{u_i}^{-1}、{}_{v_i} \cdot \xi_\infty$（参见推论 3.3）。记 $\xi = g \cdot \xi_{\sigma_1} \in \partial_\infty(X)$。令 $(u、v) \in H(\ell、k) \cup \{\infty\}$ 满足 $\xi = g_u^{-1}、{}_v \cdot \xi_\infty$，并记 $\mathcal{U}(\xi) = g_u^{-1}、{}_v\mathcal{U}_a(k)g_u、{}_v \cap G$。由于 $gg_{u_1、v_1} \cdot \xi_\infty = g \cdot \xi_{\sigma_1} = \xi = g_u^{-1}、{}_v \cdot \xi_\infty$，由引理 3.2可得 $g_{u、v}gg_{u_1}^{-1}、{}_{v_1} \in \mathcal{B}(k)$。此外，由于 $\mathcal{B}(k)$ 稳定 $\mathcal{U}_a(k)$，我们有

$$\mathcal{U}(\xi) = g\mathcal{U}(G_{\sigma_1})g^{-1} = \mathcal{U}(G_{\sigma_2}).$$

换言之，我们有

$$g_{u,v}^{-1}\mathcal{U}_a(k)g_{u,v} \cap G = g_{u_2,v_2}^{-1}\mathcal{U}_a(k)g_{u_2,v_2} \cap G.$$

因此，由引理 6.4 可得 $g_{u_2,\ {}_{v_2}g_u^{-1},\ {}_v} \in \mathcal{B}(k)$。接着，由引理 3.2可推得 $\xi = g_u^{-1},\ {}_v \cdot \xi_\infty = g_{u_2}^{-1},\ {}_{v_2} \cdot \xi_\infty = \xi_{\sigma_2}$。换言之，我们得出 $\xi_{\sigma_2} = g \cdot \xi_{\sigma_1}$，这与集合 $\{G_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma_0}$ 的定义矛盾。因此，命题（2）成立。

最后，为证明命题（3），我们假设 $\mathbb{F} = \mathbb{F}_{p^r}$ 和 G 不含 p'-挠元。设 $g \in G_\sigma$。由于 $\mathbb{F}^*$ 的阶为 $p^r - 1$，我们有 $g^{p^r-1} \in \mathcal{U}(G_\sigma)$。换言之，对于某一对 $(x、y) \in H(\ell、k)$，有 $g^{p^r-1} = g_u^{-1}、{}_v\mathbf{u}_a(x、y)g_u、{}_v$。因此，元素$\tau := g_u、{}_vg^{p^r-1}g_u^{-1}、{}_v$ 满足 $\tau^p = \mathbf{u}_a(px、z) = \mathbf{u}_a(0、z)$，其中 $z \in H^0(\ell、k)$。这意味着 $\tau^{p^2} = \mathbf{u}_a(0、z)^p = \mathbf{u}_a(0、pz) = \mathbf{id}$。特别地， g 的阶 $|g|$ 整除 $p^2(p^r - 1)$。由于 G 中的扭元的阶是 p 的幂，我们推得 $|g|$ 整除 p^2。取 $a、b \in \mathbb{Z}$ 使得 $ap^2 + b(p^r - 1) = 1$。于是 $g = (g^{p^2})^a(g^{p^r-1})^b = (g^{p^r-1})^b$ 属于$\mathcal{U}(G_\sigma)$，结论由此得证。□

6.2. 关于若干推论。 以下结果是定理2.2的一些有趣推论。

推论 6.5. 假设 $\mathbb{F}$ 是完美的。那么， Γ 中极大幺幂子群的共轭类与 $\mathrm{Pic}(B)$ 之间存在一个双射。

证明。 由定理 2.2 可知， Γ 中的极大幺幂子群的共轭类与 Γ 在 $\partial_\infty(X)$ 上的轨道之间存在一个双射。于是，结论直接由定理 3.4 得出。 □

推论 6.6. 假设 $\mathbb{F}$ 是完美的。那么，函数环 B 是主理想整环，当且仅当 Γ 的每个幺幂子群都包含于 $\mathcal{U}_a(k) \cap \Gamma$ 的某个 Γ-共轭子群中。

