arXiv:2304.00508v1 [math.CA] 2 Apr 2023

通过牛顿图研究二维实雅可比猜想的新充分条件

Yuzhou Tian[a] 和 Xiuli Cen[b]，*清华大学数学科学系，中国北京*100084*[a]，电子邮箱：*tianyuzhou2016@163.com* 中南大学数学与统计学院，*HNP-LAMA*，中国湖南长沙*410083*[b]电子邮箱：*cenxiuli2010@163.com*

摘要 本文旨在研究二维实雅可比猜想。该猜想指出，若 $F=(f,g):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 是一个多项式映射，且对所有$(x,y)\in\mathbb{R}^2$均有 $\det DF(x,y)\neq 0$，则 F 是全局单射。借助牛顿图，我们给出了一个使二维实雅可比猜想成立的新充分条件。此外，该充分条件推广了《微分方程杂志》**260** (2016), 5250-5258]中的主要结果。进一步地，本文给出了两类满足二维实雅可比猜想的新多项式映射。

2020年数学主题分类： 主要分类 34C05。次要分类 34C08。第三分类 14R15
关键词： 实雅可比猜想；牛顿图；Bendixson 紧化；单调奇点

1 引言及主要结果陈述

考虑一个光滑映射

$$F(x,y)=(f(x,y),g(x,y)):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$$

满足 $\det DF(x,\ y)\neq 0$ 对所有 $(x,\ y)\in\mathbb{R}^2$，其中 $f(x,\ y)$ 和 $g(x,\ y)$ 都是光滑函数。众所周知，光滑映射 F 是局部微分同胚，但在$\mathbb{R}^2$中并不总是全局单射。一般而言，在某些限制条件下，光滑映射 F 是全局微分同胚，参见[9, 15, 19]。

1939年，Keller 将注意力集中于 $\mathbb{C}^2$ 中的多项式映射 F，并提出了一个猜想：若 F: $\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ 是一个满足对所有 $(x,y)\in\mathbb{C}^2$，$\det DF(x,y)\equiv$ 为常数 $\neq 0$ 的多项式映射，则 F 是全局单射。这个猜想广为人知，称为雅可比猜想。1998 年，Smale [30] 选出了 21 世纪的18个重大数学问题，并将雅可比猜想列为第16个问题。迄今为止，该问题仍未解决，而且以难度极高而闻名。所幸的是，相关研究已取得不少进展，参见例如 [4, 16, 17, 27, 29, 33], 等。

Randall [26]考察了 F 中的多项式映射 $\mathbb{R}^2$，并提出了另一个猜想：若 $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 是一个多项式映射，且对所有 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$，都有 $\det DF(x,y)\neq 0$，那么 F是全局单射。这个猜想称为实雅可比猜想。然而，Pinchuk [25] 于1994年构造了实雅可比猜想的一个反例。Pinchuck 的反例引出了一个有趣的问题：寻找某些适当条件，使实雅可比猜想成立。这个问题受到了数学家们的广泛关注。近年来，人们取得了一系列重要成果。借助多项式映射的结构，作者们 [13, 14] 给出了一些充分条件。Gwoździewicz 在 [21] 证明，若 $\deg f\leq 3$ 且 $\deg g\leq 3$，则实雅可比猜想成立。随后，Braun 等人 [6, 10]改进了这一结果，证明当 $\deg f\leq 4$时该猜想成立，且这一结论与 $\deg g$无关。在上述

*通讯作者。

工作中，主要工具涉及代数、分析和几何。Sabatini 在 [28] 建立的以下全局动力学结果，使我们能够借助一些动力系统方法来探索实雅可比猜想。

定理 1。 (见 [28]) 设 $F=(f,g)\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 是一个多项式映射，满足 $F(0,0)=(0,0)$ 且对所有 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$，有 $\det DF(x,y)\neq 0$。那么下列陈述等价。

(a) 原点是该哈密顿多项式向量场的全局中心

$$\mathcal{X}=(-ff_y-gg_y,ff_x+gg_x)\triangleq(\Lambda(x,y),\Omega(x,y)). \tag{1.1}$$

(b) F 是从平面到其自身的全局微分同胚。

根据定理 1，利用动力系统定性理论，可以得到许多关于实雅可比猜想成立的新的充分条件。例如， [7] 中的作者给出了如下重要结果。

定理 2 (见 [7])。 设 $F=(f,g)\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 是一个多项式映射，满足 $F(0,0)=(0,0)$ 且对所有 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$，有 $\det DF(x,y)\neq 0$。若多项式 ff_x+gg_x 和 ff_y+gg_y 的高次齐次项没有共同的实线性因子，则 F 是全局单射。

请注意，定理 2 给出的充分条件并非必要条件 [7, 23], 因此，本文 [23]提出了若干新的充分条件，以确保实雅可比猜想成立；在这些条件下，多项式 ff_x+gg_x 和 ff_y+gg_y 的高次齐次项有重数为一的公共实线性因子。关于这一主题的其他参考文献包括论文 [8, 11, 20, 22, 31]。

在代数几何中，牛顿图是研究局部域上多项式行为的有力工具；牛顿图的定义见第 2 节。学者们运用代数方法建立了雅可比猜想与牛顿图之间的联系，并利用这一联系获得了若干有价值的结果，如第 10章所示，见 [32]。因此，自然会想到：当实雅可比猜想遇上牛顿图时，会发生什么?

本文引入牛顿图，提出一个使实雅可比猜想成立的新充分条件。动力系统定性理论在我们的证明中发挥着关键作用。

令 $d=\max\{\deg\Lambda(x,y),\deg\Omega(x,y)\}$。用 $b(\mathcal{X})$ 表示式 (1.1) 中定义的哈密顿向量场 $\mathcal{X}$ 的 Bendixson 紧化。关于 Bendixson 紧化的更多细节，请参阅 [3] 第 13 章和 [18] 第 5 章。 $b(\mathcal{X})$ 的显式表达式为

$$\begin{cases}\dot{u}=(u^2+v^2)^d\left[(v^2-u^2)\Lambda\left(\dfrac{u}{u^2+v^2},\dfrac{v}{u^2+v^2}\right)-2uv\Omega\left(\dfrac{u}{u^2+v^2},\dfrac{v}{u^2+v^2}\right)\right],\\ \dot{v}=(u^2+v^2)^d\left[(u^2-v^2)\Omega\left(\dfrac{u}{u^2+v^2},\dfrac{v}{u^2+v^2}\right)-2uv\Lambda\left(\dfrac{u}{u^2+v^2},\dfrac{v}{u^2+v^2}\right)\right].\end{cases} \tag{1.2}$$

我们的主要结果如下所述。

定理 3。考虑多项式映射 $F=(f(x,y)\ \ g(x,y))\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$，满足 $F(0,0)=(0,0)$，且对所有 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$，都有 $\det DF(x,y)\neq 0$。用 $b(\mathcal{X})$ 表示式 (1.1) 中给出的哈密顿向量场 $\mathcal{X}$ 的 Bendixson 紧化。令 $\mathcal{N}(b(\mathcal{X}))$ 为 $b(\mathcal{X})$ 的牛顿图。对于 $\mathcal{N}(b(\mathcal{X}))$ 中每条类型为 t 的有界边，若其相应的哈密顿量没有任何形如 $v^{t_1}-\lambda u^{t_2}$ 的因子，其中 $t=(t_1,t_2)\in\mathbb{N}^2$ 且 $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$，则 F 是单射。

下面的定理揭示了定理 3 与 2 之间的关系，表明定理 3 中的充分条件弱于定理 2 中的充分条件。因此，我们的结果推广了 [7] 的主要结果。

定理 4。考虑多项式映射 $F=(f(x,y)\ \ g(x,y)):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$，满足 $F(0,0)=(0,0)$，且对于所有 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$，$\det DF(x,y)\neq 0$。用 $b(\mathcal{X})$ 表示式 (1.1) 中给出的哈密顿向量场 $\mathcal{X}$ 的 Bendixson 紧化，并用 $\mathcal{N}(b(\mathcal{X}))$ 表示 $b(\mathcal{X})$ 的牛顿图。如果多项式 ff_x+gg_x 和 ff_y+gg_y 的高次齐次项没有共同的实线性因子，那么对于 $\mathcal{N}(b(\mathcal{X}))$ 中每条类型为 t 的有界边，其相应的哈密顿量不含任何形如 $v^{t_1}-\lambda u^{t_2}$ 的因子，其中 $t=(t_1,t_2)\in\mathbb{N}^2$ 且 $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$。

作为定理 3的应用，给出了两类满足 $\mathbb{R}^2$ 中实雅可比猜想的新的多项式映射。在这两种情况下，多项式ff_x+gg_x和 ff_y+gg_y的高次齐次项具有重数大于一的公共实线性因子，因此无法使用 [7] 和 [23]中现有的方法来验证这些例子。

例 1. 令

$$F=(f,g)=\left(\sum_{i=0}^{n}a_ix^{2i+1},y+\sum_{i=1}^{m}b_ix^{2i}\right),$$

其中 $a_i\geq 0,\ i=0,1,\ldots,n,\ b_i\geq 0,\ i=1,2,\ldots,m,$ 和 $a_0>0,a_n>0,b_m>0,n\geq m\geq 1$。映射 F 是单射。

显然，$\det DF(x,\ y)=\sum_{i=0}^{n}(2i+1)a_ix^{2i}>0$。与1.1相关联的哈密顿向量场为 F 是

$$\begin{aligned}\mathcal{X}&=(-ff_y-gg_y,ff_x+gg_x)\\&=\left(-y-\sum_{i=1}^{m}b_ix^{2i},y\sum_{i=1}^{m}2ib_ix^{2i-1}+\sum_{i=1}^{m}b_ix^{2i}\sum_{i=1}^{m}2ib_ix^{2i-1}+\sum_{i=0}^{n}a_ix^{2i+1}\sum_{i=0}^{n}(2i+1)a_ix^{2i}\right).\end{aligned}$$

的高次齐次项 ff_x+gg_x和 ff_y+gg_y具有线性公因子 x，其重数为 $2m\geq 2$。因此，定理2 以及 [23] 中的定理 2 都不适用于该例。

例 2。设

$$F=(f,g)=\left(\sum_{i=0}^{m_1}a_iy^{2i+1}+\sum_{i=0}^{m_2}b_ix^{2i+1},\sum_{i=0}^{m_3}c_iy^{2i+1}-\sum_{i=0}^{m_2}d_ix^{2i+1}\right),$$

其中 $a_i\geq 0$、 $i=0$、1、.....、m_1、 $b_i\geq 0$、 $i=0$、1、.....、m_2、 $c_i\geq 0$、 $i=0$、1、.....、m_3、 $d_i\geq 0$、 $i=$0、1、.....、m_2，且 $b_0c_0+a_0d_0>0$、 $a_{m_1}>0$、 $b_{m_2}>0$、 $d_{m_2}>0$、 $m_1>\max\{m_2,m_3\}\geq 0$。映射$F$ 是单射。

显然，

$$\det DF\,(x,y)=\sum_{i=0}^{m_2}(2i+1)b_ix^{2i}\sum_{i=0}^{m_3}(2i+1)c_iy^{2i}+\sum_{i=0}^{m_1}(2i+1)a_iy^{2i}\sum_{i=0}^{m_2}(2i+1)d_ix^{2i}\geq b_0c_0+a_0d_0>0.$$

与1.1相关联的哈密顿向量场（ F ）为

$$\begin{aligned}\mathcal{X}=&(-ff_y-gg_y,ff_x+gg_x)\\=&\left(-\left(\sum_{i=0}^{m_1}a_iy^{2i+1}+\sum_{i=0}^{m_2}b_ix^{2i+1}\right)\sum_{i=0}^{m_1}(2i+1)a_iy^{2i}-\left(\sum_{i=0}^{m_3}c_iy^{2i+1}-\sum_{i=0}^{m_2}d_ix^{2i+1}\right)\sum_{i=0}^{m_3}(2i+1)c_iy^{2i},\right.\\&\left.\left(\sum_{i=0}^{m_1}a_iy^{2i+1}+\sum_{i=0}^{m_2}b_ix^{2i+1}\right)\sum_{i=0}^{m_2}(2i+1)b_ix^{2i}-\left(\sum_{i=0}^{m_3}c_iy^{2i+1}-\sum_{i=0}^{m_2}d_ix^{2i+1}\right)\sum_{i=0}^{m_2}(2i+1)d_ix^{2i}\right).\end{aligned}$$

容易验证， ff_x+gg_x和 ff_y+gg_y的高次齐次项具有线性公因子 y，其重数为 $2m_1+1>2$。因此，定理2 以及 [23] 中的定理 2 也不能应用于这个例子。

注 1。 根据定理 1，例子 1 和 2给出了两类新的具有全局中心的多项式哈密顿向量场。对于哈密顿向量场而言，全局中心的刻画尤其具有挑战性，因为这涉及复全局动力学分析。构造这类哈密顿向量场对于通过分岔理论寻找平面多项式向量场的极限环具有重要意义。

