arXiv:2304.00522v1 [math.AP] 2 Apr 2023

非保守边界条件驱动的可压缩磁流体力学数学理论

Eduard Feireisl * Piotr Gwiazda Young–SamKwon †
Agnieszka ´Swierczewska-Gwiazda ‡

捷克共和国科学院数学研究所 ˇZitn´a 25，CZ-11567 布拉格 1，捷克共和国

波兰科学院数学研究所´Sniadeckich 8，00-956 华沙，
波兰

数学系，东安大学，釜山 49315，韩国

应用数学与力学研究所，华沙大学，Banacha 2，02-097 华沙，波兰

摘要

我们提出了一种新的弱解概念，用于描述由大边界数据驱动的可压缩磁流体动力学方程。在湍流特有的非平衡状态下，该场方程系统具有全局时间解。弱解符合弱–强唯一性原理；只要问题的经典解存在，它们就与该经典解一致。本构关系的选取受恒星磁对流应用的启发。

关键词：可压缩磁流体力学系统，弱解，恒星磁对流

*E.F. 的这项研究部分得到捷克科学基金会（GA ˇCR）协议编号 21–02411S 的资助。捷克共和国科学院数学研究所由 RVO:67985840 提供支持。本研究部分得到华沙大学卓越倡议研究型大学主题研究计划的资助。

†Y.–S. Kwon 的这项研究部分得到韩国国家研究基金会（NRF2022R1F1A1073801）的资助

‡P. G. 和 A. ´S-G. 的研究工作部分得到国家科学中心（波兰）的资助，协议编号为 2021年/43/B/ST1/02851。

目录

1 引言 2

2 弱形式 **7**
2.1 状态方程.7 2.2 输运系数.8 2.3 边界数据.8 2.4 弱解.9

3 相对能量 **13**
3.1 相对能量不等式.14 3.1.1 动量扰动.14 3.1.2 密度扰动.15 3.1.3 磁场扰动及相对能量不等式的最终形式 . 16

4 弱解–强解唯一性原理 17
4.1 磁场.18 4.2 压力和熵.21 4.3 扩散项.23 4.4 精细估计.25 4.4.1 温度梯度.25 4.4.2 黏性应力和磁扩散.28 4.5 完成弱强唯一性的证明.29

5 弱解的存在性 29
5.1 近似方案.30 5.2 弱解的存在性.31

6 总结 **32**

1 引言

恒星磁对流中产生的大尺度动力学本质上由边界条件驱动，参见 Gough [11]。当流体流动远离平衡态时，湍流状态下会出现磁通分离和图样形成。由于基础场方程是非线性的，目前尚不清楚在这种状态下全局光滑解是否存在。事实上，绝大多数关于经典解的整体存在性结果都局限于初始状态接近平衡态的情形，参见 Matsumura 和 Nishida [13], Valli [18], 等人的研究。此外，Merle 等人 [14], [15]最近的结果表明，经典解可能在有限时间内产生奇点。

鉴于上述论证，弱解的概念为恢复全局时间存在性提供了一种合适的替代方案，即使对于大数据问题以及解长期保持远离平衡态的情形也是如此。我们考虑一个由外加磁场驱动的全可压缩三维流体对流数学模型。流体占据一个具有正则边界的有界区域 $\Omega \subset R^3$ 。密度 $\varrho = \varrho(t,x)$、绝对温度 $\vartheta = \vartheta(t,x)$、速度场 $\mathrm{u} = \mathrm{u}(t,x)$ 和磁场 $\mathrm{B} = \mathrm{B}(t,x)$ 随时间的演化由磁流体力学系统的场方程控制（参见 [6]）：

连续性方程

$$\partial_t \varrho + \mathrm{div}_x(\varrho \mathbf{u}) = 0. \tag{1.1}$$

动量方程

$$\partial_t(\varrho \mathbf{u}) + \mathrm{div}_x(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla_x p(\varrho, \vartheta) = \mathrm{div}_x \mathbb{S}(\vartheta, \nabla_x \mathbf{u}) + \mathbf{curl}_x \mathbf{B} \times \mathbf{B} + \varrho \mathbf{g}. \tag{1.2}$$

感应方程

$$\partial_t \mathbf{B} + \mathbf{curl}_x(\mathbf{B} \times \mathbf{u}) + \mathbf{curl}_x(\zeta(\vartheta)\mathbf{curl}_x \mathbf{B}) = 0, \ \mathrm{div}_x \mathbf{B} = 0. \tag{1.3}$$

内能平衡

$$\begin{aligned} \partial_t(\varrho e(\varrho,\vartheta)) + \mathrm{div}_x(\varrho e(\varrho,\vartheta)\mathbf{u}) + \mathrm{div}_x \mathbf{q}(\vartheta, \nabla_x \vartheta) \\ = \mathbb{S}(\vartheta, \nabla_x \mathbf{u}) : \nabla_x \mathbf{u} + \zeta(\vartheta)|\mathbf{curl}_x \mathbf{B}|^2 - p(\varrho,\vartheta)\mathrm{div}_x \mathbf{u}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

压力 $p = p(\varrho, \vartheta)$ 和内能 $e = e(\varrho, \vartheta)$ 通过吉布斯方程相互关联

$$\vartheta Ds = De + pD\left(\frac{1}{\varrho}\right), \tag{1.5}$$

其中， $s = s(\varrho, \vartheta)$ 为熵。因此，内能平衡 (1.4) 可改写为熵平衡方程的形式

$$\begin{aligned} \partial_t(\varrho s(\varrho,\vartheta)) + \mathrm{div}_x(\varrho s(\varrho,\vartheta)\mathbf{u}) + \mathrm{div}_x\left(\frac{\mathbf{q}(\vartheta, \nabla_x \vartheta)}{\vartheta}\right) \\ = \frac{1}{\vartheta}\left(\mathbb{S}(\vartheta, \nabla_x \mathbf{u}) : \nabla_x \mathbf{u} - \frac{\mathbf{q}(\vartheta, \nabla_x \vartheta) \cdot \nabla_x \vartheta}{\vartheta} + \zeta(\vartheta)|\mathbf{curl}_x \mathbf{B}|^2\right), \end{aligned} \tag{1.6}$$

参见例如 Gough [11], Weiss 和 Proctor [20], Tao 等人 [16]。

方程 (1.4) 的右端表示熵产生率，根据热力学第二定律，该值必须非负。因此，我们考虑

牛顿流体，其黏性应力张量为

$$\mathbb{S}(\vartheta, \nabla_x \mathbf{u}) = \mu(\vartheta) \left(\nabla_x \mathbf{u} + \nabla_x^t \mathbf{u} - \frac{2}{3} \mathrm{div}_x \mathbf{u} \mathbb{I} \right) + \eta(\vartheta) \mathrm{div}_x \mathbf{u} \mathbb{I}, \tag{1.7}$$

其中，黏度系数 $\mu > 0$ 和 $\eta \geq 0$ 是温度的连续可微函数。同样，热通量遵循傅里叶定律，

$$\mathbf{q}(\vartheta, \nabla_x \vartheta) = -\kappa(\vartheta) \nabla_x \vartheta, \tag{1.8}$$

其中，热导率系数 $\kappa > 0$ 是温度的连续可微函数。

在对本构方程和输运系数施加某些具有物理意义的限制条件下，文献 [6] 证明了可压缩磁流体力学系统 (1.1)–(1.8) 全局弱解的存在性。文献 [6] 所考虑的边界条件是守恒的，

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0, \ \nabla_x \vartheta \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \ \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \ [\mathbf{B} \times \mathbf{u} + \zeta \mathbf{curl}_x \mathbf{B}] \times \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0 \tag{1.9}$$

这是封闭系统的典型特征。如果动量方程中的驱动力 g 是保守的，即 $\mathrm{g} = \nabla_x G, G = G(x)$，则系统的总能量守恒，其动力学遵循由克劳修斯那句著名论断所描述的相当“乏味”的情形：

世界的能量恒定不变；其熵趋于最大值。

文献 [10]给出了纳维–斯托克斯–傅里叶系统中这一论断的严格数学证明。

正如 Gough [11], 所指出的，丰富的流体行为取决于恰当选择边界条件。受天体物理学模型的启发，我们假设边界 $\partial\Omega$ 不可渗透，且其法向黏性应力的切向分量为零，

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \ (\mathbb{S} \cdot \mathbf{n}) \times \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0. \tag{1.10}$$

不过，本文提出的理论也适用于第 6 节讨论的更一般的速度场边界条件。

与众所周知的瑞利–贝纳德问题类似，参见例如 Davidson [5], ，我们对温度施加非齐次狄利克雷边界条件，

$$\vartheta|_{\partial\Omega} = \vartheta_B, \ \vartheta_B > 0. \tag{1.11}$$

为纳入外部磁场的影响，我们假设 B 是背景磁场 B_B 的（不一定很小的）扰动，$\mathrm{div}_x \mathrm{B}_B = 0$，

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_B + \mathbf{b}.$$

在天体物理学的语境中，我们可以将 B_B 视为由一颗大质量恒星施加的磁场。至于 b，我们假设

$$\mathbf{b} \times \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0 \ \Rightarrow \ \mathbf{B} \times \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \mathbf{B}_B \times \mathbf{n}|_{\partial\Omega}, \tag{1.12}$$

or

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0 \ \Rightarrow \ \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \mathbf{B}_B \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega}. \tag{1.13}$$

边界条件 (1.12) 属于狄利克雷型，与 B 的无散性要求相容。条件 (1.13) 属于通量型，与第一个条件 (1.10) 类似，并且必须配合另一个与电场有关的通量条件，即

$$\Big[\mathbf{B} \times \mathbf{u} + \zeta \mathbf{curl}_x \mathbf{B}\Big] \times \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0. \tag{1.14}$$

(1.14) 中的通量也可以是非齐次的。(1.12) 和 (1.13) 中的临界情形 $\mathrm{B}_B = 0$ 分别对应完全绝缘和完全导电边界（例如参见 Alekseev [1]）。

由于可能是技术性的、但迄今仍无法克服的原因，压缩性磁流体力学系统的数学上可处理的弱形式，不能仅仅通过按分布意义重写系统 (1.1)–(1.4) 来建立。现有的先验估计不够强，无法保证某些项可积，尤其是内能平衡 (1.4) 中的 $p(\varrho, \vartheta)\mathrm{div}_x \mathbf{u}$。[6] 中提出的一种补救方法是用熵方程 (1.6) 替代 (1.4)。遗憾的是，熵产生率的先验界仅存在于非自反空间 L^1 的可积函数中。因此，任何近似方案只能给出一个不等式

$$\begin{aligned}\partial_t(\varrho s(\varrho,\vartheta)) + \mathrm{div}_x(\varrho s(\varrho,\vartheta)\mathbf{u}) + \mathrm{div}_x\left(\frac{\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\vartheta)}{\vartheta}\right) \\ \geq \frac{1}{\vartheta}\left(\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u}) : \nabla_x\mathbf{u} - \frac{\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\vartheta)\cdot\nabla_x\vartheta}{\vartheta} + \zeta(\vartheta)|\mathbf{curl}_x\mathbf{B}|^2\right)\end{aligned} \tag{1.15}$$

在分布意义下成立。

用不等式替代熵方程，必然会扩大可能解的范围，并导致问题欠定。为在形式上至少保持适定性，将积分形式的总能量平衡/不等式附加到 [6] 中的系统 (1.1)–(1.3)、(1.15) 上。总能量平衡为

$$\begin{aligned}&\partial_t\left(\frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}|^2 + \varrho e(\varrho,\vartheta) + \frac{1}{2}|\mathbf{B}|^2\right) + \mathrm{div}_x\left[\left(\frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}|^2 + \varrho e(\varrho,\vartheta) + \frac{1}{2}|\mathbf{B}|^2 + p(\varrho,\vartheta)\right)\mathbf{u}\right] \\ &+ \mathrm{div}_x\Big[(\mathbf{B}\times\mathbf{u})\times\mathbf{B} + \zeta(\vartheta)\mathbf{curl}_x\mathbf{B}\times\mathbf{B}\Big] - \mathrm{div}_x(\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u})\cdot\mathbf{u}) + \mathrm{div}_x\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\vartheta) = \varrho\mathbf{g}\cdot\mathbf{u}.\end{aligned} \tag{1.16}$$

如果系统是守恒的，总能量通量在边界上为零，对 Ω 上的 (1.16) 积分可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \left(\frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}|^2+\varrho e(\varrho,\vartheta)+\frac{1}{2}|\mathbf{B}|^2\right)\ \mathrm{d}x=\int_\Omega \varrho\mathbf{g}\cdot\mathbf{u}\ \mathrm{d}x. \tag{1.17}$$

事实证明，方程 (1.1)–(1.3)、不等式 (1.15) 以及积分恒等式 (1.17) 构成了该保守系统的一种合适弱形式。事实上， [6] 证明了对于任意有限能量的初始数据，全局弱解的存在性。这些弱解满足自然的相容性原理。任何足够光滑的弱解都是该问题的经典解。此外，弱解满足弱–强唯一性原理：在强解的存在时段内，弱解与强解重合，见 [7]。

对于具有非齐次狄利克雷边界条件的开放（非保守）系统，情况则更为复杂。热通量 $\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}$ 以及感应通量（电场的法向分量） $[\mathbf{B}\times\mathbf{u}\times\mathbf{B}+\zeta\mathbf{curl}_x\mathbf{B}\times\mathbf{B}]\cdot\mathbf{n}$ 在 $\partial\Omega$ 上不一定为零，因此会在 (1.17) 中产生额外的、无法控制的能量源。在 [4] （另见专著 [9]）中，提出了一种新方法来处理温度的非齐次狄利克雷边界条件。总能量平衡 (1.17) 被弹道能量的一个类似不等式所取代

$$\left[\frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}|^2+\varrho e(\varrho,\vartheta)+\frac{1}{2}|\mathbf{B}|^2-\tilde{\vartheta}\varrho s(\varrho,\vartheta)\right],$$

其中， $\tilde{\vartheta}$ 是边界温度 ϑ_B 在 Ω 内的任意延拓。沿用相同的策略，我们引入弹道能量的“磁性”变体

$$E_{BM}=\left[\frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}|^2+\varrho e+\frac{1}{2}|\mathbf{B}|^2-\tilde{\vartheta}\varrho s-\mathbf{B}_B\cdot\mathbf{B}\right], \tag{1.18}$$

经过直接推导，我们得到等式

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\left(\frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}|^2+\varrho e+\frac{1}{2}|\mathbf{B}|^2-\tilde{\vartheta}\varrho s-\mathbf{B}_B\cdot\mathbf{B}\right)\ \mathrm{d}x\\
&\quad+\int_\Omega\frac{\tilde{\vartheta}}{\vartheta}\left(\mathbb{S}:\nabla_x\mathbf{u}-\frac{\mathbf{q}\cdot\nabla_x\vartheta}{\vartheta}+\zeta|\mathbf{curl}_x\mathbf{B}|^2\right)\ \mathrm{d}x\\
&\quad=-\int_\Omega\left(\varrho s\partial_t\tilde{\vartheta}+\varrho s\mathbf{u}\cdot\nabla_x\tilde{\vartheta}+\frac{\mathbf{q}}{\vartheta}\cdot\nabla_x\tilde{\vartheta}\right)\ \mathrm{d}x\\
&\qquad-\int_\Omega\left(\mathbf{B}\cdot\partial_t\mathbf{B}_B-(\mathbf{B}\times\mathbf{u})\cdot\mathbf{curl}_x\mathbf{B}_B-\zeta\mathbf{curl}_x\ \mathbf{B}\cdot\mathbf{curl}_x\mathbf{B}_B\right)\ \mathrm{d}x\\
&\qquad+\int_\Omega\varrho\mathbf{g}\cdot\mathbf{u}\ \mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{1.19}$$