证明。 由于 B 是戴德金整环，$\mathrm{Pic}(B)$ 当且仅当 B 是主理想整环时才是平凡的。于是，定理 3.4 表明，$\mathrm{Pic}(B)$ 当且仅当 Γ 传递地作用于 $\partial_\infty(X)$时才是平凡的。因此，由定理 2.2 可知，$\mathrm{Pic}(B)$ 恰在 Γ 具有唯一一个极大幺幂子群共轭类时才是平凡的。此外，若 B 是主理想，则我们可以选择 ξ_∞ 作为 Γ-轨道在 $\partial_\infty(X)$中的代表。于是，

定理 2.2 意味着 $\mathcal{U}_a(k)\cap\Gamma$ 代表了 Γ中极大幺幂子群的唯一共轭类。因此，由于根据 6.1，中任意幺幂子群都包含于一个极大幺幂子群中，结论得证。□

推论 6.7. 假设 $\mathbb{F}$ 是有限的。那么 G 至多有 $[\Gamma:\ G]\cdot\sharp\mathrm{Pic}(B)<\infty$个极大幺幂子群的共轭类。

证明。不难看出，G在 $\partial_\infty(X)$ 中的轨道数不超过 Γ在 $\partial_\infty(X)$ 中的轨道数乘以指数 $[\Gamma:\ G]$。因此，G 至多有 $[\Gamma:\ G]\cdot\sharp\mathrm{Pic}(B)$ 个极大幺幂子群的共轭类，这由定理 3.4得出。由于 $\mathbb{F}$是有限的，根据 Weyl 定理（参见 [12, 第二章，§2。2]），Pic (B) 是有限的。□

下一个结果由 G 的描述推出：它是利用 Bass-Serre 理论（参见 [12, 第一章，§ 5] 和 [12,第二章，§2.5]）从 $G\backslash X$ 构造出的 amalgamated 自由积。

推论 6.8。设 $\mathbb{F}=\mathbb{F}_{p^r}$。令 G 为 Γ 的一个不含 p'-挠元的有限指数子群。那么，G 是有限生成群 K 与其极大幺幂子群的一个代表系 $\{G_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma_0}$ 的自由积，并沿着某些群 K_σ，根据某些单射 $K_\sigma\hookrightarrow G_\sigma$ 和 $K_\sigma\hookrightarrow K$ 进行 amalgamation。

7. Relative Homology

在本节中，我们始终假设 $\mathbb{F}=\mathbb{F}_{p^r}$。首先回顾关于非空子群族 $\{H_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ 的群 H 的相对同调定义。事实上，令 R 为增广 $\mathbb{Z}$-态射 $\coprod_{\sigma\in\Sigma}\mathbb{Z}[H/H_\sigma]\to\mathbb{Z},$的核，该态射由 $\varepsilon(\delta)=1$定义，对所有 $\delta\in H/H_\sigma$ 和所有 $\sigma\in\Sigma$均成立。于是，我们得到正合列：

$$0\to R\to\coprod_{\sigma\in\Sigma}\mathbb{Z}[H/H_\sigma]\to\mathbb{Z}\to 0. \tag{11}$$

设 M 是一个 H-模，对于每个 $i\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1}$，记作

$$H_i(H\bmod H_\sigma,M):=\mathrm{Tor}_{i-1}^{\mathbb{Z}[H]}(R,M)=H_{i-1}(H,R\otimes M).$$

这些群称为 H 关于子群族 $\{H_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ 的 M 值同调群。

定理 7.1. 设 G 是 Γ的有限指数子群，且 p'-挠元。则，G 模掉由定理 $\{G_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma_0}$ 2.2定义的幺幂子群族 $\{G_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma_0}$ 的相对同调群满足：

(a) $H_i(G\ mod\ G_\sigma,M)=\{0\}$, *for all* $i\neq 1$, *and*
(b) If M *es finitely generated over* $\mathbb{Z}$, *then* $H_1(G\ mod\ G_\sigma,M)\cong M^{-\chi(G)}$.

