具有节点优先删除机制的演化网络扩展 SPR

Yue Xiao†，Xiaojun Zhang‡

电子科技大学数学科学学院

中国四川省成都市 611731

†yuexiao@std.uestc.edu.cn

‡sczhxj@uestc.edu.cn

arXiv:2304.00509v1 [math.DS] 2 Apr 2023

摘要

演化网络在现实世界中比静态网络更为普遍，研究其统计特征对于进一步认识和探索这类网络至关重要。然而，由于缺乏有效方法，针对节点择优删除网络的研究仍然很少。本文提出了一种扩展 SPR（ESPR），用于研究这类优先移除网络的基本统计特征，尤其是稳态度分布。与常用的连续统形式主义相比，这种有理论支撑的方法能够保留网络在演化过程中的实际拓扑结构及相应统计特征。通过两个定理，我们证明了 ESPR 在处理节点非均匀移除的演化网络时是有效的；此外，我们还证明了 SPR 是 ESPR 的特例。换言之，ESPR 是研究度分布的实用框架，甚至有望用于解决演化网络的其他统计问题。

索引词

演化网络、节点择优删除、稳态度分布、SPR

I. 引言

COMPLEX 网络是一类直观的特殊结构，由大量通过边相连的节点构成，可从许多领域中提取出来，例如社交网络 [1], 、生物网络 [2], 和电网 [3]。为识别复杂网络的拓扑结构并探索其动态行为，多年来，随着相关理论的发展，研究者一直关注网络的统计特征，例如度分布、度-度相关性等 [4]–[7]。事实上，与有意收集的静态网络数据不同，现实中存在更多演化网络，其中的节点及其附着的边会随着时间推移而增加或删除。例如，邻居较少的终端更容易从互联网中移除；社交网络中的人们则倾向于不断结识新朋友 [8]–[11]。要直接讨论具有不同演化机制的动态网络所呈现的这些复杂统计特征并非易事。

* Xiaojun Zhang 是通讯作者。

在这些重要特征中，自BA模型提出以及网络标度得到进一步研究以来，稳态度分布一直受到关注 [12]。对于这种离散统计量，研究者尝试在处理纯增长网络模型时用连续方程求解。具体而言，Barab´asi和Albert提出了平均场方程，用于求解BA模型的稳态度分布。他们假设度 k 是连续的，因此，新节点连接到网络中现有节点的概率可以解释为 k [5] 的变化率。类似地，Dorogovtsev针对具有优先连接且所有节点均具有初始吸引力的模型，提出了主方程方法。基于节点 s 在 t时的连接度 q 分布 $p(q,\ s,\ t)$，他们还讨论了幂律度分布指数与不同参数取值之间的关系 [13]。Krapivsky等人也采用速率方程方法，研究了增长随机网络中与时间和年龄相关的连接度分布 [14]。此外，与以往的连续方法不同，Shi等人首次建立了增长网络与马尔可夫链之间的关系，并利用他们建立的计算方法计算度分布 [15]。这些方法及其变体也被用于求解会删除节点的增长网络，尤其是节点随机删除的情形 [16]–[21]。典型地，有研究提出了特定的连续方法，以求解节点随机移除模型，并讨论其无标度度分布的标度性质 [22]。其他学者也尝试从排队系统视角 [23], 或利用相对熵 [24]，通过不同策略讨论此类演化网络的度分布。

根据上述研究，我们可以得出结论：连续统形式主义确实便于处理这类离散问题，并且能够得到稳态度分布的近似结果。然而，这些连续方法只考虑单个节点度的平均变化，而未考虑网络的实际拓扑结构；事实上，度分布是反映网络整体特征的重要统计量。此外，在演化过程中还可能以不同概率出现各种网络，而每种网络都有其自身的稳态度分布。与上述网络相比，演化网络的另一种移除机制——节点优先删除——研究较少，这在一定程度上可归因于缺乏恰当的方法。尽管一些研究关注了非均匀移除节点的网络的稳定性、收敛性，乃至无关联性 [24]–[29], ，但如何计算相应演化网络的稳态度分布仍相当困难。只有 Kong 等人使用平均场速率方程方法讨论过这一问题 [30]。值得一提的是，Zhang 等人提出了一种随机过程规则（SPR），该规则考虑了网络的特殊结构，重点研究无限系统 Ω 中具有二维状态的节点的转移方式（$n,\ k$），其中 n 表示该节点所在网络的规模，k 表示该节点的度。因此，我们可以用转移方程描述这一演化过程：$P(t+1) = P(t)P$，其中 $P(t)$和 $P(t+1)$分别表示网络在 t 和 $t+1$ 时的概率分布，P为一步转移概率矩阵。SPR 是一种高效方法，能够保留生成的网络在下一时刻具有相同的拓扑结构和统计特征。作为一种有理论支持的方法，SPR 已用于求解 BA模型，并得到了幂律度分布 [31],；随机出生死亡网络（RBDN）也已得到成功研究 [32]。因此，似乎可以依据 SPR 的原理，讨论采用节点优先移除机制的演化网络。假设网络在 t时发生衰减，则该网络中的每个节点都将以与其度成正比的概率 k 被移除；或者，这些概率取决于网络的度分布，而不仅仅取决于网络中的节点数。一步转移方程可用于描述这一过程，尽管其转移概率的形式会比节点随机删除的情况更复杂。

本文将原始 SPR 推广至节点择优删除的演化网络，用于处理稳态度分布。全文结构如下：第二节首先介绍基本定义；第三节基于 SPR 原理阐释节点择优删除的 ESPR；第四节提出两个定理