本文结构安排如下。第 2 节将给出一些预备定义和结果。第 3 节将证明定理 3 和 4。最后，我们将在第 4 节求解这两个例子，以说明主要结果的实用性。

2 预备定义与结果

本节回顾定理 3 的证明所需的一些基本定义和已知结果。

2.1 牛顿图

我们考虑以下解析自治微分系统

$$\dot{x} = P(x,y), \quad \dot{y} = Q(x,y). \tag{2.1}$$

与系统（ $\mathscr{X}$相关联的向量场由下式定义： $\mathscr{X}$ = （P， Q）或

$$\mathscr{X} = P(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial}{\partial y}.$$

设$\mathbf{t} = (t_1,t_2) \neq \mathbf{0}$，其中 t_1，且 t_2为互素非负整数。若 $R\left(\lambda^{t_1}x, \lambda^{t_2}y\right) = \lambda^k R(x,y)$ 对所有 $\lambda \in \mathbb{R}^+$ 均成立，则称多项式 $R(x,y)$ 是类型为 t、次数为 k 的拟齐次多项式。我们分别用 $\deg_x R$ 和 $\deg_y R$ 表示多项式 $R(x,y)$ 关于 x 和 y 的次数。类型为 t、次数为 k 的拟齐次多项式构成的向量空间记为 $\mathcal{P}_k^{\mathbf{t}}$。若 $P_{k+t_1} \in \mathcal{P}_{k+t_1}^{\mathbf{t}}$ 且 $Q_{k+t_2} \in \mathcal{P}_{k+t_2}^{\mathbf{t}}$，则向量场 $\mathscr{X}_k = (P_{k+t_1}, Q_{k+t_2})$ 是类型为 t、次数为 k 的拟齐次向量场。类型为 t、次数为 k 的拟齐次多项式向量场构成的向量空间记为 $\mathcal{Q}_k^{\mathbf{t}}$。

任意解析向量场 $\mathscr{X}$都可以写成其拟齐次分量之和，即

$$\mathscr{X} = \mathscr{X}_r + \mathscr{X}_{r+1} + \cdots = \sum_{k=r}^{\infty} \mathscr{X}_k,$$

其中 $r \in \mathbb{N}$、 $\mathscr{X}_r \not\equiv 0$和 $\mathscr{X}_k$ = （P_{k+t_1}， Q_{k+t_2}）$\in \mathcal{Q}_k^{\mathbf{t}}$。对于每个拟齐次向量场$\mathscr{X}_k \in \mathcal{Q}_k^{\mathbf{t}}$，它都可以表示为

$$\mathscr{X}_k = \mathbf{X}_{h_{k+|\mathbf{t}|}} + \mu_k \mathbf{D}_0, \tag{2.2}$$

其中

$$|\mathbf{t}| = t_1 + t_2,\ \mathbf{D}_0 := (t_1 x, t_2 y),\ \mu_k := \frac{1}{k+|\mathbf{t}|}\operatorname{div}(\mathscr{X}_k) \in \mathcal{P}_k^{\mathbf{t}},$$
$$h_{k+|\mathbf{t}|} := \frac{1}{k+|\mathbf{t}|}(\mathbf{D}_0 \wedge \mathscr{X}_k) = \frac{1}{k+|\mathbf{t}|}(t_1 x Q_{k+t_2} - t_2 y P_{k+t_1}) \in \mathcal{P}_{k+|\mathbf{t}|}^{\mathbf{t}},$$
$$\mathbf{X}_{h_{k+|\mathbf{t}|}} := \left(-\frac{\partial h_{k+|\mathbf{t}|}}{\partial y}, \frac{\partial h_{k+|\mathbf{t}|}}{\partial x}\right),$$

例如，参见[1]。方程（2.2）是拟齐次向量场的经典保守-耗散分解。拟齐次多项式 $h_{k+|\mathbf{t}|}$ 称为与 $\mathscr{X}_k$相关联的哈密顿量。

下面简要介绍牛顿图，更多详情参见 [2, 5, 12, 24] 。设yP（x， y） = $\sum a_{ij}x^i y^j$， xQ（x， y） = $\sum b_{ij}x^i y^j$，且 R（x， y） = $\sum c_{ij}x^i y^j$。 $\mathscr{X}$的支撑集定义为

$$\operatorname{supp}(\mathscr{X}) = \{(i,j) \mid (a_{ij}, b_{ij}) \neq \mathbf{0}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

向量（a_{ij}, b_{ij}）称为支撑集中（i,j）的向量系数。集合

$$\operatorname{supp}(R) = \{(i,j) \mid c_{ij} \neq 0\} \subset \mathbb{R}^2$$

也称为多项式 $R(x,y)$ 的支撑集 。

考虑集合 Γ 的凸包

$$\bigcup_{(i,j)\in \mathrm{supp}(\mathscr{X})} \left((i,j)+\mathbb{R}^2_+\right), \tag{2.3}$$

其中 $\mathbb{R}^2_+$ 是正象限。凸包 Γ的边界由两条开射线和一条多边形线组成，这条多边形线也可能只是一个点。这条多边形线称为向量场 $\mathscr{X}$的牛顿图。仿照上述定义，我们也可以定义多项式 $R(x,y)$的牛顿图。

我们称多边形线上的线段为牛顿图的边，其端点为牛顿图的顶点。若牛顿图的一个顶点位于坐标轴上，则称其为外部顶点；否则，称其为内部顶点。若集合（ Γ （2.3）的凸包边界包含一条不位于坐标轴上的射线，则将该射线称为牛顿图的无界边。

设 (a_{ij},b_{ij}) 是与顶点 (i,j) 相关联的向量系数。顶点 (i,j) 的指数定义为数

$$\alpha := \begin{cases} \frac{b_{ij}}{a_{ij}}, & \text{if} \quad a_{ij}\neq 0, \\ \infty, & \text{if} \quad a_{ij}=0. \end{cases}$$

牛顿图的有界边的指数 ℓ 是一个正有理数 t_2/t_1 ，等于该边与纵轴所成角的正切的绝对值。边 ℓ 的指数记为 α_ℓ，而数对 $\mathbf{t}=(t_1,t_2)$ 称为该边 ℓ的类型。如果牛顿图有一条无界水平边，则定义其指数为 ∞，类型为 $(0,1)$；如果有一条无界垂直边，则定义其指数为 0，类型为 $(1,0)$。

对于向量场 $\mathscr{X}$的牛顿图的每个内部顶点 V，存在类型为 $\mathbf{t}=(t_1,t_2)\tilde{}$ $\tilde{}$的边 ℓ 和类型为 $\mathbf{s}=(s_1,s_2)$ ℓ 的边，使得 ℓ 和 ℓ 分别是其上方和下方的相邻边，即 $\alpha_\ell = t_2/t_1 < s_2/s_1 = \alpha_{\tilde{\ell}}$，其中$h_{r_{\mathbf{t}}+|\mathbf{t}|}h_{r_{\mathbf{s}}+|\mathbf{s}|}\neq 0$。对于每个内部顶点 V，我们引入一个常数

$$\beta = c_{i_0}\tilde{c}_{j_0},$$

其中， $i_0=\min\{i\geq 0 \mid c_i\neq 0\}$、 $j_0=\min\{j\geq 0 \mid \tilde{c}_j\neq 0\}$，且 c_i和 $\tilde{c}_j$是多项式$h_{r_{\mathbf{t}}+|\mathbf{t}|}$ 和 $h_{r_{\mathbf{s}}+|\mathbf{s}|}$的系数，分别按 x 和 y中的指数从高到低排列。

2.2 单调奇点的判据

设原点是向量场 $\mathscr{X}$的奇点。若存在原点的一个邻域，使得 $\mathscr{X}$的轨道绕原点 $t\to+\infty$ 或$t\to-\infty$，则称原点为单调 的。在原点的邻域内，定义以下集合

$$W^{(\sigma_1,\sigma_2)}_{\mathbf{t},\mathbf{s}} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \epsilon x^{s_2/s_1}\leq y\leq \frac{1}{\epsilon}x^{t_2/t_1},\ (-1)^{\sigma_1}x\geq 0,\ (-1)^{\sigma_2}\epsilon>0\right\},$$

其中 σ_1、 $\sigma_2\in\{0,1\}$。

文献[2]证明了以下与非单调或单调奇点的充分条件相关的结果。

命题 1 (见 [2])。 若向量场 $\mathscr{X}$ 的牛顿图存在一条类型为$\mathbf{t}$的边，使得$h_{r_{\mathbf{t}}+|\mathbf{t}|}\equiv 0$ 和 $\mu_{r_{\mathbf{t}}}\neq 0$，则原点是一个结点（即原点具有抛物扇区）。

命题 2 (见 [2])。 假设 V 是向量场 $\mathscr{X}$ 的牛顿图的一个内部顶点，且满足 $h_{r_{\mathbf{t}}+|\mathbf{t}|}h_{r_{\mathbf{s}}+|\mathbf{s}|}\neq 0$。当且仅当 $\beta<0$ （分别为 $\beta>0$）时，区域 $W^{(0,0)}_{\mathbf{t},\mathbf{s}}$ 是原点的抛物扇形（分别为双曲扇形）。

定理 5 (见 [2])。 假设向量场的牛顿图 $\mathscr{X}$ 满足以下假设：

(a) 它的所有顶点坐标均为偶数。(b) 它有两个外部顶点。此外，若 $(a,\ 0)$ 和 $(0,\ b)$ 是外部顶点的向量系数，则 $ab<0$。(c) 它的所有内部顶点 V 均满足 $\beta>0$。(d) 对于每条有界边，其相应的哈密顿量均非零，且不含任何形如 $y^{t_1}-\tilde{a}x^{t_2}$ 的因子，其中 $\tilde{a}\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$。

那么，向量场 $\mathscr{X}$ 的原点是一个单调奇点。

3 定理 3 和 4 的证明

本节的目标是证明定理 3 和 4。首先，我们将给出向量场 $b(\mathcal{X})$ 的牛顿图的若干性质。

引理 1. 设 $\mathscr{X}$ 为一个多项式向量场，且点 $p_i\in\mathrm{supp}(\mathscr{X})$ 满足 $i=1,\ldots,m+1$。以下陈述成立。

(a) 若点 p_1、p_2 和 p_3 共线（即 p_1、p_2 和 p_3 位于同一直线上），且 p_2 位于 p_1 和 p_3之间，那么 p_2 不是向量场$\mathscr{X}$的牛顿图的顶点。(b) 若 $p_1,\ldots,p_m$ 是图 *1* 中多边形的顶点，且 p_{m+1}位于多边形内部，那么 p_{m+1}不是向量场 $\mathscr{X}$的牛顿图的顶点。 PSfrag 替换文本

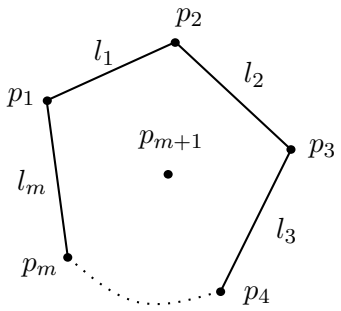


图 1：多边形。

证明。 (a) 假设 p_2 是向量场 $\mathscr{X}$牛顿图的一个顶点。这意味着存在一条经过 p_2 的直线 l，使得集合的凸包 Γ

$$\bigcup_{(i,j)\in\mathrm{supp}(\mathscr{X})}\left((i,j)+\mathbb{R}^2_+\right) \tag{3.1}$$

完全位于直线 l分隔出的某个半平面内。若 $p_1\in l$，则 $p_3\in l$，因而 p_2不是一个顶点，这与假设矛盾。若 $p_1\notin l$，则 $p_1\notin\Gamma$ 或 $p_3\notin\Gamma$，这与 p_1、$p_3\in\Gamma$矛盾。因此，结论 (a) 得证。

(b) 设 p_{m+1} 是向量场 $\mathscr{X}$的牛顿图的一个顶点。那么存在一条直线 l 经过 p_{m+1}，使得集合（3.1）的凸包 Γ 位于直线 l所分割出的某个半平面内。显然，直线 l 必与多边形的一条边相交$\overline{p_ip_{i+1}}$。由此可得 $p_i\notin\Gamma$ 或 $p_{i+1}\notin\Gamma$，这与 p_i相矛盾 $p_{i+1}\in\Gamma$。证明完毕。

□

引理 2. 设多项式 $R(x,y)\in\mathcal{P}_k^{\mathbf{t}}$和向量场 $\mathscr{X}_k=(P_{k+t_1},Q_{k+t_2})\in\mathcal{Q}_k^{\mathbf{t}}$。令 $m_1=$最大 $\{$次数$_x P_{k+t_1}$, $1+$次数$_x Q_{k+t_2}\}$, $m_2=$最大 $\{1+$次数$_y P_{k+t_1}$, 次数$_y Q_{k+t_2}\}$, $m_3=$次数$_x R$ 以及 $m_4=$次数$_y R$。以下结论成立。