只要 $\tilde{\vartheta}|_{\partial\Omega}=\vartheta_B$, $\vartheta>0$, $\mathbf{B}\times\mathbf{n}|_{\partial\Omega}=\mathbf{B}_B\times\mathbf{n}|_{\partial\Omega}$。若 $\mathbf{B}\cdot\mathbf{n}|_{\partial\Omega}=\mathbf{B}_B\cdot\mathbf{n}|_{\partial\Omega}$，且满足消失切向通量条件 (1.14)，结论也同样成立。请注意，(1.19) 不包含边界通量积分，因此适用于该问题的弱形式表述。

我们提出的数学理论基于将方程 (1.1)–(1.3) 的弱形式、熵不等式 (1.15) 以及弹道能量平衡 (1.19) 一并作为可压缩磁流体力学系统的弱形式表述。关于状态方程和输运系数的基本假设，以及弱解的精确定义，见第 2 节。第 3 节中，我们介绍研究弱解类稳定性性质的基本工具——相对能量不等式。第 4 节中，我们证明弱解具有弱强唯一性。第 5 节中，我们通过多层近似格式建立全局弱解的存在性。本文在第 6 节以简短讨论作结，探讨将该理论推广到更广泛边界条件类的可能性。

2 弱形式

我们首先列出对状态方程和输运系数施加的一组结构性假设。

2.1 状态方程

我们选择该状态方程的依据见 [9, 第 4] 章。特别地，我们考虑天体物理学问题中与压力/内能相关的辐射贡献，参见 Battaner [3]。根据吉布斯关系 (1.5)，我们假设

$$
\begin{aligned}
&p(\varrho,\vartheta) = p_M(\varrho,\vartheta) + p_R(\vartheta),\ p_M(\varrho,\vartheta) = \vartheta^{\frac{5}{2}} P\left(\frac{\varrho}{\vartheta^{\frac{3}{2}}}\right),\ p_R(\vartheta) = \frac{a}{3}\vartheta^4,\\
&e(\varrho,\vartheta) = e_M(\varrho,\vartheta) + e_R(\varrho,\vartheta),\ e_M(\varrho,\vartheta) = \frac{3}{2}\frac{\vartheta^{\frac{5}{2}}}{\varrho} P\left(\frac{\varrho}{\vartheta^{\frac{3}{2}}}\right),\ e_R(\varrho,\vartheta) = \frac{a}{\varrho}\vartheta^4,\ a>0,
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

其中函数 $P \in C^1[0,\infty)$ 满足

$$
P(0) = 0,\ P'(Z) > 0 \text{ for } Z \geq 0,\ 0 < \frac{\frac{5}{3}P(Z) - P'(Z)Z}{Z} \leq c \text{ for } Z > 0. \tag{2.2}
$$

This 特别是，这意味着 $Z \mapsto P(Z)/Z^{\frac{5}{3}}$ 递减，并且我们假设 e

$$
\lim_{Z\to\infty} \frac{P(Z)}{Z^{\frac{5}{3}}} = p_\infty > 0. \tag{2.3}
$$

注意， p_M, e_M 满足单原子气体的特征关系，

$$
p_M = \frac{2}{3}\varrho e_M,
$$

p_R 是辐射压力，其对应的内能为 e_R，而（2.3）对应于简并气体状态下电子压力的存在。由（2.2）可知， p 和 e满足热力学稳定性假设:

$$\frac{\partial p(\varrho,\vartheta)}{\partial \varrho} > 0,\ \frac{\partial e(\varrho,\vartheta)}{\partial \vartheta} > 0. \tag{2.4}$$

根据 (1.5)，熵的形式为

$$s(\varrho,\vartheta) = s_M(\varrho,\vartheta) + s_R(\varrho,\vartheta),\ s_M(\varrho,\vartheta) = \mathcal{S}\left(\frac{\varrho}{\vartheta^{\frac{3}{2}}}\right),\ s_R(\varrho,\vartheta) = \frac{4a}{3}\frac{\vartheta^3}{\varrho}, \tag{2.5}$$

其中

$$\mathcal{S}'(Z) = -\frac{3}{2}\frac{\frac{5}{3}P(Z) - P'(Z)Z}{Z^2}. \tag{2.6}$$

2.2 输运系数

我们假设牛顿应力 $\mathbb{S}(\vartheta, \nabla_x \mathbf{u})$ 中的黏度系数是温度的连续可微函数，并满足

$$\begin{aligned} 0 < \underline{\mu}\left(1+\vartheta^\alpha\right) \le \mu(\vartheta) \le \overline{\mu}\left(1+\vartheta^\alpha\right),\ |\mu'(\vartheta)| \le c \text{ for all } \vartheta \ge 0, \\ 0 \le \eta(\vartheta) \le \overline{\eta}\left(1+\vartheta^\alpha\right) \text{ for some } \frac{1}{2} \le \alpha \le 1. \end{aligned} \tag{2.7}$$

注意，$\alpha = \frac{1}{2}$ 对应于天体物理学中相关的萨瑟兰定律，参见 Yang等人 [21]。

类似地，傅里叶热流 $\mathbf{q}(\vartheta, \nabla_x \vartheta)$ 中的热导率系数是温度的连续可微函数，并满足

$$0 < \underline{\kappa}\left(1+\vartheta^\beta\right) \le \kappa(\vartheta) \le \overline{\kappa}\left(1+\vartheta^\beta\right) \text{ for some } \beta \ge 3. \tag{2.8}$$

这里，情形 $\beta = 3$ 反映了辐射的影响。

最后，我们假设磁扩散系数 $\zeta = \zeta(\vartheta)$ 是温度的连续可微函数，

$$0 < \underline{\zeta}(1+\vartheta) \le \zeta(\vartheta) \le \overline{\zeta}(1+\vartheta),\ |\zeta'(\vartheta)| \le c \text{ for all } \vartheta \ge 0. \tag{2.9}$$

2.3 边界数据

我们假设背景磁场 $\mathbf{B}_B = \mathbf{B}_B(t,x)$ 至少具有 $C^{1,\ 2}([0,T]\times\Omega;\ R^3)$ 类的充分光滑性，

$$\mathrm{div}_x \mathbf{B}_B = 0 \text{ in } (0,T)\times\Omega. \tag{2.10}$$

同样，我们假设 t 边界温度 ϑ_B 可以在 Ω 内延拓， $\vartheta_B \in C^{1,\ 2}([0,T]\times\overline{\Omega})$，

$$\vartheta_B > 0 \text{ in } [0,T]\times\overline{\Omega}. \tag{2.11}$$

2.4 弱解

在讨论弱解的概念之前，先介绍函数空间会很有帮助

$$H_{0,\tau}(\Omega;R^3)=\left\{\mathbf{b}\in L^2(\Omega;R^3)\;\middle|\;\mathbf{curl}_x\mathbf{b}\in L^2(\Omega;R^d),\ \mathrm{div}_x\mathbf{b}=0,\ \mathbf{b}\times\mathbf{n}|_{\partial\Omega}=0\right\},$$
$$H_{0,n}(\Omega;R^3)=\left\{\mathbf{b}\in L^2(\Omega;R^3)\;\middle|\;\mathbf{curl}_x\mathbf{b}\in L^2(\Omega;R^d),\ \mathrm{div}_x\mathbf{b}=0,\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{n}|_{\partial\Omega}=0\right\}.$$

两者 $H_{0,\tau}$ 和 $H_{0,n}$ 均赋有希尔伯特范数

$$\|\mathbf{b}\|^2_{H_0}=\|\mathbf{curl}_x\mathbf{b}\|^2_{L^2(\Omega;R^3)}+\|\mathbf{b}\|^2_{L^2(\Omega;R^3)},$$

例如，参见 Alexander and Auchmuty [2]。

定义 2.1。（可压缩磁流体力学系统的弱解）

若量 $(\varrho,\vartheta,\mathbf{u},\mathbf{B})$ 满足下述条件，则称其为可压缩磁流体力学系统 (1.1)– (1.4) 在边界条件 (1.10)、(1.11)、(1.12)（分别为 (1.13)）及初始数据

$$\varrho(0,\cdot)=\varrho_0,\ \vartheta(0,\cdot)=\vartheta_0,\ \mathbf{u}(0,\cdot)=\mathbf{u}_0,\ \mathbf{B}(0,\cdot)=\mathbf{B}_0, \tag{2.12}$$

满足以下条件:

- 连续性方程。$\varrho\in C_{\text{弱}}([0,T];\ L^{\frac{5}{3}}(\Omega))$，$\varrho\geq 0$ 在 $(0,T)\times\Omega$，且积分恒等式

$$\int_0^\tau\int_\Omega\Big(\varrho\partial_t\varphi+\varrho\mathbf{u}\cdot\nabla_x\varphi\Big)\ \mathrm{d}x\ dt=-\Big[\int_\Omega\varrho\varphi\ \mathrm{d}x\Big]_{t=0}^{t=\tau},\ \varrho(0,\cdot)=\varrho_0, \tag{2.13}$$

对任意 $\varphi\in C^1([0,T]\times\Omega)$ 均成立。此外，(2.13) 的重整化形式

$$\int_0^\tau\int_\Omega\Big(b(\varrho)\partial_t\varphi+b(\varrho)\mathbf{u}\cdot\nabla_x\varphi+\Big(b(\varrho)-b'(\varrho)\varrho\Big)\mathrm{div}_x\mathbf{u}\Big)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=\Big[\int_\Omega b(\varrho)\varphi\ \mathrm{d}x\Big]_{t=0}^{t=\tau} \tag{2.14}$$

对任意 $\varphi\in C^1([0,T]\times\Omega)$ 以及任意 $b\in C^1(R)$，$b'\in C_c(R)$ 均成立。

- 动量方程。

$\varrho\mathbf{u}\in C_{\text{weak}}([0,T];\ L^{\frac{5}{4}}(\Omega;\ R^3))$，$\mathbf{u}\in L^2(0,T;\ W^{1,\ q}(\Omega;\ R^3))$，$q=\frac{8}{5-\alpha}$，$\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}|_{\partial\Omega}=0$，以及积分恒等式

$$\begin{aligned}&\int_0^\tau\int_\Omega\Big(\varrho\mathbf{u}\cdot\partial_t\boldsymbol{\varphi}+\varrho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}:\nabla_x\boldsymbol{\varphi}+p(\varrho,\vartheta)\mathrm{div}_x\boldsymbol{\varphi}\Big)\ \mathrm{d}x\\&\quad=\int_0^\tau\int_\Omega\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u}):\nabla_x\boldsymbol{\varphi}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t-\int_0^\tau\int_\Omega\left(\mathbf{B}\otimes\mathbf{B}-\frac{1}{2}|\mathbf{B}|^2\mathbb{I}\right):\nabla_x\boldsymbol{\varphi}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$-\int_0^\tau \int_\Omega \varrho \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\varphi} \ \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + \left[\int_\Omega \varrho \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\varphi} \ \mathrm{d}x \right]_{t=0}^{t=\tau}, \ (\varrho \mathbf{u})(0, \cdot) = \varrho_0 \mathbf{u}_0 \tag{2.15}$$

对任意 $\boldsymbol{\varphi} \in C^1([0,T] \times \Omega;\ R^3),\ \overline{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$ 均成立。

- 感应方程。$\mathbf{B} \in C_{\text{弱}}([0,T];\ L^2(\Omega;\ R^3))$,

$$\mathrm{div}_x \mathbf{B}(\tau, \cdot) = 0 \text{ for any } \tau \in [0,T]. \tag{2.16}$$

此外

$$(\mathbf{B} - \mathbf{B}_B) \in L^2(0,T; H_{0,\tau}(\Omega; R^3)) \tag{2.17}$$

若施加边界条件 (1.12)，或

$$(\mathbf{B} - \mathbf{B}_B) \in L^2(0,T; H_{0,n}(\Omega; R^3)) \tag{2.18}$$

对于边界条件 (1.13)、(1.14)。积分恒等式

$$\begin{aligned} &\int_0^\tau \int_\Omega \left(\mathbf{B} \cdot \partial_t \boldsymbol{\varphi} - (\mathbf{B} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{curl}_x \boldsymbol{\varphi} - \zeta(\vartheta) \mathbf{curl}_x \ \mathbf{B} \cdot \mathbf{curl}_x \ \boldsymbol{\varphi} \right) \ \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\ &\quad = \left[\int_\Omega \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\varphi} \ \mathrm{d}x \right]_{t=0}^{t=\tau}, \ \mathbf{B}(0, \cdot) = \mathbf{B}_0, \end{aligned} \tag{2.19}$$

对任意 $\boldsymbol{\varphi} \in C^1([0,T] \times \Omega;\ R^3),\ \mathrm{div}_x \boldsymbol{\varphi} = 0,$ 均成立,

$$\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0 \tag{2.20}$$

在边界条件 (1.12) 的情况下,

$$\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0 \tag{2.21}$$

对于边界条件 (1.13)、(1.14)。

- 熵不等式。$\vartheta \in L^\infty(0,T;\ L^4(\Omega))$，在 $(0,T)$ 中几乎处处成立，$\times \Omega$，$\vartheta - \vartheta_B \in L^2(0,T;\ W^{1,\ 2_0}(\Omega))$，$\log(\vartheta) \in L^2(0,T;\ W^{1,\ 2}(\Omega))$，且积分不等式

$$\begin{aligned} &\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_\Omega \left(\varrho s(\varrho, \vartheta) \partial_t \varphi + \varrho s(\varrho, \vartheta) \mathbf{u} \cdot \nabla_x \varphi + \frac{\mathbf{q}(\vartheta, \nabla_x \vartheta)}{\vartheta} \cdot \nabla_x \varphi \right) \ \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\ &\quad \leq - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_\Omega \frac{1}{\vartheta} \left(\mathbb{S}(\vartheta, \nabla_x \mathbf{u}) : \nabla_x \mathbf{u} - \frac{\mathbf{q}(\vartheta, \nabla_x \vartheta) \cdot \nabla_x \vartheta}{\vartheta} + \zeta(\vartheta) |\mathbf{curl}_x \mathbf{B}|^2 \right) \varphi \ \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$+\left[\int_\Omega \varrho s(\varrho,\vartheta)\varphi \ \mathrm{d}x\right]_{t=\tau_1-}^{t=\tau_2+},\ 0\le\tau_1\le\tau_2\le T,\ \varrho s(\varrho,\vartheta)(0-,\cdot)=\varrho_0 s(\varrho_0,\vartheta_0), \quad (2.22)$$

对任意 $\varphi\in C_c^1([0,T]\times\Omega)$, $\varphi\ge 0$ 均成立。

- 弹道能量不等式。不等式

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega\left(\frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}|^2+\varrho e(\varrho,\vartheta)+\frac{1}{2}|\mathbf{B}|^2-\tilde\vartheta\varrho s(\varrho,\vartheta)-\mathbf{B}_B\cdot\mathbf{B}\right)(\tau,\cdot)\ \mathrm{d}x\\
&+\int_0^\tau\int_\Omega\frac{\tilde\vartheta}{\vartheta}\left(\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u}):\nabla_x\mathbf{u}-\frac{\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\vartheta)\cdot\nabla_x\vartheta}{\vartheta}+\zeta(\vartheta)|\mathbf{curl}_x\mathbf{B}|^2\right)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&\quad\le-\int_0^\tau\int_\Omega\left(\varrho s(\varrho,\vartheta)\partial_t\tilde\vartheta+\varrho s(\varrho,\vartheta)\mathbf{u}\cdot\nabla_x\tilde\vartheta+\frac{\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\vartheta)}{\vartheta}\cdot\nabla_x\tilde\vartheta\right)\ \mathrm{d}x\\
&\qquad-\int_0^\tau\int_\Omega\left(\mathbf{B}\cdot\partial_t\mathbf{B}_B-(\mathbf{B}\times\mathbf{u})\cdot\mathbf{curl}_x\mathbf{B}_B-\zeta(\vartheta)\mathbf{curl}_x\ \mathbf{B}\cdot\mathbf{curl}_x\mathbf{B}_B\right)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&\qquad+\int_0^\tau\int_\Omega\varrho\mathbf{g}\cdot\mathbf{u}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&\qquad+\int_\Omega\left(\frac{1}{2}\varrho_0|\mathbf{u}_0|^2+\varrho_0 e(\varrho_0,\vartheta_0)+\frac{1}{2}|\mathbf{B}_0|^2-\tilde\vartheta(0,\cdot)\varrho_0 s(\varrho_0,\vartheta_0)-\mathbf{B}_B(0,\cdot)\cdot\mathbf{B}_0\right)\ \mathrm{d}x
\end{aligned}\quad (2.23)$$