以验证 ESPR 的有效性；第五节则阐述基于 ESPR 的结论及未来工作的展望。

II. 预备知识

定义1.($Degree \quad Distribution$) 对于图 $G =< V, E >$，其中 V 是节点集合， E 是边集合，设 K_G 为一个随机变量，则

$$P\{K_G = k\} = \frac{N_k}{N} \tag{1}$$

是 G 的度分布，其中 $k = 0, 1, 2, ..., |V|$，且 N_k 是具有 k 条边且 $N = |V|$ 的节点数。

此外，对于图过程 $\{G(t)\ t \geq 0\}$， t 与 $t+1$ 之间会以不同的概率生成一系列图，而非采用一个平均值。上述图的度分布仅用于说明这一过程的统计特性。因此，我们给出 $\{G(t)\}$ 的平均度分布定义，如下所示。

定义2.($Average \quad Degree \quad Distribution$) 对于图过程 $\{G(t)\ t \geq 0\}$，其具有 $P_{G_i}(t) = P\{G(t) = G_i(t)\}$，其中 $G_i(t)$ 表示这些规模为 $i (i = 1, 2, ..., N(t))$ 个节点的网络， $N(t)$ 是在 t 时规模最大的网络。设 $K(t)$ 为一个随机变量，则 $\{G(t)\}$ 在 t 时的平均度分布 $P_k(t)$ 定义为

$$\begin{aligned} P_k(t) &= P\{K(t) = k\} \\ &= \sum_{i=1}^{N_t} P\{G(t) = G_i(t)\} P\left\{K_{G_i(t)} = k\right\} \\ &= \sum_{i=1}^{N_t} P_i(t) P\left\{K_{G_i(t)} = k\right\}. \end{aligned} \tag{2}$$

根据此处 [13], 中度分布的定义，我们将 $\{G(t)\ t \geq 0\}$ 的稳态度分布定义如下。

定义3.($Steady-state \quad Degree \quad Distribution$) 对于图过程 $\{G(t)\ t \geq 0\}$， $K(t)$ 是其在 t 时的平均度。设 K 为一个随机变量，则 $\{G(t)\}$ 的稳态度分布 P_k 定义为

$$\begin{aligned} P_k &= P\{K = k\} \\ &= lim_{t \to +\infty} P\{K(t) = k\}. \end{aligned} \tag{3}$$

III. 节点优先删除的 ESPR

A. SPR

对于一个演化网络，添加和移除节点会影响其拓扑结构，而这一过程无法直接用连续方法描述。不过，我们可以从节点的角度借助 SPR 来展示网络的演化过程。具体而言，引入一个无限的样本空间 Ω，用于表示在演化过程 $\{G(t)\ t \geq 0\}$ 中生成的网络； $G(0)$ 是初始网络，通常默认为完全图。 $G(t) = \cup_i^{N(t)} G_i(t)$ 是 Ω 在 t 处的一个划分，其中 $G_i(t)$ 包含所有拥有 i 个节点的网络，尽管它们在 t 处的拓扑结构可能不同； $N(t)$ 是 i 在 t 处的上界。

根据网络的特定结构，所选网络中的任意节点都具有一个二维状态（n，k），其中 k 是该节点的度，n 是其所在网络的规模。同样，Ω 中的两个节点可能具有相同的状态，尽管从它们加入网络的时间来看，它们可能截然不同。于是，网络从 t 到 $t+1$ 的增长或衰减变化，可以根据上述设定用节点状态的转移来描述。例如，网络以概率 p 增长时，在 t 处状态为（n，k）的节点，到 $t+1$ 时可能变为（$n+1$，k）或（$n+1$，$k+1$）；网络以概率 $q=1-p$ 衰减时，该节点也可能变为（$n-1$，k）或（$n-1$，$k-1$）。附录分别给出了随机添加和删除节点的演化网络示意图，展示了 SPR 中节点的具体转移过程。在图中，我们为这些节点赋予从 1 到 $N(t)$ 的不同数字标记，以便在网络中区分它们；其中一些标记不同的节点仍可能具有相同的状态。此外，q_v 是标记为 $v(v=1,2,...,N(t))$ 的节点的移除概率；$P_{(n,k)(n',k')}(t)$ 是节点 v 在 t 时从状态（n，k）转移到（n'，k'）的转移概率；k' 是 v 在 $t+1$ 时的可能度。

根据上述原理和相关定义，采用 SPR 求解稳态度分布的框架如下：

(i) 对于节点 v，确定状态转移概率$P_{(n,k)(n',k')}(t)$；(ii) 给出从 t 到 $t+1$的完整状态转移方程 v；(iii) 确定不同度 $k(k=0,1,2,...)$ 对应的度分布转移方程 $P_k(t)$；(iv) 求解不同 k 对应的稳态度分布 P_k。

在这些递进步骤中，第一步绝对是最重要的，它使 SPR 区别于连续统形式主义。值得一提的是，对于所考虑的节点 [31]，只要两个模型具有相同的状态转移方程，它们的稳态度分布就相同。因此，第四节中的证明只需比较前两步的结果。

B. 扩展 *SPR*（*ESPR*）

根据图4所示的原理，在 t 从网络中随机删除的孤立节点可用于构建出现在 $t+1$ 的网络，并且相应的状态转移概率可以直观地给出。但对于节点择优删除，上述方法并不适用。因为在图4中，从 t到 $t+1$，具有不同标记的孤立节点数量相同，这使得在 $t+1$利用孤立节点构建新网络成为可能。然而，如果在 t按照各节点的度成比例地删除网络中的节点，那么不同标记的孤立节点比例实际上取决于 t。基于 SPR 的优势以及节点随机删除的方法，我们尝试改进现有方法，以处理节点择优删除。

