arXiv:2304.00529v1 [math.AP] 2 Apr 2023

普朗特–哈特曼状态下二维磁性 Prandtl 模型解的局部适定性

Yuming Qin[1] Xiuqing Wang[2*] Junchen Liu[2]

1. 东华大学非线性科学研究所数学系，

中华人民共和国上海市 201620。

电子邮箱：yuming_qin@hotmail.com

2. 昆明理工大学数学系，

中国云南昆明 650500。

电子邮箱：daqingwang@kust.edu.cn；liujunchen@stu.kust.edu.cn

摘要

本文证明了普朗特–哈特曼状态下二维普朗特方程在加权 Sobolev 空间中的局部存在性与唯一性。我们的证明基于在奥列尼克单调性假设下对正则化抛物方程进行一致估计，并运用最大值原理。与纳什–莫泽迭代相比，[1],对初始数据的正则性要求较低。

关键词：普朗特–哈特曼状态，边界层，局部适定性。

AMS 数学学科分类：76N10，76N15，35M13，35Q35，53C35

1 引言

磁流体力学系统是描述电磁场作用下流体运动的基本系统。当雷诺数、磁雷诺数和哈特曼数等物理参数在高雷诺数极限下满足一定约束时，不可压缩磁流体力学系统会导出以下普朗特与哈特曼混合边界层方程，该方程最初由[11, 16]提出。

本文研究定义域 $\{(t,x,y)\big|t>0, x\in\mathbb{T}, y\in\mathbb{R}_+\}$ 上的 Prandtl-Hartmann 方程：

$$\begin{cases} \partial_t u + u\partial_x u + v\partial_y u = \partial_y b + \partial_y^2 u - \partial_x P, \\ \partial_y u + \partial_y^2 b = 0, \\ \partial_x u + \partial_y v = 0, \\ \lim\limits_{y\to+\infty} u(t,x,y) = U(t,x), \quad \lim\limits_{y\to+\infty} b(t,x,y) = B(t,x). \end{cases} \tag{1.1}$$

这里，$(u,v) = (u(t,x,y)\ v(t,x,y))$ 表示速度场，$b(t,x,y)$ 是相应的切向磁

分。给定的 sc 标量压力 $P:=P(x,t)$ 和外流 U 满足著名的伯努利定律 w:

$$\partial_t U + U\partial_x U + \partial_x P = 0. \tag{1.2}$$

初始数据和无滑移边界条件由下式给出

$$\begin{cases} u(0,x,y) = u_0(x,y), \\ u(t,x,0) = 0, \quad v(t,x,0) = 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

注意到（1.1）$_4$, 并对（1.1）$_2$ 在 y 上对 $[y,+\infty$积分，得到

$$\partial_y b = U - u. \tag{1.4}$$

将（1.4）代入（1.1，即可得到下列方程

$$\begin{cases} \partial_t u + u\partial_x u + v\partial_y u = (U-u) + \partial_y^2 u - \partial_x P, \\ \partial_x u + \partial_y v = 0. \end{cases} \tag{1.5}$$

令涡量 $w = \partial_y u$，则方程（1.5）化为如下涡量系统

$$\begin{cases} \partial_t w + u\partial_x w + v\partial_y w = -w + \partial_y^2 w, \\ w(0,x,y) = \partial_y u_0, \\ \partial_y w|_{y=0} = \partial_x P - U. \end{cases} \tag{1.6}$$

本文研究满足 Oleinik 单调性假设 $w = \partial_y u > 0$的系统（1.1）。现在，我们简要回顾边界层的背景及相关结果。事实上，普朗特于1904年在海德堡国际数学会议上提出了描述这一现象的基本规律。他指出，固体周围的流动可分为两个区域：靠近物体的薄层内，黏性摩擦起着重要作用；在该薄层之外，摩擦可以忽略不计。普朗特将这一薄层称为边界层，可由所谓的普朗特方程描述。此后，关于边界层的研究相继出现，例如 [6, 8]。但直到1999年，奥列尼克和萨莫欣 [31] 才从数学角度系统地研究了普朗特方程，这是边界层系统研究的基础。Prandtl 系统是纳维–斯托克斯系统的简化形式，描述了低黏度流体在固体表面附近形成的薄层中的运动；该薄层是由于黏性流体黏附于固体表面而形成的。

最早的著名成果由奥列尼克和萨莫欣在 [31], 中取得：他们在切向速度关于边界法向变量满足单调性条件的前提下，利用 Crocco 变换和 von Mises 变换，证明了普朗特方程的局部（时间）适定性。此后，Crocco 变换和 von Mises 变换被应用于边界层问题。例如，辛和张 [37] 在压力有利的情况下，建立了二维 Prandtl 系统弱解的整体存在性，这推广了奥列尼克 [31]的局部适定性结果。龚、郭

和 Wang [17] 研究了可压缩 Navier-Stokes 边界层方程解的局部空间存在性。坐标变换也被用于 [21]中的磁流体力学边界层问题。[1, 4, 5, 24, 38, 39] 的作者研究了剪切流附近普朗特方程的适定性，即令 $u(t,x,y) = u^s(t,y) + \tilde{u}(t,x,y)$，且剪切流 $u^s(t,y)$ 是热方程的一个解

$$\begin{cases} \partial_t u^s - \partial_y^2 u^s = 0, \\ u^s|_{y=0} = 0, \quad \lim\limits_{y\to+\infty} u^s(t,y) = 1, \\ u^s|_{t=0} = u_0^s(y). \end{cases}$$

谢和杨在 [36] 还证明了一般剪切流情况下磁流体力学边界层系统解的局部存在性。Gérard-Varet 在 [9, 14] 证明了具有 Gevrey 正则性的数据对应的二维普朗特方程解在时间局部适定性。Masmoudi 和 Wong [23, 29] 利用基于抵消性质的纯能量方法，在奥列尼克单调性假设下，证明了加权 Sobolev 空间中二维普朗特系统解的局部存在性和唯一性。此后，谢和杨 [26, 27], 、高、黄和姚 [10] 利用能量方法研究了磁流体力学边界层问题的局部适定性。最近，第一作者和 Dong [34] 在 H^s 建立了解的局部适定性，并分别考虑了有 $1 \le s \le 4$ $U \equiv constant$ 和无单调性条件及下界的情形。而在本文中，我们证明了具有 $s \ge 4$ 的 $U(t,x)$ 函数时， H^s 中普朗特–哈特曼状态下二维磁性普朗特方程解的局部适定性；其齐次方程与 [34] 不同。

关于普朗特方程适定性不良的文献也有很多，例如参见 [11, 12, 15, 18]。更多相关文献请参见 [2, 3, 19, 20, 22, 28]。

由上述陈述可知，利用能量方法证明解的局部存在性很困难。本文旨在证明普朗特-哈特曼区域内磁流体力学边界层解的局部存在性，其证明基于非线性能量估计。

我们引入加权соболев空间，并定义空间 $H^{s,\gamma}_{\sigma,\delta}$，如下

$$H^{s,\gamma}_{\sigma,\delta} := \left\{ w : \mathbb{T}\times\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} : \|w\|_{H^{s,\gamma}} < +\infty, (1+y)^\sigma |w| \ge \delta, \sum_{|\alpha|\le 2} |(1+y)^{\sigma+\alpha_2} D^\alpha w|^2 \le \frac{1}{\delta^2} \right\},$$

其中 $D^\alpha := \partial_x^{\alpha_1}\partial_y^{\alpha_2}$、 $\alpha_1+\alpha_2 = s$、 $s \ge 4$、 $\gamma \ge 1$、 $\sigma > \gamma + \frac{1}{2}$和 $\delta \in (0,1)$。我们定义范数 a s

$$\|w\|^2_{H^{s,\gamma}} := \sum_{|\alpha|\le s} \|(1+y)^{\gamma+\alpha_2} D^\alpha w\|^2_{L^2}$$

and

$$\|w\|^2_{H^{s,\gamma}_g} := \|(1+y)^\gamma g_s\|^2_{L^2} + \sum_{\substack{|\alpha|\le s \\ \alpha_1 \le s-1}} \|(1+y)^{\gamma+\alpha_2} D^\alpha w\|^2_{L^2},$$

here

$$g_s := \partial_x^s w - \frac{\partial_y w}{w} \partial_x^s (u-U).$$

在本文中，为方便起见，我们简写为

$$\iint \cdot := \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{R}_+} \cdot dxdy.$$

研究普朗特–哈特曼状态方程（1.1）的主要难点在于垂直速度$v = -\partial_y^{-1}\partial_x u$，它会导致 x 阶导数的正则性损失。因此，我们为涡量 w 引入加权范数$\|w\|^2_{H^{s,\ g}{}^{\gamma}}$（该方法在文献 [29] 中提出）， w 它通过非线性抵消避免了 x 阶导数的损失。此外， $y = 0$ 处缺少高阶边界条件，这使得我们无法对 y变量进行分部积分。对高阶边界条件的边界数据进行估计，有助于克服这一技术难点，见引理 2.1。请注意，本文研究的方程不同于文献 [29] 中的方程。值得指出的是，本文的一项创新在于，我们不使用文献 [31]，中引入的经典 Crocco 变换和 von Mises 变换，而只假设单调性。首先，为证明解的局部存在性，我们将构造一个近似格式，并研究抛物正则化 Prandtl 方程（2.1），该方程保留了方程（1.1）的非线性结构以及非线性抵消性质。

本文结构如下。第 1 节为引言，其中包含本文将用到的许多不等式。在第 2 节中，我们给出带权范数下的一致估计。本节的难点在于对边界处 $y = 0$ 的估计，并最终在 $y = 0$ 处给出正则模式，详见引理 2.1-2.2。在第 3 节中，我们证明 Prandtl 系统解的局部存在性与唯一性。

最后，我们陈述主要结果如下。

定理 1.1. 给定任意偶整数 $s \geq 4$，以及满足 $\gamma \geq 1$、 $\sigma > \gamma + \frac{1}{2}$ 和 $\delta \in (0, 1)$ 的实数 γ, σ, δ。假设以下条件成立，

(i) 假设初始数据 $u_0 - U(0, x) \in H^{s,\ \gamma-1}$ 和 $\partial_y u_0 \in H^{s,\ \sigma}{}^{\gamma},\ {}_{2\delta}$ 满足相容条件$u_0|_{y=0}$ 且 $\lim_{y\to+\infty} u = U|_{t=0}$。 此外，当 $s = 4$ 时，假设 $\delta \geq 0$ 取得充分小，使得$\|\omega_0\|_{H^{s,\ \gamma}} \leq C\delta^{-1}$ ，其中 C 为一般常数。

（ii）外流 U 满足

$$\sup_t \sum_{l=0}^{\frac{s}{2}+1} \|\partial_t^l U\|_{H^{s-2l+2}(\mathbb{T})} < +\infty. \tag{1.7}$$

则存在一个时间 $T := T$（s， γ， σ， δ， $\|w_0\|_{H^{s,\ \gamma}}$， U）使得初边值问题（*1.1*）-（*1.3*）存在唯一的局部经典解 （u， v， b）满足

$$u - U \in L^\infty([0, T]; H^{s,\gamma-1}) \cap C([0, T]; H^s - w)$$

and

$$\partial_y u \in L^\infty([0, T]; H^{s,\gamma}_{\sigma,\delta}) \cap C([0, T]; H^s - w),$$

其中， $H^s - w$ 是赋予弱拓扑的空间 H^s 。

1.1 预备知识

本小节将给出一些引理，为我们的主要结果做准备。

引理 1.2. *([29])* 设 $s \geq 4$ 为整数， $\gamma \geq 1$、 $\sigma > \gamma + \frac{1}{2}$ 和 $\delta \in (0,1)$。那么，对于任意 $w \in H^{s,\gamma}_{\sigma,\delta}(\mathbb{T}\times\mathbb{R}_+)$，我们有如下不等式

$$C_\delta \|w\|_{H^{s,\gamma}_g} \leq \|w\|_{H^{s,\gamma}} + \|u-U\|_{H^{s,\gamma-1}} \leq C_{s,\gamma,\sigma,\delta}\left(\|w\|_{H^{s,\gamma}_g} + \|\partial_x^s U\|_{L^2(\mathbb{T})}\right), \tag{1.8}$$