对任意 $\tilde\vartheta\in C^1([0,T]\times\Omega)$、$\tilde\vartheta>\underline{\vartheta}$、$\tilde\vartheta|_{\partial\Omega}=\vartheta_B$均成立。

注 2.2. 由于磁场 B 满足 (2.16)，(2.19) 的有效性可扩展至满足 (2.20)、(2.21) 的任意测试函数（不一定是无散的）。事实上，若 $\boldsymbol{\varphi}$满足边界条件 (2.20)，我们考虑满足以下方程的势函数 Ψ

$$\Delta_x\Psi=\mathrm{div}_x\boldsymbol{\varphi}\ \text{in}\ \Omega,\ \Psi|_{\partial\Omega}=0,$$

并写作

$$\boldsymbol{\varphi}=(\boldsymbol{\varphi}-\nabla_x\Psi)+\nabla_x\Psi.$$

一方面，由于 Ψ 在 $\partial\Omega$ 上为零且 B 是无散的，我们有

$$\int_\Omega\mathbf{B}\cdot\nabla_x\Psi\ \mathrm{d}x=\int_\Omega\mathbf{B}\cdot\partial_t\nabla_x\Psi\ \mathrm{d}x=0;$$

由此，积分恒等式 (2.19) 对 $\nabla_x\Psi$ 成立。另一方面，函数 $(\boldsymbol{\varphi}-\nabla_x\Psi)$ 是无散的，并且由于 $\nabla_x\Psi\times\mathbf{n}|_{\partial\Omega}=0$，它是 (2.19) 中的合法测试函数。

若 $\boldsymbol{\varphi}$ 满足 (2.21)，我们只需考虑

$$\Delta_x \Psi = \mathrm{div}_x \boldsymbol{\varphi},\ \nabla_x \Psi \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$$

- 亥姆霍兹分解中的标准势函数。

注 2.3. 与 ϱ、 $\varrho\mathbf{u}$ 和 B 不同，总熵 $\varrho s(\varrho, \vartheta)$ 在时间上不弱连续。然而，可以从熵不等式推导出单侧极限

$$\lim_{t\to\tau-} \int_\Omega \varrho s(\varrho,\vartheta)(t,\cdot)\phi \ \mathrm{d}x,\ \lim_{t\to\tau+} \int_\Omega \varrho s(\varrho,\vartheta)(t,\cdot)\phi \ \mathrm{d}x$$

对任意 $\phi \in C(\Omega)$ 均存在，并且

$$\lim_{t\to\tau-} \int_\Omega \varrho s(\varrho,\vartheta)(t,\cdot)\phi \ \mathrm{d}x \le \lim_{t\to\tau+} \int_\Omega \varrho s(\varrho,\vartheta)(t,\cdot)\phi \ \mathrm{d}x$$

只要 $\phi \ge 0$，参见 [9, 第 3 章第 3.3 节。3] 详情。

注 2.4. 正如下文将要看到的，式 (1.18) 中引入的“磁性”弹道能量 E_{BM} 实际上是变量 $(\varrho, S = \varrho s(\varrho,\vartheta), \mathrm{m} = \varrho\mathbf{u}, \mathrm{B})$ 的严格凸下半连续函数。特别地，其积分是弱下半连续函数，因此 (2.23) 对任意时间 τ 均成立，其中熵采用注 2.3 中讨论的约定。或者，我们也可以对 (2.23) 施加更强的积分形式，写作

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \partial_t\psi \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}|^2 + \varrho e(\varrho,\vartheta) + \frac{1}{2}|\mathbf{B}|^2 - \tilde{\vartheta}\varrho s(\varrho,\vartheta) - \mathbf{B}_B \cdot \mathbf{B} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\quad - \int_0^T \psi \int_\Omega \frac{\tilde{\vartheta}}{\vartheta} \left(\mathbb{S}(\vartheta, \nabla_x\mathbf{u}) : \nabla_x\mathbf{u} - \frac{\mathbf{q}(\vartheta, \nabla_x\vartheta)\cdot\nabla_x\vartheta}{\vartheta} + \zeta(\vartheta)|\mathbf{curl}_x\mathbf{B}|^2 \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\quad \ge \int_0^T \psi \int_\Omega \left(\varrho s(\varrho,\vartheta)\partial_t\tilde{\vartheta} + \varrho s(\varrho,\vartheta)\mathbf{u}\cdot\nabla_x\tilde{\vartheta} + \frac{\mathbf{q}(\varrho,\vartheta)}{\vartheta}\cdot\nabla_x\tilde{\vartheta} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\quad + \int_0^\tau \psi \int_\Omega \left(\mathbf{B}\cdot\partial_t\mathbf{B}_B - (\mathbf{B}\times\mathbf{u})\cdot\mathbf{curl}_x\mathbf{B}_B - \zeta\mathbf{curl}_x\ \mathbf{B}\cdot\mathbf{curl}_x\mathbf{B}_B \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\quad - \int_0^T \psi \int_\Omega \varrho\mathbf{g}\cdot\mathbf{u} \ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\quad - \psi(0)\int_\Omega \left(\frac{1}{2}\varrho_0|\mathbf{u}_0|^2 + \varrho_0 e(\varrho_0,\vartheta_0) + \frac{1}{2}|\mathbf{B}_0|^2 - \tilde{\vartheta}(0,\cdot)\varrho_0 s(\varrho_0,\vartheta_0) - \mathbf{B}_B(0,\cdot)\cdot\mathbf{B}_0 \right) \mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{2.24}$$

对于任意 $\psi \in C_c^1[0,T)$， $\psi \ge 0$。

注 2.5。请特别注意，如果我们将$\widetilde{\mathrm{B}}_B$替换为满足以下条件的任意其他延拓 B，弹道能量不等式 (2.23) 仍然成立：

$$\mathrm{div}_x\widetilde{\mathbf{B}} = 0,$$

and

$$\widetilde{\mathbf{B}} \times \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \mathbf{B}_B \times \mathbf{n}|_{\partial\Omega}, \text{ or } \widetilde{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \mathbf{B}_B \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega},$$

$\widetilde{}$分别如此。事实上，差值 B_B–B 成为感应方程弱形式的一个合适测试函数，其分别满足边界条件 (2.20)、(2.21)。

定义 2.1 意义下全局弱解的存在性将在下文第 5 节中证明。

3 相对能量

A s可压缩磁流体力学系统的相对能量的适当形式为 s

$$E\left(\varrho, \vartheta, \mathbf{u}, \mathbf{B} \,\middle|\, r, \Theta, \mathbf{U}, \mathbf{H}\right) = \frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}-\mathbf{U}|^2 + \frac{1}{2}|\mathbf{B}-\mathbf{H}|^2$$
$$+ \varrho e(\varrho,\vartheta) - \Theta\Big(\varrho s(\varrho,\vartheta) - r s(r,\Theta)\Big) - \Big(e(r,\Theta) - \Theta s(r,\Theta) + \frac{p(r,\Theta)}{r}\Big)(\varrho - r) - r e(r,\Theta). \quad (3.1)$$

在应用中，量 (ϱ, ϑ, u, B) 表示可压缩磁流体力学系统的一个弱解，而 (r, Θ, U, H) 则是满足相容条件的任意足够光滑函数

$$r > 0,\ \Theta > 0 \text{ in } [0,T]\times\overline{\Omega},\ \Theta|_{\partial\Omega} = \vartheta_B,\ \mathbf{U}\cdot\mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0,$$
$$\mathrm{div}_x\mathrm{H} = 0 \text{ 在 } (0,T)\times\Omega \text{ 中},\ \mathrm{H}\times\mathrm{n}|_{\partial\Omega} = \mathrm{B}_B\times\mathrm{n}|_{\partial\Omega},\ \text{或 } \mathrm{H}\cdot\mathrm{n}|_{\partial\Omega} = \mathrm{B}_B\cdot\mathrm{n}|_{\partial\Omega},\ \text{分别。} \quad (3.2)$$

作为一个结果 根据（2.4）中所述的热力学稳定性假设，能量

$$E(\varrho,\vartheta,\mathbf{u},\mathbf{B}) = \frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}|^2 + \varrho e(\varrho,\vartheta) + \frac{1}{2}|\mathbf{B}|^2$$

若用变量（ϱ, $S = \varrho s(\varrho,\vartheta)$, m $= \varrho$u, B）表示，则是一个严格凸的下半连续函数，详情参见 [9,第 3 章第 3.1]节。此外，我们有

$$\frac{\partial E(\varrho,S,\mathbf{m},\mathbf{B})}{\partial\varrho} = \left(e(\varrho,\vartheta) - \vartheta s(\varrho,\vartheta) + \frac{p(\varrho,\vartheta)}{\varrho}\right),\ \frac{\partial E(\varrho,S,\mathbf{m},\mathbf{B})}{\partial S} = \vartheta,$$

其中 $\left(e(\varrho,\vartheta) - \vartheta s(\varrho,\vartheta) + \frac{p(\varrho,\vartheta}{\varrho}\right)$ 是吉布斯自由能。因此，相对能量可以看作与凸函数 E 相关联的布雷格曼散度。特别地，

$$E\left(\varrho,\vartheta,\mathbf{u},\mathbf{B} \,\middle|\, r,\Theta,\mathbf{U},\mathbf{H}\right) \geq 0,\ \text{and } E\left(\varrho,\vartheta,\mathbf{u},\mathbf{B} \,\middle|\, r,\Theta,\mathbf{U},\mathbf{H}\right) = 0 \ \Leftrightarrow\ (\varrho,\vartheta,\mathbf{u},\mathbf{B}) = (r,\Theta,\mathbf{U},\mathbf{H})$$

只要 $r > 0$。

3.1 相对能量不等式

在本节余下部分，我们将在 $(\varrho, \vartheta, \mathrm{u}, \mathrm{B})$ 是定义 2.1 中所述可压缩磁流体力学系统的弱解，且 $(r, \Theta, \mathrm{U}, \mathrm{H})$ 是满足 (3.2) 的任意光滑函数的条件下，推导相对能量不等式。我们的出发点是弹道能量不等式 (2.24)。如注 2.5 所述，我们可以将 B_B 替换为 H，当然，也可以将 ϑ 替换为 Θ，从而得到

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(\frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}|^2 + \varrho e(\varrho,\vartheta) + \frac{1}{2}|\mathbf{B}|^2 - \Theta\varrho s(\varrho,\vartheta) - \mathbf{H}\cdot\mathbf{B} \right)(\tau,\cdot)\ \mathrm{d}x \\
&+ \int_0^\tau \int_\Omega \frac{\Theta}{\vartheta}\left(\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u}) : \nabla_x\mathbf{u} - \frac{\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\vartheta)\cdot\nabla_x\vartheta}{\vartheta} + \zeta(\vartheta)|\mathbf{curl}_x\mathbf{B}|^2 \right)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\quad \le -\int_0^\tau \int_\Omega \left(\varrho s(\varrho,\vartheta)\partial_t\Theta + \varrho s(\varrho,\vartheta)\mathbf{u}\cdot\nabla_x\Theta + \frac{\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\vartheta)}{\vartheta}\cdot\nabla_x\Theta \right)\ \mathrm{d}x \\
&\qquad - \int_0^\tau \int_\Omega \Big(\mathbf{B}\cdot\partial_t\mathbf{H} - (\mathbf{B}\times\mathbf{u})\cdot\mathbf{curl}_x\mathbf{H} - \zeta(\vartheta)\mathbf{curl}_x\ \mathbf{B}\cdot\mathbf{curl}_x\mathbf{H} \Big)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\qquad + \int_0^\tau \int_\Omega \varrho\mathbf{g}\cdot\mathbf{u}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\qquad + \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\varrho_0|\mathbf{u}_0|^2 + \varrho_0 e(\varrho_0,\vartheta_0) + \frac{1}{2}|\mathbf{B}_0|^2 - \Theta(0,\cdot)\varrho_0 s(\varrho_0,\vartheta_0) - \mathbf{H}(0,\cdot)\cdot\mathbf{B}_0 \right)\ \mathrm{d}x
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

3.1.1 动量扰动

我们的首要目标是将 $|\mathrm{u}|^2$ 替换为 $|\mathrm{u}-\mathrm{U}|^2$。将 U 作为测试函数代入动量平衡方程 (2.15)，即可实现这一点。经过简单的推导（详见 [9, 第 3 章第 3.2 节1],），我们得到

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(\frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}-\mathbf{U}|^2 + \varrho e(\varrho,\vartheta) + \frac{1}{2}|\mathbf{B}|^2 - \Theta\varrho s(\varrho,\vartheta) - \mathbf{H}\cdot\mathbf{B} \right)(\tau,\cdot)\ \mathrm{d}x \\
&+ \int_0^\tau \int_\Omega \frac{\Theta}{\vartheta}\left(\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u}) : \nabla_x\mathbf{u} - \frac{\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\vartheta)\cdot\nabla_x\vartheta}{\vartheta} + \zeta(\vartheta)|\mathbf{curl}_x\mathbf{B}|^2 \right)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\quad \le -\int_0^\tau \int_\Omega \Big(\varrho(\mathbf{u}-\mathbf{U})\otimes(\mathbf{u}-\mathbf{U}) + p(\varrho,\vartheta)\mathbb{I} - \mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u}) \Big) : \nabla_x\mathbf{U}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\quad - \int_0^\tau \int_\Omega (\mathbf{curl}_x\mathbf{B}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{U}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\quad - \int_0^\tau \int_\Omega \varrho\Big(\partial_t\mathbf{U} + \mathbf{U}\cdot\nabla_x\mathbf{U} \Big)\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{U})\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\quad - \int_0^\tau \int_\Omega \left(\varrho s(\varrho,\vartheta)\partial_t\Theta + \varrho s(\varrho,\vartheta)\mathbf{u}\cdot\nabla_x\Theta + \frac{\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\vartheta)}{\vartheta}\cdot\nabla_x\Theta \right)\ \mathrm{d}x + \int_0^\tau \int_\Omega \varrho\mathbf{g}\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{U})\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\quad - \int_0^\tau \int_\Omega \Big(\mathbf{B}\cdot\partial_t\mathbf{H} - (\mathbf{B}\times\mathbf{u})\cdot\mathbf{curl}_x\mathbf{H} - \zeta(\vartheta)\mathbf{curl}_x\ \mathbf{B}\cdot\mathbf{curl}_x\ \mathbf{H} \Big)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

$$+\int_\Omega \left(\frac{1}{2}\varrho_0|\mathbf{u}_0-\mathbf{U}(0,\cdot)|^2+\varrho_0 e(\varrho_0,\vartheta_0)+\frac{1}{2}|\mathbf{B}_0|^2-\Theta(0,\cdot)\varrho_0 s(\varrho_0,\vartheta_0)-\mathbf{H}(0,\cdot)\cdot\mathbf{B}_0\right)\ \mathrm{d}x \quad (3.4)$$

对于任何如 (3.2) 中所示的 (Θ, U, H)。

3.1.2 密度扰动

接下来，与 [9, 第 3 章第 3 节4]，中完全相同，我们使用如下量

$$\left(e(r,\Theta)-\Theta s(r,\Theta)+\frac{p(r,\Theta)}{r}\right)$$

作为连续性方程 (2.13) 中的测试函数:

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(\frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}-\mathbf{U}|^2+\varrho e(\varrho,\vartheta)+\frac{1}{2}|\mathbf{B}|^2-\Theta\varrho s(\varrho,\vartheta)-\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\right)(\tau,\cdot)\ \mathrm{d}x\\
&+\int_\Omega \left(\Theta r s(r,\Theta)-\left(e(r,\Theta)-\Theta s(r,\Theta)+\frac{p(r,\Theta)}{r}\right)(\varrho-r)-re(r,\Theta)\right)(\tau,\cdot)\ \mathrm{d}x\\
&+\int_0^\tau\int_\Omega \frac{\Theta}{\vartheta}\left(\mathbb{S}(\vartheta,\mathbf{u}):\nabla_x\mathbf{u}-\frac{\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\vartheta)\cdot\nabla_x\vartheta}{\vartheta}+\zeta(\vartheta)|\mathbf{curl}_x\mathbf{B}|^2\right)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&\quad\le -\int_0^\tau\int_\Omega \Big(\varrho(\mathbf{u}-\mathbf{U})\otimes(\mathbf{u}-\mathbf{U})+p(\varrho,\vartheta)\mathbb{I}-\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u})\Big):\nabla_x\mathbf{U}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&\quad+\int_0^\tau\int_\Omega \frac{\varrho}{r}(\mathbf{u}-\mathbf{U})\cdot\nabla_x p(r,\Theta)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&\quad-\int_0^\tau\int_\Omega (\mathbf{curl}_x\mathbf{B}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{U}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&\quad-\int_0^\tau\int_\Omega \varrho\Big(\partial_t\mathbf{U}+\mathbf{U}\cdot\nabla_x\mathbf{U}+\frac{1}{r}\nabla_x p(r,\Theta)\Big)\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{U})\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&\quad-\int_0^\tau\int_\Omega \left(\varrho\Big(s(\varrho,\vartheta)-s(r,\Theta)\Big)\partial_t\Theta+\varrho\Big(s(\varrho,\vartheta)-s(r,\Theta)\Big)\mathbf{u}\cdot\nabla_x\Theta+\frac{\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\vartheta)}{\vartheta}\cdot\nabla_x\Theta\right)\ \mathrm{d}x\\
&\quad+\int_0^\tau\int_\Omega \varrho\mathbf{g}\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{U})\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&\quad+\int_0^\tau\int_\Omega \left(\left(1-\frac{\varrho}{r}\right)\partial_t p(r,\Theta)-\frac{\varrho}{r}\mathbf{u}\cdot\nabla_x p(r,\Theta)\right)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&\quad-\int_0^\tau\int_\Omega \Big(\mathbf{B}\cdot\partial_t\mathbf{H}-(\mathbf{B}\times\mathbf{u})\cdot\mathbf{curl}_x\mathbf{H}-\zeta(\vartheta)\mathbf{curl}_x\ \mathbf{B}\cdot\mathbf{curl}_x\ \mathbf{H}\Big)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&\quad+\int_\Omega \left(\frac{1}{2}\varrho_0|\mathbf{u}_0-\mathbf{U}(0,\cdot)|^2+\varrho_0 e(\varrho_0,\vartheta_0)+\frac{1}{2}|\mathbf{B}_0|^2-\Theta(0,\cdot)\varrho_0 s(\varrho_0,\vartheta_0)-\mathbf{H}(0,\cdot)\cdot\mathbf{B}_0\right)\ \mathrm{d}x\\
&\quad+\int_\Omega \left(\Theta s(r,\Theta)-\left(e(r,\Theta)-\Theta s(r,\Theta)+\frac{p(r,\Theta)}{r}\right)(\varrho_0-r)-re(r,\Theta)\right)(0,\cdot)\ \mathrm{d}x, \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

只要 $r\in C^1([0,T]\times\Omega)$, $\underline{r}>0$。

3.1.3 磁场扰动与相对能量不等式的最终形式

由于

$$\int_\Omega \frac{1}{2}|\mathbf{H}|^2(\tau,\cdot)\ \mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{1}{2}|\mathbf{H}|^2(0,\cdot)\ \mathrm{d}x = \int_0^\tau \int_\Omega \mathbf{H}\cdot\partial_t\mathbf{H}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \tag{3.6}$$

我们可将 (3.5) 改写为如下最终形式

$$\begin{aligned}
&\left[\int_\Omega E\left(\varrho,\vartheta,\mathbf{u},\mathbf{B}\,\middle|\,r,\Theta,\mathbf{U},\mathbf{H}\right)\ \mathrm{d}x\right]_{t=0}^{t=\tau}\\
&+\int_0^\tau\int_\Omega \frac{\Theta}{\vartheta}\left(\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u}):\nabla_x\mathbf{u} - \frac{\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\vartheta)\cdot\nabla_x\vartheta}{\vartheta} + \zeta(\vartheta)|\mathbf{curl}_x\mathbf{B}|^2\right)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&\quad\le -\int_0^\tau\int_\Omega \Big(\varrho(\mathbf{u}-\mathbf{U})\otimes(\mathbf{u}-\mathbf{U}) + p(\varrho,\vartheta)\mathbb{I} - \mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u})\Big):\nabla_x\mathbf{U}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&\qquad+\int_0^\tau\int_\Omega \frac{\varrho}{r}(\mathbf{u}-\mathbf{U})\cdot\nabla_x p(r,\Theta)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&\qquad-\int_0^\tau\int_\Omega (\mathbf{curl}_x\mathbf{B}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{U}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&\qquad-\int_0^\tau\int_\Omega \varrho\Big(\partial_t\mathbf{U}+\mathbf{U}\cdot\nabla_x\mathbf{U}+\frac{1}{r}\nabla_x p(r,\Theta)-\mathbf{g}\Big)\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{U})\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&\qquad-\int_0^\tau\int_\Omega \left(\varrho\Big(s(\varrho,\vartheta)-s(r,\Theta)\Big)\partial_t\Theta + \varrho\Big(s(\varrho,\vartheta)-s(r,\Theta)\Big)\mathbf{u}\cdot\nabla_x\Theta + \frac{\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\vartheta)}{\vartheta}\cdot\nabla_x\Theta\right)\ \mathrm{d}x\\
&\qquad+\int_0^\tau\int_\Omega \left(\left(1-\frac{\varrho}{r}\right)\partial_t p(r,\Theta) - \frac{\varrho}{r}\mathbf{u}\cdot\nabla_x p(r,\Theta)\right)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&\qquad-\int_0^\tau\int_\Omega \Big(\mathbf{B}\cdot\partial_t\mathbf{H} - (\mathbf{B}\times\mathbf{u})\cdot\mathbf{curl}_x\mathbf{H} - \zeta(\vartheta)\mathbf{curl}_x\ \mathbf{B}\cdot\mathbf{curl}_x\ \mathbf{H}\Big)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&\qquad+\int_0^\tau\int_\Omega \mathbf{H}\cdot\partial_t\mathbf{H}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{3.7}$$

其中，$(r,\Theta,\mathbf{U},\mathbf{H})$ 为 (3.2) 中指定的任意“检验”函数。

注 3.1. 考虑到后续应用，特别是下一节将讨论的弱–强唯一性原理，(3.2) 中的函数类 $(r,\Theta,\mathbf{U},\mathbf{H})$ 可扩展至“极大正则性”框架

$$r\in W^{1,q}((0,T)\times\Omega),\ (\Theta,\mathbf{U},\mathbf{B})\in L^q(0,T;W^{2,q}(\Omega;R^7))\cap W^{1,q}(0,T;L^q(\Omega;R^7)), \tag{3.8}$$

通过稠密性论证。指数 q 必须足够大，以确保 (3.7) 中的所有项都有定义。

4 弱强唯一性原理

定义 2.1 中引入的弱解的第一个重要性质是弱–强唯一性原理。我们假设 $(r, \Theta, \mathbf{U}, \mathbf{H})$ 是该问题的一个光滑解，具体而言，

$$\partial_t r + \mathrm{div}_x(r\mathbf{U}) = 0,$$

$$\partial_t \mathbf{U} + \mathbf{U}\cdot\mathbf{U} + \frac{1}{r}\nabla_x p(r,\Theta) = \frac{1}{r}\mathrm{div}_x \mathbb{S}(\Theta, \nabla_x \mathbf{U}) + \mathbf{g} + \frac{1}{r}\mathbf{curl}_x \mathbf{H}\times\mathbf{H},$$

$$\partial_t \mathbf{H} + \text{旋度}_x(\mathbf{H}\times\mathbf{U}) + \text{旋度}_x(\zeta(\Theta)\text{旋度}_x\mathbf{H}) = 0, \ \text{散度}_x\mathbf{H} = 0,$$

$$r\partial_t s(r,\Theta) + r\mathbf{U}\cdot\nabla_x s(r,\Theta) + \mathrm{div}_x\left(\frac{\mathbf{q}(\Theta,\nabla_x\Theta)}{\Theta}\right)$$

$$= \frac{1}{\Theta}\Big(\mathbb{S}(\Theta,\nabla_x\mathbf{U}) : \nabla_x\mathbf{U} - \frac{\mathbf{q}(\Theta,\nabla_x\Theta\cdot\nabla_x\Theta)}{\Theta} + \zeta(\Theta)|\mathbf{curl}_x\mathbf{H}|^2\Big), \tag{4.1}$$

以及相关的初始条件和边界条件。

定理 4.1.（弱强唯一性）

设 $\Omega \subset R^3$ 为一个有界 Lipschitz 区域。假设热力学函数 p, e, s 满足假设 (2.1)–(2.6)，且输运系数 μ, η, κ, ζ 符合 (2.7)–(2.9)，其中

$$\frac{1}{2} \le \alpha \le 1, \ \beta \ge 3. \tag{4.2}$$

设 $(\varrho, \vartheta, \mathbf{u}, \mathbf{B})$ 是可压缩磁流体力学系统 (1.1)–(1.4) 在 $(0,T)\times\Omega$ 中的弱解，其定义见定义 2.1。假设同一问题在相同的初始数据和边界数据下存在一个属于以下函数类的经典解 $(r, \Theta, \mathbf{U}, \mathbf{H})$

$$r \in C^1([0,T]\times\overline{\Omega}), \ \Theta \in C^{1,2}([0,T]\times\overline{\Omega}), \ \mathbf{U}, \ \mathbf{H} \in C^{1,2}([0,T]\times\overline{\Omega}; R^3). \tag{4.3}$$

Then

$$\varrho = r, \ \mathbf{u} = \mathbf{U}, \ \vartheta = \Theta, \ \mathbf{B} = \mathbf{H} \ a.e. \ in \ [0,T]\times\overline{\Omega}.$$

注记 4.2。由于我们在定理 4.1 中假设经典解存在，初始数据也具有正则性，尤其是，

$$\inf_{\Omega} \varrho_0 > 0, \ \inf_{\Omega} \vartheta_0 > 0.$$

注 4.3. 值得注意的是，该结果对 (4.2) 中指定的指数 α, β 的完整范围均成立。特别是，我们消除了 [4], [9] 中针对 $\beta = 3$ 陈述的弱–强唯一性原理与要求 $\beta > 6$ 的存在性结果之间的差距。其主要创新之处将在下文引理 4.4 中阐述。

本节余下部分用于证明定理 4.1。需要指出的是，可压缩磁流体力学系统的局部时间强解，可以通过如今已十分成熟的技术建立：一种是 Valli [18], Valli 和 Zajaczkowski [19], 提出的方法，另一种是沿用 Kotschote [12] 思路、基于极大正则性的较新方法。正如注 3.1 所述，定理 4.1 的结论对 [12] 中使用的极大正则性类强解仍然成立。

定理 4.1 的证明思路很简单：我们将强解 $(r, \Theta, \mathrm{U}, \mathrm{H})$ 作为测试函数代入相对能量不等式 (3.7)，并采用 Gronwall 型论证。下面分几个步骤进行说明。

4.1 磁场

由于 U 满足动量方程，我们得到

$$\begin{aligned}
&-\int_0^\tau \int_\Omega \varrho\Big(\partial_t \mathbf{U} + \mathbf{U}\cdot\nabla_x \mathbf{U} + \frac{1}{r}\nabla_x p(r,\Theta) - \mathbf{g}\Big)\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{U})\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\tau \int_\Omega \frac{\varrho}{r}\Big(\mathrm{div}_x \mathbb{S}(\Theta,\nabla_x \mathbf{U}) + \mathbf{curl}_x \mathbf{H}\times\mathbf{H}\Big)\cdot(\mathbf{U}-\mathbf{u})\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\tau \int_\Omega \Big(\frac{\varrho}{r}-1\Big)\Big(\mathrm{div}_x \mathbb{S}(\Theta,\nabla_x \mathbf{U}) + \mathbf{curl}_x \mathbf{H}\times\mathbf{H}\Big)\cdot(\mathbf{U}-\mathbf{u})\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&+ \int_0^\tau \int_\Omega \Big(\mathrm{div}_x \mathbb{S}(\Theta,\nabla_x \mathbf{U}) + \mathbf{curl}_x \mathbf{H}\times\mathbf{H}\Big)\cdot(\mathbf{U}-\mathbf{u})\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

类似地，由于 H 是磁场方程的精确解，

$$\begin{aligned}
&-\int_0^\tau \int_\Omega \Big(\mathbf{B}\cdot\partial_t \mathbf{H} - (\mathbf{B}\times\mathbf{u})\cdot\mathbf{curl}_x \mathbf{H} - \zeta(\vartheta)\mathbf{curl}_x\ \mathbf{B}\cdot\mathbf{curl}_x\ \mathbf{H}\Big)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^\tau \int_\Omega \mathbf{H}\cdot\partial_t \mathbf{H}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\tau \int_\Omega (\mathbf{B}-\mathbf{H})\cdot\Big(\mathbf{curl}_x(\mathbf{H}\times\mathbf{U}) + \mathbf{curl}_x(\zeta(\Theta)\mathbf{curl}_x \mathbf{H})\Big)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&+ \int_0^\tau \int_\Omega \Big((\mathbf{B}\times\mathbf{u})\cdot\mathbf{curl}_x \mathbf{H} + \zeta(\vartheta)\mathbf{curl}_x\ \mathbf{B}\cdot\mathbf{curl}_x\ \mathbf{H}\Big)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

将 (3.7)、(4.4)、(4.5) 中不含磁耗散的项重新组合，我们得到如下表达式

$$\begin{aligned}
&-\int_\Omega (\mathbf{curl}_x \mathbf{B}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{U}\ \mathrm{d}x + \int_\Omega (\mathbf{curl}_x \mathbf{H}\times\mathbf{H})\cdot(\mathbf{U}-\mathbf{u})\ \mathrm{d}x \\
&\qquad + \int_\Omega (\mathbf{B}-\mathbf{H})\cdot\mathbf{curl}_x(\mathbf{H}\times\mathbf{U})\ \mathrm{d}x + \int_\Omega (\mathbf{B}\times\mathbf{u})\cdot\mathbf{curl}_x \mathbf{H}\ \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

现在，我们断言以下恒等式

$$-\int_\Omega (\mathbf{curl}_x \mathbf{B}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{U}\ \mathrm{d}x + \int_\Omega (\mathbf{curl}_x \mathbf{H}\times\mathbf{H})\cdot(\mathbf{U}-\mathbf{u})\ \mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_\Omega (\mathbf{B}-\mathbf{H})\cdot \mathbf{curl}_x(\mathbf{H}\times\mathbf{U})\ \mathrm{d}x+\int_\Omega (\mathbf{B}\times\mathbf{u})\cdot\mathbf{curl}_x\mathbf{H}\ \mathrm{d}x\\
&=\int_\Omega \Big(\mathbf{U}\times(\mathbf{B}-\mathbf{H})\Big)\cdot\mathbf{curl}_x(\mathbf{B}-\mathbf{H})\ \mathrm{d}x+\int_\Omega\Big((\mathbf{U}-\mathbf{u})\times(\mathbf{B}-\mathbf{H})\Big)\cdot\mathbf{curl}_x\mathbf{H}\ \mathrm{d}x\\
&+\int_\Omega \mathrm{div}_x\left((\mathbf{B}-\mathbf{H})\times(\mathbf{H}\times\mathbf{U})\right)\ \mathrm{d}x. \qquad (4.6)
\end{aligned}
$$

事实上，右侧的积分可以按如下方式处理:

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega\Big[\Big(\mathbf{U}\times(\mathbf{B}-\mathbf{H})\Big)\cdot\mathbf{curl}_x(\mathbf{B}-\mathbf{H})+\Big((\mathbf{U}-\mathbf{u})\times(\mathbf{B}-\mathbf{H})\Big)\cdot\mathbf{curl}_x\mathbf{H}\Big]\ \mathrm{d}x\\
&\quad=\int_\Omega(\mathbf{U}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{curl}_x(\mathbf{B}-\mathbf{H})\ \mathrm{d}x-\int_\Omega(\mathbf{U}\times\mathbf{H})\cdot\mathbf{curl}_x(\mathbf{B}-\mathbf{H})\ \mathrm{d}x\\
&\quad-\int_\Omega\Big((\mathbf{U}-\mathbf{u})\times\mathbf{curl}_x\mathbf{H}\Big)\cdot\mathbf{B}\ \mathrm{d}x+\int_\Omega\Big(\mathbf{curl}_x\mathbf{H}\times\mathbf{H}\Big)\cdot(\mathbf{U}-\mathbf{u})\ \mathrm{d}x\\
&\quad=-\int_\Omega(\mathbf{curl}_x\mathbf{B}\times\mathbf{B})\mathbf{U}\ \mathrm{d}x+\int_\Omega\Big(\mathbf{curl}_x\mathbf{H}\times\mathbf{H}\Big)\cdot(\mathbf{U}-\mathbf{u})\ \mathrm{d}x\\
&\quad-\int_\Omega(\mathbf{U}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{curl}_x\mathbf{H}\ \mathrm{d}x-\int_\Omega(\mathbf{U}\times\mathbf{H})\cdot\mathbf{curl}_x(\mathbf{B}-\mathbf{H})\ \mathrm{d}x\\
&\quad-\int_\Omega\Big(\mathbf{U}\times\mathbf{curl}_x\mathbf{H}\Big)\cdot\mathbf{B}\ \mathrm{d}x+\int_\Omega(\mathbf{u}\times\mathbf{curl}_x\mathbf{H})\cdot\mathbf{B}\ \mathrm{d}x\\
&\quad=-\int_\Omega(\mathbf{curl}_x\mathbf{B}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{U}\ \mathrm{d}x+\int_\Omega\Big(\mathbf{curl}_x\mathbf{H}\times\mathbf{H}\Big)\cdot(\mathbf{U}-\mathbf{u})\ \mathrm{d}x\\
&\quad+\int_\Omega(\mathbf{B}\times\mathbf{u})\cdot\mathbf{curl}_x\mathbf{H}\ \mathrm{d}x+\int_\Omega(\mathbf{H}\times\mathbf{U})\cdot\mathbf{curl}_x(\mathbf{B}-\mathbf{H})\ \mathrm{d}x\\
&\quad=-\int_\Omega(\mathbf{curl}_x\mathbf{B}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{U}\ \mathrm{d}x+\int_\Omega\Big(\mathbf{curl}_x\mathbf{H}\times\mathbf{H}\Big)\cdot(\mathbf{U}-\mathbf{u})\ \mathrm{d}x\\
&\quad+\int_\Omega(\mathbf{B}\times\mathbf{u})\cdot\mathbf{curl}_x\mathbf{H}\ \mathrm{d}x+\int_\Omega(\mathbf{B}-\mathbf{H})\cdot\mathbf{curl}_x(\mathbf{H}\times\mathbf{U})\ \mathrm{d}x\\
&\quad+\int_\Omega\mathrm{div}_x\left((\mathbf{B}-\mathbf{H})\times(\mathbf{H}\times\mathbf{U})\right)\ \mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

综上所述，我们可以将不等式 (3.7) 改写为

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega E\left(\varrho,\vartheta,\mathbf{u},\mathbf{B}\,\middle|\,r,\Theta,\mathbf{U},\mathbf{H}\right)(\tau,\cdot)\ \mathrm{d}x\\
&+\int_0^\tau\int_\Omega\frac{\Theta}{\vartheta}\left(\mathbb{S}:\nabla_x\mathbf{u}-\frac{\mathbf{q}\cdot\nabla_x\vartheta}{\vartheta}+\zeta(\vartheta)|\mathbf{curl}_x\mathbf{B}|^2\right)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&\quad\le-\int_0^\tau\int_\Omega\Big(\varrho(\mathbf{u}-\mathbf{U})\otimes(\mathbf{u}-\mathbf{U})+p\mathbb{I}-\mathbb{S}\Big):\nabla_x\mathbf{U}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^\tau\int_\Omega \frac{\varrho}{r}(\mathbf{u}-\mathbf{U})\cdot\nabla_x p(r,\Theta)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&-\int_0^\tau\int_\Omega \mathrm{div}_x\mathbb{S}(\Theta,\nabla_x\mathbf{U})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{U})\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&-\int_0^\tau\int_\Omega \Big(\varrho(s-s(r,\Theta))\partial_t\Theta+\varrho(s-s(r,\Theta))\mathbf{u}\cdot\nabla_x\Theta+\frac{\mathbf{q}}{\vartheta}\cdot\nabla_x\Theta\Big)\ \mathrm{d}x\\
&+\int_0^\tau\int_\Omega \Big(\Big(1-\frac{\varrho}{r}\Big)\partial_t p(r,\Theta)-\frac{\varrho}{r}\mathbf{u}\cdot\nabla_x p(r,\Theta)\Big)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&+\int_0^\tau\int_\Omega (\mathbf{B}-\mathbf{H})\cdot\mathbf{curl}_x(\zeta(\Theta)\mathbf{curl}_x\mathbf{H})\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\int_0^\tau\int_\Omega \zeta(\vartheta)\mathbf{curl}_x\mathbf{B}\cdot\mathbf{curl}_x\mathbf{H}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&+\int_0^\tau\int_\Omega \Big(\frac{\varrho}{r}-1\Big)\Big(\mathrm{div}_x\mathbb{S}(\Theta,\nabla_x\mathbf{U})+\mathbf{curl}_x\mathbf{H}\times\mathbf{H}\Big)\cdot(\mathbf{U}-\mathbf{u})\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&+\int_0^\tau\int_\Omega \Big(\mathbf{U}\times(\mathbf{B}-\mathbf{H})\Big)\cdot\mathbf{curl}_x(\mathbf{B}-\mathbf{H})\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&+\int_0^\tau\int_\Omega \Big((\mathbf{U}-\mathbf{u})\times(\mathbf{B}-\mathbf{H})\Big)\cdot\mathbf{curl}_x\mathbf{H}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&+\int_0^\tau\int_\Omega \mathrm{div}_x\left((\mathbf{B}-\mathbf{H})\times(\mathbf{H}\times\mathbf{U})\right)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t
\end{aligned}\tag{4.7}
$$

此外，我们有

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega (\mathbf{B}-\mathbf{H})\cdot\mathbf{curl}_x(\zeta(\Theta)\mathbf{curl}_x\mathbf{H})\ \mathrm{d}x&=\int_\Omega \zeta(\Theta)\mathbf{curl}_x\mathbf{H}\cdot\mathbf{curl}_x(\mathbf{B}-\mathbf{H})\ \mathrm{d}x\\
&+\int_\Omega \mathrm{div}_x\left(\zeta(\Theta)(\mathbf{B}-\mathbf{H})\cdot\mathbf{curl}_x\mathbf{H}\right)\ \mathrm{d}x.
\end{aligned}\tag{4.8}
$$

我们断言

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\tau\int_\Omega \mathrm{div}_x\left((\mathbf{B}-\mathbf{H})\times(\mathbf{H}\times\mathbf{U})\right)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\int_\Omega \mathrm{div}_x\left(\zeta(\Theta)(\mathbf{B}-\mathbf{H})\times\mathbf{curl}_x\mathbf{H}\right)\ \mathrm{d}x\\
&\quad=\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}\Big((\mathbf{B}-\mathbf{H})\times(\mathbf{H}\times\mathbf{U})\Big)\cdot\mathbf{n}+\Big(\zeta(\Theta)(\mathbf{B}-\mathbf{H})\cdot\mathbf{curl}_x\mathbf{H}\Big)\cdot\mathbf{n}\ \mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}t=0.
\end{aligned}\tag{4.9}
$$

事实上，要么 B、H 满足边界条件 (1.12)，此时 $(\mathbf{B}-\mathbf{H})\times\mathbf{n}=0$；要么 H 满足通量条件 (1.14)。两种情况下，(4.9) 中的曲面积分都为零。

因此，关系式（4.7）可写成

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega E\left(\varrho,\vartheta,\mathbf{u},\mathbf{B}\,\middle|\,r,\Theta,\mathbf{U},\mathbf{H}\right)(\tau,\cdot)\ \mathrm{d}x\\
&+\int_0^\tau\int_\Omega\frac{\Theta}{\vartheta}\left(\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u}):\nabla_x\mathbf{u}-\frac{\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\vartheta)\cdot\nabla_x\vartheta}{\vartheta}+\zeta(\vartheta)|\mathbf{curl}_x\mathbf{B}|^2\right)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_0^\tau \int_\Omega \frac{\varrho}{r}(\mathbf{u}-\mathbf{U})\cdot\nabla_x p(r,\Theta)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \int_0^\tau \int_\Omega p(\varrho,\vartheta)\mathrm{div}_x\mathbf{U}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&+\int_0^\tau \int_\Omega \mathbb{S}(\Theta,\nabla_x\mathbf{U}):\nabla_x(\mathbf{u}-\mathbf{U})\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^\tau \int_\Omega \mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u}):\nabla_x\mathbf{U}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&-\int_0^\tau \int_\Omega \Big(\varrho\Big(s(\varrho,\vartheta)-s(r,\Theta)\Big)\partial_t\Theta + \varrho\Big(s(\varrho,\vartheta)-s(r,\Theta)\Big)\mathbf{u}\cdot\nabla_x\Theta + \frac{\mathbf{q}}{\vartheta}\cdot\nabla_x\Theta\Big)\ \mathrm{d}x\\
&+\int_0^\tau \int_\Omega \Big(\Big(1-\frac{\varrho}{r}\Big)\partial_t p(r,\Theta) - \frac{\varrho}{r}\mathbf{u}\cdot\nabla_x p(r,\Theta)\Big)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&+\int_0^\tau \int_\Omega \zeta(\Theta)\mathbf{curl}_x(\mathbf{B}-\mathbf{H})\cdot\mathbf{curl}_x\mathbf{H}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^\tau \int_\Omega \zeta(\vartheta)\mathbf{curl}_x\mathbf{B}\cdot\mathbf{curl}_x\mathbf{H}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&+\int_0^\tau \int_\Omega \Big(\frac{\varrho}{r}-1\Big)\Big(\mathrm{div}_x\mathbb{S}(\Theta,\nabla_x\mathbf{U}) + \mathbf{curl}_x\mathbf{H}\times\mathbf{H}\Big)\cdot(\mathbf{U}-\mathbf{u})\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&+\int_\Omega \Big(\mathbf{U}\times(\mathbf{B}-\mathbf{H})\Big)\cdot\mathbf{curl}_x(\mathbf{B}-\mathbf{H})\ \mathrm{d}x + \int_\Omega \Big((\mathbf{U}-\mathbf{u})\times(\mathbf{B}-\mathbf{H})\Big)\cdot\mathbf{curl}_x\mathbf{H}\ \mathrm{d}x\\
&-\int_0^\tau \int_\Omega \Big(\varrho(\mathbf{u}-\mathbf{U})\otimes(\mathbf{u}-\mathbf{U})\Big):\nabla_x\mathbf{U}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

4.2 压力与熵

经过简单变形后，我们可以将（4.10）改写为

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega E\left(\varrho,\vartheta,\mathbf{u},\mathbf{B}\,\middle|\,r,\Theta,\mathbf{U},\mathbf{H}\right)(\tau,\cdot)\ \mathrm{d}x\\
&+\int_0^\tau \int_\Omega \frac{\Theta}{\vartheta}\left(\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u}):\nabla_x\mathbf{u} - \frac{\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\vartheta)\cdot\nabla_x\vartheta}{\vartheta} + \zeta(\vartheta)|\mathbf{curl}_x\mathbf{B}|^2\right)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&\quad\leq \int_0^\tau \int_\Omega \Big(p(r,\Theta)-p(\varrho,\vartheta)\Big)\mathrm{div}_x\mathbf{U}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&\quad-\int_0^\tau \int_\Omega \Big(r\Big(s(\varrho,\vartheta)-s(r,\Theta)\Big)\partial_t\Theta + r\Big(s(\varrho,\vartheta)-s(r,\Theta)\Big)\mathbf{U}\cdot\nabla_x\Theta\Big)\ \mathrm{d}x\\
&\quad+\int_0^\tau \int_\Omega \Big(1-\frac{\varrho}{r}\Big)\Big(\partial_t p(r,\Theta) + \mathbf{U}\cdot\nabla_x p(r,\Theta)\Big)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&\quad+\int_0^\tau \int_\Omega \mathbb{S}(\Theta,\nabla_x\mathbf{U}):\nabla_x(\mathbf{u}-\mathbf{U})\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^\tau \int_\Omega \mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u}):\nabla_x\mathbf{U}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&\quad+\int_0^\tau \int_\Omega \zeta(\Theta)\mathbf{curl}_x(\mathbf{B}-\mathbf{H})\cdot\mathbf{curl}_x\mathbf{H}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^\tau \int_\Omega \zeta(\vartheta)\mathbf{curl}_x\mathbf{B}\cdot\mathbf{curl}_x\mathbf{H}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&\quad-\int_0^\tau \int_\Omega \frac{\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\vartheta)}{\vartheta}\cdot\nabla_x\Theta\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^\tau \mathcal{R}_1,
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

带有二次余项

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}_1 = &\int_0^\tau \int_\Omega (r-\varrho)\Big(s(\varrho,\vartheta)-s(r,\Theta)\Big)\partial_t\Theta \ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&+\int_0^\tau \int_\Omega (r-\varrho)\Big(s(\varrho,\vartheta)-s(r,\Theta)\Big)\mathbf{U}\cdot\nabla_x\Theta \ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&+\int_0^\tau \int_\Omega \varrho\Big(s(\varrho,\vartheta)-s(r,\Theta)\Big)(\mathbf{U}-\mathbf{u})\cdot\nabla_x\Theta \ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&+\int_0^\tau \int_\Omega \Big(\frac{\varrho}{r}-1\Big)\Big(\mathrm{div}_x\mathbb{S}(\Theta,\nabla_x\mathbf{U})+\mathbf{curl}_x\mathbf{H}\times\mathbf{H}-\nabla_x p(r,\Theta)\Big)\cdot(\mathbf{U}-\mathbf{u}) \ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&+\int_\Omega \Big(\mathbf{U}\times(\mathbf{B}-\mathbf{H})\Big)\cdot\mathbf{curl}_x(\mathbf{B}-\mathbf{H}) \ \mathrm{d}x+\int_\Omega \Big((\mathbf{U}-\mathbf{u})\times(\mathbf{B}-\mathbf{H})\Big)\cdot\mathbf{curl}_x\mathbf{H} \ \mathrm{d}x \\
&-\int_0^\tau \int_\Omega \Big(\varrho(\mathbf{u}-\mathbf{U})\otimes(\mathbf{u}-\mathbf{U})\Big):\nabla_x\mathbf{U} \ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&+\int_0^\tau \int_\Omega \Big(\frac{\varrho}{r}-1\Big)(\mathbf{u}-\mathbf{U})\cdot\nabla_x p(r,\Theta) \ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \qquad (4.12)
\end{aligned}
$$

利用恒等式

$$
\frac{\partial s(r,\Theta)}{\partial\varrho}=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial p(r,\Theta)}{\partial\vartheta}
$$