(a) 向量场 $\mathscr{X}_k$ 的支撑集位于直线 $t_1x+t_2y=k+|\mathbf{t}|$ 上，且

$$V_1=\left(m_1,1+\frac{k+(1-m_1)\,t_1}{t_2}\right)\quad and\quad V_2=\left(1+\frac{k+(1-m_2)\,t_2}{t_1},m_2\right)$$

是 $\mathscr{X}_k$ 的牛顿图的顶点。

(b) 多项式 $R(x,y)$ 的支撑集位于直线 $t_1x+t_2y=k$ 上，且 d

$$V_1=\left(m_3,\frac{k-t_1m_3}{t_2}\right)\quad and\quad V_2=\left(\frac{k-t_2m_4}{t_1},m_4\right)$$

是 $R(x,y)$ 的牛顿图的顶点。

证明。 (a) 设 $yP_{k+t_1}(x,y)=\sum a_{ij}x^iy^j$ 且 $xQ_{k+t_2}(x,y)=\sum b_{ij}x^iy^j$。对于任意的 $\lambda\in\mathbb{R}^+$, 有

$$P_{k+t_1}\left(\lambda^{t_1}x,\lambda^{t_2}y\right)=\sum a_{ij}\lambda^{it_1+(j-1)t_2}x^iy^{j-1}=\lambda^{k+t_1}P_{k+t_1}\left(x,y\right)=\lambda^{k+t_1}\sum a_{ij}x^iy^{j-1}$$

and

$$Q_{k+t_2}\left(\lambda^{t_1}x,\lambda^{t_2}y\right)=\sum b_{ij}\lambda^{(i-1)t_1+jt_2}x^{i-1}y^j=\lambda^{k+t_2}Q_{k+t_2}\left(x,y\right)=\lambda^{k+t_2}\sum b_{ij}x^{i-1}y^j.$$

因此，$a_{ij}\lambda^{it_1+jt_2}=a_{ij}\lambda^{k+|\mathbf{t}|}$ 且 $b_{ij}\lambda^{it_1+jt_2}=b_{ij}\lambda^{k+|\mathbf{t}|}$。对于每个 $(i,j)\in$ 属于 supp $(\mathscr{X}_k)$ 的情形，由于相应的向量系数 (a_{ij},b_{ij}) 非零，故满足$it_1+jt_2=k+|\mathbf{t}|$。这意味着 $\mathscr{X}_k$ 的牛顿图是一条线段，其端点

$$V_1=\left(m_1,1+\frac{k+(1-m_1)\,t_1}{t_2}\right)\quad and\quad V_2=\left(1+\frac{k+(1-m_2)\,t_2}{t_1},m_2\right)$$

是顶点。因此，结论 (a) 得到证实。

命题 (b) 可用类似的方法证明。 □

由引理 2，可得到如下推论。

推论 1。 设向量场为 $\mathscr{X}=\sum\mathscr{X}_i$，且 $\mathscr{X}_i\in\mathcal{Q}_i^{\mathbf{t}}$。令 V_{1i} 和 V_{2i} 为 $\mathscr{X}_i$ 的牛顿图的顶点。那么，$\mathscr{X}$ 的牛顿图的顶点包含于集合 $\bigcup_i\{V_{1i},V_{2i}\}\subset$ supp $(\mathscr{X})$。

证明。设 V 是 $\mathscr{X}$ 的牛顿图的一个顶点。由于 $V\in$ supp $(\mathscr{X})=\bigcup$ supp $(\mathscr{X}_i)$，因此$_i$存在 i_0，使得 $V\in$ supp $\{\mathscr{X}_{i_0}\}$。根据引理 2 的命题 (a)，$\mathscr{X}_{i_0}$ 的牛顿图是一条线段，其端点为 V_{1i_0} 和 V_{2i_0}。由引理 1 的命题 (a)，可得 $V\in\{V_{1i_0},V_{2i_0}\}$。证毕。

□

引理 3. 考虑向量场

$$\mathscr{Y}=\left(\left(x^2-y^2\right)\partial_y\mathcal{H}-2xy\partial_x\mathcal{H},\left(x^2-y^2\right)\partial_x\mathcal{H}+2xy\partial_y\mathcal{H}\right)\tag{3.2}$$

其中 $\mathcal{H}$ 是关于变量 x、y 的 k 次齐次多项式。设齐次多项式为 $\mathcal{H}=\sum_{i=0}^m h_{m-i,\ k-m+i}x^{m-i}y^{k-m+i}=\sum_{i=0}^n\tilde{h}_{k-n+i,\ n-i}x^{k-n+i}y^{n-i}$，其中 $m=$次数$_x\mathcal{H}$, $n=$次数$_y\tilde{\mathcal{H}}$，且 $h_{m,\ k-m}h_{k-n,\ n}\neq0$。以下结论成立。

(a) $\operatorname{supp}\left(\left(x^2+y^2\right)\mathcal{H}\left(x,y\right)\right)\subset\operatorname{supp}\left(\mathscr{Y}\right).$

(b) 向量场 $\mathscr{Y}$ 与多项式 $\left(x^2+y^2\right)\mathcal{H}(x,\ y)$ 的牛顿图具有相同的顶点 $V_1=(m+2,\ k-m)$ 和 $V_2=(k-n,\ n+2)$。

(c) 对于向量场 $\mathscr{Y}$ 的牛顿图，与顶点 V_1 和 V_2 相关的向量系数分别为 $((k-m)h_{m,k-m},(2k-m)h_{m,k-m})$ 和 $\left((n-2k)\tilde{h}_{k-n,n},(n-k)\tilde{h}_{k-n,n}\right)$。

证明。(a) 由于 $x\left(\left(x^2-y^2\right)\partial_x\mathcal{H}+2xy\partial_y\mathcal{H}\right)-y\left(\left(x^2-y^2\right)\partial_y\mathcal{H}-2xy\partial_x\mathcal{H}\right)=k\left(x^2+y^2\right)\mathcal{H}$，可知陈述 (a) 成立。

接下来证明陈述 (b) 和 (c)。

对于 $m=0$，结论显然成立。对于 $m\geq 1$，我们区分 $m<k$ 和 $m=k$ 两种情况。

如果 $m<k$，那么

$$\partial_x\mathcal{H}=\sum_{i=0}^{m-1}(m-i)\,h_{m-i,k-m+i}x^{m-i-1}y^{k-m+i}$$

and

$$\partial_y\mathcal{H}=\sum_{i=0}^{m}(k-m+i)\,h_{m-i,k-m+i}x^{m-i}y^{k-m+i-1}.$$

我们有

$$y\left(\left(x^2-y^2\right)\partial_y\mathcal{H}-2xy\partial_x\mathcal{H}\right)=(k-m)\,h_{m,k-m}x^{m+2}y^{k-m}+\varphi(x,y)$$

and

$$x\left(\left(x^2-y^2\right)\partial_x\mathcal{H}+2xy\partial_y\mathcal{H}\right)=(2k-m)\,h_{m,k-m}x^{m+2}y^{k-m}+\psi(x,y),$$

其中 $\deg_x\varphi<m+2$ 和 $\deg_x\psi<m+2$。因此，

$$\deg_x\left(y\left(\left(x^2-y^2\right)\partial_y\mathcal{H}-2xy\partial_x\mathcal{H}\right)\right)=\deg_x\left(x\left(\left(x^2-y^2\right)\partial_x\mathcal{H}+2xy\partial_y\mathcal{H}\right)\right)=m+2.$$

If $m=k$, then $\partial_x\mathcal{H}=\sum_{i=0}^{k-1}(k-i)\,h_{k-i,i}x^{k-i-1}y^i$ and $\partial_y\mathcal{H}=\sum_{i=1}^{k}ih_{k-i,i}x^{k-i}y^{i-1}$. We get

$$\deg_x\left(y\left(\left(x^2-y^2\right)\partial_y\mathcal{H}-2xy\partial_x\mathcal{H}\right)\right)<k+2$$

and

$$x\left(\left(x^2-y^2\right)\partial_x\mathcal{H}+2xy\partial_y\mathcal{H}\right)=kh_{k,0}x^{k+2}+\widetilde{\psi}(x,y)$$

~，且 $\deg_x\psi<k+2$.

另一方面，我们有 $\mathscr{Y}\in\mathcal{Q}_k^{\mathbf{t}}$ 和 $\mathcal{H}\in\mathcal{P}_k^{\mathbf{t}}$ 其中$\mathbf{t}=(1,\ 1)$。因此，根据引理2，向量场 $\mathscr{Y}$ 和多项式 $\left(x^2+y^2\right)\mathcal{H}(x,y)$ 的牛顿图具有顶点 $V_1=(m+2,k-m)$。对于 $\mathscr{Y}$ 的牛顿图，其顶点 V_1 的向量系数为 $((k-m)h_{m,\ k-m},(2k-m)\,h_{m,\ k-m})$。

顶点 V_2 的证明与顶点 V_1 的证明类似，因此此处省略。

□

令 $f(x,y)=\sum_{i=1}^{n}f_i(x,y)$，$g(x,y)=\sum_{j=1}^{m}g_j(x,y)$ 且 $d=\max\{n,m\}$，其中 $f_i(x,y)$ 和 $g_j(x,y)$ 分别是次数为 i 和 j 的齐次多项式。由方程 (1.2) 可得 $b(\mathcal{X})$ 的表达式为

$$\begin{cases}\dot{u}= & \sum\limits_{i=1}^{d}\sum\limits_{j=1}^{d}\left(u^2+v^2\right)^{2d-i-j}\left[\left(u^2-v^2\right)\left(f_i(u,v)\,f_{jy}(u,v)+g_i(u,v)\,g_{jy}(u,v)\right)\right.\\ & \left.-2uv\left(f_i(u,v)\,f_{jx}(u,v)+g_i(u,v)\,g_{jx}(u,v)\right)\right],\\ \dot{v}= & \sum\limits_{i=1}^{d}\sum\limits_{j=1}^{d}\left(u^2+v^2\right)^{2d-i-j}\left[\left(u^2-v^2\right)\left(f_i(u,v)\,f_{jx}(u,v)+g_i(u,v)\,g_{jx}(u,v)\right)\right.\\ & \left.+2uv\left(f_i(u,v)\,f_{jy}(u,v)+g_i(u,v)\,g_{jy}(u,v)\right)\right].\end{cases}\tag{3.3}$$

此外，向量场 $b(\mathcal{X})$ 可以重写为其齐次分量之和

$$b(\mathcal{X}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} \mathcal{F}_{4d+1-2i} + \sum_{1\le i<j\le d} \mathcal{F}_{4d+1-i-j}, \tag{3.4}$$

其中

$$\mathcal{F}_{4d+1-i-j} = \begin{pmatrix} \left(u^2+v^2\right)^{2d-i-j}\left[\left(u^2-v^2\right)\partial_v\left(f_if_j+g_ig_j\right) - 2uv\partial_u\left(f_if_j+g_ig_j\right)\right] \\ \left(u^2+v^2\right)^{2d-i-j}\left[\left(u^2-v^2\right)\partial_u\left(f_if_j+g_ig_j\right) + 2uv\partial_v\left(f_if_j+g_ig_j\right)\right] \end{pmatrix}^T \in \mathcal{Q}^{(1,1)}_{4d+1-i-j} \tag{3.5}$$

对于 $i,j=1,\dots,d$。注意，$f_{jx}(u,v) = f_{ju}(u,v)$、$f_{jy}(u,v) = f_{jv}(u,v)$、$g_{jx}(u,v) = g_{ju}(u,v)$，以及$g_{jy}(u,v) = g_{jv}(u,v)$。

命题 3。考虑向量场

$$\widetilde{\mathscr{Y}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} \mathcal{F}_{4d+1-2i}, \tag{3.6}$$

其中 $\mathcal{F}_{4d+1-2i}$ 由方程 (3.5) 给出，其中 $i=1,\dots,d$。于是，$\mathscr{Y}$和 $b(\mathcal{X})$ 在 (3.4) 中给出的牛顿图具有相同的顶点。

证明。只需证明，对于 $i\neq j$，$\mathcal{F}_{4d+1-i-j}$ 的牛顿图的顶点不是 $b(\mathcal{X})$ 的牛顿图的顶点。

由引理 3可知，对于 $i,j=1,\dots,d$，$\mathcal{F}_{4d+1-i-j}$和 $\left(u^2+v^2\right)^{2d+1-i-j}\left(f_if_j+g_ig_j\right)$ 的牛顿图具有相同的顶点。