证明。由轨道-稳定子关系可得

$$\mathbb{Z}[H(\ell,k)\cup\{\infty\}]=\coprod_{\sigma\in\Sigma_0}\mathbb{Z}[G/G_\sigma].$$

那么，方程（ R 11）中定义的模正是方程（7）中定义的斯坦伯格模。因此，对于每个 G-模 M，有

$$H_i(G\bmod G_\sigma,M)=\mathrm{Tor}_{i-1}^{\mathbb{Z}[G]}(\mathrm{St},M). \tag{12}$$

现在回想一下，对于所有投射模 P，我们有 $\mathrm{Tor}_{i-1}(P,\ M)=0$，对于所有 $i\neq 1$。于是，断言（a）由定理 2.1得出。现在，我们只需证明（b）。为此，回想一下

$$H_1(G\bmod G_\sigma,M)=\mathrm{Tor}_0^{\mathbb{Z}[G]}(\mathrm{St},M)=\mathrm{St}\otimes_{\mathbb{Z}[G]}M.$$

于是，由定理 2.1 可知

$$H_1(G\bmod G_\sigma,M)\oplus M^{l_0}\cong M^{l_1},\ \text{with}\ \chi(G)=l_0-l_1.$$

由于 M 是有限生成的，根据不变因子论证可知，$H_1(G$模 $G_\sigma, M)$同构于 $M^{l_1-l_0}=M^{-\chi(G)}$。□

推论 7.2. 对每个 $i\in\mathbb{Z}_{>1}$，我们有 $H_i(G、M)\cong\coprod_{\sigma\in\Sigma_0}H_i(G_\sigma、M)$。对于 $i=1$，以下序列是正合的：

$$0\to\coprod_{\sigma\in\Sigma_0}H_1(G_\sigma,M)\to H_1(G,M)\to H_1(G\ mod\ G_\sigma,M),$$

当 M 是 $\mathbb{Z}$-有限生成时，$H_1(G$ 模 $G_\sigma、M)$ 可以替换为 $M^{-\chi(G)}$。证明. Tor 正合序列与 Shapiro 引理给出正合序列：

$$\cdots\to H_{i+1}(G\bmod G_\sigma,M)\to\coprod_{\sigma\in\Sigma_0}H_i(G_\sigma,M)\to H_i(G,M)\to\cdots.$$

然后，结论由定理 7.1 得出。 □

对于任意群 F，我们将其最大的阿贝尔商群记为 F^{ab}。如引理 4.3 所示，给定 $(u、v)\in H(\ell、k)\cup\{\infty\}$，记 $\tilde{G}_{u、v}=(g_u^{-1}{}_{、v}\mathcal{U}_a(k)g_{u、v}\cap G)/(g_{u,v}^{-1}\mathcal{U}_{2a}(k)g_{u,v}\cap G)$。如定理 2.2 所示，令 $\{\xi_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma_0}$ 为代表 $\partial_\infty(X)$ 中 G 轨道的一个集合。对于每个 $\sigma\in\Sigma_0$，令 $(u、v)=f^{-1}(\xi_\sigma)\in H(\ell、k)\cup\{\infty\}$。略去记号上的区别，我们用 Σ_0 表示上述定义的配对 $(u、v)$ 的计数集合。

命题 7.3. 设 Tor $\left(G^{\mathrm{ab}}\right)$ 为 G^{ab}的挠子群。则

(a) Tor$\left(G^{\mathrm{ab}}\right)$ 同构于$\coprod_{(u、v)\in\Sigma_0}\tilde{G}_{u、v}$；(b) $G^{\mathrm{ab}}/$Tor$\left(G^{\mathrm{ab}}\right)$ 的 $\mathbb{Z}$-秩小于或等于 $-\chi(G)$；(c) 存在一族$\{I_{u、v}:\ (u,v)\in\Sigma_0\}$ 非平凡的 B-分式理想，以及 Tor $\left(G^{\mathrm{ab}}\right)$ 与$\coprod_{(u、v)\in\Sigma_0}I_{u、v}$的一个有限指数子群之间的自然同构。

特别地，G^{ab} 不是有限生成的。

证明。 由推论 7.2 可知 $0\to\coprod_{\sigma\in\Sigma_0}G_\sigma^{\mathrm{ab}}\to G^{\mathrm{ab}}\to\mathbb{Z}^{-\chi(G)}$ 是正合的。由于 G_σ 中的每个元素都被 p^2 消去，且 $\mathbb{Z}^{-\chi(G)}$ 是无挠的，因此有 Tor $\left(G^{\mathrm{ab}}\right)\cong\coprod_{\sigma\in\Sigma_0}G_\sigma^{\mathrm{ab}}$且 rk $_{\mathbb{Z}}\left(G^{\mathrm{ab}}/\mathrm{Tor}\left(G^{\mathrm{ab}}\right)\right)\leqslant-\chi(G)$。因此，结论 (b) 得证。