其中 $C_{s,\gamma,\sigma,\delta} > 0$ 为常数，且仅依赖于 s、 γ、 σ、 δ。

引理 1.3. 设 $f\colon \mathbb{T}\times\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,

(i) 若 $\lambda > -\frac{1}{2}$ 且 $\lim\limits_{y\to+\infty} f(x,y) = 0$，则

$$\|(1+y)^\lambda f\|_{L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{R}_+)} \leq \frac{2}{2\lambda+1}\|(1+y)^{\lambda+1}\partial_y f\|_{L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{R}_+)}; \tag{1.9}$$

(ii) 若 $\lambda < -\frac{1}{2}$ 且 $f(x,y)|_{y=0} = 0$，则

$$\|(1+y)^\lambda f\|_{L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{R}_+)} \leq -\frac{2}{2\lambda+1}\|(1+y)^{\lambda+1}\partial_y f\|_{L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{R}_+)}. \tag{1.10}$$

证明。证明是初等的。注意，该项

$$\begin{aligned}
&\|(1+y)^\lambda f\|^2_{L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{R}_+)} = \frac{1}{2\lambda+1}\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{R}_+} f^2(x,y)d(1+y)^{2\lambda+1}dx\\
&= \frac{1}{2\lambda+1}\int_{\mathbb{T}}(1+y)^{2\lambda+1}f^2(x,y)\big|_{y=0}^{y=+\infty}dx - \frac{2}{2\lambda+1}\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{R}_+}(1+y)^{2\lambda+1}f(x,y)\partial_y f(x,y)dxdy\\
&\leq \left|-\frac{2}{2\lambda+1}\right|\|(1+y)^\lambda f\|_{L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{R}_+)}\|(1+y)^{\lambda+1}\partial_y f\|_{L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{R}_+)},
\end{aligned}$$

这给出（1.22）-（1.23）。 □

引理 1.4. *([29])* 设 $s \geq 4$ 为整数， $\gamma \geq 1$、 $\sigma > \gamma + \frac{1}{2}$ 和 $\delta \in$ 属于 $(0,1)$。对于任意 $w \in H^{s,\gamma}_{\sigma,\delta}(\mathbb{T}\times\mathbb{R}_+)$，则对于 $k = 0$、1、2、$\cdots$、s，有

$$\|(1+y)^\gamma g_k\|_{L^2} \leq \|(1+y)^\gamma \partial_x^k w\|_{L^2} + \delta^{-2}\|(1+y)^{\gamma-1}\partial_x^k(u-U)\|_{L^2}, \tag{1.11}$$

and

$$\|(1+y)^\gamma\partial_x^k w\|_{L^2} + \|(1+y)^{\gamma-1}\partial_x^k(u-U)\|_{L^2} \leq C_{\gamma,\sigma,\delta}\left(\|\partial_x^k U\|_{L^2(\mathbb{T})} + \|(1+y)^\gamma g_k\|_{L^2}\right), \tag{1.12}$$

其中 $C_{s,\gamma,\sigma,\delta} > 0$ 是一个常数，且仅依赖于 s、 γ、 σ、 δ。

引理 1.5. *([29])* 设 $f\colon \mathbb{T}\times\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$。则存在常数 $C > 0$，使得

$$\|f(x,y)\|_{L^\infty(\mathbb{T}\times\mathbb{R}_+)} \leq C\left(\|f(x,y)\|_{L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{R}_+)} + \|\partial_x f(x,y)\|_{L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{R}_+)} + \|\partial_y^2 f(x,y)\|_{L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{R}_+)}\right). \tag{1.13}$$

引理 1.6. *([29])* 设 $s \geq 4$ 是一个整数，$\gamma \geq 1, \sigma > \gamma + \frac{1}{2}$ 和 $\delta \in (0,1)$。那么对于任意 $w \in H^s, {}_{\sigma}{}^{\gamma}_{\delta}, (\mathbb{T} \times \mathbb{R}_+)$，有以下不等式：

(*i*) 对于 $k = 0$、1、2、$\cdots$、$s-1$,

$$\|\frac{\partial_x^k v + y\partial_x^{k+1}}{1+y}\|_{L^2} \leq C_{s,\gamma,\sigma,\delta}(\|w\|_{H_g^{s,\gamma}} + \|\partial_x^s U\|_{L^2(\mathbb{T})}); \tag{1.14}$$

(ii) 对于 $k = 0, 1, 2, \cdots, s$,

$$\|(1+y)^{\gamma-1}\partial_x^k(u-U)\|_{L^2} \leq C_{s,\gamma,\sigma,\delta}(\|w\|_{H_g^{s,\gamma}} + \|\partial_x^s U\|_{L^2(\mathbb{T})}); \tag{1.15}$$

(iii) 对于 $k = 0, 1, 2, \cdots, s-2$,

$$\|\frac{\partial_x^k v}{1+y}\|_{L^\infty} \leq C_{s,\gamma,\sigma,\delta}(\|w\|_{H_g^{s,\gamma}} + \|\partial_x^s U\|_{L^2(\mathbb{T})}); \tag{1.16}$$

(iv) 对于 $k = 0, 1, 2, \cdots, s-1$,

$$\|\partial_x^k u\|_{L^\infty} \leq C_{s,\gamma,\sigma,\delta}(\|w\|_{H_g^{s,\gamma}} + \|\partial_x^s U\|_{L^2(\mathbb{T})}); \tag{1.17}$$

(v) 对于 $k = 0, 1, 2, \cdots, s-2$,

$$\|(1+y)^{\gamma+k_{\alpha_2}} D^k w\|_{L^\infty} \leq C_{s,\gamma,\sigma,\delta}\|w\|_{H_g^{s,\gamma}}; \tag{1.18}$$

(vi) 对所有 $|\alpha| \leq s$,

$$\|(1+y)^{\gamma+\alpha_2} D^\alpha w\|_{L^2} \leq \begin{cases} C_{s,\gamma,\sigma,\delta}(\|w\|_{H_g^{s,\gamma}} + \|\partial_x^s U\|_{L^2(\mathbb{T})}) & if\ \alpha = (s,0), \\ \|w\|_{H_g^{s,\gamma}} & if\ \alpha \neq (s,0); \end{cases} \tag{1.19}$$

(vii) 对所有 $k = 0, 1, 2, \cdots, s$,

$$\|(1+y)^{\gamma} g_k\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq \begin{cases} C_{s,\gamma,\sigma,\delta}(\|w\|_{H_g^{s,\gamma}} + \|\partial_x^s U\|_{L^2(\mathbb{T})}) & if\ k = 0, 1, 2, \cdots, s-1, \\ \|w\|_{H_g^{s,\gamma}} & if\ k = s, \end{cases} \tag{1.20}$$

其中 $C_{s,\gamma,\sigma,\delta}$ 是一个常数，且仅依赖于 $s, \gamma, \sigma, \delta$。

1.2 预备知识

本小节将给出一些用于证明主要结果的引理。

引理 1.7. (*[29]*) 设 $s \geq 4$ 为整数，$\gamma \geq 1, \sigma > \gamma + \frac{1}{2}$ 和 $\delta \in$ 属于 $(0,1)$。那么，对于任意 $w \in H^{s}{}_{,\sigma}{}^{\gamma}_{\delta}, (\mathbb{T} \times \mathbb{R}_+)$，我们有以下不等式

$$C_\delta \|w\|_{H_g^{s,\gamma}} \leq \|w\|_{H^{s,\gamma}} + \|u-U\|_{H^{s,\gamma-1}} \leq C_{s,\gamma,\sigma,\delta}\left(\|w\|_{H_g^{s,\gamma}} + \|\partial_x^s U\|_{L^2(\mathbb{T})}\right), \tag{1.21}$$

其中 $C_{s,\ \gamma,\ \sigma,\ \delta} > 0$ 是一个常数，仅依赖于 s、γ、σ、δ。

引理 1.8. 设 $f:\ \mathbb{T}\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$,

(i) 若 $\lambda>-\frac{1}{2}$且 $\lim_{y\to+\infty}f(x,y)=0$, 则

$$\|(1+y)^{\lambda}f\|_{L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{R}_+)}\le\frac{2}{2\lambda+1}\|(1+y)^{\lambda+1}\partial_y f\|_{L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{R}_+)};\tag{1.22}$$

(ii) 若 $\lambda<-\frac{1}{2}$且 $f(x,y)|_{y=0}=0$, 则

$$\|(1+y)^{\lambda}f\|_{L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{R}_+)}\le-\frac{2}{2\lambda+1}\|(1+y)^{\lambda+1}\partial_y f\|_{L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{R}_+)}.\tag{1.23}$$

证明。证明很简单。注意该项

$$\begin{aligned}&\|(1+y)^{\lambda}f\|^2_{L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{R}_+)}=\frac{1}{2\lambda+1}\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{R}_+}f^2(x,y)d(1+y)^{2\lambda+1}dx\\&=\frac{1}{2\lambda+1}\int_{\mathbb{T}}(1+y)^{2\lambda+1}f^2(x,y)\big|_{y=0}^{y=+\infty}dx-\frac{2}{2\lambda+1}\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{R}_+}(1+y)^{2\lambda+1}f(x,y)\partial_y f(x,y)dxdy\\&\le\left|-\frac{2}{2\lambda+1}\right|\|(1+y)^{\lambda}f\|_{L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{R}_+)}\|(1+y)^{\lambda+1}\partial_y f\|_{L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{R}_+)},\end{aligned}$$

这给出（1.22）-（1.23）。 □

引理 1.9。 *([29])* 设 $s\ge4$为一个整数, $\gamma\ge1$、 $\sigma>\gamma+\frac{1}{2}$和 $\delta\in(0,1)$。对于任意 $w\in H^{s,\gamma}_{\sigma,\delta}(\mathbb{T}\times\mathbb{R}_+)$, 则对于 $k=0$、1、2、$\cdots$、s, 有

$$\|(1+y)^{\gamma}g_k\|_{L^2}\le\|(1+y)^{\gamma}\partial_x^k w\|_{L^2}+\delta^{-2}\|(1+y)^{\gamma-1}\partial_x^k(u-U)\|_{L^2},\tag{1.24}$$

and

$$\|(1+y)^{\gamma}\partial_x^k w\|_{L^2}+\|(1+y)^{\gamma-1}\partial_x^k(u-U)\|_{L^2}\le C_{\gamma,\sigma,\delta}\left(\|\partial_x^k U\|_{L^2(\mathbb{T})}+\|(1+y)^{\gamma}g_k\|_{L^2}\right),\tag{1.25}$$

其中 $C_{s,\ \gamma,\ \sigma,\ \delta}>0$是一个常数，且仅取决于 s、γ、σ、δ。

Lemma 1.10.（*[29]*）设 $f:\ \mathbb{T}\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$。则存在一个常数 $C>0$使得 *at*

$$\|f(x,y)\|_{L^\infty(\mathbb{T}\times\mathbb{R}_+)}\le C\left(\|f(x,y)\|_{L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{R}_+)}+\|\partial_x f(x,y)\|_{L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{R}_+)}+\|\partial_y^2 f(x,y)\|_{L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{R}_+)}\right).\tag{1.26}$$

引理 1.11.（*[29]*）设 $s\ge4$是一个整数, $\gamma\ge1$, $\sigma>\gamma+\frac{1}{2}$和 $\delta\in(0,1)$。那么对于任意 $w\in H^{s,\gamma}_{g,\sigma,\delta}(\mathbb{T}\times\mathbb{R}_+)$, 我们有以下不等式:

（i）对于 $k=0,1,2,\cdots,s-1$,

$$\|\frac{\partial_x^k v+y\partial_x^{k+1}}{1+y}\|_{L^2}\le C_{s,\gamma,\sigma,\delta}(\|w\|_{H^{s,\gamma}_g}+\|\partial_x^s U\|_{L^2(\mathbb{T})});\tag{1.27}$$