我们按照 [4, 第 3 节3],中的方法进行计算

$$
\begin{aligned}
&\Big(1-\frac{\varrho}{r}\Big)\left(\partial_t p(r,\Theta)+\mathbf{U}\cdot\nabla_x p(r,\Theta)\right)+\mathrm{div}_x\mathbf{U}\Big(p(r,\Theta)-p(\varrho,\vartheta)\Big) \\
&=\mathrm{div}_x\mathbf{U}\Big(p(r,\Theta)-\frac{\partial p(r,\Theta)}{\partial\varrho}(r-\varrho)-\frac{\partial p(r,\Theta)}{\partial\vartheta}(\Theta-\vartheta)-p(\varrho,\vartheta)\Big) \\
&-r(r-\varrho)\frac{\partial s(r,\Theta)}{\partial\varrho}\Big(\partial_t\Theta+\mathbf{U}\cdot\nabla_x\Theta\Big)-r(\Theta-\vartheta)\frac{\partial s(r,\Theta)}{\partial\vartheta}\Big(\partial_t\Theta+\mathbf{U}\cdot\nabla_x\Theta\Big) \\
&-(\Theta-\vartheta)\mathrm{div}_x\left(\frac{\mathbf{q}(\Theta,\nabla_x\Theta)}{\Theta}\right)+\left(1-\frac{\vartheta}{\Theta}\right)\left(\mathbb{S}(\Theta,\nabla_x\mathbf{U}):\nabla_x\mathbf{U}-\frac{\mathbf{q}(\Theta,\nabla_x\Theta)\cdot\nabla_x\Theta}{\Theta}\right).
\end{aligned}
$$

因此，不等式 (4.11) 可写为

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega E\left(\varrho,\vartheta,\mathbf{u},\mathbf{B}\,\middle|\,r,\Theta,\mathbf{U},\mathbf{H}\right)(\tau,\cdot) \ \mathrm{d}x \\
&+\int_0^\tau\int_\Omega\frac{\Theta}{\vartheta}\left(\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u}):\nabla_x\mathbf{u}-\frac{\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\vartheta)\cdot\nabla_x\vartheta}{\vartheta}+\zeta(\vartheta)|\mathbf{curl}_x\mathbf{B}|^2\right) \ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\quad\le-\int_0^\tau\int_\Omega(\Theta-\vartheta)\mathrm{div}_x\left(\frac{\mathbf{q}(\Theta,\nabla_x\Theta)}{\Theta}\right) \ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\quad+\int_0^\tau\int_\Omega\left(1-\frac{\vartheta}{\Theta}\right)\left(\mathbb{S}(\Theta,\nabla_x\mathbf{U}):\nabla_x\mathbf{U}-\frac{\mathbf{q}(\Theta,\nabla_x\Theta)\cdot\nabla_x\Theta}{\Theta}+\zeta(\Theta)|\mathbf{curl}_x\mathbf{H}|^2\right) \ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^\tau\int_\Omega \mathbb{S}(\Theta,\nabla_x\mathbf{U}):\nabla_x(\mathbf{u}-\mathbf{U})\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\int_0^\tau\int_\Omega \mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u}):\nabla_x\mathbf{U}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&+\int_0^\tau\int_\Omega \zeta(\Theta)\mathbf{curl}_x(\mathbf{B}-\mathbf{H})\cdot\mathbf{curl}_x\mathbf{H}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\int_0^\tau\int_\Omega \zeta(\vartheta)\mathbf{curl}_x\mathbf{B}\cdot\mathbf{curl}_x\mathbf{H}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&-\int_0^\tau\int_\Omega \frac{\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\vartheta)}{\vartheta}\cdot\nabla_x\Theta\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\int_0^\tau \mathcal{R}_2,
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

带有余项

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}_2=&\int_0^\tau\int_\Omega (r-\varrho)\Big(s(\varrho,\vartheta)-s(r,\Theta)\Big)\partial_t\Theta\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&+\int_0^\tau\int_\Omega (r-\varrho)\Big(s(\varrho,\vartheta)-s(r,\Theta)\Big)\mathbf{U}\cdot\nabla_x\Theta\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&+\int_0^\tau\int_\Omega \varrho\Big(s(\varrho,\vartheta)-s(r,\Theta)\Big)(\mathbf{U}-\mathbf{u})\cdot\nabla_x\Theta\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&+\int_0^\tau\int_\Omega \left(\frac{\varrho}{r}-1\right)\Big(\mathrm{div}_x\mathbb{S}(\Theta,\nabla_x\mathbf{U})+\mathbf{curl}_x\mathbf{H}\times\mathbf{H}-\nabla_x p(r,\Theta)\Big)\cdot(\mathbf{U}-\mathbf{u})\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&+\int_\Omega \Big(\mathbf{U}\times(\mathbf{B}-\mathbf{H})\Big)\cdot\mathbf{curl}_x(\mathbf{B}-\mathbf{H})\ \mathrm{d}x+\int_\Omega \Big((\mathbf{U}-\mathbf{u})\times(\mathbf{B}-\mathbf{H})\Big)\cdot\mathbf{curl}_x\mathbf{H}\ \mathrm{d}x\\
&-\int_0^\tau\int_\Omega \Big(\varrho(\mathbf{u}-\mathbf{U})\otimes(\mathbf{u}-\mathbf{U})\Big):\nabla_x\mathbf{U}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&+\int_0^\tau\int_\Omega \left(\frac{\varrho}{r}-1\right)(\mathbf{u}-\mathbf{U})\cdot\nabla_x p(r,\Theta)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&+\int_0^\tau\int_\Omega \mathrm{div}_x\mathbf{U}\Big(p(r,\Theta)-\frac{\partial p(r,\Theta)}{\partial\varrho}(r-\varrho)-\frac{\partial p(r,\Theta)}{\partial\vartheta}(\Theta-\vartheta)-p(\varrho,\vartheta)\Big)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&+\int_0^\tau\int_\Omega r\left(s(r,\Theta)-\frac{\partial s(r,\Theta)}{\partial\varrho}(r-\varrho)-\frac{\partial s(r,\Theta)}{\partial\vartheta}(\Theta-\vartheta)-s(\varrho,\vartheta)\right)(\partial_t\Theta+\mathbf{U}\cdot\nabla_x\Theta)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

4.3 扩散项

首先，由于 ϑ 和 Θ 在 $\partial\Omega$ 上重合，我们可以进行分部积分:

$$
-\int_0^\tau\int_\Omega(\Theta-\vartheta)\mathrm{div}_x\left(\frac{\mathbf{q}(\Theta,\nabla_x\Theta)}{\Theta}\right)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=\int_0^\tau\int_\Omega\left(\frac{\mathbf{q}(\Theta,\nabla_x\Theta)}{\Theta}\right)\cdot(\nabla_x\Theta-\nabla_x\vartheta)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t
$$

将相对能量不等式 (4.13) 中的所有扩散项移至左侧，得到

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\tau\int_\Omega\left(\frac{\Theta}{\vartheta}\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u}):\nabla_x\mathbf{u}-\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u}):\nabla_x\mathbf{U})-\mathbb{S}(\Theta,\nabla_x\mathbf{U}):\nabla_x(\mathbf{u}-\mathbf{U})\right)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&\quad=\int_0^\tau\int_\Omega\left(\left(\frac{\Theta}{\vartheta}-1\right)\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u}):\nabla_x\mathbf{u}+\Big(\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u})-\mathbb{S}(\Theta,\nabla_x\mathbf{U})\Big):\nabla_x(\mathbf{u}-\mathbf{U})\right)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

同理

$$\int_0^\tau \int_\Omega \left(\frac{\Theta}{\vartheta} \zeta(\vartheta) |\mathbf{curl}_x \mathbf{B}|^2 - \zeta(\Theta) \mathbf{curl}_x(\mathbf{B} - \mathbf{H}) \cdot \mathbf{curl}_x \mathbf{H} - \zeta(\vartheta) \mathbf{curl}_x \mathbf{B} \cdot \mathbf{curl}_x \mathbf{H} \right) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t$$
$$= \int_0^\tau \int_\Omega \left(\left(\frac{\Theta}{\vartheta} - 1 \right) \zeta(\vartheta) |\mathbf{curl}_x \mathbf{B}|^2 + \Big(\zeta(\vartheta) \mathbf{curl}_x \mathbf{B} - \zeta(\Theta) \mathbf{curl}_x \mathbf{H} \Big) \cdot \mathbf{curl}_x (\mathbf{B} - \mathbf{H}) \right) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t. \tag{4.16}$$

最后，

$$- \int_0^\tau \int_\Omega \left(\frac{\Theta}{\vartheta} \frac{\mathbf{q}(\varrho, \nabla_x \vartheta) \cdot \nabla_x \vartheta}{\vartheta} \right) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + \int_0^\tau \int_\Omega (\Theta - \vartheta) \mathrm{div}_x \left(\frac{\mathbf{q}(\Theta, \nabla_x \Theta)}{\Theta} \right) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t$$
$$+ \int_0^\tau \int_\Omega \left(1 - \frac{\vartheta}{\Theta} \right) \left(\frac{\mathbf{q}(\Theta, \nabla_x \Theta) \cdot \nabla_x \Theta}{\Theta} \right) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + \int_0^\tau \int_\Omega \frac{\mathbf{q}(\vartheta, \nabla_x \vartheta)}{\vartheta} \cdot \nabla_x \Theta \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t$$
$$= \int_0^\tau \int_\Omega \left(\left(1 - \frac{\Theta}{\vartheta} \right) \frac{\mathbf{q}(\vartheta, \nabla_x \vartheta) \cdot \nabla_x \vartheta}{\vartheta} + \left(1 - \frac{\vartheta}{\Theta} \right) \frac{\mathbf{q}(\Theta, \nabla_x \Theta) \cdot \nabla_x \Theta}{\Theta} \right) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t$$
$$+ \int_0^\tau \int_\Omega \left(\frac{\mathbf{q}(\vartheta, \nabla_x \vartheta)}{\vartheta} - \frac{\mathbf{q}(\Theta, \nabla_x \Theta)}{\Theta} \right) \cdot (\nabla_x \Theta - \nabla_x \vartheta) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \tag{4.17}$$

因此，(4.13) 可改写为最终形式

$$\int_\Omega E \left(\varrho, \vartheta, \mathbf{u}, \mathbf{B} \, \Big| r, \Theta, \mathbf{U}, \mathbf{H} \right) (\tau, \cdot) \, \mathrm{d}x$$
$$+ \int_0^\tau \int_\Omega \left(\frac{\Theta}{\vartheta} - 1 \right) \mathbb{S}(\vartheta, \nabla_x \mathbf{u}) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + \int_0^\tau \int_\Omega \left(\frac{\vartheta}{\Theta} - 1 \right) \mathbb{S}(\Theta, \nabla_x \mathbf{U}) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t$$
$$+ \int_0^\tau \int_\Omega \left(\frac{\Theta}{\vartheta} - 1 \right) \zeta(\vartheta) |\mathbf{curl}_x \mathbf{B}|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + \int_0^\tau \int_\Omega \left(\frac{\vartheta}{\Theta} - 1 \right) \zeta(\Theta) |\mathbf{curl}_x \mathbf{H}|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t$$
$$+ \int_0^\tau \int_\Omega \left(\left(1 - \frac{\Theta}{\vartheta} \right) \frac{\mathbf{q}(\varrho, \nabla_x \vartheta) \cdot \nabla_x \vartheta}{\vartheta} + \left(1 - \frac{\vartheta}{\Theta} \right) \frac{\mathbf{q}(\Theta, \nabla_x \Theta) \cdot \nabla_x \Theta}{\Theta} \right) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t$$
$$+ \int_0^\tau \int_\Omega \Big(\mathbb{S}(\vartheta, \nabla_x \mathbf{u}) - \mathbb{S}(\Theta, \nabla_x \mathbf{U}) \Big) : \nabla_x \Big(\mathbf{u} - \mathbf{U} \Big) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t$$
$$+ \int_0^\tau \int_\Omega \Big(\zeta(\vartheta) \mathbf{curl}_x \mathbf{B} - \zeta(\Theta) \mathbf{curl}_x \mathbf{H} \Big) \cdot \mathbf{curl}_x (\mathbf{B} - \mathbf{H}) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t$$
$$+ \int_0^\tau \int_\Omega \left(\frac{\mathbf{q}(\vartheta, \nabla_x \vartheta)}{\vartheta} - \frac{\mathbf{q}(\Theta, \nabla_x \Theta)}{\Theta} \right) \cdot (\nabla_x \Theta - \nabla_x \vartheta) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t$$
$$\leq \int_0^\tau \mathcal{R}_2 \, \mathrm{d}t, \tag{4.18}$$

其中 $\mathcal{R}_2$ 由式 (4.14) 给出。

4.4 精细估计

与 [9, 第 4 章第 4.2 节类似，1], 我们引入可测函数的“本质”部分和“剩余”部分。我们设

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{\rm ess} &= \left\{ (t,x) \in (0,T)\times\Omega \ \Big|\ \frac{1}{2} \inf_{(0,T)\times\Omega} r \leq \varrho(t,x) \leq 2 \sup_{(0,T)\times\Omega} r \right. \\
&\qquad \left. \frac{1}{2} \inf_{(0,T)\times\Omega} \Theta \leq \vartheta(t,x) \leq 2 \sup_{(0,T)\times\Omega} \Theta \right\} \\
\mathcal{O}_{\rm res} &= \Big((0,T)\times\Omega \Big) \setminus \mathcal{O}_{\rm ess}, \\
h_{\rm ess} &= h \mathbb{1}_{\mathcal{O}_{\rm ess}},\ h_{\rm res} = h - h_{\rm ess} = h \mathbb{1}_{\mathcal{O}_{\rm res}}.
\end{aligned}$$

弱–强唯一性原理证明的其余部分基本沿用 [9, 第 4 章第 4] 节中的论证，并作必要修改，以适应包含磁场的项以及完全滑移/狄利克雷边界条件。首先，我们回顾相对能量的强制性：

$$\begin{aligned}
E\left(\varrho,\vartheta,\mathbf{u},\mathbf{B}\Big|r,\Theta,\mathbf{U},\mathbf{H}\right) &\geq c\Big(|[\varrho-r]_{\rm ess}|^2 + |[\vartheta-\Theta]_{\rm ess}|^2 + |[\mathbf{u}-\mathbf{U}]_{\rm ess}|^2 + |[\mathbf{B}-\mathbf{H}]_{\rm ess}|^2\Big), \\
E\left(\varrho,\vartheta,\mathbf{u},\mathbf{B}\Big|r,\Theta,\mathbf{U},\mathbf{H}\right) &\geq \left(1_{\rm res} + [\varrho|\mathbf{u}|^2]_{\rm res} + [\varrho e(\varrho,\vartheta)]_{\rm res} + [\varrho|s(\varrho,\vartheta)|]_{\rm res} + [|\mathbf{B}|^2]_{\rm res}\right), \qquad (4.19)
\end{aligned}$$

其中，常数取决于 $\inf\ r$、$\sup\ r$、$\inf\ \Theta$、$\sup\ \Theta$。

4.4.1 温度梯度

以下关键估计已在 [9, 第 4 章第 4.2 节中针对 $\beta = 3$ 证明。这里，我们将其适用范围扩展到一般的 $\beta \geq 3$。

Lemma 4.4. 在定理 4.1 的假设下，存在一个常数 $c >$ 0,

$$\begin{aligned}
&\|\vartheta - \Theta\|^2_{W^{1,2}(\Omega;R^3)} \\
&\leq c \int_\Omega \left(\left(\frac{\Theta}{\vartheta} - 1 \right) \frac{\kappa(\vartheta)|\nabla_x \vartheta|^2}{\vartheta} + \left(\frac{\vartheta}{\Theta} - 1 \right) \frac{\kappa(\Theta)|\nabla_x \Theta|^2}{\Theta} \right) \ {\rm d}x \\
&+ \int_\Omega \left(\frac{\kappa(\Theta)\nabla_x \Theta}{\Theta} - \frac{\kappa(\vartheta)\nabla_x \vartheta}{\vartheta} \right) \cdot (\nabla_x \Theta - \nabla_x \vartheta) \ {\rm d}x + \xi \int_\Omega E\left(\varrho,\vartheta,\mathbf{u},\mathbf{B}\Big|r,\Theta,\mathbf{U},\mathbf{H}\right) \ {\rm d}x \qquad (4.20)
\end{aligned}$$