分别将数量充足的节点转变为不存在的节点，然后进行重构步骤，或许是可行的。但要给出状态转移概率相当困难。在这里，我们找到了一种更合适的操作，可用状态转移概率的形式统一节点随机删除和择优删除，并且这一点已得到证明。下面给出原始 SPR 中从 t到 $t+1$ 的第一步所对应的具体方法：

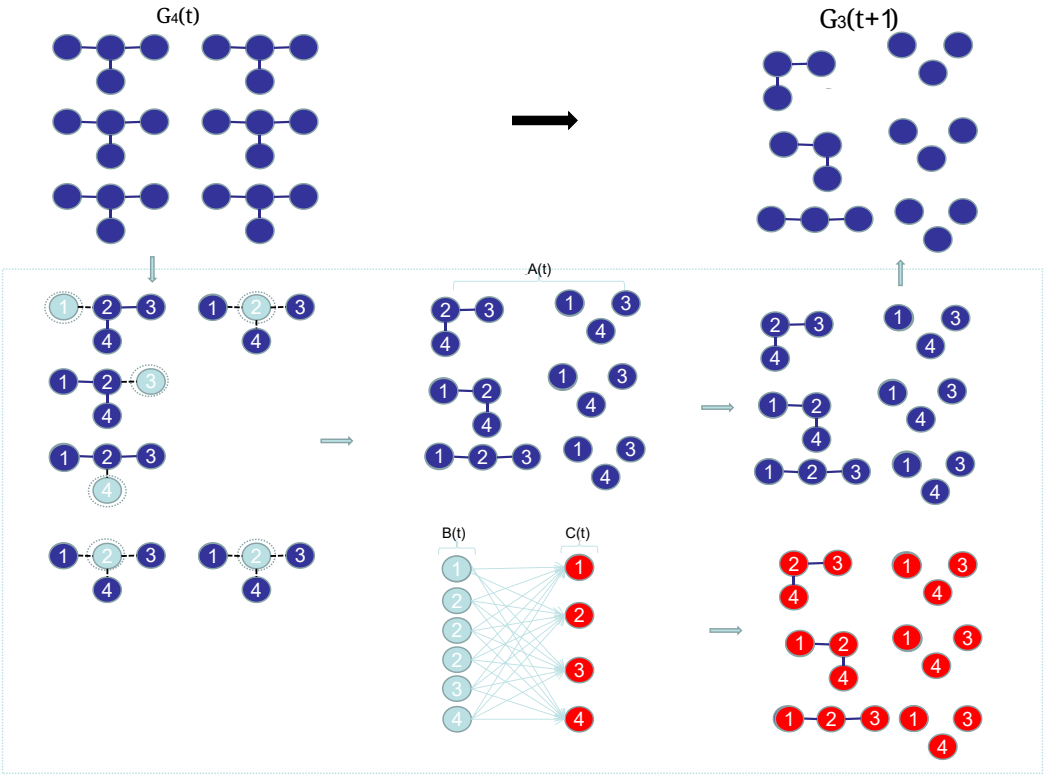


图1：节点优先删除。

步骤1：从 $G_n(t)(n=1, \ ...i..., \ N(t))$ 中选出 $\alpha(t)$ 个拓扑结构相同的网络，然后随机选择其中一个，并按照与其度成正比的概率删除一个节点。对于两个临时集合 $A(t)$ 和 $B(t)$，分别将节点删除后新生成的含有 $n-1$ 个节点的网络和被删除的节点放入其中。对其余的 $\alpha(t)-1$ 个网络重复相同操作，最终得到 $B(t) = \cup_v B_v(t)$，其中 $B_v(t)$ 表示在 t 处标记为 v 的节点集合；

步骤2：对于 $B(t)$ 中的每种节点类型，按照其在 $A(t)$ 中的比例，分别将对应节点转换为 $N(t)$ 类型，并将这些新生成的节点放入集合 $C(t)$ 中；

步骤3：参考从 $A(t)$ 中随机选取的网络中的节点类型，从 $C(t)$ 中选择 $n-1$ 个具有相同类型组合的孤立节点。将这些孤立节点连接起来形成边，使其拓扑结构与所选网络相同，然后将新生成的网络放入集合 $G_{n-1}(t+1)$ 中。对 $A(t)$ 和 $C(t)$ 中的其余元素重复相同操作，最终的 $G_{n-1}(t+1)$ 在演化过程中包含 $n-1$ 个新网络。

其中， $\alpha(t)$ 是一个取决于网络 n 规模的变量。节点优先删除的示意图如下所示。比较图1和图4所示的方法可以发现，除了重新配置孤立节点的过程外，两者非常相似，这表明该改进保留了 SPR 框架。

C. 状态转移概率

对于一个在时间 t 有 n 个节点的网络，以及从中选取的节点 $v(v=1, \ 2, \ ....., \ n)$，设 $(n, \ k)$ 为 v 的状态，N_v 表示 v 的邻域集合。此外，我们假设 k' 表示在 $t+1$ 时，使用 ESPR 得到的 v 的可能度，

$P_{(n,k')}(t)$ 是网络在 t 时度为 k' 的节点的概率，而 $q_v(t)$ 和 $q_w(t)$ 分别是在 t 时移除 v 和另一个节点 w 的概率。

采用 ESPR 时， v 在转移过程中可能涉及 $A(t)$或 $C(t)$，因此 v 从 t 到 $t+1$的一步转移概率如下所示。

(1) 状态为$(n,\ k)$的节点 v 非孤立：

$$P_{(n,k)(n-1,k)}(t) = \sum_{w \notin N_v} q_w(t) \qquad P_{(n,k)(n-1,k-1)}(t) = \sum_{w \in N_v} q_w(t) \tag{4}$$