令 $m_i = \max\left\{\deg_x f_i, \deg_x g_i\right\}$, $m_j = \max\left\{\deg_x f_j, \deg_x g_j\right\}$, $n_i = \max\left\{\deg_y f_i, \deg_y g_i\right\}$ 以及 $n_j = \max\left\{\deg_y f_j, \deg_y g_j\right\}$。对于 $i\neq j$，以下关系成立：

$$\deg_x\left(f_i^2+g_i^2\right) = 2m_i,\ m_{i+j} := \deg_x\left(f_if_j+g_ig_j\right) \le m_i+m_j,\ \deg_x\left(f_j^2+g_j^2\right) = 2m_j;$$

$$\deg_y\left(f_i^2+g_i^2\right) = 2n_i,\ n_{i+j} := \deg_y\left(f_if_j+g_ig_j\right) \le n_i+n_j,\ \deg_y\left(f_j^2+g_j^2\right) = 2n_j.$$

再次应用引理2 和3 ，我们得到 的牛顿图的顶点为是

$$V_{1,2i} = \left(2\left(2d+1-2i+m_i\right), 2\left(i-m_i\right)\right) \quad \text{and} \quad V_{2,2i} = \left(2\left(i-n_i\right), 2\left(2d+1-2i+n_i\right)\right); \tag{3.7}$$

$\mathcal{F}_{4d+1-i-j}$ 的牛顿图的顶点为

$$V_{1,i+j} = \left(2\left(2d+1-i-j\right)+m_{i+j}, i+j-m_{i+j}\right) \quad \text{and} \quad V_{2,i+j} = \left(i+j-n_{i+j}, 2\left(2d+1-i-j\right)+n_{i+j}\right);$$

$\mathcal{F}_{4d+1-2j}$ 的牛顿图的顶点为

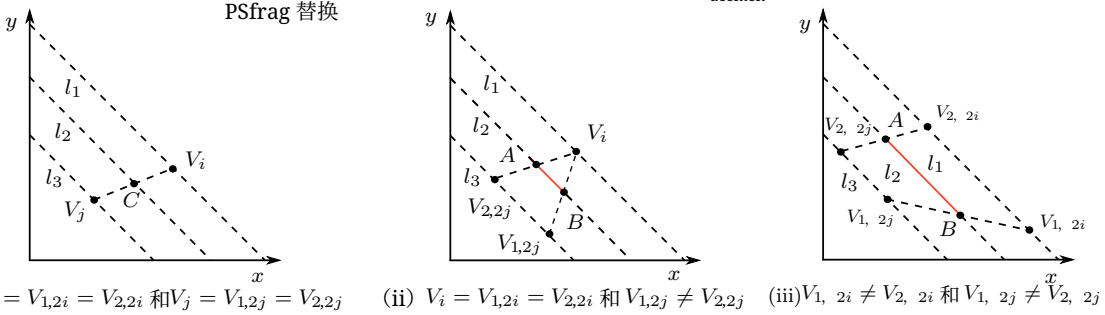
$$V_{1,2j} = \left(2\left(2d+1-2j+m_j\right), 2\left(j-m_j\right)\right) \quad \text{and} \quad V_{2,2j} = \left(2\left(j-n_j\right), 2\left(2d+1-2j+n_j\right)\right).$$

不妨设 $i<j$。由引理 2 可知，$V_{1,2i}$ 和 $V_{2,2i}$ 位于直线 l_1：$x+y = 2(2d+1-i)$ 上，$V_{1,i+j}$ 和 $V_{2,i+j}$ 位于直线 l_2：$x+y = 2(2d+1)-i-j$ 上，而 $V_{1,2j}$ 和 $V_{2,2j}$ 位于直线 l_3：$x+y = 2\left(2d+1-j\right)$ 上。因此，顶点 $V_{1,2i}$, $V_{2,2i}$, $V_{1,2j}$ 和 $V_{2,2j}$ 有三种可能的构型，如图 2 所示，其中 $A = (i+j-n_i-n_j, 2(2d+1-i-j)+n_i+n_j)$ 和 $B = (2\left(2d+1-i-j\right)+m_i+m_j, i+j-m_i-m_j)$。

PSfrag 替换

PSfrag 替换

PSfrag rep lacemen ts



(i) $V_i = V_{1,2i} = V_{2,2i}$ 和$V_j = V_{1,2j} = V_{2,2j}$　(ii) $V_i = V_{1,2i} = V_{2,2i}$ 和 $V_{1,2j} \neq V_{2,2j}$　(iii)$V_{1,\ 2i} \neq V_{2,\ 2i}$ 和 $V_{1,\ 2j} \neq V_{2,\ 2j}$

图 2：顶点的可能构型。

构型 (i)： 若 $V_i = V_{1,\,2i} = V_{2,\,2i}$ 和 $V_j = V_{1,\,2j} = V_{2,\,2j}$，则可知 $C = V_{1,\,i+j} = V_{2,\,i+j}$ 位于由 V_i 和 V_j 确定的线段上，并且根据引理 1，它不是 $b(\mathcal{X})$ 的牛顿图的顶点。

构型 (ii)：如果 $V_i = V_{1,2i} = V_{2,2i}$ 和 $V_{1,2j} \neq V_{2,2j}$，那么 $V_{1,i+j}$ 和 $V_{2,i+j}$ 属于线段 AB，其中 A 和 B 分别属于线段 $V_iV_{2,2j}$ 和 $V_iV_{1,2j}$。因此，根据引理 1，$V_{1,i+j}$ 和 $V_{2,i+j}$ 不是 $b(\mathcal{X})$ 的牛顿图的顶点。类似地，可以证明 $V_{1,2i} \neq V_{2,2i}$ 和 $V_{1,2j} = V_{2,2j}$ 的情形。

构型 (iii)： 与**构型 (ii)**同理，$V_{1,i+j}$ 和 $V_{2,i+j}$ 不是 $b(\mathcal{X})$ 的牛顿图的顶点。

命题的证明完成。 □

下一个结果可见于 [31], ，它描述了向量场 $b(\mathcal{X})$ 的原点的一个性质。

命题 4 (见 [31])。 设 $F = (f, g) \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 是一个多项式映射，满足 $F(0,0) = (0,0)$，且对所有 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$，有 $\det DF(x, y) \neq 0$。那么，向量场 $b(\mathcal{X})$ 的原点没有抛物扇区。

Th向量场 $b(\mathcal{X})$ 的牛顿图性质如下 s.

定理6。 设 $\mathcal{N}(b(\mathcal{X}))$ 为系统 (3.3)的牛顿图。以下结论成立。

(a) 每条有界边对应的哈密顿量均非零。(b) 牛顿图 $\mathcal{N}(b(\mathcal{X}))$ 有两个外部顶点。此外，若$(\tilde{a}, 0)$ 和 $\left(0, \tilde{b}\right)$ 是~多项式 $\mathcal{N}(b(\mathcal{X}))$两个外部顶点的向量系数，则 $\tilde{a}\tilde{b} < 0$.(c) $\mathcal{N}(b(\mathcal{X}))$ 的所有内部顶点均满足 $\beta > 0$.(d) $\mathcal{N}(b(\mathcal{X}))$ 的所有顶点的坐标均为偶数。

证明。 (a) 假设存在一条边，其相应的哈密顿量 $h_{r_{\mathbf{t}}+|\mathbf{t}|} \equiv 0$。那么，根据命题 1， $b(\mathcal{X})$ 的原点是一个结点。这与命题 4矛盾。

(b)根据命题 3，可知以下对象的牛顿图 $\mathscr{Y}$ 和 $b(\mathcal{X})$ 在 $\mathcal{N}(b(\mathcal{X}))$ 存在外部顶点时具有相同的~外部顶点。对于向量场 $\mathscr{Y}$，有

$$\begin{aligned} v \cdot \dot{u}\big|_{u=0} &= -v^2 \sum_{i=1}^{d} v^{4d-4i} \left(v f_i(0,v)\, f_{iy}(0,v) + v g_i(0,v)\, g_{iy}(0,v) \right) \\ &= -v^2 \sum_{i=1}^{d} i v^{4d-4i} \left(f_i^2(0,v) + g_i^2(0,v) \right) \end{aligned} \tag{3.8}$$

and

$$\begin{aligned} u \cdot \dot{v}\big|_{v=0} &= u^2 \sum_{i=1}^{d} u^{4d-4i} \left(u f_i(u,0)\, f_{ix}(u,0) + u g_i(u,0)\, g_{ix}(u,0) \right) \\ &= u^2 \sum_{i=1}^{d} i u^{4d-4i} \left(f_i^2(u,0) + g_i^2(u,0) \right). \end{aligned} \tag{3.9}$$

显然， $v \cdot \dot{u}\big|_{u=0} \neq 0$和 $u \cdot \dot{v}\big|_{v=0} \neq 0$。因此， $\mathcal{N}(b(\mathcal{X}))$ 有两个外部顶点。 v 中 $v \cdot \dot{u}\big|_{u=0}$ 的最低次项系数与 u 中 $u \cdot \dot{v}\big|_{v=0}$ 的最低次项系数分别为负和正。**(b)**中的陈述得以证实。

(c) 根据命题 4，向量场 $b(\mathcal{X})$ 的原点没有抛物扇区。由命题 2，可得 $\beta > 0$。

(d) 应用引理 3， $\mathcal{F}_{4d+1-2i}$ 和 $\left(u^2+v^2\right)^{2d+1-2i}\left(f_i^2+g_i^2\right)$ 的牛顿图在 $i=1,\ldots,d$处具有相同的顶点。因此， $\mathcal{N}(\mathcal{F}_{4d+1-2i})$ 的所有顶点坐标均为偶数，见（3.7）。由命题 3，结论 (d)成立。

证明到此结束。 □

Tian and Zhao [31] 证明了以下等价结果，揭示了多项式映射 F的全局性质与 $b(\mathcal{X})$ 的局部动力学性质之间的关系。

定理7 (见 [31])。 设 $F=(f,g)\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 是一个多项式映射，满足 $F(0,0)=(0,0)$，且对于所有 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$，均有 $\det DF(x,y)\neq 0$。那么，以下命题等价。

(a) F 是一个从平面到其自身的全局微分同胚。

(b) 向量场 $b(\mathcal{X})$ 的原点是一个单调奇点。

定理3的证明。 利用定理5和6，可知 $b(\mathcal{X})$ 的原点是一个单调奇点。因此，根据定理7，本定理立即得证。 □

定理 4 的证明。令 $f(x,y)=\sum_{i=1}^{n}f_i(x,y)$， $g(x,y)=\sum_{j=1}^{m}g_j(x,y)$，且 $d=\max\{n,m\}$，其中 $f_i(x,y)$ 和 $g_j(x,y)$ 分别是次数为 i和 j的齐次多项式。向量场 (1.1) 的哈密顿量为

$$H(x,y)=\frac{f^2(x,y)+g^2(x,y)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{l=2}^{2d}H_l(x,y), \tag{3.10}$$

其中 $H_l=f_if_j+g_ig_j$是次数为 l的齐次多项式，且对于 $i,j=1,\ldots,d$， $i+j=l$。显然，$\deg H=2d$ 和 $H_{2d,\ x}^2+H_{2d,\ y}^2\neq 0$。我们的证明可分为三种情形。

情形 1： $\deg H_x=\deg H_y$。在这种情形下，多项式 ff_x+gg_x 和 ff_y+gg_y 的高次齐次项为

$$\frac{1}{2}H_{2d,x}(x,y)=f_d(x,y)f_{d,x}(x,y)+g_d(x,y)g_{d,x}(x,y)\not\equiv 0$$

and

$$\frac{1}{2}H_{2d,y}(x,y)=f_d(x,y)f_{d,y}(x,y)+g_d(x,y)g_{d,y}(x,y)\not\equiv 0,$$

分别。注意， $H_{2d}(x,0)=f_d^2(x,0)+g_d^2(x,0)\not\equiv 0$，且 $H_{2d}(0,y)=f_d^2(0,y)+g_d^2(0,y)\not\equiv 0$。若 $H_{2d}(x,0)\equiv 0$，则 $y|f_d(x,y)$ 和 $y|g_d(x,y)$。因此，$y|H_{2d,\ x}(x,y)$ 和 $y|H_{2d,\ y}(x,y)$。这与以下事实矛盾：$H_{2d,\ x}(x,y)$ 和 $H_{2d,\ y}(x,y)$ 没有公有的实线性因子。类似地， $H_{2d}(0,y)\not\equiv 0$。因此，$f_d^2(x,0)+g_d^2(x,0)=ax^{2d}$，且 $f_d^2(0,y)+g_d^2(0,y)=by^{2d}$，其中 $a>0,b>0$。

根据命题3，.....的牛顿图

$$\widetilde{\mathscr{Y}}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\mathcal{F}_{4d+1-2i}$$