回忆一下，对于任意 σ，存在 $(u,v)\in H(\ell,k)\cup\{\infty\}$，使得 $G_\sigma=g_u^{-1}{}_{,v}\mathcal{U}_a(k)g_{u,v}\cap G$。由于对于任意 $(u,v),(x,y)\in H(\ell,k)$，我们有 $[\mathfrak{u}_a(u,v),\mathfrak{u}_a(x,y)]=\mathfrak{u}_a(0,u\overline{x}-\overline{u}x)$，因此交换子 $[G_\sigma,G_\sigma]$包含于 $g_u^{-1}{}_{,v}\mathcal{U}_{2a}(k)g_{u,v}\cap G$。此外，由于 $(g_u^{-1}{}_{,v}\mathcal{U}_a(k)g_{u,v}\cap G)/(g_{u,v}^{-1}\mathcal{U}_{2a}(k)g_{u,v}\cap G)$ 是阿贝尔群（因为它同构于 ℓ 的一个子群），我们得出 $[G_\sigma,G_\sigma]=g_u^{-1}{}_{,v}\mathcal{U}_{2a}(k)g_{u,v}\cap G$。换言之，$G_\sigma^{\mathrm{ab}}=(g_u^{-1}{}_{,v}\mathcal{U}_a(k)g_{u,v}\cap G)/(g_{u,v}^{-1}\mathcal{U}_{2a}(k)g_{u,v}\cap G)=\tilde{G}_{u,v}$。由此可得陈述 (a)。

现在，由引理 6.2 可知，$\tilde{G}_{u,v}$ 是$\Gamma_{u,v}$的有限指数子群。注意，作为一个群，$\tilde{\Gamma}_{u,v}$与 $H(u,v)/H(u,v)^0$同构。根据定理 3.5(g)，由于 $H(u,v)/H(u,v)^0$是 ℓ 上的非平凡有限生成 A-模，我们可以写作$H(u,v)/H(u,v)^0=Ax_1+\cdots Ax_r,$，其中 $x_1,\cdots,x_r\in\ell$。记 $x_i=b_i/b_i'$，其中 $b_i,b_i'\in B$且 $b=\prod_{i=1}^r b_i$。那么 $H(u,v)/H(u,v)^0\subseteq b^{-1}B$。令$I_{u,v}=b^{-1}B$。根据定理 3.5(g)，回顾可知 $H(u,v)/H(u,v)^0$ 包含一个 B-理想。因此，$H(u,v)/H(u,v)^0$在$I_{u,v}$中具有有限指数。于是，$\tilde{G}_{u,v}$与$I_{u,v}$的一个有限指数子群同构。因此，陈述 (c) 成立。

最后，假设 G^{ab}是有限生成的。由于 $\sharp(\Sigma_0)\leqslant[\Gamma:G]\cdot\sharp(\mathrm{Pic}(B))<\infty$，这意味着 Tor$\left(G^{\mathrm{ab}}\right)$ 是有限的，这与陈述 (c) 矛盾。□

注记 7.4. 注意，由陈述 (c) 的证明可知，每个阿贝尔群 $G_{u,v}$ 都同构于一个可数维的 $\mathbb{F}_p$-向量空间。因此，陈述 (a) 表明 Tor $\left(G^{\mathrm{ab}}\right)$ 同构于一个可数维的 $\mathbb{F}_p$-向量空间。不过，陈述 (c) 更强，因为它给出了一个显式同构。

例 7.5. 设 J是 B的一个理想，且 $\Gamma_J = \Gamma \cap \ker\left(\mathrm{SL}_3(B) \to \mathrm{SL}_3(B/J)\right)$。这是 Γ的一个主合同子群。由 [9, 引理 3.3] 可知， Γ_J 没有 p'-挠元。因此 $\mathrm{Tor}\left(\Gamma_J^{\mathrm{ab}}\right) \cong \coprod_{(u,v)\in\Sigma_0}(\tilde{\Gamma}_J)_{u,v}$。注意，对于任意 $b \in \{a, 2a\}$,g属于 $g_u^{-1}{}_v\mathcal{U}_b(k)g_{u,v} \cap \Gamma_J$当且仅当 $g = g_u^{-1}{}_v\mathfrak{u}_a(x,y)g_{u,v}$，其中某个 $x, \overline{x}, y \in J$满足条件，且 $x = 0$当 $b = 2a$时。这意味着 $(\tilde{\Gamma}_J)_{u,v}$同构于 J。因此，$\mathrm{Tor}\left(\Gamma_J^{\mathrm{ab}}\right)$同构于 $\sharp(\Sigma_0)$ 个 J的直积。