(2) 状态为$(n,\ k)$的节点 v 孤立：

$$\begin{aligned} P^*_{(n,k)(n-1,k')}(t) = q_v(t)[&\frac{(1-q_{(n,k')}(t))P_{(n,k')}(t)}{\sum_j P_{(n,j)}(t)(1-q_{(n,j)}(t))} \frac{P_{(n,k')(n-1,k')}(t)}{P_{(n,k')(n-1,k')}(t)+P_{(n,k')(n-1,k'-1)}(t)} \\ &+ \frac{(1-q_{(n,k'+1)}(t))P_{(n,k'+1)}(t)}{\sum_j (1-q_{(n,j)}(t))P_{(n,j)}(t)} \frac{P_{(n,k'+1)(n-1,k')}(t)}{P_{(n,k'+1)(n-1,k'+1)}(t)+P_{(n,k'+1)(n-1,k')}(t)}] \\ &= \frac{nq_v(t)}{n-1}[P_{(n,k')}(t)P_{(n,k')(n-1,k')}(t) + P_{(n,k'+1)}(t)P_{(n,k'+1)(n-1,k')}(t)] \end{aligned} \tag{5}$$

需要注意的是，我们区分了 v 在演化过程中孤立时与 P^* 相关的转移概率，以及 $q_v(t) = q_{(n,k)(t)}$。因此，对于网络中在 $t+1$处状态为$(n,\ k)$的任意节点，它可能由其他状态转变而来，其状态转移方程如下所示。

$$\begin{aligned} P_{(n,k)}(t+1) = &P_{(n-1,k)}(t)P_{(n-1,k)(n,k)}(t) + P_{(n-1,k-1)}(t)P_{(n-1,k-1)(n,k)}(t) + P_{(n+1,k)}(t)P_{(n+1,k)(n,k)}(t) \\ &+ P_{(n+1,k+1)}(t)P_{(n+1,k+1)(n,k)}(t) + \sum_{k'} P_{(n+1,k')}(t)P^*_{(n+1,k')(n,k)}(t) \end{aligned} \tag{6}$$

IV. 定理

众所周知，现实世界中的演化网络是按照设定的演化规则（ER）直接生成的，即在每个时刻向网络中添加或从中移除节点；在下一个时刻，我们只能获得一个网络样本，而非 ESPR 所假设的整个样本空间。因此，有必要比较采用这两种方法得到的平均度分布。如果二者相同，则可以使用 ESPR 讨论演化网络的统计特性。

定理1。对于具有节点优先删除的演化模型 $\{G_t, t \geq 0\}$，假设 EP_k 表示通过 ESPR 得到的 $\{G_t\}$ 的稳态度分布，而 P_k 表示直接通过演化规则得到的该模型的稳态度分布。那么，公式 $P_k = EP_k$ 成立。

证明。现实中的演化过程受到实验观测数量的限制，我们无法枚举任意时刻所有可能的网络，也无法直接计算平均度分布。已有研究证明，SPR 在处理节点添加的网络时效率很高，因此这里提供一个案例研究，以确认 ESPR 能够处理节点优先删除。假设有一个由 4 个节点组成的网络，如图2所示，其中每个节点的度可能不同，并且它们将以 $q_v(t)$ $v=1$，2，3，4 的概率依次从 t到 $t+1$被删除。

我们将择优删除概率设为 $q_v = {}^{k}(t)\ \sum_w k_w\ (t)$ ~~$v=1,$~~2，3，4，因此标记为 1 至 4 的节点具有如下概率

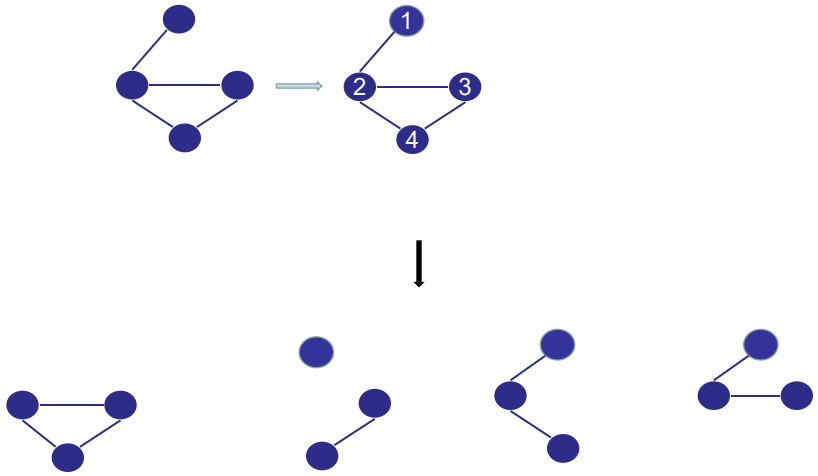


图 2：样本网络示意图。

分别为 $\frac{1}{8}$、$\frac{3}{8}$、$\frac{2}{8}$、$\frac{2}{8}$。状态转移概率矩阵 P如下：

$$\begin{pmatrix} \frac{75}{192} & \frac{110}{192} & \frac{7}{192} \\ \frac{3}{96} & \frac{74}{96} & \frac{19}{96} \\ \frac{3}{64} & \frac{14}{64} & \frac{47}{64} \end{pmatrix} \tag{7}$$