和 $b(\mathcal{X})$ 具有相同的顶点，其中

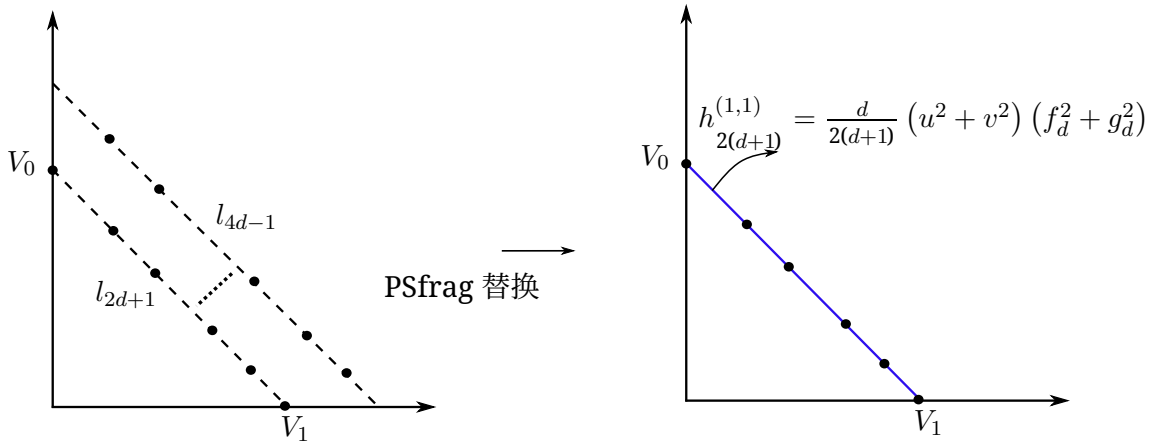
$$\mathcal{F}_{4d+1-2i}=\begin{pmatrix}\left(u^2+v^2\right)^{2d-2i}\left[\left(u^2-v^2\right)\partial_v\left(f_i^2+g_i^2\right)-2uv\partial_u\left(f_i^2+g_i^2\right)\right]\\ \left(u^2+v^2\right)^{2d-2i}\left[\left(u^2-v^2\right)\partial_u\left(f_i^2+g_i^2\right)+2uv\partial_v\left(f_i^2+g_i^2\right)\right]\end{pmatrix}^T$$

$\widetilde{\ }$当 $i=1,\ldots,d$ 时。对于向量场 $\mathscr{Y}$，我们有

$$v\cdot\dot{u}\big|_{u=0}=-bdv^{2d+2}+o\left(v^{2d+2}\right)\quad\text{and}\quad u\cdot\dot{v}\big|_{v=0}=adu^{2d+2}+o\left(u^{2d+2}\right)$$

（见方程（3.8）和（3.9））。因此， $\mathcal{N}$（b（$\mathcal{X}$））的外部顶点为 $V_0=$（0， $2d+2$）和 $V_1=$（$2d+2$， 0）。由引理3 可知， $\mathcal{F}_{4d+1-2i}$ 与

$\left(u^2+v^2\right)^{2d+1-2i}\left(f_i^2+g_i^2\right)$ 在 $i=1$、……、d处具有相同的顶点。因此，根据引理 2 的陈述（b），$\mathcal{F}_{4d+1-2i}$ 的顶点位于直线 $l_{4d+1-2i}$:$x+y=4d+2-2i$ 上，其中 $i=1$、……、d。所以，向量场$b(\mathcal{X})$的支撑集构型如图 3（i）所示。$b(\mathcal{X})$的牛顿图由两个外部顶点$V_0=(0,2d+2)$和$V_1=(2d+2,0)$以及一条类型为$(1,1)$的唯一有界边组成，见图 3（ii）。



(i) $b(\mathcal{X})$ 的支撑集构型。　　(ii) 牛顿图。

图 3：$b(\mathcal{X})$ 的支撑集构型与 $b(\mathcal{X})$ 的牛顿图。

对于向量场 $b(\mathcal{X})$，类型 $(1,1)$ 的最低次齐次项为

$$\frac{1}{2}\mathcal{F}_{2d+1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\left(u^2-v^2\right)\partial_v\left(f_d^2+g_d^2\right)-2uv\partial_u\left(f_d^2+g_d^2\right)\\ \left(u^2-v^2\right)\partial_u\left(f_d^2+g_d^2\right)+2uv\partial_v\left(f_d^2+g_d^2\right)\end{pmatrix}^T.$$

因此，与类型 $(1,1)$ 的边相关联的哈密顿量为

$$h^{(1,1)}_{2(d+1)}=\frac{d}{2(d+1)}\left(u^2+v^2\right)\left(f_d^2(u,v)+g_d^2(u,v)\right).$$

假设 $h_2^{(1,1)}{}_{(d+1)}$ 含有因子 $v-\lambda u$，其中 $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$。也就是说，$f_d^2(u,v)+g_d^2(u,v)$ 含有因子 $v-\lambda u$，其中 $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$。因此，$v-\lambda u|f_d(u,v)$ 和 $v-\lambda u|g_d(u,v)$。这意味着 $H_{2d,x}$ 和 $H_{2d,y}$ 具有公共因子 $y-\lambda x$，这与定理的假设相矛盾。因此，哈密顿量 $h_2^{(1,1)}{}_{(d+1)}$ 不含有形如 $v-\lambda u$ 且满足 $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 的因子。

情形 2： $\deg H_x>\deg H_y$。在这种情形下，$\deg H_x=2d-1$ 和 $\deg H_y=d_1-1$，其中 $2d>d_1>1$。于是 $H_{2d,\ x}\not\equiv 0$ 和 $H_{2d,\ y}\equiv 0$。显然，哈密顿量 $H(x,y)$ 具有如下形式

$$H(x,y)=\frac{1}{2}\left(H_{2d}(x)+H_{2d-1}(x)+\cdots+H_{\bar{d}_1+1}(x)+H_{\bar{d}_1}(x,y)+\cdots+H_2(x,y)\right),\qquad(3.11)$$

其中 $H_j(x)=a_jx^j$，适用于 $j=\bar{d}_1+1,\ldots,2d$，且 $a_{2d}>0$，$H_{\bar{d}_1,\ y}(x,y)\not\equiv 0$，而 $H_i(x,y)$ 是一个次数为 i 的齐次多项式，适用于 $i=2,\ldots,d_1$。多项式 ff_x+gg_x 和 ff_y+gg_y 的高次齐次项分别为 $da_{2d}x^{2d-1}$ 和 $H_{\bar{d}_1,\ y}(x,y)/2$。由于 x^{2d-1} 和 $H_{\bar{d}_1,\ y}(x,y)$ 没有公有的实线性因子，因此必有

$$H_{\bar{d}_1}(x,y)=by^{\bar{d}_1}+\sum_{i+j=\bar{d}_1,\ i\geq 1}b_{ij}x^iy^j\qquad(3.12)$$

满足 $b\neq 0$。由方程（3.10）、（3.11）和（3.12），可得

$$\frac{f^2(0,y)+g^2(0,y)}{2}=H(0,y)=\frac{1}{2}\left(by^{\bar{d}_1}+\cdots+H_2(0,y)\right).$$

¯因此， d_1 为偶数，且 $b>0$；方程（3.12）可改写为

$$H_{\bar{d}_1}(x,y)=H_{2d_1}(x,y)=by^{2d_1}+\sum_{i+j=2d_1,\,i\geq 1}b_{ij}x^iy^j \tag{3.13}$$

与 $b>0$。

根据方程（1.2），b（$\mathcal{X}$）的表达式为

$$\begin{aligned}\dot{u}&=\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{2d}\left(u^2+v^2\right)^{2d-i}\left(\left(u^2-v^2\right)H_{i,v}(u,v)-2uvH_{i,u}(u,v)\right),\\ \dot{v}&=\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{2d}\left(u^2+v^2\right)^{2d-i}\left(\left(u^2-v^2\right)H_{i,u}(u,v)+2uvH_{i,v}(u,v)\right),\end{aligned} \tag{3.14}$$

其中 H_i，$i=2$，3，……，$2d$ 由（3.11）给出。令

$$\mathcal{F}_{4d+1-i}=\begin{pmatrix}\left(u^2+v^2\right)^{2d-i}\left(\left(u^2-v^2\right)H_{i,v}(u,v)-2uvH_{i,u}(u,v)\right)\\ \left(u^2+v^2\right)^{2d-i}\left(\left(u^2-v^2\right)H_{i,u}(u,v)+2uvH_{i,v}(u,v)\right)\end{pmatrix}^T\in\mathcal{Q}^{(1,1)}_{4d+1-i} \tag{3.15}$$

对于 $i=2$、3、……、$2d$。于是，

$$\operatorname{supp}(b(\mathcal{X}))=\bigcup_{i=2}^{2d}\operatorname{supp}(\mathcal{F}_{4d+1-i}).$$

根据引理2的陈述（a），supp（$\mathcal{F}_{4d+1-i}$）位于直线 l_{4d+1-i}：$x+y=4d+2-i$对于 $i=2$、3、……、$2d$。由引理3，$\mathcal{F}_{4d+1-i}$和 $\left(u^2+v^2\right)^{2d+1-i}H_i$（$u$，$v$）的牛顿图具有相同的顶点，当 $i=2$，3，……，$2d$。

此外，对于 $i=2d_1+1$、……、$2d$，有 $\left(u^2+v^2\right)^{2d+1-i}H_i(u,v)=\left(u^2+v^2\right)^{2d+1-i}H_i(u)=a_iu^i\left(u^2+v^2\right)^{2d+1-i}$。因此，$\mathcal{F}_{4d+1-i}$的牛顿图的顶点为

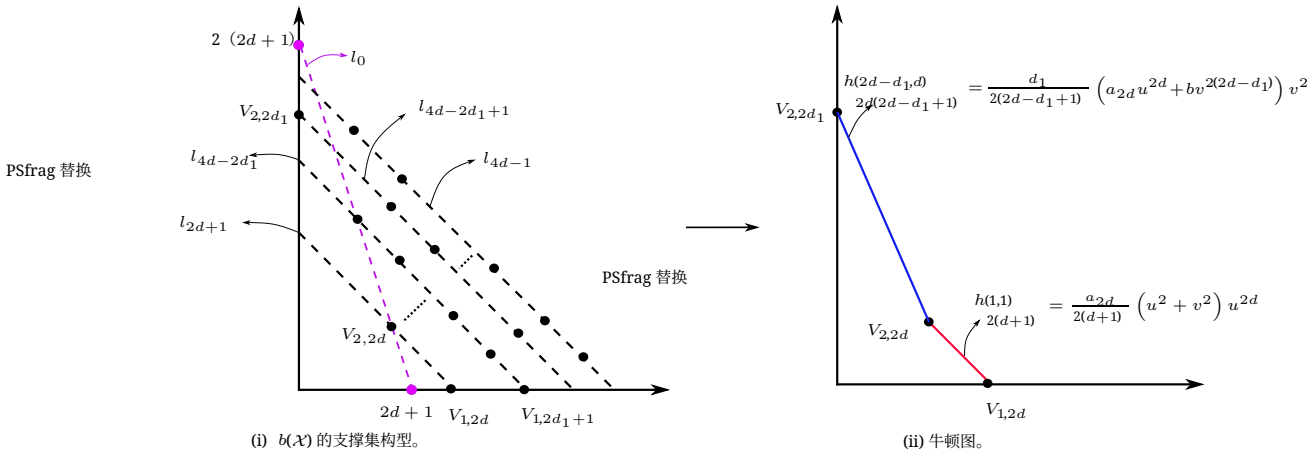
$$V_{1,i}=(2(2d+1)-i,0)\quad\text{and}\quad V_{2,i}=(i,2(2d+1-i))$$

对于 $i=2d_1+1,\ldots,2d$。注意，$V_{2,\,i}$位于直线 l_0：$2x+y=2(2d+1)$ 上，其中$i=2d_1+1,\ldots,2d$。

对于 $i=2d_1$，$\mathcal{F}_{4d+1-2d_1}$ 的牛顿图有一个外部顶点

$$V_{2,2d_1}=(0,2(2d+1-d_1))$$

由方程（3.13）得到。基于上述分析，我们得到向量场 $b(\mathcal{X})$ 的支撑集构型，见图 4 的 (i)。因此，$b(\mathcal{X})$ 的牛顿图有两个外部顶点 $V_{1,2d}=(2(d+1),0)$ 和 $V_{2,2d_1}=(0,2(2d+1-d_1))$，以及一个内部顶点 $V_{2,2d}=(2d,2)$，还有类型为 $(2d-d_1,d)$ 和 $(1,1)$ 的两条边，如图 4 的 (ii) 所示。与顶点 $V_{1,2d}$、$V_{2,2d}$ 和 $V_{2,2d_1}$ 相关联的向量场分别为$\left(0、\ a_{2d}du^{2d+1}\right)$、$\left(-2a_{2d}du^{2d}v、\ -a_{2d}du^{2d-1}v^2\right)$和$\left(-bd_1v^{2(2d-d_1)+1}、\ 0\right)$。