注 7.6. 由于 $H_1(G,\mathbb{Q}) = H_1(G,\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$， G^{ab}的自由秩等于 $d = \dim_{\mathbb{Q}}(H_1(G,\mathbb{Q}))$。于是，沿用引理 1.1] 中的相同论证可得， d 等于 $\pi_1(G\backslash X)$的自由秩。特别地，当且仅当 $G\backslash X$ 是一棵树时， $d = 0$。

例如，设 $A = \mathbb{F}[t]$， $B = \mathbb{F}[\sqrt{t}]$ 和 $\Gamma = \mathcal{G}(A)$。设 Γ_J 是由 $J = \sqrt{t}B$定义的主合同子群。将 [12, 第 I 章 §1.6，习题 5] 中的论证改用于 $\mathcal{G}$ 的情形，并利用 [2, 定理 2。4], 我们可以证明 $\Gamma_J\backslash X$ 是一棵树。因此，即使 $d = 0$，也有 $\chi(\Gamma_J) < 0$。这说明命题 7.3 (b) 中的上界通常并非最优。

在拓扑学中，簇的欧拉-庞加莱′特征等于其同调群秩的交错和。因此，下一个结果直接由定理 7.1 得出，可视为算术子群背景下与拓扑学结果类似的结论。

推论 7.7. 设 G是 Γ 的一个子群，且不含 p'-挠元。那么， G 的欧拉-庞加莱特征 $\chi(G)$ 等于以下各表达式：

(1) $\sum_{i=1}^{\infty}$秩 $H_i(G$模 $G_\sigma, \mathbb{Z})$, (2) $-$秩 $H_1(G$模 $G_\sigma, \mathbb{Z})$, (3) $\sum_{i=1}^{\infty}$维数 $H_i(G$模 $G_\sigma, \mathbb{Q})$, (4) $-$维数 $H_1(G$模 $G_\sigma, \mathbb{Z})$。

Acknowledgements

我谨此感谢 Anid-Conicyt 提供的博士后奖学金 [74220027] .

References

[1] P. Abramenko and K. S. Brown, 《建筑：理论与应用》，《数学研究生教材》第248卷。施普林格，纽约，2008年。[2] L. Arenas-Carmona, C. Bravo, B. Loisel, G. Lucchini-Arteche, 算术子群对特殊酉群的 Bruhat-Tits 树的商，《纯粹与应用代数杂志》266（2021）。[3] F. Bruhat and J. Tits, 局部域上的约化群，I，《高等科学研究所数学出版物》41（1972），5-251。[4] F. Bruhat and J. Tits, 局部域上的约化群，II，《高等科学研究所数学出版物》60（1984），197-376。[5] K. Bux, R. Köhl and S. Witzel, 正特征下约化算术群的高阶有限性性质：秩定理，《数学年刊》177（2013），311-366。[6] P. Gille, 特征 $p > 0$下约化群的幺幂子群，《杜克数学杂志》114（2002），307-328。[7] G. Harder and M. S. Narasimhan, 关于曲线向量丛模空间的上同调，《数学年刊》212（1975），215-248。[8] E. Landvogt, Bruhat-Tits 建筑的紧化，数学讲义1619，施普林格出版社，1996年。[9] A. W. Mason, A. Premet, B. Sury and P. A. Zalesskii, 局部域上秩一代数群中算术格的同余核，《纯粹与应用数学杂志》623（2008），43-72。[10] A. W. Mason and A. Schweizer, 算术整环上 SL_2 的非同余子群的最小指数，《以色列数学杂志》133（2003），29-44。[11] B. Margaux, 群 $G(k[t])$的结构：索尔′主题的变奏，《代数与数论》3（2009），393-409。[12] J.-P. Serre, 《树》，施普林格出版社，1980年。[13] J.-P. Serre, 《离散群上同调》，《数学年刊》70（1971），77-169。[14] C. Soulé, 多项式环上的切瓦莱群，载于《同调群论》（达勒姆，1977），359–367，伦敦数学会讲义系列36，剑桥大学出版社，1979年。