其中，$\xi > 0$ 取决于 Θ、$\inf \Theta$ 和 $\|\vartheta\|_{L^4(\Omega)}$。

注 4.5. 正如我们将在下文看到的，只要 $\kappa(\vartheta) \approx 1 + \vartheta^\beta$, $\beta \geq 2$，该结果就成立。

证明。我们首先考虑本质部分。改写

$$\left(\frac{\Theta}{\vartheta}-1\right)\frac{\kappa(\vartheta)|\nabla_x\vartheta|^2}{\vartheta}+\left(\frac{\vartheta}{\Theta}-1\right)\frac{\kappa(\Theta)|\nabla_x\Theta|^2}{\Theta}+\left(\frac{\kappa(\Theta)\nabla_x\Theta}{\Theta}-\frac{\kappa(\vartheta)\nabla_x\vartheta}{\vartheta}\right)\cdot(\nabla_x\Theta-\nabla_x\vartheta)$$
$$\geq\Theta\frac{\kappa(\vartheta)}{\vartheta^2}|\nabla_x\vartheta-\nabla_x\Theta|^2+2\frac{\kappa(\vartheta)}{\vartheta^2}(\Theta-\vartheta)(\nabla_x\vartheta-\nabla_x\Theta)\cdot\nabla_x\Theta$$
$$+\left(\frac{\kappa(\vartheta)}{\vartheta}-\frac{\kappa(\Theta)}{\Theta}\right)(\nabla_x\vartheta-\nabla_x\Theta)\cdot\nabla_x\Theta+\left(\frac{\kappa(\vartheta)}{\vartheta}-\frac{\kappa(\Theta)}{\Theta}\right)\left(\frac{\Theta-\vartheta}{\Theta}\right)|\nabla_x\Theta|^2. \tag{4.21}$$

应用 H¨older 不等式，我们由 (4.21) 得出

$$\int_\Omega|[\nabla_x\vartheta-\nabla_x\Theta]_{\rm ess}|^2\ {\rm d}x$$
$$\lesssim\left[\left(\frac{\Theta}{\vartheta}-1\right)\frac{\kappa(\vartheta)|\nabla_x\vartheta|^2}{\vartheta}+\left(\frac{\vartheta}{\Theta}-1\right)\frac{\kappa(\Theta)|\nabla_x\Theta|^2}{\Theta}+\left(\frac{\kappa(\Theta)\nabla_x\Theta}{\Theta}-\frac{\kappa(\vartheta)\nabla_x\vartheta}{\vartheta}\right)\cdot(\nabla_x\Theta-\nabla_x\vartheta)\right]_{\rm ess}$$
$$+\xi\int_\Omega E\left(\varrho,\vartheta,\mathbf{u},\mathbf{B}\Big|r,\Theta,\mathbf{U},\mathbf{H}\right)_{\rm ess}\ {\rm d}x, \tag{4.22}$$

其中 ξ 依赖于 Θ。事实上，对 κ 所施加的唯一假设是：只要 $\vartheta>0$，就有 $\kappa(\vartheta)>0$。

至于余项部分，我们先将其改写为

$$\left(\frac{\Theta}{\vartheta}-1\right)\frac{\kappa(\vartheta)|\nabla_x\vartheta|^2}{\vartheta}+\left(\frac{\vartheta}{\Theta}-1\right)\frac{\kappa(\Theta)|\nabla_x\Theta|^2}{\Theta}+\left(\frac{\kappa(\Theta)\nabla_x\Theta}{\Theta}-\frac{\kappa(\vartheta)\nabla_x\vartheta}{\vartheta}\right)\cdot(\nabla_x\Theta-\nabla_x\vartheta)$$
$$=\frac{\Theta}{\vartheta}\frac{\kappa(\vartheta)|\nabla_x\vartheta|^2}{\vartheta}+\frac{\vartheta}{\Theta}\frac{\kappa(\Theta)|\nabla_x\Theta|^2}{\Theta}-\frac{\kappa(\vartheta)\nabla_x\vartheta}{\vartheta}\cdot\nabla_x\Theta-\frac{\kappa(\Theta)\nabla_x\Theta}{\Theta}\cdot\nabla_x\vartheta \tag{4.23}$$

显然，

$$\left[\frac{\vartheta}{\Theta}\frac{\kappa(\Theta)|\nabla_x\Theta|^2}{\Theta}\right]_{\rm res}\lesssim\int_\Omega E\left(\varrho,\vartheta,\mathbf{u},\mathbf{B}\Big|r,\Theta,\mathbf{U},\mathbf{H}\right)_{\rm res}\ {\rm d}x.$$

因此，当 $\inf\Theta>0$ 时，剩下需要处理的量为

$$\left[\frac{\kappa(\vartheta)|\nabla_x\vartheta|^2}{\vartheta^2}-C\kappa(\vartheta)|\nabla_x\Theta|\right]_{\rm res}$$

其中 C 是依赖于 Θ、$\inf\Theta$ 的正的常数。注意，这一步要求 $\vartheta^2\lesssim\kappa(\vartheta)$。为继续推导，我们在下文将 $\overline{\vartheta}>0$ 视为固定量。记

$$\left[\frac{\kappa(\vartheta)|\nabla_x\vartheta|^2}{\vartheta^2}-C\kappa(\vartheta)|\nabla_x\Theta|\right]_{\rm res}\mathbb{1}_{\vartheta<\overline{\vartheta}}+\left[\frac{\kappa(\vartheta)|\nabla_x\vartheta|^2}{\vartheta^2}-C\kappa(\vartheta)|\nabla_x\Theta|\right]_{\rm res}\mathbb{1}_{\vartheta\geq\overline{\vartheta}}.$$

显然，存在 $\xi=\xi(\overline{\vartheta},\Theta)$ 使得

$$\int_\Omega|[\nabla_x\vartheta]_{\rm res}|^2\mathbb{1}_{\vartheta<\overline{\vartheta}}\ {\rm d}x$$

$$\lesssim \int_\Omega \left[\frac{\kappa(\vartheta)|\nabla_x\vartheta|^2}{\vartheta^2} - C\kappa(\vartheta)|\nabla_x\Theta|\right]_{\rm res} \mathbb{1}_{\vartheta<\overline{\vartheta}}\ \mathrm{d}x + \xi\int_\Omega E\left(\varrho,\vartheta,\mathbf{u},\mathbf{B}\middle|r,\Theta,\mathbf{U},\mathbf{H}\right)_{\rm res}\ \mathrm{d}x. \tag{4.24}$$

因此，接下来只需处理该积分

$$\int_\Omega \left[\frac{\kappa(\vartheta)|\nabla_x\vartheta|^2}{\vartheta^2} - C\kappa(\vartheta)|\nabla_x\Theta|\right]_{\rm res} \mathbb{1}_{\vartheta\geq\overline{\vartheta}}\ \mathrm{d}x = \int_{\vartheta\geq\overline{\vartheta}}\left(\frac{\kappa(\vartheta)|\nabla_x\vartheta|^2}{\vartheta^2} - C\kappa(\vartheta)|\nabla_x\Theta|\right)\mathrm{d}x.$$

由于 $\kappa(\vartheta)\approx(1+\vartheta^\beta)$，我们的任务归结为

$$\int_{\vartheta\geq\overline{\vartheta}}\left(\frac{\kappa(\vartheta)|\nabla_x\vartheta|^2}{\vartheta^2} - C\kappa(\vartheta)|\nabla_x\Theta|\right)\mathrm{d}x \approx \int_{\vartheta\geq\overline{\vartheta}}\left(|\nabla_x\vartheta^{\frac{\beta}{2}}|^2 - C\vartheta^\beta|\nabla_x\Theta|\right)\mathrm{d}x.$$

首先注意到

$$\int_{\vartheta\geq\overline{\vartheta}}\vartheta^\beta|\nabla_x\Theta|\,\mathrm{d}x \leq \int_{\vartheta\geq\overline{\vartheta}}\left(\vartheta^{\frac{\beta}{2}} - \overline{\vartheta}^{\frac{\beta}{2}}\right)^2|\nabla_x\Theta|\,\mathrm{d}x + \int_{\vartheta\geq\overline{\vartheta}}\overline{\vartheta}^\beta|\nabla_x\Theta|\,\mathrm{d}x,$$

其中

$$\int_{\vartheta\geq\overline{\vartheta}}\overline{\vartheta}^\beta|\nabla_x\Theta|\,\mathrm{d}x \leq \zeta\int_\Omega E\left(\varrho,\vartheta,\mathbf{u},\mathbf{B}\middle|r,\Theta,\mathbf{U},\mathbf{H}\right)_{\rm res}\ \mathrm{d}x.$$

最后，还需处理积分

$$\begin{aligned}&\int_{\vartheta\geq\overline{\vartheta}}\left(|\nabla_x\vartheta^{\frac{\beta}{2}}|^2 - C\left(\vartheta^{\frac{\beta}{2}} - \overline{\vartheta}^{\frac{\beta}{2}}\right)^2|\nabla_x\Theta|\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_{\vartheta\geq\overline{\vartheta}}\left(\left|\nabla_x\left(\vartheta^{\frac{\beta}{2}} - \overline{\vartheta}^{\frac{\beta}{2}}\right)\right|^2 - C\left(\vartheta^{\frac{\beta}{2}} - \overline{\vartheta}^{\frac{\beta}{2}}\right)^2|\nabla_x\Theta|\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

一方面，利用 Sobolev–Poincar´e 不等式，我们得到

$$\begin{aligned}&\int_{\vartheta\geq\overline{\vartheta}}\left|\nabla_x\left(\vartheta^{\frac{\beta}{2}} - \overline{\vartheta}^{\frac{\beta}{2}}\right)\right|^2\mathrm{d}x = \int_\Omega\left|\nabla_x\left[\vartheta^{\frac{\beta}{2}} - \overline{\vartheta}^{\frac{\beta}{2}}\right]^+\right|^2\ \mathrm{d}x\\ &\gtrsim \left(\int_\Omega\left|\left[\vartheta^{\frac{\beta}{2}} - \overline{\vartheta}^{\frac{\beta}{2}}\right]^+\right|^6\ \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\int_{\vartheta\geq\overline{\vartheta}}\left(\vartheta^{\frac{\beta}{2}} - \overline{\vartheta}^{\frac{\beta}{2}}\right)^6\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}}.\end{aligned} \tag{4.25}$$

另一方面，由 H¨older 不等式可得，

$$\int_{\vartheta\geq\overline{\vartheta}}\left(\vartheta^{\frac{\beta}{2}} - \overline{\vartheta}^{\frac{\beta}{2}}\right)^2|\nabla_x\Theta|\,\mathrm{d}x \leq \left(\int_{\vartheta\geq\overline{\vartheta}}\left(\vartheta^{\frac{\beta}{2}} - \overline{\vartheta}^{\frac{\beta}{2}}\right)^4\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\vartheta\geq\overline{\vartheta}}|\nabla_x\Theta|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

接下来，根据詹森不等式，

$$\left(\int_{\vartheta\geq\overline{\vartheta}}\left(\vartheta^{\frac{\beta}{2}}-\overline{\vartheta}^{\frac{\beta}{2}}\right)^4\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{3}{2}}=\left(\int_\Omega\left(\left[\vartheta^{\frac{\beta}{2}}-\overline{\vartheta}^{\frac{\beta}{2}}\right]^+\right)^4\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{3}{2}}$$
$$\lesssim\int_\Omega\left(\left[\vartheta^{\frac{\beta}{2}}-\overline{\vartheta}^{\frac{\beta}{2}}\right]^+\right)^6\,\mathrm{d}x=\int_{\vartheta\geq\overline{\vartheta}}\left(\vartheta^{\frac{\beta}{2}}-\overline{\vartheta}^{\frac{\beta}{2}}\right)^6\,\mathrm{d}x;$$

因此

$$\left(\int_{\vartheta\geq\overline{\vartheta}}\left(\vartheta^{\frac{\beta}{2}}-\overline{\vartheta}^{\frac{\beta}{2}}\right)^4\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\lesssim\left(\int_{\vartheta\geq\overline{\vartheta}}\left(\vartheta^{\frac{\beta}{2}}-\overline{\vartheta}^{\frac{\beta}{2}}\right)^6\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}}.\tag{4.26}$$

我们的最后一个观察是，由于$\|\vartheta\|_{L^4(\Omega)}$有界，对于任意 $\delta>0$，存在 $\overline{\vartheta}(\delta)$ 使得

$$\int_{\vartheta\geq\overline{\vartheta}}|\nabla_x\Theta|^2\,\mathrm{d}x\leq\delta.$$

结合 (4.25) 和 (4.26)，我们可以推得

$$\int_\Omega|[\nabla_x\vartheta]_{\mathrm{res}}|^2\mathbb{1}_{\vartheta\geq\overline{\vartheta}}\,\mathrm{d}x$$
$$\lesssim\int_\Omega\left[\frac{\kappa(\vartheta)|\nabla_x\vartheta|^2}{\vartheta^2}-C\kappa(\vartheta)|\nabla_x\Theta|\right]_{\mathrm{res}}\,\mathrm{d}x+\xi\int_\Omega E\left(\varrho,\vartheta,\mathbf{u},\mathbf{B}\middle|r,\Theta,\mathbf{U},\mathbf{H}\right)_{\mathrm{res}}\,\mathrm{d}x\tag{4.27}$$

综合 (4.22)、(4.24) 和 (4.27)，我们得到 (4.20)。

□

4.4.2 黏性应力和磁扩散

正如 在 [9, 第4章第4.2节中，3],我们估计黏性应力耗散 :

$$\left\|\nabla_x(\mathbf{u}-\mathbf{U})+\nabla_x^t(\mathbf{u}-\mathbf{U})-\frac{2}{3}\mathrm{div}_x(\mathbf{u}-\mathbf{U})\mathbb{I}\right\|^2_{L^q(\Omega;R^{3\times3})}$$
$$\leq c\left(\int_\Omega\left(\frac{\Theta}{\vartheta}-1\right)\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u})+\left(\frac{\vartheta}{\Theta}-1\right)\mathbb{S}(\Theta,\nabla_x\mathbf{U})\,\mathrm{d}x\right.$$
$$\left.+\int_\Omega\Big(\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u})-\mathbb{S}(\Theta,\nabla_x\mathbf{U})\Big):\nabla_x\Big(\mathbf{u}-\mathbf{U}\Big)\,\mathrm{d}x+\int_\Omega E\left(\varrho,\vartheta,\mathbf{u},\mathbf{B}\middle|r,\Theta,\mathbf{U},\mathbf{H}\right)\,\mathrm{d}x\right),\tag{4.28}$$

其中

$$q=\frac{8}{5-\alpha}.\tag{4.29}$$

接下来，重复相同的论证，可得

$$\|\mathbf{curl}_x(\mathbf{B}-\mathbf{H})\|^2_{L^2(\Omega;R^3)} \leq c\left(\int_\Omega \left(\frac{\Theta}{\vartheta}-1\right)\zeta(\vartheta)|\mathbf{curl}_x\mathbf{B}|^2+\left(\frac{\vartheta}{\Theta}-1\right)\zeta(\Theta)|\mathbf{curl}_x\mathbf{H}|^2\ \mathrm{d}x\right.$$
$$\left.+\int_\Omega \Big(\zeta(\vartheta)\mathbf{curl}_x\mathbf{B}-\zeta(\Theta)\mathbf{curl}_x\mathbf{H}\Big)\cdot\mathbf{curl}_x(\mathbf{B}-\mathbf{H})\ \mathrm{d}x+\int_\Omega E\left(\varrho,\vartheta,\mathbf{u},\mathbf{B}\Big|r,\Theta,\mathbf{U},\mathbf{H}\right)\ \mathrm{d}x\right). \tag{4.30}$$

最后，我们回顾广义 Korn–Poincar´e 不等式 [8, 第 11 章，定理 11.23]:

$$\|\mathbf{v}\|_{W^{1,q}(\Omega;R^3)} \leq c(\delta,q)\left(\left\|\nabla_x\mathbf{v}+\nabla_x^t\mathbf{v}-\frac{2}{3}\mathrm{div}_x\mathbf{v}\mathbb{I}\right\|_{L^q(\Omega;R^{3\times 3})}+\int_\Omega \varrho|\mathbf{v}|\ \mathrm{d}x\right) \tag{4.31}$$