(i) $b(\mathcal{X})$ 的支撑集构型。　　(ii) 牛顿图。

图 4：$b(\mathcal{X})$ 的支撑集构型以及 $b(\mathcal{X})$ 的牛顿图。

对于向量场 $b(\mathcal{X})$，类型为 (1, 1) 的最低次齐次项为

$$\frac{1}{2}\mathcal{F}_{2d+1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\left(u^2-v^2\right)H_{2d,v}(u,v)-2uvH_{2d,u}(u,v)\\ \left(u^2-v^2\right)H_{2d,u}(u,v)+2uvH_{2d,v}(u,v)\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}-2a_{2d}du^{2d}v\\ a_{2d}d\left(u^2-v^2\right)u^{2d-1}\end{pmatrix}^T.$$

于是，与类型为 (1, 1) 的边相关联的哈密顿量为

$$h^{(1,1)}_{2(d+1)}=\frac{a_{2d}d}{2(d+1)}\left(u^2+v^2\right)u^{2d}.$$

为了得到类型为 $(2d-d_1,d)$ 的最低次数拟齐次项，我们必须确定是否存在某个其他顶点 $V_{2,i}$ 属于边 $V_{2,2d_1}V_{2,2d}$。我们再次指出，顶点 $V_{2,i}$ 位于直线 l_0： $2x+y=2(2d+1)$ 对于 $i=2d_1+1,\ldots,2d$，参见图 4 的 (i)。这意味着

$$\overline{V_{2,2d_1}V_{2,2d}}\cap\operatorname{supp}(b(\mathcal{X}))=\{V_{2,2d_1},V_{2,2d}\}.$$

因此，最低 次数拟齐次项（类型为 $(2d-d_1,d)$）对于向量场 $b(\mathcal{X})$ 是 e

$$\begin{pmatrix}-bd_1v^{2(2d-d_1)+1}-2a_{2d}du^{2d}v\\ -a_{2d}du^{2d-1}v^2\end{pmatrix}^T.$$

与类型为 $(2d-d_1,d)$ 的边相关联的哈密顿量为

$$h^{(2d-d_1,d)}_{2d(2d-d_1+1)}=\frac{d_1}{2(2d-d_1+1)}\left(a_{2d}\left(u^d\right)^2+b\left(v^{2d-d_1}\right)^2\right)v^2$$

其中 $a_{2d}>0$ 和 $b>0$。由此可知，哈密顿量 $h^{(2d-d_1,d)}{}_{2d(2d-d_1+1)}$ 和 $h^{(1,1)}_{2}{}_{(d+1)}$ 不含有形如 $v^{t_1}-\lambda u^{t_2}$ 且 $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 的因子。

情形 3： $\deg H_y>\deg H_x$。此情形的证明可通过交换变量 x和 y，以与**情形 2** 相同的方式完成。

我们完成定理 4的证明。 □

4 例子 1 和 2 的证明

本节中，我们求解例子 1 和 2 ，以应用定理 3。

例子 1的证明。 设 $\bar{g}(x)=\sum_{i=1}^m b_ix^{2i}$。则式（1.1）的哈密顿量为

$$H(x,y)=\frac{f^2(x)+(y+\bar{g}(x))^2}{2}=\frac{1}{2}\left(f^2(x)+\bar{g}^2(x)+2y\bar{g}(x)+y^2\right),$$

其中 $f(x)=\sum_{i=0}^n a_ix^{2i+1}$。由于 $2(2n+1)=\max\{\deg f^2,\ \deg\bar{g}^2\}>\deg(y\bar{g})=2m+1>2$，哈密顿量 $H(x,y)$ 可写成如下形式

$$\begin{aligned}H(x,y)=&\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{2(2n+1)}H_i(x,y)\\ =&\frac{1}{2}\left(H_{2(2n+1)}(x)+H_{4n}(x)+\cdots+H_{2(m+2)}(x)+H_{2(m+1)}(x)+H_{2m+1}(x,y)+\cdots+H_2(x,y)\right),\end{aligned}\tag{4.1}$$

其中 $H_i(x,y)$ 是次数为 i 的齐次多项式，而 $H_i(x,y)=H_i(x)=c_ix^i$ 对于 $i=2(m+1)$，$2(m+2)$……，$4n$，$2(2n+1)$，其中 $c_{2(2n+1)}=a_n^2>0$，且对于 $i=2,3$，……，$2m+1$，

$$H_i(x,y)=\begin{cases}(a_0^2+b_1^2)x^2+y^2,\ \text{if } i=2,\\ c_ix^i,\ \text{if } i \text{ is even with } i\geq 4,\\ 2b_{(i-1)/2}x^{i-1}y,\ \text{if } i \text{ is odd.}\end{cases}\tag{4.2}$$

利用方程（1.2），紧化向量场 $b(\mathcal{X})$ 为

$$\begin{aligned}\dot{u}&=\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{2(2n+1)}\left(u^2+v^2\right)^{2(2n+1)-i}\left(\left(u^2-v^2\right)H_{i,v}(u,v)-2uvH_{i,u}(u,v)\right),\\ \dot{v}&=\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{2(2n+1)}\left(u^2+v^2\right)^{2(2n+1)-i}\left(\left(u^2-v^2\right)H_{i,u}(u,v)+2uvH_{i,v}(u,v)\right),\end{aligned}\tag{4.3}$$

其中 $H_i,\ i=2,3,\ldots,2m+1,2(m+1),2(m+2)\ldots,2(2n+1)$ 在（4.1）中给出。通过与定理 4 的证明中情形 2 类似的分析4，我们得到以下结论：

(i) $\mathcal{F}_{8n+5-i}$ 的支撑集（见（3.15））位于直线 l_{8n+5-i}：$x+y=2(4n+3)-i$ 当 $i=2,3,\ldots,2m+1,2(m+1),2(m+2)\ldots,2(2n+1)$。

(ii) 如果 $i=2$，那么 $\mathcal{F}_{8n+3}$ 的牛顿图有一个外部顶点 $V_{2,2}=(0,4(2n+1))$。

(iii) 若 i 与 $i\geq 4$ 和 $c_i\neq 0$ 奇偶性相同，则 $\mathcal{F}_{8n+5-i}$ 的牛顿图的顶点为

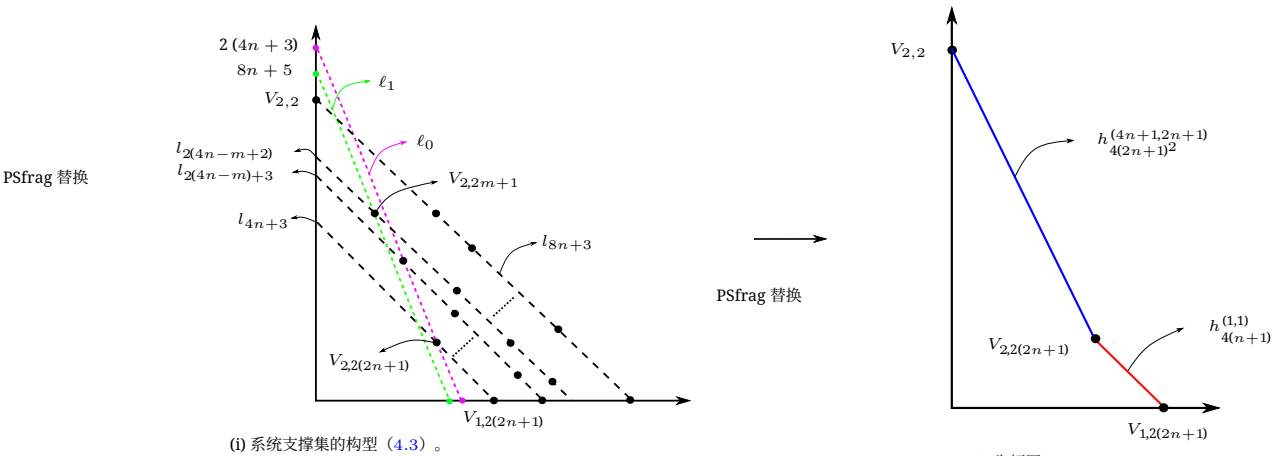
$$V_{1,i}=(2(4n+3)-i,0)\quad\text{and}\quad V_{2,i}=(i,2(4n+3-i)).$$

此外，$V_{2,\ i}$ 位于直线 ℓ_0：$2x+y=2(4n+3)$ 上。

(iv) 若 i 与 $3\leq i\leq 2m+1$ 和 $b_{(i-1)/2}\neq 0$ 奇偶性不同，则$\mathcal{F}_{8n+5-i}$ 的牛顿图的顶点为

$$V_{1,i}=(8n+5-i,1)\quad\text{and}\quad V_{2,i}=(i-1,8n+7-2i).\tag{4.4}$$

此外，$V_{2,\ i}$ 位于直线 ℓ_1：$2x+y=8n+5$ 上。



(i) 系统支撑集的构型（4.3）。　　(ii) 牛顿图。

图5：系统（4.3）的支撑集构型及系统（4.3）的牛顿图。

因此，向量场（4.3）的支撑集构型如图5的(i)所示。根据定理6的陈述(d)，如果 i 与 $3\leq i\leq 2m+1$ 和 $b_{(i-1)/2}\neq 0$为奇数，则顶点$V_{2,i}$ 不是系统（4.3）的牛顿图的顶点。由此可得，系统（4.3）的牛顿图有两个外部顶点$V_{2,2}=(0,4(2n+1))$和$V_{1,2(2n+1)}=(4(n+1),\ 0)$，一个内部顶点$V_{2,2(2n+1)}=(2(2n+1),\ 2)$，以及两条类型分别为$(4n+1,2n+1)$和$(1,1)$的边，见图5的(ii)。与顶点$V_{2,2}$, $V_{2,2(2n+1)}$ 和$V_{1,2(2n+1)}$ 相关联的向量场分别为 $\left(-v^{8n+3},0\right)$,$\left(-2(2n+1)\ c_{2(2n+1)}u^{2(2n+1)}v,-(2n+1)\ c_{2(2n+1)}u^{4n+1}v^2\right)$ 和 $\left(0,(2n+1)\ c_{2(2n+1)}u^{4n+3}\right)$。

对于向量场（4.3），类型为 $(1,\ 1)$ 的最低次齐次项为

$$\frac{1}{2}\mathcal{F}_{4n+3}=\begin{pmatrix}-2(2n+1)\,c_{2(2n+1)}u^{2(2n+1)}v\\ (2n+1)\,c_{2(2n+1)}\left(u^2-v^2\right)u^{4n+1}\end{pmatrix}^T.$$

因此，与类型为 (1, 1) 的边相关联的哈密顿量为

$$h_{4(n+1)}^{(1,1)}=\frac{(2n+1)\,c_{2(2n+1)}}{4\,(n+1)}\left(u^2+v^2\right)u^{2(2n+1)}.$$

接下来，我们计算与类型为（$4n+1,2n+1$）的边相关的哈密顿量。经过 V_2,2 和 $V_{2,2(2n+1)}$ 的直线 ℓ_2 是（$4n+1$） $x+$（$2n+1$） $y=4$（$2n+1$）^{2}。直线 ℓ_1 和 ℓ_2 相交于点（$2n+1,4n+3$）。如果（$2n+1,4n+3$）$\in$ supp（b（$\mathcal{X}$））， 根据（4.4），则存在一个奇数 i 使得 $i-1=2n+1$，这是不可能的。因此，

$$\ell_2\cap\operatorname{supp}\left(b\left(\mathcal{X}\right)\right)=\left\{V_{2,2},V_{2,2(2n+1)}\right\}.$$

最低次数　　的类型为 （$4n+1$， $2n+1$） 向量场（4.3）的最低次数拟齐次项为

$$\begin{pmatrix}-v^{8n+3}-2\,(2n+1)\,c_{2(2n+1)}u^{2(2n+1)}v\\-(2n+1)\,c_{2(2n+1)}u^{4n+1}v^2\end{pmatrix}^T.$$

由此可知，与类型为（$4n+1,2n+1$）的边相关的哈密顿量为

$$h_{4(2n+1)^2}^{(4n+1,2n+1)}=\frac{1}{4(2n+1)}\left(c_{2(2n+1)}\left(u^{2n+1}\right)^2+\left(v^{4n+1}\right)^2\right)v^2$$

满足 $c_{2(2n+1)}>0$。显然，哈密顿量 $h_{4\ 2n+1\ ^2}^{(4n+1,2n+1)}$ ()和 $h_4^{(1,1)}$ $_{(n+1)}$ 不含形如 $v^{t_1}-\lambda u^{t_2}$ 且满足 $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 的因子。根据定理 3，多项式映射 F 是单射。 □