此外， $t+1$ 处具有 3 个节点的新网络的平均状态分布可表示为

$$P_{(3,0)}(t+1) = \frac{1}{4} \times \frac{75}{192} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{96} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{64} = \frac{1}{8}$$

$$P_{(3,1)}(t+1) = \frac{1}{4} \times \frac{110}{192} + \frac{1}{2} \times \frac{74}{96} + \frac{1}{4} \times \frac{14}{64} = \frac{7}{12}$$

$$P_{(3,2)}(t+1) = \frac{1}{4} \times \frac{7}{192} + \frac{1}{2} \times \frac{19}{96} + \frac{1}{4} \times \frac{47}{64} = \frac{7}{24}$$

因此，扩展 SPR 求得的平均度分布为 $(\frac{1}{8}, \frac{14}{24}, \frac{7}{24}, 0)$。

根据图 2 中直观展示的演化过程，很容易确定，4 个网络的状态分布分别为 $(0, 0, 1, 0)$、$(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0)$、$(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$、$(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$，在 $t+1$ 处的概率分别为 $\frac{1}{8}$、$\frac{3}{8}$、$\frac{2}{8}$和 $\frac{2}{8}$。根据上述定义，平均度分布为

$$\begin{aligned} P_K(t+1) &= \frac{1}{8} \times (0,0,1,0) + \frac{3}{8} \times (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0) + \frac{2}{8} \times (0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0) + \frac{2}{8} \times (0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0) \\ &= (\frac{1}{8}, \frac{14}{24}, \frac{7}{24}, 0) \end{aligned} \tag{8}$$

结合 SPR 原理，证明完毕。 ■

此外，可以证明 节点随机删除的原始 SPR 是我们上文提出的 ESPR 的一个特例 ，

这表明，ESPR 是一个完整的框架，可用于讨论节点添加和删除时的稳态度分布。

定理2。对于随机出生死亡网络（RBDN） $\{G(t)\ t \geq 0\}$，假设 SP_k 表示通过SPR得到的 $\{G(t)\}$ 的稳态度分布，EP_k 表示通过ESPR得到的 $\{G(t)\}$ 的稳态度分布。那么，公式 $SP_k = EP_k$ 成立。

证明。对于一个RBDN，若在 t执行节点删除操作，则网络中具有 n 个度为k 的节点的节点 v 将以概率$\frac{1}{n}$ 被移除。根据我们先前介绍的方法，从节点优先删除的角度来看，这意味着移除 v ，其概率为$q_v(t) = \frac{1}{n}$。因此，ESPR中 v 的状态转移概率如下。(1)状态为$(n,\ k)$的节点 v 不是孤立节点

$$P_{(n,k)(n-1,k)}(t) = \frac{n-1-k}{n} \qquad P_{(n,k)(n-1,k-1)}(t) \quad = \frac{k}{n} \tag{9}$$

(2)状态为$(n,\ k)$的节点 v 是孤立节点

$$\begin{aligned} P_{(n,k)(n-1,k')}(t) &= q_v(t)[\frac{P_{k'}(t)(1-q_{(n,k')}(t))}{\sum_k P_{(n,k)}(t)(1-q_{(n,k)}(t))}\frac{P_{(n,k')(n-1,k')}(t)}{P_{(n,k')(n-1,k')}(t)+P_{(n,k')(n-1,k'-1)}(t)} \\ &\quad + \frac{P_{k'+1}(t)(1-q_{(n,k'+1))}(t)}{\sum_k P_k(t)(1-q_{(n,k)}(t))}\frac{P_{(n,k'+1)(n-1,k')}(t)}{P_{(n,k'+1)(n-1,k'+1)}(t)+P_{(n,k'+1)(n-1,k')}(t)}] \\ &= \frac{nq_v(t)}{n-1}[P_{k'}(t)P_{(n;k')(n-1,k')}(t)+P_{k'+1}(t)P_{(n,k'+1)(n-1,k')}(t)] \\ &= \frac{1}{n-1}[P_{k'}(t)\frac{n-1-k^{'}}{n}+P_{k'+1}(t)\frac{k^{'}+1}{n}] \end{aligned} \tag{10}$$

因此，参照　　采用第三节中的方法，我们得到 ESPR 的最终状态转移方程，如下所示。

$$\begin{aligned} P_{(n-1,k)}(t+1) &= \sum_{k'}^{\infty} P_{(n,k)}(t)P_{(n,k')(n-1,k)}(t) \\ &= P_{(n,0)}(t)P_{(n,0)(n-1,k)}(t)+P_{(n,1)}(t)P_{(n,1)(n-1,k)}(t)+P_{(n,2)}(t)P_{(n,2)(n-1,k)}(t)+... \\ &\quad + P_{(n,k)}(t)P_{(n,k+1)(n-1,k)}(t)+P_{(n,k+1)}(t)P_{(n,k+1)(n-1,k)}(t)+...+P_{(n,n)}(t)P_{(n,n)(n-1,n)}(t) \\ &= [P_{(n,0)}(t)+P_{(n,1)}(t)+...+P_{(n,k-1)}(t)+P_{(n,k+2)}(t)+...+P_{(n,n)}(t)]\frac{1}{n-1}[P_{(n,k)}(t)\frac{n-k-1}{n} \\ &\quad + P_{(n,k+1)}(t)\frac{k+1}{n}]+P_{(n,k)}(t)\frac{n-k-1}{n}+\frac{1}{n-1}[P_{(n,k)}(t)\frac{n-k-1}{n}+P_{(n,k+1)}(t)\frac{k+1}{n}] \\ &\quad + P_{(n,k+1)}(t)\frac{k+1}{n}+\frac{1}{n-1}[P_{(n,k)}(t)\frac{n-k-1}{n}+P_{(n,k+1)}(t)\frac{k+1}{n}] \\ &= [1-P_{(n,k)}(t)-P_{(n,k+1)}(t)]\frac{1}{n-1}[P_{(n,k)}(t)\frac{n-k-1}{n}+P_{(n,k+1)}(t)\frac{k+1}{n}]+P_{(n,k)}(t)\frac{n-k-1}{n} \\ &\quad + P_{(n,k+1)}(t)\frac{k+1}{n}+P_{(n,k)}(t)\frac{1}{n-1}[P_{(n,k)}(t)\frac{n-k-1}{n}+P_{(n,k+1)}(t)\frac{k+1}{n}] \\ &\quad + P_{(n,k+1)}(t)\frac{1}{n-1}[P_{(n,k)}(t)\frac{n-k-1}{n}+P_{(n.k+1)}(t)\frac{k+1}{n}] \\ &= \frac{1}{n-1}[P_{(n,k)}(t)\frac{n-k-1}{n}+P_{(n,k+1)}(t)\frac{k+1}{n}]+P_{(n,k)}(t)\frac{n-k-1}{n}+P_{(n,k+1)}(t)\frac{k+1}{n} \\ &= P_{(n,k)}(t)\frac{n-k-1}{n-1}+P_{(n,k+1)}(t)\frac{k+1}{n-1} \end{aligned} \tag{11}$$