(ii) 当 $k=0,1,2,\cdots,s$时,

$$\|(1+y)^{\gamma-1}\partial_x^k(u-U)\|_{L^2}\le C_{s,\gamma,\sigma,\delta}(\|w\|_{H^{s,\gamma}_g}+\|\partial_x^s U\|_{L^2(\mathbb{T})});\tag{1.28}$$

(iii) 当 $k=0,1,2,\cdots,s-2$ 时,

$$\|\frac{\partial_x^k v}{1+y}\|_{L^\infty} \le C_{s,\gamma,\sigma,\delta}(\|w\|_{H_g^{s,\gamma}} + \|\partial_x^s U\|_{L^2(\mathbb{T})}); \tag{1.29}$$

(iv) 对于 $k=0,1,2,\cdots,s-1$,

$$\|\partial_x^k u\|_{L^\infty} \le C_{s,\gamma,\sigma,\delta}(\|w\|_{H_g^{s,\gamma}} + \|\partial_x^s U\|_{L^2(\mathbb{T})}); \tag{1.30}$$

(v) 对于 $k=0,1,2,\cdots,s-2$,

$$\|(1+y)^{\gamma+k_{\alpha_2}} D^k w\|_{L^\infty} \le C_{s,\gamma,\sigma,\delta}\|w\|_{H_g^{s,\gamma}}; \tag{1.31}$$

(vi) 对所有 $|\alpha| \le s$,

$$\|(1+y)^{\gamma+\alpha_2} D^\alpha w\|_{L^2} \le \begin{cases} C_{s,\gamma,\sigma,\delta}(\|w\|_{H_g^{s,\gamma}} + \|\partial_x^s U\|_{L^2(\mathbb{T})}) & if\ \alpha=(s,0), \\ \|w\|_{H_g^{s,\gamma}} & if\ \alpha \ne (s,0); \end{cases} \tag{1.32}$$

(vii) 对所有 $k=0,1,2,\cdots,s$,

$$\|(1+y)^\gamma g_k\|_{L^2(\mathbb{T})} \le \begin{cases} C_{s,\gamma,\sigma,\delta}(\|w\|_{H_g^{s,\gamma}} + \|\partial_x^s U\|_{L^2(\mathbb{T})}) & if\ k=0,1,2,\cdots,s-1, \\ \|w\|_{H_g^{s,\gamma}} & if\ k=s, \end{cases} \tag{1.33}$$

其中 $C_{s,\gamma,\sigma,\delta}$ 是一个常数，且仅依赖于 s,γ,σ,δ。

2 正则化系统的一致估计

在本节中，我们将通过能量方法估计范数 $\|w\|^2_{H^{s,\ g}{}^{\gamma}}$。对于任意 ϵ，，我们考虑问题（1.5）的正则化方程

$$\begin{cases} \partial_t u^\epsilon + u^\epsilon \partial_x u^\epsilon + v^\epsilon \partial_y u^\epsilon = (U-u^\epsilon) + \epsilon^2 \partial_x^2 u^\epsilon + \partial_y^2 u^\epsilon - \partial_x P^\epsilon, \\ \partial_x u^\epsilon + \partial_y v^\epsilon = 0, \\ u^\epsilon|_{t=0} = u_0, \\ u^\epsilon|_{y=0} = v^\epsilon|_{y=0} = 0, \\ \lim\limits_{y\to+\infty} u^\epsilon(t,x,y) = U(t,x), \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 P^ϵ 和 U 满足正则化的伯努利定律:

$$\partial_t U + U\partial_x U - \epsilon^2 \partial_x^2 U + \partial_x P^\epsilon = 0. \tag{2.2}$$

于是，正则化涡量 $w^\epsilon = \partial_y u^\epsilon$ 满足以下正则化涡量系统，其中任意 $\epsilon > 0$,

$$\begin{cases} \partial_t w^\epsilon + u^\epsilon \partial_x w^\epsilon + v^\epsilon \partial_y w^\epsilon = -w^\epsilon + \epsilon^2 \partial_x^2 w^\epsilon + \partial_y^2 w^\epsilon, \\ w^\epsilon|_{t=0} = w_0 = \partial_y u_0, \\ \partial_y w^\epsilon|_{y=0} = \partial_x P^\epsilon - U, \end{cases} \tag{2.3}$$

其中速度场 (u^ϵ, v^ϵ) 定义为

$$u^\epsilon(t,x,y) = U - \int_y^{+\infty} w(t,x,\widetilde{y})d\widetilde{y}, \quad v^\epsilon(t,x,y) = -\int_0^y \partial_x u(t,x,\widetilde{y})d\widetilde{y}. \tag{2.4}$$

为简化记号，从现在起我们省略上标 ϵ 。

2.1 关于 $D^\alpha w$的估计

在本小节中，我们将估计带权重$(1+y)^{\gamma+\alpha_2}$ 的范数，其中 $D^\alpha w$、 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$、 $|\alpha| \le s$和 α_1应满足限制条件 $\alpha_1 \le s-1$。否则，无法直接估计带有 $\partial_x^s w$的范数。

引理 2.1。 （边界数据的约化）若 w 是（2.1）的解，且（2.3），则在边界 $y=0$上，有:

$$\begin{cases} \partial_y w|_{y=0} = \partial_x P - U(t,x), \\ \partial_y^3 w|_{y=0} = (\partial_t - \epsilon^2\partial_x^2)(\partial_x P - U(t,x)) + (\partial_x P - U(t,x)) + w\partial_x w|_{y=0}. \end{cases} \tag{2.5}$$

对于任意$2 \le k \le \frac{s}{2}$，存在一些常数 C_k, $C_{\wedge_\alpha,\ k,\ l,\ \rho^1,\ \rho^2,\ \ldots\ldots\rho^j}$，它们不依赖于 ϵ或(u,v,w)，使得

$$\begin{aligned} \partial_y^{2k+1} w|_{y=0} = C_k \sum_{s=0}^{k} (\partial_t - \epsilon^2\partial_x^2)^s (\partial_x P - U) \\ + \sum_{l=0}^{k-1} \epsilon^{2l} \sum_{j=2}^{\max\{2,k-l\}} \sum_{\rho \in A^j_{k,l}} C_{\wedge_\alpha,k,l,\rho^1,\rho^2,\ldots,\rho^j} \prod_{i=1}^{j} D^{\rho^i} w\big|_{y=0} \end{aligned} \tag{2.6}$$

其中$A^j_{k,\ l} := \{\rho := (\rho^1, \rho^2, ..., \rho^j) \in \mathbb{N}^{2j};\ \ 3\sum_{i=1}^{j}\sum_{i=1}^{j}\rho_2^i = 2k+4l+1, \sum_{i=1}^{j}\rho_1^i \le k+2l-1, \sum_{i=1}^{j}\rho_2^j \le 2k-2l-2,\ and\ |\rho^i| \le 2k-l-1\ for\ all\ i = 1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ j\}$。

证明。 根据方程（2。1）和边界条件（1。3）$_2$, 可得

$$\partial_y w|_{y=0} = \partial_x P - U(t,x) = K,$$

这意味着

$$\begin{aligned} \partial_y^3 w\big|_{y=0} &= \left\{\partial_t\partial_y w + \partial_y(u\partial_x w) + \partial_y(v\partial_y w) + \partial_y w - \epsilon^2\partial_y\partial_x^2 w\right\}\big|_{y=0} \\ &= (\partial_t - \epsilon^2\partial_x^2)K + K + w\partial_x w\big|_{y=0}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

and

$$\partial_y^{2n+1} w\big|_{y=0} = \left\{\left(\partial_t - \epsilon^2\partial_x^2 w + 1\right)\partial_y^{2n-1} w + \partial_y^{2n-1}(u\partial_x w + v\partial_y w)\right\}\big|_{y=0}. \tag{2.8}$$

因此，对于 $n=2$,

$$\begin{aligned} \partial_y^5 w\big|_{y=0} &= (\partial_t - \epsilon^2\partial_x^2)\partial_y^3 w|_{y=0} + \partial_y^3 w|_{y=0} + (2\partial_y w\partial_x\partial_y w + 3w\partial_x\partial_y^2 w - 2\partial_x w\partial_y^2 w)\big|_{y=0} \\ &= (\partial_t - \epsilon^2\partial_x^2)^2 K + (\partial_t - \epsilon^2\partial_x^2)K + (\partial_t - \epsilon^2\partial_x^2)(w\partial_x w)|_{y=0} + (\partial_t - \epsilon^2\partial_x^2)K \\ &\quad + K + w\partial_x w|_{y=0} + (2\partial_y w\partial_x\partial_y w + 3w\partial_x\partial_y^2 w - 2\partial_x w\partial_y^2 w)\big|_{y=0}, \end{aligned} \tag{2.9}$$

here

$$\begin{cases} \partial_t w|_{y=0} = \partial_y^2 w - u\partial_x w - v\partial_y w - w - \epsilon^2\partial_x^2 w|_{y=0} = \partial_y^2 w - w + \epsilon^2\partial_x^2 w\big|_{y=0}, \\ \partial_x\partial_t w|_{y=0} = \partial_x\partial_y^2 w - \partial_x w + \epsilon^2\partial_x^3 w\big|_{y=0}, \end{cases} \tag{2.10}$$

$$(\partial_t - \epsilon^2\partial_x^2)(w\partial_x w)\big|_{y=0} = (w\partial_x\partial_y^2 w + \partial_x w\partial_y^2 w - 2w\partial_x w - 2\epsilon^2\partial_x\partial_x^2 w)\big|_{y=0}. \tag{2.11}$$

由（2.9） – （2.11）可知

$$\begin{aligned} \partial_y^5 w\big|_{y=0} = C_n\sum_{i=0}^{2}(\partial_t - \epsilon^2\partial_x^2)^i K + (2\partial_y w\partial_x\partial_y w + 4w\partial_x\partial_y^2 w - \partial_x w\partial_y^2 w)\big|_{y=0} \\ - w\partial_x w\big|_{y=0} - 2\epsilon^2\partial_x w\partial_x^2 w\big|_{y=0}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

对于 $n = 3$,

$$\begin{aligned} \partial_y^7 w\big|_{y=0} &= (\partial_t - \epsilon^2\partial_x^2)\partial_y^5 w\big|_{y=0} + \partial_y^5 w\big|_{y=0} + \partial_y^5(u\partial_x w + v\partial_y w)\big|_{y=0} \\ &= C_n\sum_{i=1}^{3}(\partial_t - \epsilon^2\partial_x^2)^i K + (\partial_t - \epsilon^2\partial_x^2)(2\partial_y w\partial_x\partial_y w + 4w\partial_x\partial_y^2 w - \partial_x w\partial_y^2 w)\big|_{y=0} \\ &\quad -(\partial_t - \epsilon^2\partial_x^2)(w\partial_x w)\big|_{y=0} - (\partial_t - \epsilon^2\partial_x^2)2\epsilon^2\partial_x w\partial_x^2 w\big|_{y=0} \\ &\quad +\partial_y^5 w\big|_{y=0} + \partial_y^5(u\partial_x w + v\partial_y w)\big|_{y=0}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