例 2 的证明。设 $\bar{f}(y)=\sum_{i=0}^{m_1}a_iy^{2i+1},\tilde{f}(x)=\sum_{i=0}^{m_2}b_ix^{2i+1},\bar{g}(y)=\sum_{i=0}^{m_3}c_iy^{2i+1}$ 和$\tilde{g}(x)$ $=\sum_{i=0}^{m_2}d_ix^{2i+1}$。于是，向量场（1.1）的哈密顿量为

$$H\left(x,y\right)=\frac{f^2+g^2}{2}=\frac{1}{2}\left(\bar{f}^2\left(y\right)+\bar{g}^2\left(y\right)+2\left(\bar{f}\left(y\right)\tilde{f}\left(x\right)-\bar{g}\left(y\right)\tilde{g}\left(x\right)\right)+\tilde{f}^2\left(x\right)+\tilde{g}^2\left(x\right)\right).$$

由于 $m_1>\max\{m_2,m_3\}$，我们有 $2\,(2m_1+1)=\max\left\{\deg\ \bar{f}^2,\ \deg\ \bar{g}^2\right\}>\max\left\{\deg\left(\bar{f}\tilde{f}\right),\right.$ $\left.\deg\left(\bar{g}\tilde{g}\right)\right\}=2\,(m_1+m_2+1)>2\,(2m_2+1)=\max\left\{\deg\ \tilde{f}^2,\ \deg\ \tilde{g}^2\right\}$。因此，哈密顿量 $H(x,$ $y)$ 可以表示为如下形式

$$\begin{aligned}H\left(x,y\right)=&\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2m_1+1}H_{2k}\left(x,y\right)\\=&\frac{1}{2}\Big(a_{m_1}^2y^{2(2m_1+1)}+H_{4m_1}\left(y\right)+\cdots+H_{2(m_1+m_2+2)}\left(y\right)+\alpha_{2(m_1+m_2+1)}y^{2(m_1+m_2+1)}\\&+2a_{m_1}b_{m_2}x^{2m_2+1}y^{2m_1+1}+H_{2(m_1+m_2)}\left(x,y\right)+\cdots+H_{4(m_2+1)}\left(x,y\right)+\alpha_{2(2m_2+1)}y^{2(2m_2+1)}\\&+\sum_{i+j=2m_2}\alpha_{i,j}x^{2i+1}y^{2j+1}+\left(b_{m_2}^2+d_{m_2}^2\right)x^{2(2m_2+1)}+H_{4m_2}\left(x,y\right)+\cdots+H_2\left(x,y\right)\Big),\end{aligned}\tag{4.5}$$

其中， $H_{2k}(x,y)$ 是次数为 $2k$ 的齐次多项式（ $k=1$， 2，…， $2m_1+1$），而 $H_{2k}(x,y)$ 属于以下三种类型之一：
类型 I: $H_{2k}\left(x,y\right)=\alpha_{2k}y^{2k}$,
类型 II: $H_{2k}(x,y)=\alpha_{2k}y^{2k}+\sum_{i+j+1=k}\alpha_{i,j}x^{2i+1}y^{2j+1}$ 其中 $2\,(m_2+1)\le k\le m_1+m_2+1$,

类型 III: $H_{2k}(x,y)=\alpha_{2k}y^{2k}+\sum_{i+j+1=k}\alpha_{i,j}x^{2i+1}y^{2j+1}+\beta_{2k}x^{2k}$ 其中 $k\le 2m_2+1$.

这里有 $0\le i\le m_2$ 和 $0\le j\le m_1$。

应用方程（1.2），$\mathcal{X}$ 的 Bendixson 紧化为

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2m_1+1}\left(u^2+v^2\right)^{2(2m_1-k+1)}\left(\left(u^2-v^2\right)H_{2k,v}(u,v)-2uvH_{2k,u}(u,v)\right),\\ \dot{v} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2m_1+1}\left(u^2+v^2\right)^{2(2m_1-k+1)}\left(\left(u^2-v^2\right)H_{2k,u}(u,v)+2uvH_{2k,v}(u,v)\right),\end{aligned} \tag{4.6}$$

其中 $H_{2k},\ k=1,2,\ldots,2m_1+1$ 见式（4.5）。重复定理 **情形 2**的证明4中的证明过程，可得以下结果:

(i) $\mathcal{F}_{2(4m_1-k)+5}$ 的支撑集（见（3.15））位于直线 $l_{2(4m_1-k)+5}$ 上: $x+y=2(4m_1-k+3)$，其中 $k=1,2,\ldots,2m_1+1$。

(ii) 若 $H_{2k}(x,y)=\alpha_{2k}y^{2k}$（即 **类型 I**）且 $\alpha_{2k}\neq 0$，则$\mathcal{F}_{2(4m_1-k)+5}$ 的牛顿图顶点为

$$V_{1,k}=\left(2\left(4m_1-2k+3\right),2k\right)\quad\text{and}\quad V_{2,k}=\left(0,2\left(4m_1-k+3\right)\right).$$

此外，$V_{1,k}$ 位于直线 ℓ_0: $x+2y=2(4m_1+3)$ 上。

(iii) 若 $k=2m_2+1$，则 $\beta_{2(2m_2+1)}=b_{m_2}^2+d_{m_2}^2>0$，且 $\mathcal{F}_{4(2m_1-m_2)+3}$ 的牛顿图有一个外部顶点 $V_{1,2m_2+1}=(4(2m_1-m_2+1),0)$。

(iv) 若 $H_{2k}(x,y)=\alpha_{2k}y^{2k}+\sum_{i+j+1=k}\alpha_{i,j}x^{2i+1}y^{2j+1}$，且 $0\le i\le m_2$ 和 $0\le j\le m_1$（即 **类型 II**），则 $\mathcal{F}_{2(4m_1-k)+5}$ 的牛顿图的一个顶点为

$$V_{1,k}=\left(2\left(4m_1-j_k-k\right)+5,2j_k+1\right),$$

其中

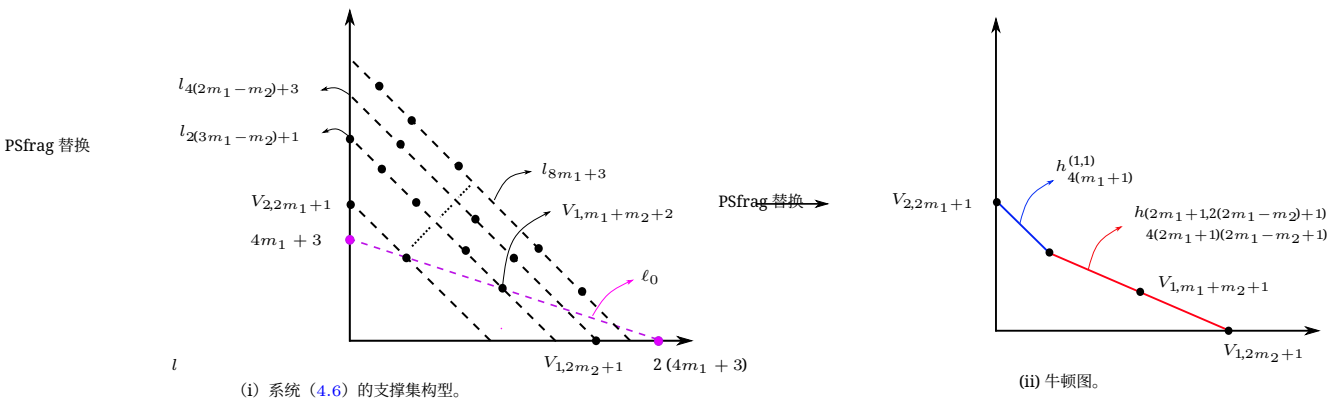
$$j_k=\min\left\{j\mid i+j+1=k,\ 0\le i\le m_2,\ 0\le j\le m_1,\ \alpha_{k-1-j,j}\neq 0\right\}, \tag{4.7}$$

若 $\alpha_{2k}\neq 0$，则另一个顶点 $V_{2,k}=(0,2(4m_1-k+3))$；否则

$$V_{2,k}=\left(2i_k+1,2\left(4m_1-i_k-k\right)+5\right)$$

其中 $i_k=\min\left\{i\mid i+j+1=k,\ 0\le i\le m_2,\ 0\le j\le m_1,\ \alpha_{i,k-1-i}\neq 0\right\}$.

我们指出，如果 $H_{2k}(x,y)$ 具有类型 II 的形式，那么根据定理6的 (d) 项，(iv) 中的顶点 $V_{1,k}$ 并不是系统（4.6）的牛顿图的顶点。因此，向量场（4.6）的支撑集构型如图6的 (i) 所示。我们得到，系统（4.6）的牛顿图具有两个外部顶点 $V_{2,2m_1+1}=(0,4(m_1+1))$ 和 $V_{1,2m_2+1}=(4(2m_1-m_2+1),0)$、一个内部顶点 $V_{1,2m_1+1}=(2,2(2m_1+1))$，以及两条类型分别为 $(1,1)$ 和 $(2m_1+1,2(2m_1-m_2)+1)$ 的边，见图6的 (ii)。此外，与顶点 $V_{2,2m_1+1}$, $V_{1,2m_1+1}$ 和 $V_{1,2m_2+1}$ 相关联的向量场分别为 $\left(-(2m_1+1)a_{m_1}^2v^{4m_1+3},0\right)$,$\left((2m_1+1)a_{m_1}^2u^2v^{4m_1+1},2(2m_1+1)a_{m_1}^2uv^{2(2m_1+1)}\right)$ 和 $\left(0,(2m_2+1)\left(b_{m_2}^2+d_{m_2}^2\right)u^{4(2m_1-m_2)+3}\right)$。



(i) 系统（4.6）的支撑集构型。　　(ii) 牛顿图。

图6：系统（4.6）的支撑集构型及系统（4.6）的牛顿图。

类型 (1, 1) 的最低次齐次项为

$$\frac{1}{2}\mathcal{F}_{4m_1+3}=\begin{pmatrix}(2m_1+1)\,a_{m_1}^2\left(u^2-v^2\right)v^{4m_1+1}\\ 2\,(2m_1+1)\,a_{m_1}^2uv^{2(2m_1+1)}\end{pmatrix}^T.$$

因此，与类型 (1, 1) 的边相关联的哈密顿量为

$$h_{4(m_1+1)}^{(1,1)}=\frac{2m_1+1}{4\,(m_1+1)}a_{m_1}^2\left(u^2+v^2\right)v^{2(2m_1+1)}.$$

接下来，我们计算与类型 $(2m_1+1,2\,(2m_1-m_2)\,+1)$ 的边相关联的哈密顿量。注意，类型 $(2m_1+1,2\,(2m_1-m_2)\,+1)$ 的边位于直线 $\ell_1\colon(2m_1+1)\,x+(2\,(2m_1-m_2)\,+1)\,y\,=\,4($ $2m_1-m_2+1)\,(2m_1+1)$ 上。令 $V_{1,k}$ 和 $V_{2,k}$ 为 $\mathcal{F}_{2(4m_1-k)+5}$ 的牛顿图的顶点，则有

$$\ell_1\cap\operatorname{supp}\left(b\left(\mathcal{X}\right)\right)\subset\bigcup_{k=1}^{2m_1+1}\left\{V_{1,k},V_{2,k}\right\}.$$

根据上述讨论和图 6 的 (i)，我们知道，如果 $H_{2k}\,(x,y)$ 的表达式属于**类型 I** 或**类型 III**，那么 $\mathcal{F}_{2(4m_1-k)+5}$ 的牛顿图的顶点不属于集合

$$\Upsilon=\ell_1\cap\operatorname{supp}\left(b\left(\mathcal{X}\right)\right)\setminus\left\{V_{1,2m_1+1},V_{1,2m_2+1}\right\}.$$

这告诉我们，如果 $\mathcal{F}_{2(4m_1-k)+5}$ 的牛顿图顶点属于 Υ，那么 $H_{2k}\,(x,y)$ 必须具有 **类型 II** 的形式，并且 $V_{1,\ k}=(2(4m_1-j_k-k)\ +5,2j_k+1)\ \in\Upsilon$。因此，

$$(2m_1+1)\,(2\,(4m_1-j_k-k)+5)+(2\,(2m_1-m_2)+1)\,(2j_k+1)=4\,(2m_1-m_2+1)\,(2m_1+1)\qquad(4.8)$$

为求解所有 j_k 和 k 满足方程（4.8）的情形，我们令二元函数 n

$G(j_k,k)\ =(2m_1+1)\,(2\,(4m_1-j_k-k)+5)+(2\,(2m_1-m_2)+1)\,(2j_k+1)-4(2m_1-m_2+1)\,($ $2m_1+1)$，其定义在区域 $\Omega\ =\{(j_k,k)\ \mid 0\leq j_k\leq m_1,\ j_k+1\leq k\leq j_k+m_2+1\}$ 中，见（4.7）。容易验证，

