arXiv:2304.00516v1 [math.GR] 2 Apr 2023

# 无挠局部紧阿贝尔群的 $OP$ 子群

ALIAKBAR ALIJANI

Abstract. 设 $G$ 是一个局部紧阿贝尔群（LCA 群）。我们用 $G_{op}$表示 $G$ 的所有开纯子群的交集，并将其称为 $G$的 $OP$ 子群。本文证明，无挠局部紧阿贝尔群 $G$ 的 $OP$子群是$G$的一个非零纯子群。

## 1. Introduction

令 £ 表示由局部紧阿贝尔群及其连续同态构成的范畴。对于一个群 $G \in$, 其单位连通分支子群以及所有紧元构成的子群分别记为 $G_0$ 和 $bG$。若子群 $H$ 满足：对于所有正整数 $n$，$nH = H \cap nG$ ，则称 $H$ 是 $G$ 的纯子群。回顾一下， $G_0$ 和 $bG$ 是 $G$的两个重要且广为人知的纯子群。本文给出无挠群 $G$的一个新的非零纯子群。令 $G_{op}$ 表示£中 $G \in$的所有开纯子群的交集。于是 $G_{op}$ 是一个闭子群，我们称之为 $G$的 $OP$ 子群。本文重点研究无挠群的 OP 子群。我们证明，若 $G$ 是一个无挠群，则 $G_{op}$ 是 $G$ 的一个非零纯子群（见定理15）。

实数的加法拓扑群记作 $\mathbb{R}$ , $\mathbb{Q}$ 是赋予离散拓扑的有理数群， $\mathbb{Z}$ 是整数群，而$\mathbb{Z}(n)$是 $n$ 阶循环群。对于任意群 $G$ 和 $H$，Hom$(G, H)$ 是从 $G$ 到 $H$ 的所有连续同态所构成的群，并赋予紧开拓扑。 $G$ 的对偶群是 $G = Hom(G, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$。关于局部紧阿贝尔群的更多内容，请参见 [5]。

## 2. The $OP$ subgroup of a torsion-free LCA group

本节介绍无挠局部紧阿贝尔群的$OP$ 子群这一概念，并研究其若干性质。

定义 1. [2] 群 $G$ 的子群 $H$ 称为纯子群，如果$nH = H \bigcap nG$ 对所有正整数 $n$都成立。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 22B05,20K35。

令 $G \in$ £，并令 $G_{op}$ 为 $G$的所有开纯子群的交集。那么 $G_{op}$ 是 $G$的闭子群。

定义 2. 群 $G \in$£ 的子群 $G_{op}$ 称为 $G$ 的 $OP$ 子群。

注 1. 设 $D$ 是一个离散群。显然，0 是 $D$ 的开纯子群。因此 $D_{op} = 0$。反之则不成立。见例 1。

例 1. 设 $I$ 是一个无限集，且 $G = \prod_I \mathbb{Z}(2)$。令 $H_j = \prod_{i \in I} X_i$，其中 $X_j = 0$，并且对于 $i \neq j$，有 $X_i = \mathbb{Z}(2)$。根据 [1] 的定理 2，对于所有 $j \in I$，$H_j$ 都是 $G$ 的纯子群。另一方面，对于所有 $j \in I$，$H_j$ 都是 $G$ 的开子群。因此 $G_{op} \subseteq \bigcap_{j \in I} H_j = 0$。

引理 3. 设 $G$ 是 £ 中的一个群。那么 $G_0 \subseteq G_{op}$。

证明. 根据 [5] 的定理 7.8，$G_0$ 是 $G$ 的所有开子群的交集。因此 $G_0 \subseteq G_{op}$。□

推论 4. 设 $C$ 是一个连通群。那么 $C = C_{op}$。

证明. 由引理 3 可知。 □

定义 5. [1] 若且唯若 $G$不含非平凡的闭纯子群，则称群 $G \in$£ 为纯单群。

例 2. 根据 [1, 定理 1]，$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 是一个纯单群。因此 $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_{op} = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$。

例 2 表明，推论 4 的逆命题不一定成立。

注 2. 设 $H$ 是 $G$的一个开纯子群。显然，$H$ 的每个开纯子群都是 $G$中的开纯子群。因此 $G_{op} \subseteq H_{op}$。

引理 6. 设 $G \in$£ 是一个无挠群，且 $H$ 是 $G$ 的一个开纯子群。那么 $G_{op} = H_{op}$。

证明. 根据注 2，$G_{op} \subseteq H_{op}$。现在，设 $x \in H_{op}$ 和 $X$ 是 $G$ 的任意开纯子群。简单计算可得，$X \cap H$ 是 $H$ 的一个开纯子群。因此 $x \in X$。所以 $G_{op} \subseteq H_{op}$，证明完成。□

设 $G$ 和 $H$ 是 £ 中的群，且 $f : G \to H$ 是一个态射。那么 $f(G_{op})$ 不一定是 $\subseteq H_{op}$。例如，考虑一个非零态射 $f : \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$。

引理 7. 设 $f : G \to H$ 是一个态射，使得 $H$ 是无挠群。那么 $f(G_{op}) \subseteq H_{op}$。

证明。设 $y \in G_{op}$ 和 $X$是 $H$的一个开纯子群。显然，$f^{-1}(X)$ 是 $G$的一个开子群。现在我们证明 $f^{-1}(X)$ 在 $G$中是纯的。令 $n$ 为一个正整数，且 $g \in f^{-1}(X) \cap nG$。则 $f(g) \in X$，并且对于某个 $g_1 \in G$ 有 $g = ng_1$ 。因此 $nf(g_1) \in X$。由于 $X$ 在 $H$中是纯的，故对于某个 $x_1 \in X$有 $nf(g_1) = nx_1$ 。由于 $H$ 是无挠的，故可得 $f(g_1) \in X$。因此 $g \in nf^{-1}(X)$，且 $f^{-1}(X)$ 在 $G$中是纯的。所以 $f(y) \in X$，证明完毕。□