由于 (2.13) 右端的第一项和最后四项已符合所需形式，我们只需计算 (2.13) 右端的第二项,

$$\begin{aligned} &(\partial_t - \epsilon^2\partial_x^2)(2\partial_y w\partial_x\partial_y w + 4w\partial_x\partial_y^2 w - \partial_x w\partial_y^2 w)\big|_{y=0} \\ &= (-\partial_x\partial_t w\partial_y^2 w - \partial_x w\partial_y^2\partial_t w + 2\partial_x\partial_y\partial_t w\partial_y w + 2\partial_x\partial_y w\partial_y\partial_t w + 4w\partial_x\partial_y^2\partial_t w + 4\partial_t w\partial_x\partial_y^2 w)\big|_{y=0} \\ &\quad -\epsilon^2\partial_x^2(2\partial_y w\partial_x\partial_y w + 4w\partial_x\partial_y^2 w - \partial_x w\partial_y^2 w)\big|_{y=0}, \end{aligned} \tag{2.14}$$

here

$$-(\partial_x\partial_t w\partial_y^2 w)\big|_{y=0} = -\partial_y^2 w(\partial_x\partial_y^2 w - \partial_x w + \epsilon^2\partial_x^3 w)\big|_{y=0} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned} -\partial_y^2\partial_t w\big|_{y=0} &= -\partial_y^2(\partial_y^2 w - u\partial_x w - v\partial_y w - w + \epsilon^2\partial_x^2 w)\big|_{y=0} \\ &= -(\partial_y^4 w - \partial_y^2 w + 2w\partial_x\partial_y w + \epsilon^2\partial_y^2\partial_x^2 w)\big|_{y=0}, \end{aligned} \tag{2.16}$$

这意味着

$$\begin{aligned} \partial_x w\partial_y^2\partial_t w\big|_{y=0} = \sum_{j=0}^{4}\wedge_\alpha\partial_x\partial_y^j w\partial_y^{4-j} w + \sum_{j=0}^{2}\wedge_\alpha\partial_x\partial_y^j w\partial_y^{2-j} w + \sum_{\rho_1+\rho_2+\rho_3=3}\wedge_\alpha D^{\rho_1} w D^{\rho_2} w D^{\rho_3} w\big|_{y=0} \\ - \epsilon^2\partial_x w\partial_y^2\partial_x^2 w\big|_{y=0}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

由于 $v = \partial_x\partial_y^{-1} w$,

$$\partial_x\partial_y\partial_t w\big|_{y=0} = \partial_x\partial_y(\partial_y^2 w - u\partial_x w - v\partial_y w - w + \epsilon^2\partial_x^2 w)\big|_{y=0}$$

$$
\begin{aligned}
&= \partial_x\partial_y^3 w - \partial_x\partial_y w + \epsilon^2\partial_y\partial_x^3 w - \partial_x(w\partial_x w + u\partial_x\partial_y w + \partial_y v\partial_y w + v\partial_y^2 w)\big|_{y=0}\\
&= \partial_x\partial_y^3 w - \partial_x\partial_y w + \epsilon^2\partial_y\partial_x^3 w - \partial_x w\partial_x w - w\partial_x^2 w - w\partial_y\partial_x w\big|_{y=0} \qquad (2.18)
\end{aligned}
$$

这意味着

$$
\begin{aligned}
&2\partial_x\partial_y\partial_t w\partial_y w\big|_{y=0}\\
&= \left(\sum_{j=0}^{4}\wedge_\alpha\partial_x\partial_y^j w\partial_y^{4-j}w + \sum_{j=0}^{2}\wedge_\alpha\partial_x\partial_y^j w\partial_y^{2-j}w + \sum_{\rho_1+\rho_2+\rho_3=3}\wedge_\alpha D^{\rho_1}wD^{\rho_2}wD^{\rho_3}w\right)\Big|_{y=0} \qquad (2.19)\\
&\quad + 2\epsilon^2\partial_y\partial_x^3 w\partial_y w\big|_{y=0}.
\end{aligned}
$$

同理,

$$
\begin{aligned}
&\left(2\partial_x\partial_y w\partial_y\partial_t w + 4w\partial_x\partial_y^2\partial_t w + 4\partial_t w\partial_x\partial_y^2 w\right)\big|_{y=0}\\
&\in \left(\sum_{j=0}^{4}\wedge_\alpha\partial_x\partial_y^j w\partial_y^{4-j}w + \sum_{j=0}^{2}\wedge_\alpha\partial_x\partial_y^j w\partial_y^{2-j}w + \sum_{\rho_1+\rho_2+\rho_3=3}\wedge_\alpha D^{\rho_1}wD^{\rho_2}wD^{\rho_3}w\right)\Big|_{y=0} \qquad (2.20)\\
&\quad + 2\epsilon^2\partial_x\partial_y w\partial_y\partial_x^2 w\big|_{y=0} + 4\epsilon^2 w\partial_x^3\partial_y^2 w\big|_{y=0} + 4\epsilon^2\partial_x^2 w\partial_x\partial_y^2 w\big|_{y=0}.
\end{aligned}
$$

因此，由（2.13）－（2.20）可得

$$
\begin{aligned}
\partial_y^7 w\big|_{y=0} &= \sum_{i=0}^{3}(\partial_t - \epsilon^2\partial_x^2)^i K + (1+\epsilon^2\partial_x^2+\epsilon^4\partial_x^4)(w\partial_x w)\big|_{y=0} + \sum_{j=0}^{0}\partial_x\partial_y^0 w\partial_y^{0-j}w\big|_{y=0}\\
&\quad + \sum_{j=0}^{2}\wedge_\alpha\partial_x\partial_y^j w\partial_y^{2-j}w\big|_{y=0} + \sum_{j=0}^{4}\wedge_\alpha\partial_x\partial_y^j w\partial_y^{4-j}w\big|_{y=0} + \sum_{\rho_1+\rho_2+\rho_3=3}\wedge_\alpha D^{\rho_1}wD^{\rho_2}wD^{\rho_3}w\big|_{y=0}\\
&\quad + \sum_{j_x=0}^{2}\sum_{j_y=0}^{2}\wedge_\alpha\partial_x\partial_y^{j_x}\partial_y^{j_y}w\partial_y^{2-j_x}\partial_y^{2-j_y}w\big|_{y=0}. \qquad (2.21)
\end{aligned}
$$

我们证明公式（2.21）对 $k=3$成立。

现在，使用相同的算法，我们将对 k进行归纳，证明公式（2.6）。为方便记号，记

$$
\mathcal{A}_k := \left\{\sum_{l=0}^{k-1}\epsilon^{2l}\sum_{j=2}^{\max\{2,k-l\}}\sum_{\rho\in A_{k,l}^j} C_{\wedge_\alpha,k,l,\rho^1,\rho^2,\ldots,\rho^j}\prod_{i=1}^{j}D^{\rho^i}w\big|_{y=0}\right\}. \qquad (2.22)
$$

使用这一记号，我们将证明 $\partial_y^{2k+1}w\big|_{y=0} - (\partial_t-\epsilon^2\partial_x^2)^k(\partial_x P - U) \in \mathcal{A}_k$。假设公式（2.6）对 $k=n$成立，我们将如下证明它对 $k=n+1$ 也成立。然后，我们对涡量方程关于 y $2n+1$ 求

$$
\begin{aligned}
\partial_y^{2n+3}w\big|_{y=0} &= \left\{(\partial_t-\epsilon^2\partial_x^2)\partial_y^{2n+1}w + \partial_y^{2n+1}(u\partial_x w + v\partial_y w) + \partial_y^{2n+1}w\right\}\big|_{y=0}\\
&= \left\{(\partial_t-\epsilon^2\partial_x^2)\partial_y^{2n+1}w + \sum_{j=0}^{2n}\wedge_\alpha\partial_x\partial_y^j w\partial_y^{2n-j}w + \partial_y^{2n+1}w\right\}\big|_{y=0}. \qquad (2.23)
\end{aligned}
$$

通过常规检验，可以证明（2.23）中的最后三项属于 $\mathcal{A}_{k+1}$，因此只需处理项 $(\partial_t-\epsilon^2\partial_x^2)\partial_y^{2n+1}w$。根据归纳假设，存在常数 $C_{\wedge_\alpha,n,l,\rho^1,\rho^2,\ldots,\rho^j}$

使得

$$\partial_y^{2n+1}w\big|_{y=0}=C_n\sum_{s=0}^{n}(\partial_t-\epsilon^2\partial_x^2)^n(\partial_xP-U)$$
$$+\sum_{l=0}^{k-1}\epsilon^{2l}\sum_{j=2}^{\max\{2,n-l\}}\sum_{\rho\in A_{n,l}^j}C_{\wedge_\alpha,n,l,\rho^1,\rho^2,\ldots,\rho^j}\prod_{i=1}^{j}D^{\rho^i}w\big|_{y=0}. \tag{2.24}$$

因此，在对指标 ρ^i 重新标记后，我们有，

$$(\partial_t-\epsilon^2\partial_x^2)\partial_y^{2n+1}w\big|_{y=0}=C_n\sum_{s=1}^{n+1}(\partial_t-\epsilon^2\partial_x^2)^s(\partial_xP-U)$$
$$+\sum_{l=0}^{n-1}\epsilon^{2l}\sum_{j=2}^{\max\{2,n-l\}}\sum_{\rho\in A_{n,l}^j}\widetilde{C}_{\wedge_\alpha,n,l,\rho^1,\rho^2,\ldots,\rho^j}(\partial_t-\epsilon^2\partial_x^2)D^{\rho^1}w\prod_{i=2}^{j}D^{\rho^i}w\big|_{y=0}$$
$$-\sum_{l=0}^{n-1}\epsilon^{2l+2}\sum_{j=2}^{\max\{2,n-l\}}\sum_{\rho\in A_{n,l}^j}\widetilde{\widetilde{C}}_{\wedge_\alpha,n,l,\rho^1,\rho^2,\ldots,\rho^j}\partial_xD^{\rho^1}w\partial_xD^{\rho^2}w\prod_{i=3}^{j}D^{\rho^i}w\big|_{y=0}, \tag{2.25}$$

其中 $C_{\wedge_\alpha,n,l,\rho^1,\rho^2,\ldots,\rho^j}$ 和 $C_{\wedge_\alpha,n,l,\rho^1,\rho^2,\ldots,\rho^j}$ 是一些依赖于 $C_{\wedge_\alpha,n,l,\rho^1,\rho^2,\ldots,\rho^j}$ 的新常数。值得注意的是，(2.25) 右端的最后一项属于 $\mathcal{A}_{n+1}$，因此只需检查 (2.25) 右端的第二项是否也属于 $\mathcal{A}_{n+1}$。

对涡量方程 $(2.3)_1$ ρ_1^1 关于 ρ_2^1 和 x 分别求 y次导数，然后在 $y=0$处计算，并记 $e_2=(0,1)$,

$$(\partial_t-\epsilon^2\partial_x^2)D^{\rho^1}w\big|_{y=0}=-\sum_{\substack{\beta\le\rho^1\\ \beta_2\ge1}}\binom{\rho^1}{\beta}D^{\beta-e_2}w\partial_xD^{\rho_1-\beta}w\big|_{y=0}+\sum_{\substack{\beta\le\rho^1\\ \beta_2\ge2}}\binom{\rho^1}{\beta}\partial_xD^{\beta-2e_2}w\partial_yD^{\rho_1-\beta}w\big|_{y=0}$$
$$+\partial_y^2D^{\rho^1}w\big|_{y=0}+D^{\rho^1}w\big|_{y=0}. \tag{2.26}$$

利用 (2.26)，通过常规的指标计数即可说明，(2.25) 右端的第二项属于 $\mathcal{A}_{n+1}$。至此，证明完成。

□

引理 2.2。设 $s\ge4$ 为偶整数，$\gamma\ge1$，$\sigma>\gamma+\frac{1}{2}$ 且 $\delta\in(0,1)$。若 $w\in H^{s,\gamma}_{\sigma,\delta}$，满足 (2.1) 和 (2.3)，则有以下估计：

(i) 当 $|\alpha|\le s-1$ 时，

$$\left|\int_{\mathbb{T}}D^\alpha w\partial_yD^\alpha w dx\big|_{y=0}\right|\le\frac{1}{12}\|(1+y)^{\gamma+\alpha_2+1}\partial_y^2D^\alpha w\|_{L^2}^2+C\|w\|_{H^{s,\gamma}_g}^2, \tag{2.27}$$