同样，参见附录 B，我们得到 SPR 的状态转移方程：

$$\begin{aligned} P_{(n-1,k)}(t+1) &= P_{(n,k)}(t)P_{(n,k)(n-1,k)} + P_{(n,k+1)}(t)P_{(n,k+1)(n-1,k)} \\ &= P_{(n,k)}(t)\frac{n-k-1}{n-1} + P_{(n,k+1)}(t)\frac{k+1}{n-1} \end{aligned} \tag{12}$$

显然，ESPR 和 SPR 计算出的结果完全相同，这说明了该定理的有效性。证明完毕。

■

V. 结论

作为演化网络的一种基本演化机制，关于节点优先删除的讨论比其他机制少得多。这可归因于现有方法在处理此类网络相关统计量方面的局限性。事实上，SPR 是一种研究稳态度分布具有精确解的网络的方法，并能在演化过程中保持网络的拓扑结构和统计特性。由于该方法在处理此类离散问题时具有明显优势，本文通过扩展 SPR，讨论了如何对节点以与其度成正比的概率被删除时的实际网络进行建模。

我们提出的扩展 SPR（ESPR）已被证明能够处理节点择优删除的演化网络：通过比较现实中的演化网络与 ESPR 中网络的平均度分布结果，验证了这一点。此外，我们还证明了原始 SPR 是 ESPR 的一个特例，即 ESPR 是求解演化网络稳态度分布的一种更完善的框架。值得注意的是，对于非齐次演化网络过程，ESPR 仍可能无法完全处理所有复杂情况，例如节点及其所连接的边都被删除的情况；但它能够处理删除节点、同时重连相关边的网络。此外，由于与连续统形式主义相比，该框架在离散情形下具有明显优势，因此还可用于进一步讨论网络的其他统计特性，例如度-度相关性。

致谢

本研究得到中国国家自然科学基金（编号：61273015）资助。

附录 A 节点添加

SPR 中节点随机添加的具体方法如下。

步骤1：从 $G_n(t)$ $n=1$、2、..... $N(t)$ 中选取 $n+1$ 个拓扑结构相同的网络。随机选择其中一个网络并删除其所有边，然后将按上述方法处理后剩余的这些 n 个网络放入集合 $A(t)$，并将 n 个孤立节点放入集合 $B(t)$。对 $G_n(t)$ 中其余网络执行相同操作。

步骤2：分别从 $B(t)$ 和 $A(t)$ 中选择一个节点和一个网络。按照给定的机制（随机连接或优先连接）将该节点连接到网络，并将这个包含 $n+1$ 个节点的新网络放入 $G_{n+1}(t+1)$ 中。最后，重复相同的

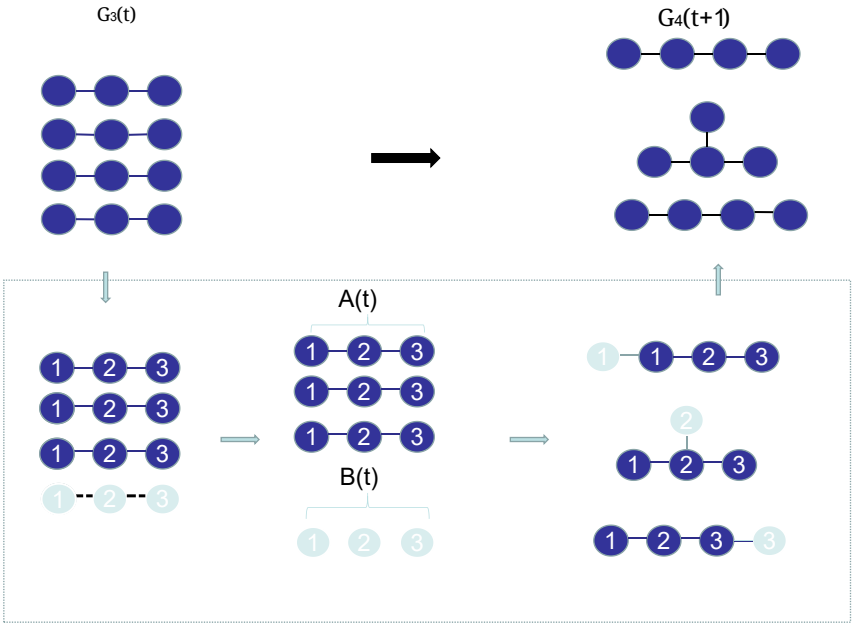


图3：节点随机添加。

操作，应用于 $A(t)$ 和 $B(t)$ 中的其余成员。

SPR 中节点添加的具体方法如图3所示。因此，网络增长后，在 t 时状态为 $(n,\ k)$ 的节点，在 $t+1$ 时可能转变为 $(n+1,\ k)$ 或 $(n+1,\ k+1)$，该节点的转移概率如下所示。

$$P_{(n,k)(n+1,k)}=\frac{(n-m)p}{n+1} \qquad P_{(n,k)(n+1,k+1)}=\frac{mp}{n+1} \qquad P_{(n,k)(n+1,m)}=\frac{p}{n+1} \tag{13}$$