设 $G \in$£。我们用 $G^*$ 表示 $G$ 的最小可除扩张。根据 [5, 4.18.h]， $G^*$ 是一个包含 $G$ 作为开子群的局部紧阿贝尔群。

推论 8。设 $G$ 是 £ 中的一个无挠群。那么 $G_{op} \subseteq G^*_{op}$。

证明。只需考虑包含映射 $i: G \hookrightarrow G^*$ 以及引理 7。□

推论 9。设 $G$ 是 £ 中满足 $G_{op} = G$ 的无挠群。那么$G^*_{op} = G^*$。

证明。由推论 8， $G \subseteq G^*_{op}$。由于 $G^*$ 是无挠的，经过简单计算可知 $G^*_{op}$ 是可除的。由 $G^*$ 的最小性可得 $G^*_{op}$ =$G^*$。□

若一个态射是到其像上的开映射，则称其为真态射；若 £ 中的短正合列 $0 \to A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} C \to 0$ 是 $A$ 被 $C$ 扩张，且 $\phi$ 和 $\psi$ 是真态射。沿用 [3], 的记号，我们用 $Ext(C, A)$ 表示 $A$ 被 $C$ 扩张所得的（离散）群。我们的下一个目标是证明，无挠局部紧阿贝尔群的 $OP$ 子群非零。为此，我们需要以下关于 $Ext$ 的结果。

引理 10.（[2, 第 222 页（B）]）设 $D$ 是离散可除群。那么，对于所有离散群 $C$，$Ext(C, D) = 0$ 。

定理 11.（[3, 定理 2.12]）设 $A$ 和 $C$ 是 £ 中的群。那么 ˆ ˆ$Ext(C, A)$ ≅ $Ext(A, C)$。

命题 12.（[3, 命题 2.17(f)]）设 $D$ 是离散群。那么 ˆExt(ℤ, $D$) ≅ $D$。

以下定理中的正合序列 (1) 和 (2) 在 £ 中建立了 $Hom$ 与 $Ext$ 之间的紧密联系。

定理 13.（[4, 推论 2。10]）设 $G \in$ £，且 $0 \to A \to B \to C \to 0$ 是 £ 中的一个扩张。那么，以下序列是正合列：

(1) $0 \to Hom(C, G) \to Hom(B, G) \to Hom(A, G) \to Ext(C, G) \to Ext(B, G) \to Ext(A, G) \to 0$(2) $0 \to Hom(G, A) \to Hom(G, B) \to Hom(G, C) \to Ext(G, A) \to Ext(G, B) \to Ext(G, C) \to 0$

引理14. 设 $G \in$£ 是一个非离散、全不连通、无挠群。那么 $Hom(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, G) \neq 0$。

证明。由定理24.30可知， [5], $G$ 包含一个紧开子群 $K$。考虑两个正合序列 $0 \to K \hookrightarrow G \to G/K \to 0$ 和 $0 \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to \hat{} \hat{}\mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \to 0$。由定理 13，我们得到以下正合序列

$$0 \to Hom(\widehat{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}, K) \to Hom(\widehat{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}, G) \to ... \tag{1}$$

$$... \to Hom(\widehat{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}, K) \to Ext(\hat{\mathbb{Z}}, K) \to Ext(\hat{\mathbb{Q}}, K) \tag{2}$$

设 $Hom(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, G) = 0$。由 (2.1), $Hom(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, K) = 0$。另一方面， $\hat{} \hat{}Ext(\mathbb{Q}, K) \cong Ext(K, \mathbb{Q}) = 0$（见引理 10 和定理 11）。由 (2.2) $\hat{}$ 和命题 12， $K \cong Ext(\mathbb{Z}, K) = 0$ ，这与假设矛盾。因此 $Hom(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, G) \neq 0$，证明完毕。□

定理15。设 $G \in$ £是一个非离散、无扭群。则 $G_{op} \neq 0$。

证明。反设， $G_{op} = 0$。那么，根据引理 3， $G$是一个全不连通群。根据引理14，存在一个非零态射 $f : \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to G$。根据引理 7， $f((\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_{op}) \subseteq G_{op} = 0$。另一方面，根据例 2， $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_{op} = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$。由此可知， $f$ 是零态射，这与假设矛盾。□

## References

[1] Armacost，D. L.，《局部紧阿贝尔群的纯子群》，《美国数学会会刊》45（1974），414–418。[2] Fuchs，L.，《无限阿贝尔群》，第 I 卷，Academic Press，纽约，1970。[3] Fulp，R. O. 和 Griffith，P.，《局部紧阿贝尔群的扩张 I》，《美国数学会汇刊》154（1971），341–356。[4] Fulp，R. O. 和 Griffith，P.，《局部紧阿贝尔群的扩张 II》，《美国数学会汇刊》154（1971），357–363。[5] Hewitt，E. 和 Ross，K.，《抽象调和分析》第 I 卷，第二版，Springer-Verlag，柏林，1979。

Department of Mathematics, Technical and Vocational University(TVU), Tehran, Iran*Email address*: alijanialiakbar@gmail.com