(ii) 当 $|\alpha|=s$、α_2 为偶函数时，

$$\left|\int_{\mathbb{T}}D^\alpha w\partial_yD^\alpha w dx\big|_{y=0}\right|\le\frac{1}{12}\|(1+y)^{\gamma+\alpha_2}\partial_yD^\alpha w\|_{L^2}^2+C_{s,\gamma,\sigma,\delta}(1+\|w\|_{H^{s,\gamma}_g}^2)^{s-2}\|w\|_{H^{s,\gamma}_g}^2$$
$$+C_s\sum_{l=0}^{\frac{s}{2}}\|\partial_t^l(\partial_xP-U)\|_{H^{s-2l}(\mathbb{T})}^2, \tag{2.28}$$

(iii) 当 $|\alpha|=s$、 α_2 为奇函数时，

$$\left|\int_{\mathbb{T}} D^\alpha w\partial_y D^\alpha w dx\big|_{y=0}\right| \leq \frac{1}{12}\|(1+y)^{\gamma+\alpha_2+1}\partial_x^{\alpha_1-1}\partial_y^{\alpha_2+2}w\|_{L^2}^2 + C_{s,\gamma,\sigma,\delta}(1+\|w\|_{H_g^{s,\gamma}}^2)^{s-2}\|w\|_{H_g^{s,\gamma}}^2 + C_s\sum_{l=0}^{\frac{s}{2}}\|\partial_t^l(\partial_x P-U)\|_{H^{s-2l}(\mathbb{T})}^2. \tag{2.29}$$

证明。情形 1。当 $|\alpha|\leq s-1$ 时，利用以下迹估计

$$\int_{\mathbb{T}}|f|dx\big|_{y=0} \leq C\left(\int_0^1\int_{\mathbb{T}}|f|dxdy + \int_0^1\int_{\mathbb{T}}|\partial_y f|dxdy\right), \tag{2.30}$$

可得

$$\left|\int_{\mathbb{T}} D^\alpha w\partial_y D^\alpha w dx\big|_{y=0}\right| \leq \frac{1}{12}\|(1+y)^{\gamma+\alpha_2+1}\partial_y^2 D^\alpha w\|_{L^2}^2 + C\|w\|_{H_g^{s,\gamma}}^2. \tag{2.31}$$

情形 2。 当 $|\alpha|=s$， $\alpha_2=2k$ 对于某个 $k\in\mathbb{N}$，我们可以应用引理 2.1 对 $\partial_y D^\alpha|_{y=0}$ 进行估计，从而得到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}} D^\alpha w\partial_y D^\alpha w dx\big|_{y=0} =& C_k\sum_{s=0}^{k}\int_{\mathbb{T}} D^\alpha w(\partial_t-\epsilon^2\partial_x^2)^k\partial_x^{\alpha_1}(\partial_x P-U)dx\big|_{y=0}\\ &+\sum_{l=0}^{k-1}\epsilon^{2l}\sum_{j=2}^{\max\{2,k-l\}}\sum_{\rho\in A_{k,l}^j} C_{\wedge_\alpha,k,l,\rho^1,\rho^2,\ldots,\rho^j}\int_{\mathbb{T}} D^\alpha w\partial_x^{\alpha_1}(\prod_{i=1}^{j} D^{\rho^i}w)dx\big|_{y=0}.\end{aligned} \tag{2.32}$$

Then 我们再次应用简单的迹估计，按如下方式控制边界积分

$$\left|\int_{\mathbb{T}} D^\alpha w\partial_y D^\alpha w dx\big|_{y=0}\right| \leq \frac{1}{12}\|(1+y)^{\gamma+\alpha_2}\partial_y D^\alpha w\|_{L^2}^2 + C_{s,\gamma,\sigma,\delta}(1+\|w\|_{H_g^{s,\gamma}})^{s-2}\|w\|_{H_g^{s,\gamma}}^2 + C_s\sum_{l=0}^{\frac{s}{2}}\|\partial_t^l(\partial_x P-U)\|_{H^{s-2l}(\mathbb{T})}^2. \tag{2.33}$$

情形 3。当 $|\alpha|=s$, $\alpha_2=2k+1$ 对于某个 $k\in\mathbb{N}$ 时，对 x 变量进行分部积分，可得

$$\int_{\mathbb{T}} D^\alpha w\partial_y D^\alpha w dx\big|_{y=0} = -\int_{\mathbb{T}}\partial_x D^\alpha w\partial_x^{\alpha_1-1}\partial_y^{\alpha_2+1}w dx\big|_{y=0}. \tag{2.34}$$

注意到 th 若该项 $\partial_x D^\alpha w\big|_{y=0}=\partial_x^{\alpha_1+1}\partial_y^{2k+1}w\big|_{y=0}$ 含有奇数个 y 阶导数，则我们得到 t

$$\left|\int_{\mathbb{T}} D^\alpha w\partial_y D^\alpha w dx\big|_{y=0}\right| \leq \frac{1}{12}\|(1+y)^{\gamma+\alpha_2+1}\partial_x^{\alpha_1-1}\partial_y^{\alpha_2+2}w\|_{L^2}^2 + C_{s,\gamma,\sigma,\delta}(1+\|w\|_{H_g^{s,\gamma}})^{s-2}\|w\|_{H_g^{s,\gamma}}^2 + C_s\sum_{l=0}^{\frac{s}{2}}\|\partial_t^l(\partial_x P-U)\|_{H^{s-2l}(\mathbb{T})}^2. \tag{2.35}$$

□

命题 2.3. 设 $s\geq 4$ 为偶整数， $\gamma\geq 1$， $\sigma>\gamma+\frac{1}{2}$ 且 $\delta\in(0,1)$。若 $w\in H^s$, σ^{γ}_{δ}, 满足 (2.1) 和(2.3)，则有以下一致（关于 ϵ）估计：

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{\substack{|\alpha|\leq s\\ \alpha_1\leq s-1}}\|(1+y)^{\gamma+\alpha_2}D^\alpha w\|_{L^2}^2 + \sum_{\substack{|\alpha|\leq s\\ \alpha_1\leq s-1}}\|(1+y)^{\gamma+\alpha_2}D^\alpha w\|_{L^2}^2$$

$$\leq -\frac{1}{2}\sum_{\substack{|\alpha|\leq s\\ \alpha_1\leq s-1}}\|(1+y)^{\gamma+\alpha_2}\partial_y D^\alpha w\|_{L^2}^2-\epsilon^2\sum_{\substack{|\alpha|\leq s\\ \alpha_1\leq s-1}}\|(1+y)^{\gamma+\alpha_2}\partial_x D^\alpha w\|_{L^2}^2$$
$$+C_{s,\gamma,\sigma,\delta}\|w\|_{H_g^{s,\gamma}}^2(\|\partial_x^s U\|_{L^\infty(\mathbb{T})}^2+\|w\|_{H_g^{s,\gamma}}^2)+C_{s,\gamma,\sigma,\delta}(1+\|w\|_{H_g^{s,\gamma}})^{s-2}\|w\|_{H_g^{s,\gamma}}^2$$
$$+C_s\sum_{l=0}^{\frac{s}{2}}\|\partial_t^l(\partial_x P-U)\|_{H^{s-2l}(\mathbb{T})}^2. \tag{2.36}$$

证明。对 D^α 应用算子（2.1）$_1$，取 $\alpha=(\alpha_1,\ \alpha_2)$ $|\alpha|\leq s,\quad \alpha_1\leq s-1$,

$$(\partial_t+u\partial_x+v\partial_y+1-\epsilon^2\partial_x^2-\partial_y^2)D^\alpha w=-\sum_{0<\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\left\{D^\beta u\partial_x D^{\alpha-\beta}w+D^\beta v\partial_y D^{\alpha-\beta}w\right\}. \tag{2.37}$$

将（2.37）乘以 $(1+y)^{2\gamma+2\alpha_2}D^\alpha w$ 并在 $\mathbb{T}\times\mathbb{R}_+$ 上积分，得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(1+y)^{\gamma+\alpha_2}D^\alpha w\|_{L^2}^2+\|(1+y)^{\gamma+\alpha_2}D^\alpha w\|_{L^2}^2+\|(1+y)^{\gamma+\alpha_2}\partial_y D^\alpha w\|_{L^2}^2+\epsilon^2\|(1+y)^{\gamma+\alpha_2}\partial_x D^\alpha w\|_{L^2}^2$$
$$=-\int_{\mathbb{T}}D^\alpha w\partial_y D^\alpha w dx|_{y=0}-(2\gamma+2\alpha_2)\iint(1+y)^{2\gamma+2\alpha_2-1}D^\alpha w\partial_y D^\alpha w$$
$$+(\gamma+\alpha_2)\iint(1+y)^{2\gamma+2\alpha_2-1}v|D^\alpha w|^2$$
$$-\sum_{0<\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\iint(1+y)^{2\gamma+2\alpha_2}D^\alpha w\left\{D^\beta u\partial_x D^{\alpha-\beta}w+D^\beta v\partial_y D^{\alpha-\beta}w\right\}. \tag{2.38}$$

事实上，（2.38）可通过分部积分并利用边界条件得到。我们需要逐项估计（2.38）。显然，（2.38）右端的第一项由引理 2.1-2.2。其次

y, using Hölder 不等式 q式 y, 我们有

$$\left|(2\gamma+2\alpha_2)\iint(1+y)^{2\gamma+2\alpha_2-1}D^\alpha w\partial_y D^\alpha w\right|$$
$$\leq(2\gamma+2\alpha_2)\|\frac{1}{1+y}\|_{L^\infty}\|(1+y)^{\gamma+\alpha_2}D^\alpha w\|_{L^2}\|(1+y)^{\gamma+\alpha_2}\partial_y D^\alpha w\|_{L^2}$$
$$\leq C_{s,\gamma}\|w\|_{H_g^{s,\gamma}}^2+\frac{1}{4}\|(1+y)^{\gamma+\alpha_2}\partial_y D^\alpha w\|_{L^2}^2, \tag{2.39}$$

并利用引理 1.11,

$$\left|(\gamma+\alpha_2)\iint(1+y)^{2\gamma+2\alpha_2-1}v|D^\alpha w|^2\right| \leq \|\frac{v}{1+y}\|_{L^\infty}\|(1+y)^{\gamma+\alpha_2}D^\alpha w\|_{L^2}^2$$
$$\leq C_{s,\gamma,\sigma,\delta}(\|w\|_{H_g^{s,\gamma}}+\|\partial_x^s U\|_{L^2(\mathbb{T})})\|w\|_{H_g^{s,\gamma}}^2. \tag{2.40}$$

最后，注意到这一事实 $\partial_y v=-\partial_x u,\quad \partial_y u=w$，可知（2.38）右端的最后一项有以下三种情况,

（i）第一种情况:

$$J_1=\iint(1+y)^{2\gamma+2\alpha_2}D^\alpha w\partial_x^\eta v D^k w,\quad \eta\in[1,s-1].$$

(a) 当 $\eta=s-1$ 时，我们得到

$$|J_1|=\left|\iint(1+y)^{2\gamma+2\alpha_2}D^\alpha w\partial_x^{s-1}v\partial_y^2 w\right|$$

$$\leq \|(1+y)^{\gamma+\alpha_2}D^{\alpha}w\|_{L^2}\|\frac{\partial_x^{s-1}v+y\partial_x^s U}{1+y}\|_{L^2}\|(1+y)^{\gamma+k_2}D^k w\|_{L^\infty}$$
$$+\|(1+y)^{\gamma+\alpha_2}D^{\alpha}w\|_{L^2}\|\partial_x^s U\|_{L^\infty(\mathbb{T})}\|(1+y)^{\gamma+k_2}D^k w\|_{L^\infty}$$
$$\leq C_{s,\gamma,\sigma,\delta}\|w\|^2_{H_g^{s,\gamma}}(\|w\|_{H_g^{s,\gamma}}+\|\partial_x^s U\|_{L^\infty(\mathbb{T})}); \tag{2.41}$$