当

$$1<q<\infty,\ \varrho\geq 0,\ \int_\Omega \varrho\ \mathrm{d}x\geq\delta,\ \int_\Omega \varrho^\gamma\ \mathrm{d}x<\frac{1}{\delta},\ \gamma>1. \tag{4.32}$$

前面的估计与 (4.32) 一起，使我们可以将不等式 (4.18) 改写为

$$\int_\Omega E\left(\varrho,\vartheta,\mathbf{u},\mathbf{B}\ \Big|r,\Theta,\mathbf{U},\mathbf{H}\right)(\tau,\cdot)\ \mathrm{d}x$$
$$+\int_0^\tau\left(\|\mathbf{u}-\mathbf{U}\|^2_{W^{1,q}(\Omega;R^3)}+\|\vartheta-\Theta\|^2_{W^{1,2}(\Omega)}+\|\mathbf{curl}_x(\mathbf{B}-\mathbf{H})\|^2_{L^2(\Omega;R^3)}\right)\mathrm{d}t$$
$$\leq\int_0^\tau \mathcal{R}_2\,\mathrm{d}t+c\int_0^\tau\int_\Omega E\left(\varrho,\vartheta,\mathbf{u},\mathbf{B}\Big|r,\Theta,\mathbf{U},\mathbf{H}\right)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}t,\ q=\frac{8}{5-\alpha}, \tag{4.33}$$

其中余项 $\mathcal{R}_2$ 在 (4.14) 中给出。

4.5 完成弱强唯一性的证明

弱强唯一性证明的其余部分包括：用 (4.33) 的左端吸收余项 $\mathcal{R}_2$ 中出现的所有积分，并应用 Gronwall 论证。我们省略细节，因为整个过程已在 [9,第 4] 章中描述。

我们已经证明了定理 4.1。

注 4.6. 定理 4.1 所要求的区域 Ω 的 Lipschitz 正则性，可能不足以保证磁流体力学系统强解的存在。

5 弱解的存在性

弱解存在性的证明可采用专著 [9] 第 5 章和第 12 章中所述的近似格式、先验估计和紧性论证来完成。

磁场方程可以完全按照 [6] 中的方式纳入，不会带来任何额外困难。与 [9, 第 12], 章类似，必须对本构关系施加两个额外假设，具体如下:

$$\lim_{Z\to\infty} \mathcal{S}(Z) = 0, \tag{5.1}$$

其中 $\mathcal{S}$ 是定义熵 s_M的函数。此外，我们要求

$$\beta > 6, \tag{5.2}$$

其中 β 是 (2.8) 中的指数。虽然 (5.1) 对应于热力学第三定律，但假设 (5.2) 纯粹是技术性的，旨在确保必要的先验估计。

5.1 近似方案

弱解的存在性可以通过求解以下多层近似方案来证明。连续性方程 (1.1) 被其抛物正则化所替代:

$$\partial_t \varrho + \mathrm{div}_x(\varrho \mathbf{u}) = \varepsilon \Delta_x \varrho \text{ in } (0,T)\times\Omega,\ \varepsilon > 0, \tag{5.3}$$

并辅以诺伊曼边界条件

$$\nabla_x \varrho \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \tag{5.4}$$

以及初始条件

$$\varrho(0,\cdot) = \varrho_{0,\delta}, \tag{5.5}$$

其中 $\varrho_0,\ \delta > 0$ 是初始密度 ϱ_0的光滑正则化。以下同样， ε 和 δ 是两个小参数，在取极限的过程中将依次趋于零。

T动量方程 (1.2) 被 Galerkin 近似所取代

$$\begin{aligned}
&\int_0^\tau \int_\Omega \Big[\varrho \mathbf{u}\cdot\partial_t \boldsymbol{\varphi} + \varrho \mathbf{u}\otimes\mathbf{u} : \nabla_x \boldsymbol{\varphi} + p_\delta(\varrho,\vartheta)\mathrm{div}_x \boldsymbol{\varphi} - \mathbb{S}_\delta(\vartheta,\nabla_x \mathbf{u}) : \nabla_x \boldsymbol{\varphi} \Big]\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\quad - \varepsilon \int_0^\tau \int_\Omega \nabla_x \varrho\cdot\nabla_x \mathbf{u}\cdot\nabla_x \boldsymbol{\varphi}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^\tau \int_\Omega \Big[\mathbf{curl}_x \mathbf{B}\times\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\varphi} + \varrho \mathbf{g}\cdot\boldsymbol{\varphi} \Big]\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\quad = \int_\Omega \varrho\mathbf{u}(\tau,\cdot)\cdot\boldsymbol{\varphi}\ \mathrm{d}x - \int_\Omega (\varrho\mathbf{u})_0\cdot\boldsymbol{\varphi}(0,\cdot)\ \mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{5.6}$$

对于任意测试函数 $\boldsymbol{\varphi} \in C^1([0,T]; X_N)$，其中 X_N是由满足完全滑移边界条件 (1.10) 的 Lam´e 算子的特征向量张成的有限维空间。这里，

$$p_\delta(\varrho,\vartheta) = p(\varrho,\vartheta) + \delta\left(\varrho^2 + \varrho^\Gamma\right), \mathbb{S}_\delta = \mathbb{S}(\vartheta,\mathbf{u}) + \delta\vartheta\left(\nabla_x \mathbf{u} + \nabla_x^t \mathbf{u} - \frac{2}{3}\mathrm{div}_x \mathbf{u}\mathbb{I}\right),\ \delta > 0. \tag{5.7}$$

类似地，感应方程由 Galerkin 近似替代。我们寻找如下形式的解

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_B + \mathbf{b},$$

其中

$$\int_0^\tau \int_\Omega \Big[(\mathbf{B}_B + \mathbf{b}) \cdot \partial_t \boldsymbol{\varphi} - \Big((\mathbf{B}_B + \mathbf{b}) \times \mathbf{u} \Big) \cdot \mathbf{curl}_x \boldsymbol{\varphi} - \zeta(\vartheta) \mathbf{curl}_x (\mathbf{B}_B + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{curl}_x \boldsymbol{\varphi} \Big] \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t$$
$$= \int_\Omega (\mathbf{B}_B + \mathbf{b}) \cdot \boldsymbol{\varphi}(\tau, \cdot) \, \mathrm{d}x - \int_\Omega \mathbf{B}_0 \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}x \tag{5.8}$$

对于任意 $\boldsymbol{\varphi} \in C^1([0,T]; Y_N)$。有限维空间 Y_N 按照边界条件选取。Y_N 中的函数光滑且无散，

$$\mathrm{div}_x \boldsymbol{\varphi} = 0 \text{ in } \Omega,$$

并且在边界条件 (1.12) 的情形下，$\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \cup_{N>0} Y_N$ 在 $H_{0,\tau}$ 中稠密；在边界条件 (1.13)、(1.14) 的情形下，$\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \cup_{N>0} Y_N$ 在 $H_{0,n}$ 中稠密。

最后，内能平衡经过正则化，与连续性方程的黏性近似相适配，并得到精确求解，

$$\partial_t (\varrho e_\delta(\varrho, \vartheta)) + \mathrm{div}_x (\varrho e_\delta(\varrho, \vartheta) \mathbf{u}) + \mathrm{div}_x \mathbf{q}_\delta(\vartheta, \nabla_x \vartheta) = \mathbb{S}_\delta(\vartheta, \nabla_x \mathbf{u}) + \zeta(\vartheta) |\mathbf{curl}_x \mathbf{B}|^2$$
$$- p(\varrho, \vartheta) \mathrm{div}_x \mathbf{u} + \varepsilon\delta \left(\varrho^{\Gamma - 2} + 2 \right) |\nabla_x \varrho|^2 + \delta \frac{1}{\vartheta^2} - \varepsilon \vartheta^5, \tag{5.9}$$

并满足正则化的初始/边界条件

$$\vartheta(0, \cdot) = \vartheta_{0,\delta}, \ \vartheta|_{\partial\Omega} = \vartheta_B. \tag{5.10}$$

这里，我们记

$$\mathbf{q}_\delta = \mathbf{q} - \delta \left(\vartheta^\Gamma + \frac{1}{\vartheta} \right) \nabla_x \vartheta,$$
$$e_\delta = e + \delta\vartheta. \tag{5.11}$$

5.2 弱解的存在性

纳维–斯托克斯–傅里叶系统（不含磁场）弱解的存在性，可通过求解近似格式 (5.3)–(5.7)、(5.9)–(5.11) 得到。不含磁场时的证明已在 [9, 第二部分第 5] 章中给出完整细节。[6] 中的关键观察是，基本能量估计通过分别取 (5.6) 与 u、(5.8) 与 b 的标量积来建立——这一步与 Galerkin 近似相容；因此，在当前情形下无需任何实质性困难即可重现该证明。由此，我们可以陈述以下关于可压缩磁流体力学系统弱解存在性的结果。

定理 5.1.（弱解的存在性）
设 $\Omega \subset R^3$是至少属于 C^3 类的有界区域。假设数据 ϑ_B、$\mathbf{B}_B$ 二次连续可微，

$$\inf_{[0,T]\times\partial\Omega}\vartheta_B > 0,\ \mathrm{div}_x\mathbf{B}_B = 0\ in\ (0,T)\times\Omega.$$

设热力学函数 p, e, s 满足假设 (2.1)–(2.6)，且输运系数 μ, η, κ 和 ζ 满足 (2.7)–(2.9)，其中

$$\frac{1}{2} \le \alpha \le 1,\ \beta > 6,\ \lim_{Z\to\infty}\mathcal{S}(Z) = 0. \tag{5.12}$$

则对于任意初始数据

$$\varrho_0,\ \varrho_0 > 0,\ \vartheta_0, \vartheta_0 > 0,\ \mathbf{u}_0,\ \mathbf{B}_0,\ \mathrm{div}_x\mathbf{B}_0 = 0,$$
$$\int_\Omega \left[\frac{1}{2}\varrho_0|\mathbf{u}_0|^2 + \varrho_0 e(\varrho_0,\vartheta_0) + \frac{1}{2}|\mathbf{B}_0|^2\ \mathrm{d}x\right] < \infty,$$

以及任意 $\mathsf{g} \in L^\infty((0,T)\times\Omega; R^3)$，可压缩磁流体力学系统在 $(0,T)\times\Omega$ 上存在弱解，其意义如定义 2.1 所述。

注 5.2. 事实上，在弱解框架下，初始密度和温度的正性并非必需。将初始数据表示为初始密度 ϱ_0、动量 $\mathbf{m}_0$, 、总熵 S_0和磁场 $\mathbf{B}_0$, ，我们可以在初始能量

$$\int_\Omega \left[\frac{1}{2}\frac{|\mathbf{m}_0|^2}{\varrho_0} + \varrho_0 e(\varrho_0, S_0) + \frac{1}{2}|\mathbf{B}_0|^2\right]\ \mathrm{d}x < \infty$$

是有限的。

注 5.3. 由上述近似格式得到的弱解满足弹道能量不等式 (2.24) 的微分形式。

注 5.4. 当边界温度 ϑ_B 为常数时，可以省略假设 $\lim_{Z\to\infty}\mathcal{S}(Z) = 0$，并允许 $\beta \ge 3$。

6 总结

该理论可以直接推广到其他类型的边界条件。

- 完全滑移边界条件 (1.10) 可以替换为狄利克雷（无滑移）边界条件

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{u}_B$$

只要 $\mathbf{u}_B \cdot \mathbf{n} = 0$。这使得可以纳入泰勒–库埃特型问题。鉴于磁场的存在，将速度的流入/流出边界条件推广到一般情形需要更为细致的处理。关于不存在磁场时纳维–斯托克斯–傅里叶系统的流入/流出边界条件，参见 [9]。

- 温度的狄利克雷边界条件可替换为边界某一部分上的通量型条件：

$$\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2,\ \vartheta|_{\Gamma_1} = \vartheta_B,\ \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}|_{\Gamma_2} = \mathbf{h}.$$

请注意，这类条件在恒星磁对流建模中尤为重要，参见 Thompson 和 Christensen–Dalsgaard [17]。

- 可在 (1.14) 中指定感应通量（电场）：

$$\Big[\mathbf{B}\times\mathbf{u} + \zeta\mathbf{curl}_x\mathbf{B}\Big]\times\mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \mathbf{E}_B\times\mathbf{n}.$$

- 对 $\partial\Omega$ 的不同分量施加混合型边界条件，不会带来实质性困难。

参考文献

[1] G. V. Alekseev. 黏性流体磁流体动力学定常方程控制问题的可解性. 西伯利亚数学杂志, 45(2):243–263, 2004年.

[2] J. C. Alexander 和 G. Auchmuty. l^2三维 div-curl 边值问题的适定性. 应用数学季刊, 63(3):479–508, 2005年.

[3] A. Battaner. 天体物理流体动力学. 剑桥大学出版社, 剑桥, 1996年.

[4] N. Chaudhuri 和 E. Feireisl. 带狄利克雷边界条件的 Navier-Stokes-Fourier系统. 应用分析, 101(12):4076–4094, 2022年.

[5] P. A. Davidson. 湍流：科学家和工程师导论. 牛津大学出版社, 牛津, 2004年.

[6] B. Ducomet 和 E. Feireisl。《磁流体力学方程：气态恒星演化中物质与辐射之间的相互作用》。《数学物理通讯》，266：595–629，2006年。

[7] E. Feireisl 和 A. Novotn´y。《完整Navier-Stokes-Fourier系统的弱解-强解唯一性》。《理性力学与分析文献》，204：683–706，2012年。[8] E. Feireisl 和 A. Novotn´y。《黏性流体热力学中的奇异极限》。《数学流体力学进展》。Birkh¨auser/Springer，尚，2017年。第二版。[9] E. Feireisl 和 A. Novotn´y。《开放流体系统数学》。Birkh¨auser–Verlag，巴塞尔，2022年。[10] E. Feireisl 和 H. Petzeltov´a。《时变驱动力作用下Navier-Stokes-Fourier系统解的长期行为》。《动力学与微分方程杂志》，19(3)：685–707，2007年。[11] D. Gough。《走向理解太阳对流与活动》。《太阳物理学》，192：3–26，2000年。[12] M. Kotschote。《可压缩非等温Navier-Stokes方程的强解》。《应用数学科学进展》，22(2)：319–347，2012年。[13] A. Matsumura 和 T. Nishida。《可压缩导热流体运动方程的初值问题》。《数学物理通讯》，89：445–464，1983年。[14] F. Merle、P. Rapha¨el、I. Rodnianski 和 J. Szeftel。《可压缩流体塌缩 I：光滑自相似无黏剖面》。《数学年刊》（2），196(2)：567–778，2022年。[15] F. Merle、P. Rapha¨el、I. Rodnianski 和 J. Szeftel。《可压缩流体塌缩 II：奇点形成》。《数学年刊》（2），196(2)：779–889，2022年。[16] L. Tao、N.O. Weiss、D.P. Brownjohn 和 M.R.E. Proctor。《恒星磁对流中的磁通分离》。《天文学杂志》，496：L39–L42，1998年。[17] M.J. Thompson 和 J. Christensen-Dalsgaard。《恒星大气流体动力学》。剑桥大学出版社，剑桥，2003年。[18] A. Valli。《通过稳定性方法求解可压缩Navier-Stokes方程的周期解与定常解》。《比萨高等师范学校年刊》，10(1)：607–646，1983年。[19] A. Valli 和 M. Zajaczkowski。《可压缩流体的Navier-Stokes方程：一般情形下解的整体存在性与定性性质》。《数学物理通讯》，103：259–296，1986年。[20] N. O. Weiss 和 M. R. E. Proctor。《磁对流》。《剑桥力学专著》。剑桥大学出版社，剑桥，2014年。[21] Y. Yang、M. Wan、W. M. Matthaeus 和 S. Chen。《衰减可压缩磁流体动力学湍流中的能量收支》。《流体力学杂志》，916：A4–1–A4–29，2021年。