$G_{j_k}(j_k,k)\ =4(m_1-m_2)\ >0,\quad G_k(j_k,k)\ =-2(2m_1+1)\ <0,G(0,k)\ =2(-(2m_1+1)$ $k+3m_1+m_2+4m_1m_2+1)\ \geq G(0,m_2+1)\ =2m_1(2m_2+1)\ >0,G(m_1,k)\ =2(2m_1+1)($ $m_1+m_2+1-k)\ \geq 0,G(j_k,j_k+1)\ =2(-(2m_2+1)j_k+m_1+m_2+4m_1m_2)\ \geq G(m_1,m_1+1)$ $=2m_2(2m_1+1)\ >0,G(j_k,j_k+m_2+1)\ =2(2m_2+1)(m_1-j_k)\ \geq 0.$

因此，函数 $G(j_k,k)$ 在 $j_k=m_1$ and $k=m_1+m_2+1$ 时取得最小值 0。又因为 $\alpha_{m_2,m_1}\ =2a_{m_1}b_{m_2}\ >0$，所以 $\Upsilon\ =\{V_{1,m_1+m_2+1}\}=\{(2\,(2m_1-m_2)\ +3,2m_1+1)\}$，与 V_{1,m_1+m_2+1} 相关联的向量场为

$$\left((2m_1+1)\,a_{m_1}b_{m_2}u^{2(2m_1-m_2)+3}v^{2m_1},(2\,(2m_1+m_2)+3)\,a_{m_1}b_{m_2}u^{2(2m_1-m_2+1)}v^{2m_1+1}\right).$$

因此，向量场$(2m_1+1,2(2m_1-m_2)\ +1)$ （4.6）的最低次数拟齐次项为

$$\begin{pmatrix}(2m_1+1)\ a_{m_1}u^2v^{2m_1}\left(a_{m_1}v^{2m_1+1}+b_{m_2}u^{2(2m_1-m_2)+1}\right)^T(4m_1+2m_2+3)\ a_{m_1}b_{m_2}u^{2(2m_1-m_2+1)}v^{2m_1+1}+2(2m_1+1)\\ a_{m_1}^2uv^{2(2m_1+1)}+(2m_2+1)\ \left(b_{m_2}^2+d_{m_2}^2\right)u^{4(2m_1-m_2)+3}\end{pmatrix},$$

其中 $a_{m_1}>0$、$b_{m_2}>0$ 和 $d_{m_2}>0$。此外，与类型为 $(2m_1+1,2(2m_1-m_2)\ +1)$ 的边相关联的哈密顿量为

$$h_{4(2m_1+1)(2m_1-m_2+1)}^{(2m_1+1,2(2m_1-m_2)+1)}=\frac{2m_2+1}{4\,(2m_1-m_2+1)}\left(\left(a_{m_1}v^{2m_1+1}+b_{m_2}u^{2(2m_1-m_2)+1}\right)^2+\left(d_{m_2}u^{2(2m_1-m_2)+1}\right)^2\right)u^2$$

其中 $a_{m_1}>0$、$b_{m_2}>0$ 和 $d_{m_2}>0$。

不难验证，哈密顿量 $h_4^{(1,1)}{}_{(m_1+1)}$ 和 $h^{(2m_1+1,2}{}_{(2m_1-m_2)+1)\ 4(2m_1+1)(2m_1-m_2+1)}$ 没有形如 $v^{t_1}-\lambda u^{t_2}$ 且满足 $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$的因子。根据定理3，多项式映射 F 是单射。

□

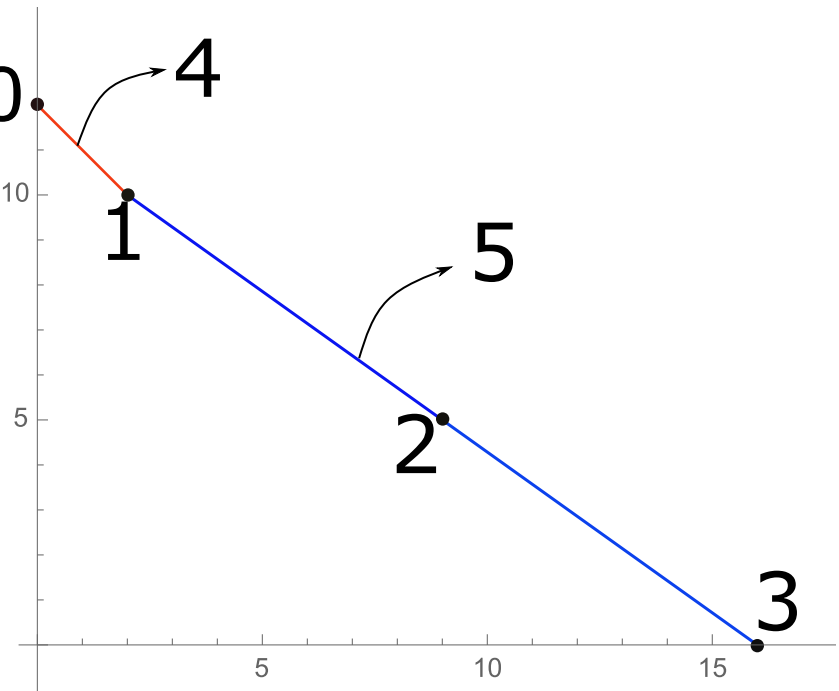
致谢

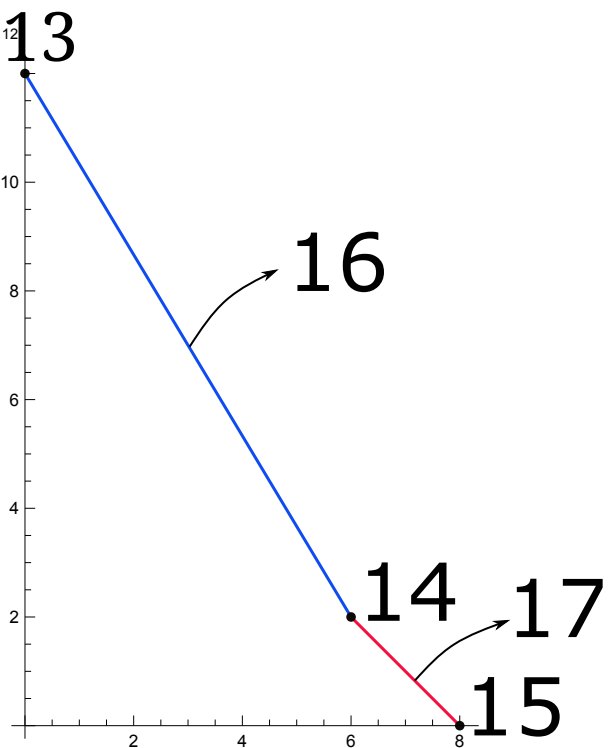
本研究得到国家自然科学基金委员会（编号：11801582、11790273 和 11971495）以及广东省基础与应用基础研究基金（编号：2019A1515011239）的资助。

参考文献

[1] *A. Algaba*、*E. Gamero* 和 *C. García*，《一类平面系统的可积性问题》，《非线性》，*22*（*2009*），*395–420*。[2] *A. Algaba*、*C. García* 和 *M. Reyes*，《平面向量场单调奇点的刻画》，《非线性分析》，*74*（*2011*），*5402–5414*。[3] *A. A. Andronov*、*E. A. Leontovich*、*I. I. Gordon* 和 *A. G. Maĭer*，《二阶动力系统定性理论》，*Halsted*出版社，*1973*。[4] *H. Bass*、*E. H. Connell* 和 *D. Wright*，《雅可比猜想：次数约化与逆映射的形式展开》，《美国数学学会通报（新系列）》，*7*（*1982*），*287–330*。[5] *F. S. Berezovskaya*、*N. B. Medvedeva*，《“中心-焦点”型复杂奇点与牛顿图》，*Selecta Math.*，*13*（*1994*），*1–15*。[6] *F. Braun*、*J. R. dos Santos Filho*，《当一个分量的次数为*3*时，实雅可比猜想 $\mathbb{R}^2$ 成立》，*Discrete Contin. Dyn. Syst.*，*26*（*2010*），*75–87*。[7] *F. Braun*、*J. Giné* 和 *J. Llibre*，《实雅可比猜想 $\mathbb{R}^2$ 成立的一个充分条件》，《微分方程杂志》，*260*（*2016*），*5250–5258*。[8] *F. Braun*、*J. Llibre*，《实雅可比猜想一项结果的新定性证明》，《巴西科学院年鉴》，*87*（*2015*），*1519–1524*。[9] *F. Braun*、*J. Llibre*，《平面上全局中心与全局单射性之间的联系》，*arXiv:1706.*02643 [动力系统]，（*2017*）。[10] *F. Braun*、*B. Oréfice-Okamoto*，《四次多项式淹没映射及实雅可比猜想 $\mathbb{R}^2$》，*J. Math. Anal. Appl.*，*443*（*2016*），*688–706*。[11] *F. Braun*、*C. Valls*，《实雅可比猜想的一个权齐次条件$\mathbb{R}^2$》，*Proc. Edinb. Math. Soc.*，*doi:10.1017/S0013091521000766*，（*2021*）。[12] *M. Brunella*、*M. Miari*，《通过牛顿多面体定义的平面向量场与其主部的拓扑等价》，《微分方程杂志》，*85*（*1990*），*338–366*。[13] *A. Cima*、*A. Gasull*、*J. Llibre* 和 *F. Mañosas*，《通过向量场研究多项式映射的全局单射性》，载于《仿射空间自同构》，*Springer*，*1995*，*105–123*。[14] *A. Cima*、*A. Gasull* 和 *F. Mañosas*，《*n*维实空间 R^n上的多项式局部同胚的单射性》，《非线性分析》，*26*（*1996*），*877–885*。[15] *M. Cobo*、*C. Gutierrez* 和 *J. Llibre*，《实平面映射 C^1 的单射性》，《加拿大数学杂志》，*54*（*2002*），*1187–1201*。[16] *L. M. Drużkowski*，《凯勒雅可比猜想的一种有效方法》，《数学年刊》，*264*（*1983*），*303–313*。[17] *A. Dubouloz*、*K. Palka*，《伪平面上的雅可比猜想不成立》，*Adv. Math.*，*339*（*2018*），*248–284*。

[18] *F. Dumortier*、*J. Llibre* 和 *J. Artés*，《平面微分系统定性理论》，*Springer*，*2006*。[19] *A. Fernandes*、*C. Gutierrez* 和 *R. Rabanal*，《*n*维实空间 $\mathbb{R}^2$上可微向量场的全局渐近稳定性》，《微分方程杂志》，*206*（*2004*），*470–482*。[20] *J. Giné*、*J. Llibre*，《实雅可比猜想$\mathbb{R}^2$ 成立的一个新充分条件》，《微分方程杂志》，*281*（*2021*），*333–340*。[21] *J. Gwoździewicz*，《三次多项式的实雅可比猜想》，第*76*卷，*2001*，*121–125*。[22] *J. Itikawa*、*J. Llibre*，《满足实雅可比猜想 $\mathbb{R}^2$的新型多项式映射》，《巴西科学院年鉴》，*91*（*2019*），*e20170627*。[23] *J. Llibre*、*C. Valls*，《实雅可比猜想 $\mathbb{R}^2$的一个充分条件》，《非线性分析：现实世界应用》，*60*（*2021*），第*103298*号，*10*。[24] *N. B. Medvedeva*，《区分中心与焦点问题的解析可解性》，《斯捷克洛夫数学研究所论文集》，*254*（*2006*），*11–100*。[25] *S. Pinchuk*，《强实雅可比猜想的一个反例》，《数学杂志》，*217*（*1994*），*1–4*。[26] *J. D. Randall*，《实雅可比问题》，载于《奇点（第二部分）》（加利福尼亚州阿卡塔，*1981*），第*40*卷，美国数学学会，*1983*，*411–414*。[27] *K. Rusek*，《凯勒雅可比猜想的一种几何方法》，《数学年刊》，*264*（*1983*），*315–320*。[28] *M. Sabatini*，《等时哈密顿中心与雅可比猜想之间的一种联系》，《非线性分析》，*34*（*1998*），*829–838*。[29] *V. Shpilrain*、*J.-T. Yu*，《多项式收缩与雅可比猜想》，《美国数学会汇刊》，*352*（*2000*），*477–484*。[30] *S. Smale*，《下个世纪的数学问题》，《数学智者》，*20*（*1998*），*7–15*。[31] *Y. Tian*、*Y. Zhao*，《实雅可比猜想的充要条件》，*arXiv:2011.11843v2* [动力系统]，（*2021*）。[32] *A. van den Essen*，《多项式自同构与雅可比猜想》，*Birkhäuser* 出版社，巴塞尔，*2000*。[33] *A. van den Essen*、*S. Kuroda* 和 *A. J. Crachiola*，《多项式自同构与雅可比猜想——*21*世纪初的新结果》，*Springer*，*2021*。


0
10
5
5
10
15
4
1
5
2
3


13
16
14
17
15
12
10
8
6
4
2
2
4
6
8