(b) 当 $\eta=1,2,\cdots,s-2$ 时，我们推导出

$$|J_1|\leq \|(1+y)^{\gamma+\alpha_2}D^{\alpha}w\|_{L^2}\|\frac{\partial_x^{\eta}v}{1+y}\|_{L^\infty}\|(1+y)^{\gamma+k_2}D^k w\|_{L^2}$$
$$\leq C_{s,\gamma,\sigma,\delta}\|w\|^2_{H_g^{s,\gamma}}(\|w\|_{H_g^{s,\gamma}}+\|\partial_x^s U\|_{L^2(\mathbb{T})}). \tag{2.42}$$

(ii) 第二种情况

$$J_2=\iint(1+y)^{2\gamma+2\alpha_2}D^{\alpha}w\partial_x^{\eta}uD^k w,\quad \eta\in[1,s].$$

(a) 对于 $\eta=s$，我们得到

$$|J_2|=\left|\iint(1+y)^{2\gamma+2\alpha_2}D^{\alpha}w\partial_x^s u\partial_y w\right|$$
$$\leq \|(1+y)^{\gamma+\alpha_2}D^{\alpha}w\|_{L^2}\|\partial_x^s(u-U)\|_{L^2}\|(1+y)^{\gamma+k_2}D^k w\|_{L^\infty}$$
$$+\|(1+y)^{\gamma+\alpha_2}D^{\alpha}w\|_{L^2}\|\partial_x^s U\|_{L^\infty(\mathbb{T})}\|(1+y)^{\gamma+k_2}D^k w\|_{L^2}$$
$$\leq C_{s,\gamma,\sigma,\delta}\|w\|^2_{H_g^{s,\gamma}}(\|w\|_{H_g^{s,\gamma}}+\|\partial_x^s U\|_{L^\infty(\mathbb{T})}); \tag{2.43}$$

(b) 对于 $\eta=1,2,\cdots,s-1$，我们推导得

$$|J_2|\leq \|(1+y)^{\gamma+\alpha_2}D^{\alpha}w\|_{L^2}\|\partial_x^{\eta}u\|_{L^\infty}\|(1+y)^{\gamma+k_2}D^k w\|_{L^2}$$
$$\leq C_{s,\gamma,\sigma,\delta}\|w\|^2_{H_g^{s,\gamma}}(\|w\|_{H_g^{s,\gamma}}+\|\partial_x^s U\|_{L^2(\mathbb{T})}). \tag{2.44}$$

(iii) 最后一种情况

$$J_3=\iint(1+y)^{2\gamma+2\alpha_2}D^{\alpha}wD^{\theta}wD^k w,\quad \theta\in[0,s-1],\theta+k=s.$$

我们得到

$$|J_3|\leq C_{s,\gamma,\sigma,\delta}\|w\|_{H_g^{s,\gamma}}(\|w\|_{H_g^{s,\gamma}}+\|\partial_x^s U\|_{L^2(\mathbb{T})})\|(1+y)^{\gamma+\alpha_2}D^{\alpha}w\|_{L^2}$$
$$\leq C_{s,\gamma,\sigma,\delta}\|w\|^2_{H_g^{s,\gamma}}(\|w\|_{H_g^{s,\gamma}}+\|\partial_x^s U\|_{L^2(\mathbb{T})})^2+\frac{1}{12}\|(1+y)^{\gamma+\alpha_2}D^{\alpha}w\|^2_{L^2}, \tag{2.45}$$

因此，结合（2.39）-（2.45），（2.38）可将不等式（2.36）。 □

2.2 对 g_s 的估计

在本小节中，我们将估计 $D^{\alpha}w$ 在权重 $(1+y)^{\gamma+\alpha_2}$ 下的范数，其中 $\alpha=(s,0)$，即 $(1+y)^{\gamma}g_s$，因为我们已在第 2.1 小节中估计了 $(1+y)^{\gamma+\alpha_2}D^{\alpha}w$、$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$、$\alpha_1\leq s-1$ 的范数。w 和 $u-U$ 的演化方程如下：

$$\begin{cases}(\partial_t+u\partial_x+v\partial_y+1-\partial_y^2-\epsilon^2\partial_x^2)w=0,\\ (\partial_t+u\partial_x+v\partial_y+1-\partial_y^2-\epsilon^2\partial_x^2)(u-U)=-(u-U)\partial_x U.\end{cases} \tag{2.46}$$

命题 **n 2.4.** 在命题 2.3 的相同假设下，我们有以下估计：

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|(1+y)^\gamma g_s\|_{L^2}^2+\|(1+y)^\gamma g_s\|_{L^2}^2\\
&\le -\frac{1}{2}\epsilon^2\|(1+y)^\gamma\partial_x g_s\|_{L^2}^2-\frac{1}{2}\|(1+y)^\gamma\partial_y g_s\|_{L^2}^2+\|w\|_{H_g^{s,\gamma}}^2\\
&\quad+C\|\partial_x^s(\partial_x P-U)\|_{L^2(\mathbb{T})}^2+C_{\gamma,\delta}\|\partial_x^s U\|_{L^2(\mathbb{T})}^2\|w\|_{H_g^{s,\gamma}}^2\\
&\quad+C_{s,\gamma,\sigma,\delta}\left(1+\|w\|_{H_g^{s,\gamma}}+\|\partial_x^s U\|_{L^\infty(\mathbb{T})}\right)\left(\|w\|_{H_g^{s,\gamma}}+\|\partial_x^{s+1}U\|_{L^\infty(\mathbb{T})}\right)\|w\|_{H_g^{s,\gamma}}.
\end{aligned}\tag{2.47}$$

证明。 分别将算子 ∂_x^s 作用于（2.46）$_1$ 和（2.46）$_2$，得到以下方程

$$\begin{cases}
(\partial_t+u\partial_x+v\partial_y+1-\partial_y^2-\epsilon^2\partial_x^2)\partial_x^s w+\partial_x^s v\partial_y w=-\sum\limits_{0\le j<s}\binom{s}{j}\partial_x^{s-j}u\partial_x^{j+1}w\\
\quad-\sum\limits_{1\le j<s}\binom{s}{j}\partial_x^{s-j}v\partial_y\partial_x^j w,\\
(\partial_t+u\partial_x+v\partial_y+1-\partial_y^2-\epsilon^2\partial_x^2)\partial_x^s(u-U)+\partial_x^s v\partial_y u=-\sum\limits_{0\le j<s}\binom{s}{j}\partial_x^{s-j}u\partial_x^{j+1}(u-U)\\
\quad-\sum\limits_{1\le j<s}\binom{s}{j}\partial_x^{s-j}v\partial_y\partial_x^j u-\sum\limits_{0\le j\le s}\binom{s}{j}\partial_x^j(u-U)\partial_x^{s-j+1}U.
\end{cases}\tag{2.48}$$

为了克服项 $\partial_x^s v$ 带来的困难，我们像往常一样在 [29] 中利用抵消性质。具体而言，我们用$\frac{\partial_y w}{w}\times$（2.48）$_2$减去（2.48）$_1$,，并令 $a(t,\ x,\ y)=\frac{\partial_y w}{w}$，可得

$$\begin{aligned}
&(\partial_t+u\partial_x+v\partial_y+1-\partial_y^2)g_s+\partial_x^s(u-U)(\partial_t+u\partial_x+v\partial_y+1-\partial_y^2)a\\
&=2\epsilon^2\partial_x^{s+1}(u-U)\partial_x a+2\partial_x^s w\partial_y a-\sum_{j=0}^{s-1}\binom{s}{j}g_{j+1}\partial_x^{s-j}u-\sum_{j=1}^{s-1}\binom{s}{j}\partial_x^{s-j}v\{\partial_y\partial_x^j w-a\partial_y\partial_x^j u\}\\
&\quad+a\sum_{j=0}^{s}\binom{s}{j}\partial_x^j(u-U)\partial_x^{s-j+1}U.
\end{aligned}\tag{2.49}$$

将算子 ∂_y 作用于（2.3）$_1$ 可得

$$(\partial_t+u\partial_x+v\partial_y+1)\partial_y w=2\epsilon^2\partial_x\partial_y w+\partial_y^3 w-w\partial_x w+\partial_x u\partial_y w.\tag{2.50}$$

利用（2.50）和方程（2.3）$_1$,，得到

$$\begin{aligned}
(\partial_t+u\partial_x+v\partial_y+1)a=&\frac{(\partial_t+u\partial_x+v\partial_y+1)\partial_y w}{w}-\frac{\partial_y w(\partial_t+u\partial_x+v\partial_y+1)w}{w^2}\\
=&\epsilon^2\frac{\partial_x^2\partial_y w}{w}-\epsilon^2 a\frac{\partial_x^2 w}{w}+\frac{\partial_y^3 w}{w}-a\frac{\partial_y^2 w}{w}-g_1+a\partial_x U,
\end{aligned}\tag{2.51}$$

and

$$\begin{cases}
\partial_y a=\frac{\partial_y^2 w}{w}-\frac{\partial_y w\partial_y w}{w^2},\\
\partial_y^2 a=\frac{\partial_y^3 w}{w}-a\frac{\partial_y^2 w}{w}-2a\partial_y a.
\end{cases}\tag{2.52}$$

将 (2.51) 和 $(2.52)_2$ 代入 (2.49) 得

$$\begin{aligned}
&(\partial_t+u\partial_x+v\partial_y+1-\partial_y^2-\epsilon^2\partial_x^2)g_s\\
&=2\epsilon^2\{\partial_x^{x+1}(u-U)-\frac{\partial_x w}{w}\partial_x^2(u-U)\}\partial_x a+2g_s\partial_y a-g_1\partial_x^s U-\sum_{j=1}^{s-1}\binom{s}{j}g_{j+1}\partial_x^{s-j}u
\end{aligned}$$

$$-\sum_{j=1}^{s-1}\binom{s}{j}\partial_x^{s-j}v\{\partial_y\partial_x^j w-a\partial_y\partial_x^j u\}+a\sum_{j=0}^{s-1}\binom{s}{j}\partial_x^j(u-U)\partial_x^{s-j+1}U. \tag{2.53}$$

将 (2.53) 乘以 $(1+y)^{2\gamma}g_s$，并在 $\mathbb{T}\times\mathbb{R}_+$上对其积分，得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(1+y)^\gamma g_s\|_{L^2}^2+\|(1+y)^\gamma g_s\|_{L^2}^2+\|(1+y)^\gamma\partial_y g_s\|_{L^2}^2+\epsilon^2\|(1+y)^\gamma\partial_x g_s\|_{L^2}^2\\
&=2\epsilon^2\iint(1+y)^{2\gamma}g_s\big\{\partial_x^{x+1}(u-U)-\frac{\partial_x w}{w}\partial_x^2(u-U)\big\}\partial_x a\\
&\quad+\int_{\mathbb{T}}g_s\partial_y g_s dx|_{y=0}-2\gamma\iint(1+y)^{2\gamma-1}g_s\partial_y g_s+\gamma\iint(1+y)^{2\gamma-1}v|g_s|^2+2\iint(1+y)^{2\gamma}|g_s|^2\partial_y a\\
&\quad-\sum_{j=1}^{s-1}\binom{s}{j}\iint(1+y)^{2\gamma}g_s g_{j+1}\partial_x^{s-j}u-\sum_{j=1}^{s-1}\binom{s}{j}\iint(1+y)^{2\gamma}g_s\partial_x^{s-j}v\{\partial_y\partial_x^j w-a\partial_x^j w\}\\
&\quad-\iint(1+y)^{2\gamma}g_s g_1\partial_x^s U+\sum_{j=0}^{s-1}\binom{s}{j}\iint(1+y)^{2\gamma}g_s a\partial_x^j(u-U)\partial_x^{s-j+1}U,
\end{aligned}\tag{2.54}$$