这里，m表示新添加节点所连接的节点数。

APPENDIX B
NODES RANDOM DELETION

在 SPR 中，节点随机删除比上述介绍的节点添加更为复杂，具体方法如下。

步骤1：从 $G_n(t)$ $n=1$、2、..... i、..... N_t 中选出具有相同拓扑结构的 N 网络，其中 N 是 $n(n-1)$ 的公分母。从中随机选择一个网络，并随机删除该网络中的一个节点。将包含 $n-1$ 个节点的网络放入 $A(t)$，将孤立节点放入 $B(t)$。对 $G_n(t)$ 中其余网络重复相同操作。删除节点后，得到 $B(t)=\cup_i B_i(t)$，其中 $B_i(t)$ 表示在各自原始网络中，t 处具有不同类型的节点集合；我们用符号 i 将它们区分开来。

步骤2：从 $A(t)$中随机选择一个网络，并从 $B(t)$中选择 $n-1$ 个与所选网络具有相同节点类型的已删除节点。参照所选网络的拓扑结构，用边连接这些节点。对剩余成员重复相同的操作

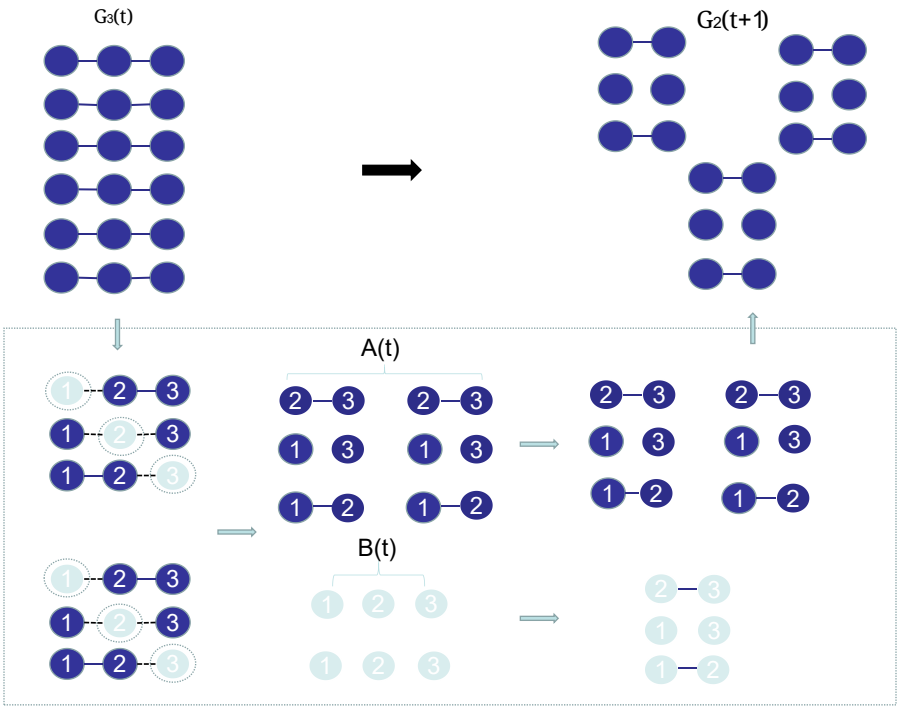


图4：节点随机删除。

，即 $A(t)$和 $B(t)$。

步骤3：将这些新构建的网络放入 $C(t)$，并将包含在 $A(t)$ 和 $C(t)$ 中的所有网络放入 $G_{n-1}(t+1)$。

图4展示了 SPR 中操作的详细过程，尤其是在网络简化期间对孤立节点的重构，并对节点作了如下具体数值标记。在网络简化时，处于 t 时状态为 $(n,\ k)$ 的节点会在 $t+1$ 时获得新状态 $(n-1,\ k)$ 或 $(n-1,\ k-1)$。因此，转移概率如下所示。

$$P_{(n,k)(n-1,k)} = \frac{(n-k-1)q}{n-1} \qquad P_{(n,k)(n-1,k-1)} = \frac{kq}{n-1} \tag{14}$$

参考文献

[1] M. E. Newman 等，“作为网络模型的随机图”，《图与网络手册》，第 1 卷，第 35–68 页，2003年。[2] A.-L. Barabasi 和 Z. N. Oltvai，“网络生物学：理解细胞的功能组织结构”，《自然评论：遗传学》，第 5 卷，第 2 期，第 101–113 页，2004年。[3] J.-W. Wang 和 L.-L. Rong，“美国电网基于级联的攻击脆弱性”，《安全科学》，第 47 卷，第 10 期，第 1332–1336 页，2009年。[4] D. J. Watts 和 S. H. Strogatz，“‘小世界’网络的集体动力学”，《自然》，第 393 卷，第 6684 期，第 440–442 页，1998年。[5] A.-L. Barab´asi 和 R. Albert，“随机网络中标度的涌现”，《科学》，第 286 卷，第 5439 期，第 509–512 页，1999年。[6] R. Albert 和 A.-L. Barab´asi，“复杂网络的统计力学”，《现代物理评论》，第 74 卷，第 1 期，第 47 页，2002年。[7] M. E. Newman，“复杂网络的结构与功能”，《*SIAM*评论》，第 45 卷，第 2 期，第 167–256 页，2003年。[8] S. N. Dorogovtsev 和 J. F. Mendes，“网络演化”，《物理学进展》，第 51 卷，第 4 期，第 1079–1187 页，2002年。[9] J. L. Slater、B. D. Hughes 和 K. A. Landman，“演化的有寿命网络”，《物理评论 *E*》，第 73 卷，第 6 期，第 066111 页，2006年。[10] L. Ferretti 和 M. Cortelezzi，“增长型空间网络中的优先连接”，《物理评论 *E*》，第 84 卷，第 1 期，第 016103 页，2011年。