这可通过分部积分并利用边界条件得到。我们逐项估计（2.54）。首先，对于 $w\in C([0,T];H^{s+4,\gamma}_\delta)$，由 $H^{s+4,\gamma}_\delta$ 的定义可知 $(1+y)^\sigma w\geq\delta$ 且 $|(1+y)^{\sigma+\alpha}D^\alpha w|\leq\delta^{-1}$ 对所有 $|\alpha|\leq 2$ 均成立。因此，我们有 $\|(1+y)\partial_x a\|_{L^\infty}\leq\delta^{-2}+\delta^{-4}$ 且 $\|\frac{\partial_x w}{w}\|_{L^\infty}\leq\delta^{-2}$，从而

$$\begin{aligned}
&2\epsilon^2\iint(1+y)^{2\gamma}g_s\big\{\partial_x^{x+1}(u-U)-\frac{\partial_x w}{w}\partial_x^2(u-U)\big\}\partial_x a\\
&\leq 2\epsilon^2 C_\delta\|(1+y)^\gamma g_s\|_{L^2}(\|(1+y)^{\gamma-1}\partial_x^{s+1}(u-U)\|_{L^2}+\|(1+y)^{\gamma-1}\partial_x^s(u-U)\|_{L^2}).
\end{aligned}\tag{2.55}$$

此外，利用引理 1.8 以及以下估计

$$\begin{cases}
|w|^{-1}\leq\delta^{-1}(1+y)^\sigma,\\
|\partial_y w|\leq\delta^{-1}(1+y)^{-\sigma-1},\quad |\partial_y^2 w|\leq\delta^{-1}(1+y)^{-\sigma-2},
\end{cases}\tag{2.56}$$

我们有

$$\begin{aligned}
\|(1+y)^{\gamma-1}\partial_x^{s+1}(u-U)\|_{L^2}&\leq C_{\gamma,\sigma,\delta}\|(1+y)^{\gamma-\sigma-1}\frac{\partial_x^{s+1}(u-U)}{w}\|_{L^2}\\
&\leq C_{\gamma,\sigma,\delta}\left(\|\partial_x^{s+1}U\|_{L^2(\mathbb{T})}+\|(1+y)^\gamma\partial_x g_s\|_{L^2}+\|(1+y)^{\gamma-1}\partial_x^s(u-U)\|_{L^2}\right),
\end{aligned}\tag{2.57}$$

and

$$\|(1+y)^{\gamma-1}\frac{\partial_x w}{w}\partial_x^s(u-U)\|_{L^2}\leq C_{\gamma,\sigma,\delta}\|(1+y)^{\gamma-1}\partial_x^s(u-U)\|_{L^2}. \tag{2.58}$$

于是，我们可以得到

$$\begin{aligned}
&\left|2\epsilon^2\iint(1+y)^{2\gamma}g_s\big\{\partial_x^{x+1}(u-U)-\frac{\partial_x w}{w}\partial_x^2(u-U)\big\}\partial_x a\right|\\
&\leq\frac{1}{2}\epsilon^2\|(1+y)^\gamma\partial_x g_s\|_{L^2}^2+\epsilon^2 C_{s,\gamma,\sigma,\delta}\left(\|w\|_{H^{s,\gamma}_g}+\|\partial_x^{s+1}U\|_{L^2(\mathbb{T})}\right)\|w\|_{H^{s,\gamma}_g}^2.
\end{aligned}\tag{2.59}$$

其次，我们有如下事实：

$$\partial_y g_s\big|_{y=0}=\left(\partial_x^s\partial_y w-\frac{\partial_y w}{w}\partial_x^s w-\frac{\partial_y^2 w}{w}\partial_x^s(u-U)+\frac{\partial_y w\partial_y w}{w^2}\partial_x^s(u-U)\right)\big|_{y=0}$$

$$= \left(\partial_x^s(\partial_x p - U) - a g_s + \frac{\partial_y^2 w}{w} \partial_x^s U \right) \Big|_{y=0}. \tag{2.60}$$

然后，根据迹定理，我们得到

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\mathbb{T}} g_s \partial_y g_s dx \big|_{y=0} \right| \\
&\le \iint |a g_s^2| \, dxdy + \iint |\partial_y a g_s^2| \, dxdy + 2 \iint |a g_s \cdot \partial_y g_s| \, dxdy \\
&\quad + \iint (\partial_y g_s + g_s) \partial_x^s (\partial_x p - U) dxdy + \iint g_s (\frac{\partial_y^2 w}{w} + \frac{\partial_y^3 w}{w} - \frac{\partial_y^2 w \partial_y w}{w^2}) \partial_x^s U dxdy \\
&\quad + \iint \partial_y g_s \frac{\partial_y^2 w}{w} \partial_x^s U dxdy \\
&\le C_{\gamma,\sigma} \|w\|_{H_g^{s,\gamma}}^2 (1 + \|\partial_x^s U\|_{L^\infty(\mathbb{T})}^2) + C \|\partial_x^s (\partial_x p - U)\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 + \frac{1}{4} \|(1+y)^\gamma \partial_y g_s\|_{L^2}^2,
\end{aligned} \tag{2.61}$$

结合（2.56），可得以下事实： $\|a\|_{L^\infty} \le \delta^{-2}$ 且 $\|\partial_y a\|_{L^\infty} \le \delta^{-2} + \delta^{-4}$。接下来，利用 Höölder 不等式，可得

$$\begin{aligned}
\left| 2\gamma \iint (1+y)^{2\gamma-1} g_s \partial_y g_s \right| &\le 2\gamma \| \frac{1}{1+y} \|_{L^\infty} \|(1+y)^\gamma g_s\|_{L^2} \|(1+y)^\gamma \partial_y g_s\|_{L^2} \\
&\le C_\gamma \|w\|_{H_g^{s,\gamma}}^2 + \frac{1}{4} \|(1+y)^\gamma \partial_y g_s\|_{L^2}^2,
\end{aligned} \tag{2.62}$$

并利用引理 1.11

$$\begin{aligned}
\left| \gamma \iint (1+y)^{2\gamma-1} v |g_s|^2 \right| &\le \| \frac{v}{1+y} \|_{L^\infty} \|(1+y)^\gamma g_s\|_{L^2}^2 \\
&\le C_{s,\gamma,\sigma,\delta} (\|w\|_{H_g^{s,\gamma}} + \|\partial_x^s U\|_{L^2(\mathbb{T})}) \|w\|_{H_g^{s,\gamma}}^2.
\end{aligned} \tag{2.63}$$

由（2.56）和（2.52）可得

$$\left| 2 \iint (1+y)^{2\gamma} |g_s|^2 \partial_y a \right| \le 2 \|\partial_y a\|_{L^\infty} \|(1+y)^\gamma g_s\|_{L^2}^2 \le C_\delta \|w\|_{H_g^{s,\gamma}}^2, \tag{2.64}$$

and

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{j=1}^{s-1} \binom{s}{j} \iint (1+y)^{2\gamma} g_s g_{j+1} \partial_x^{s-j} u \right| &\le \sum_{j=1}^{s-1} \binom{s}{j} \|\partial_x^{s-j} u\|_{L^\infty} \|(1+y)^\gamma g_s\|_{L^2} \|(1+y)^\gamma g_{j+1}\|_{L^2} \\
&\le C_{s,\gamma,\sigma,\delta} (\|w\|_{H_g^{s,\gamma}} + \|\partial_x^s U\|_{L^2(\mathbb{T})})^2 \|w\|_{H_g^{s,\gamma}}.
\end{aligned} \tag{2.65}$$

最后，对于 $j = 2, 3, \cdots, s-1$,

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{j=1}^{s-1} \binom{s}{j} \iint (1+y)^{2\gamma} g_s \partial_x^{s-j} v \{\partial_y \partial_x^j w - a \partial_x^j w\} \right| \\
&\le \sum_{j=1}^{s-1} \binom{s}{j} \|(1+y)^\gamma g_s\|_{L^2} \| \frac{\partial_x^{s-j} v}{1+y} \|_{L^\infty} \left(\|(1+y)^{\gamma+1} \partial_y \partial_x^j w\|_{L^2} + \|(1+y) a\|_{L^\infty} \|(1+y)^\gamma \partial_x^j w\|_{L^2} \right) \\
&\le C_{s,\gamma,\sigma,\delta} (\|w\|_{H_g^{s,\gamma}} + \|\partial_x^s U\|_{L^2(\mathbb{T})}) \|w\|_{H_g^{s,\gamma}}^2,
\end{aligned} \tag{2.66}$$

这与 (2.56) 一起，得出 $\|(1+y)a\|_{L^\infty} \le \delta^{-2}$。对于 $j = 1$,

$$\left| \iint (1+y)^{2\gamma} g_s \partial_x^{s-1} v \{\partial_y \partial_x w - a \partial_x w\} \right|$$

$$\leq \|\frac{\partial_x^{s-1}v+y\partial_x^s U}{1+y}\|_{L^2}\left(\|(1+y)^{\gamma+1}\partial_y\partial_x w\|_{L^\infty}+\|(1+y)a\|_{L^\infty}\|(1+y)^\gamma\partial_x w\|_{L^\infty}\right)\|(1+y)^\gamma g_s\|_{L^2}$$
$$+\|\partial_x^s U\|_{L^\infty(\mathbb{T})}\left(\|(1+y)^{\gamma+1}\partial_y\partial_x w\|_{L^2}+\|(1+y)a\|_{L^\infty}\|(1+y)^\gamma\partial_x w\|_{L^2}\right)\|(1+y)^\gamma g_s\|_{L^2}$$
$$\leq C_{s,\gamma,\sigma,\delta}\|w\|^2_{H_g^{s,\gamma}}(\|w\|_{H_g^{s,\gamma}}+\|\partial_x^s U\|_{L^\infty(\mathbb{T})}). \tag{2.67}$$

对于项 $|\iint(1+y)^{2\gamma}g_s g_1\partial_x^s U|$，我们得到

$$\left|\iint(1+y)^{2\gamma}g_s g_1\partial_x^s U\right|$$
$$\leq \|(1+y)^\gamma g_s\|_{L^2}\|(1+y)^\gamma g_1\|_{L^2}\|\partial_x^s U\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$$
$$\leq C_{s,\gamma,\sigma,\delta}\|\partial_x^s U\|_{L^\infty(\mathbb{T})}(\|w\|_{H_g^{s,\gamma}}+\|\partial_x^s U\|_{L^2(\mathbb{T})})\|w\|_{H_g^{s,\gamma}}. \tag{2.68}$$

对于最后一项，我们有

$$\left|\iint(1+y)^{2\gamma}g_s a\partial_x^j(u-U)\partial_x^{s-j+1}U\right|$$
$$\leq \|(1+y)^\gamma g_s\|_{L^2}\|(1+\gamma)a\|_{L^\infty}\|(1+y)^{\gamma-1}\partial_x^j(u-U)\|_{L^2}\|\partial_x^{s-j+1}U\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$$
$$\leq C_{s,\gamma,\sigma,\delta}\|\partial_x^{s+1}U\|_{L^\infty(\mathbb{T})}(\|w\|_{H_g^{s,\gamma}}+\|\partial_x^s U\|_{L^2(\mathbb{T})})\|w\|_{H_g^{s,\gamma}}. \tag{2.69}$$

因此，结合（2.61）-（2.67）和（2.54）可得（2.47）。 □

2.3 加权 H^s 估计 on w

现在，利用命题 H^s 2.3 和命题 w，我们可以推导出关于 2.3 和命题2.4的加权估计。

命题 2.5。 在命题 *2.3*的相同假设下，我们有如下估计

$$\|w\|^2_{H_g^{s,\gamma}}\leq\left\{\|w_0\|^2_{H_g^{s,\gamma}}+\int_0^t F(\tau)d\tau\right\}\times\left\{1-C(\frac{s}{2}-1)\left(\|w_0\|^2_{H_g^{s,\gamma}}+\int_0^t F(\tau)d\tau\right)^{\frac{s-2}{2}}t\right\}^{-\frac{2}{s-2}}, \tag{2.70}$$

条件是

$$1-C(\frac{s}{2}-1)\left(\|w_0\|^2_{H_g^{s,\gamma}}+\int_0^t F(\tau)d\tau\right)^{\frac{s-2}{2}},\quad t>0,$$