[11] W. He、L. Feng、L. Li 和 C. Xu，“随机连接增长网络模型 a 的度分布时间演化”，《物理学 A：统计力学及其应用》，第 384 卷，第 2 期，第 663–666 页，2007年。[12] X. Li 和 G. Chen，“局域世界演化网络模型”，《物理学 A：统计力学及其应用》，第 328 卷，第 1-2 期，第 274–286 页，2003年。[13] S. N. Dorogovtsev、J. F. F. Mendes 和 A. N. Samukhin，“具有优先连接的增长网络结构”，《物理评论快报》，第 85 卷，第 21 期，第 4633 页，2000年。[14] P. L. Krapivsky、S. Redner 和 F. Leyvraz，“增长随机网络的连接度”，《物理评论快报》，第 85 卷，第 21 期，第 4629 页，2000年。[15] D. Shi、Q. Chen 和 L. Liu，“用于增长网络度分布的基于马尔可夫链的数值方法”，《物理评论 E》，第 71 卷，第 3 期，第 036140 页，2005年。[16] C. Moore、G. Ghoshal 和 M. E. Newman，“具有节点添加与删除的演化网络模型的精确解”，《物理评论 E》，第 74 卷，第 3 期，第 036121 页，2006年。[17] E. Ben-Naim 和 P. Krapivsky，“添加-删除网络”，《物理学 A：数学与理论》，第 40 卷，第 30 期，第 8607 页，2007年。[18] Salda?a 和 Joan，“用于模拟节点删除型增长网络的连续统形式主义”，《物理评论 E》，第 75 卷，第 2 期，第 27 102–27 102 页，2007年。[19] J. L. Garcia-Domingo、D. Juher 和 J. Salda˜na，“节点删除型增长网络中的度相关性”，《物理学 D：非线性现象》，第 237 卷，第 5 期，第 640–651 页，2008年。[20] J. L. Garcia-Domingo、D. Juher 和 J. Salda?A，“节点删除型增长网络中的度相关性”，《物理学 D：非线性现象》，第 237 卷，第 5 期，第 640–651 页，2008年。[21] N. Ikeda，“随机游走决定的节点添加与删除所形成的图拓扑”，载于《物理学杂志：会议系列》，第 1391 卷，第 1 期。IOP 出版社，2019年，第 012044 页。[22] S. N. Dorogovtsev 和 J. F. Mendes，“无标度演化网络的标度性质：连续方法”，《物理评论 E》，第 63 卷，第 5 期，第 056125 页，2001年。[23] M. Feng、Y. Li、F. Chen 和 J. Kurths，“从排队系统视角研究出生与死亡演化网络的可遗传删除策略”，《IEEE 系统、人类与控制论汇刊：系统》，第 52 卷，2022年。[24] I. Tishby、O. Biham 和 E. Katzav，“利用相对熵分析收缩随机网络度分布向泊松分布的收敛”，《物理评论 E》，2020年。[25] N. Sarshar 和 V. Roychowdhury，“复杂自组织网络中的无标度稳定结构”，《物理评论 E：统计、非线性与软物质物理》，第 69 卷，第 2 Pt 2 期，第 026101 页，2004年。[26] L. K. Gallos、R. Cohen、P. Argyrakis、A. Bunde 和 S. Havlin，“攻击与防御策略下无标度网络的稳定性与拓扑结构。”《物理评论快报》，第 94 卷，第 18 期，第 188701 页，2005年。[27] S. Laird 和 H. J. Jensen，“具有指数型和 1/k 无标度度分布的非增长网络模型”，EPL（《欧洲物理学快报》），第 76 卷，第 4 期，第 710 页，2007年。[28] Y. Shang、W. Luo 和 S. Xu，“任意度分布网络上的 L 跳渗流及其应用”，《物理评论 E：统计、非线性与软物质物理》，第 84 卷，第 3 Pt 1 期，第 031113 页，2011年。[29] M. Hamdi、V. Krishnamurthy 和 G. Yin，“跟踪动态随机图的马尔可夫调制平稳度分布”，《IEEE 信息论汇刊》，第 60 卷，第 10 期，第 6609–6625 页，2014年。[30] J. S. Kong 和 V. P. Roychowdhury，“复杂自组织网络模型中的优先存活”，《物理学 A：统计力学及其应用》，第 387 卷，第 13 期，第 3335–3347 页，2008年。[31] X. Zhang、Z. He、H. Zheng 和 L. Rayman-Bacchus，“用于演化网络度分布的基于 SPR 的马尔可夫链方法”，《物理学 A：统计力学及其应用》，第 391 卷，第 11 期，第 3350–3358 页，2012年。[32] X. Zhang、Z. He 和 L. Rayman-Bacchus，“随机出生与死亡网络”，《统计物理学杂志》，第 162 卷，第 4 期，第 842–854 页，2016年。