其中， C 是一个与 ϵ 和 t无关的常数。函数 $F(t)$表示为

$$F(t)=\mathcal{P}(\|\partial_x^{s+1}U\|_{L^\infty(\mathbb{T})})+C_s\sum_{l=0}^{\frac{s}{2}}\|\partial_t^l(\partial_x P-U)\|^2_{H^{s-2l}(\mathbb{T})}, \tag{2.71}$$

而 $\mathcal{P}(\cdot)$表示一个多项式。

证明。根据命题 2.3 和命题 2.4，由 $\|\cdot\|_{H^{s,\ g}{}^{\gamma}}$ 的定义可推得

$$\frac{d}{dt}\|w\|^2_{H_g^{s,\gamma}}\leq C_{s,\gamma,\sigma,\delta}\left(1+\|w\|_{H_g^{s,\gamma}}+\|\partial_x^s U\|_{L^\infty(\mathbb{T})}\right)\left(\|w\|_{H_g^{s,\gamma}}+\|\partial_x^{s+1}U\|_{L^\infty(\mathbb{T})}\right)\|w\|_{H_g^{s,\gamma}}$$
$$+C_{\gamma,\delta}\|\partial_x^s U\|^2_{L^\infty(\mathbb{T})}\|w\|^2_{H_g^{s,\gamma}}+C_{s,\gamma,\sigma,\delta}(1+\|w\|_{H_g^{s,\gamma}})^{s-2}\|w\|^2_{H_g^{s,\gamma}}$$

$$+ C_s \sum_{l=0}^{\frac{s}{2}} \|\partial_t^l(\partial_x P - U)\|^2_{H^{s-2l}(\mathbb{T})}$$

$$\leq C_{s,\gamma,\sigma,\delta}\|w\|^s_{H^{s,\gamma}_g} + \mathcal{P}(\|\partial_x^{s+1}U\|_{L^\infty(\mathbb{T})}) + C_s \sum_{l=0}^{\frac{s}{2}} \|\partial_t^l(\partial_x P - U)\|^2_{H^{s-2l}(\mathbb{T})}, \tag{2.72}$$

以及他因此，利用常微分方程的比较原理可得

$$\begin{aligned}\|w\|^2_{H^{s,\gamma}_g} \leq & \left\{\|w_0\|^2_{H^{s,\gamma}_g} + \int_0^t F(\tau)d\tau\right\} \\ & \times \left\{1 - C(\frac{s}{2}-1)\left(\|w_0\|^2_{H^{s,\gamma}_g} + \int_0^t F(\tau)d\tau\right)^{\frac{s-2}{2}} t\right\}^{-\frac{2}{s-2}}.\end{aligned} \tag{2.73}$$

由此证明命题 2.5。 □

2.4 低阶项上的加权 L^∞ 估计

在本小节中，我们将利用经典最大值原理估计 L^∞ 在 $D^\alpha w$ 上的 $|\alpha| \leq 2$ 。更具体地，我们将推导两部分结果：关于 I 的 L^∞估计：$= \sum$ $|(1+y)^{\gamma+\alpha_2}D^\alpha w|_{L^2}$，以及关于 $B_{(0,0)}$ 的$|\alpha|\leq 2$下界估计：$=(1+y)^\sigma w$。

引理 2.6. 在命题 *2.3*的相同假设下，有如下估计：对于任意 $s \geq 4$,

$$\|I(t)\|_{L^\infty(\mathbb{T}\times\mathbb{R}^+)} \leq \max\left\{\|I(0)\|_{L^\infty(\mathbb{T}\times\mathbb{R}^+)}, 6C^2W(t)^2\right\} e^{C(1+G(t))t}, \tag{2.74}$$

且对于任意 $s \geq 6$,

$$\|I(t)\|_{L^\infty(\mathbb{T}\times\mathbb{R}^+)} \leq \left\{\|I(0)\|_{L^\infty(\mathbb{T}\times\mathbb{R}^+)} + C(1+W(t))W(t)^2 t\right\} e^{C(1+G(t))t}. \tag{2.75}$$

此外，如果 $s \geq 4$，我们还有：

$$\min_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}^+}(1+y)^\sigma w(t) \geq \max\left\{1 - C\left(1+G(t)\right)te^{C(1+G(t))t}\right\} \cdot \min\left\{\min_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}^+}(1+y)^\sigma w_0 - CW(t)t\right\}, \tag{2.76}$$

其中，正常数 C 仅依赖于 s、γ、σ 和 δ。函数 W 和 G： $[0,T] \to \mathbb{R}^+$ 分别定义为

$$G(t) := \sup_{[0,t]}\|w(\tau)\|_{H^{s,\gamma}_g} + \sup_{[0,t]}\|\partial_x^s U(\tau)\|_{L^2(\mathbb{T})} \quad and \quad W(t) := \sup_{[0,t]}\|w(\tau)\|_{H^{s,\gamma}_g}. \tag{2.77}$$

证明。为简便起见，我们记作，

$$I := \sum_{|\alpha|\leq 2} |(1+y)^{\gamma+\alpha_2}D^\alpha w|_{L^2}$$

and

$$B_\alpha := (1+y)^{\gamma+\alpha_2}D^\alpha w,$$

那么 $B_{(0,0)}=(1+y)^{\gamma}w$。通过直接计算，我们得到

$$\left(\partial_t+u\partial_x+v\partial_y-\partial_y^2-\epsilon^2\partial_x^2+1\right)B_\alpha=\sum_{i=1}^{3}S_i, \tag{2.78}$$

其中

$$S_1=\left(\frac{\sigma+\alpha_2}{1+y}v+\frac{(\sigma+\alpha_2)(\sigma+\alpha_2-1)}{(1+y)^2}\right)B_\alpha,\quad S_2=-\frac{2(\sigma+\alpha_2)}{1+y}\partial_y B_\alpha,$$

and

$$S_3=-\sum_{0\le\beta<\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\left\{(1+y)^{\beta_2}(D^\beta uB_{\alpha-\beta+e_1}+\frac{D^\beta vB_{\alpha-\beta+e_2}}{1+y})\right\}.$$

将方程（2.78）乘以 $2B_\alpha$，得到

$$\begin{aligned}
&\left(\partial_t+u\partial_x+v\partial_y-\epsilon^2\partial_x^2-\partial_y^2+1\right)I\\
&=2\sum_{|\alpha|\le2}\left(|S_1B_\alpha|+|S_2B_\alpha|+|S_3B_\alpha|-\epsilon^2|\partial_xB_\alpha|^2-|\partial_yB_\alpha|^2\right)\\
&\le C_{s,\gamma,\sigma,\delta}(1+\|w(s)\|_{H_g^{s,\gamma}}+\|\partial_x^sU\|_{L^2(\mathbb{T})})I+C_\delta I+\sum_{|\alpha|\le2}|\partial_yB_\alpha|^2-2\epsilon^2\sum_{|\alpha|\le2}|\partial_xB_\alpha|^2\\
&\quad-2\sum_{|\alpha|\le2}|\partial_yB_\alpha|^2+2\|(1+y)^{\beta_2}(D^\beta u+\frac{D^\beta v}{1+y})\|_{L^\infty}\sum_{|\alpha|\le2}\left(\sum_{0\le\beta<\alpha}|B_{\alpha-\beta+e_1}+B_{\alpha-\beta+e_2}|\right)B_\alpha\\
&\le C_{s,\gamma,\sigma,\delta}(1+\|w(s)\|_{H_g^{s,\gamma}}+\|\partial_x^sU\|_{L^2(\mathbb{T})})I,
\end{aligned}\tag{2.79}$$

其中用到了引理 1.11和杨氏不等式。应用抛物方程的经典最大值原理，可得

$$\begin{aligned}
&\|I(t)\|_{L^\infty(T\times\mathbb{R}^+)}\\
&\le\max\left\{e^{C(1+G(t))t}\|I(0)\|_{L^\infty(T\times\mathbb{R}^+)},\max_{\tau\in[0,t]}\left(e^{C(1+G(t))(t-\tau)}\|I(\tau)|_{y=0}\|_{L^\infty(\mathbb{T})}\right)\right\}.
\end{aligned}\tag{2.80}$$

为了得到 $B_{(0,0)}$ 的下界估计，我们得到

$$\left(\partial_t+u\partial_x+(v+\frac{2\sigma}{1+y})\partial_y-\partial_y^2-\epsilon^2\partial_x^2+1\right)B_{(0,0)}=\left(\frac{\sigma}{1+y}v+\frac{\sigma(\sigma-1)}{(1+y)^2}\right)B_{(0,0)}.\tag{2.81}$$

应用（2.81）的经典最大值原理，可得

$$\begin{aligned}
&\min_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}^+}(1+y)^\sigma w(t)\\
&\ge\max\left\{1-C\left(1+G(t)\right)te^{C(1+G(t))t}\right\}\times\min\left\{\min_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}^+}(1+y)^\sigma w_0,\min_{[0,t]\times\mathbb{T}}w|_{y=0}\right\}.
\end{aligned}\tag{2.82}$$

接下来我们开始估计边界值。利用引理 1.10，可得

$$\begin{aligned}
\|I(\tau)|_{y=0}\|_{L^\infty(\mathbb{T})}&\le3C^2\sum_{|\alpha|\le2}\left(\|D^\alpha w\|_{L^2}^2+\|\partial_xD^\alpha w\|_{L^2}^2+\|\partial_y^2D^\alpha w\|_{L^2}^2\right)\\
&\le6C^2\|w\|_{H_g^{s,\gamma}}^2,
\end{aligned}\tag{2.83}$$

这与（2.80）结合，得到（2.74）。

根据（1.6）和边界条件$\partial_x^{\alpha_1}u=\partial_x^{\alpha_1}v=0$，可得

$$\partial_t D^\alpha w|_{y=0}=D^\alpha(\epsilon^2\partial_x^2+\partial_y^2 w-w-u\partial_x w-v\partial_y w)\big|_{y=0}. \tag{2.84}$$

当 $\alpha_2=0$ 和 $\alpha_1\le 2$ 时，

$$\partial_t D^\alpha w\big|_{y=0}=(\epsilon^2\partial_x^{\alpha_1+2}w+\partial_x^{\alpha_1}\partial_y^2 w-\partial_x^{\alpha_1}w)\big|_{y=0}. \tag{2.85}$$

当 $1\le\alpha_2\le 2$ 和 $\alpha_1=0$ 时，

$$\begin{aligned}\partial_t D^\alpha w\big|_{y=0}&=\left(\epsilon^2\partial_y^{\alpha_2}\partial_x^2 w+\partial_y^{\alpha_2}\partial_y^2 w-\partial_y^{\alpha_2}w-\partial_y^{\alpha_2}(u\partial_x w+v\partial_y w)\right)\big|_{y=0}\\&=\left(\epsilon^2\partial_y^{\alpha_2}\partial_x^2 w+\partial_y^{\alpha_2}\partial_y^2 w-\partial_y^{\alpha_2}w-\alpha_2 w\partial_x\partial_y^{\alpha_2-1}w\right)\big|_{y=0}.\end{aligned} \tag{2.86}$$

当 $\alpha_2=1$ 和 $\alpha_1=1$ 时，

$$\partial_t D^\alpha w\big|_{y=0}=(\epsilon^2\partial_y\partial_x^3 w+\partial_x\partial_y^3 w-\partial_x\partial_y w-\partial_x w\partial_x w-w\partial_x^2 w)|_{y=0}. \tag{2.87}$$

对于 $s\ge 6$，利用引理 1.11，可得

$$\begin{aligned}\|\partial_t I|_{y=0}\|_{L^\infty(\mathbb{T})}&\le C_{s,\gamma}\|D^\alpha w\partial_t D^\alpha w|_{y=0}\|_{L^\infty(\mathbb{T})}\\&\le C_{s,\gamma}\|w(\tau)\|_{H_g^{s,\gamma}}(\|w(\tau)\|_{H_g^{s,\gamma}}+\|w(\tau)\|_{H_g^{s,\gamma}}^2).\end{aligned} \tag{2.88}$$

因此，直接积分可得

$$\|I(t)|_{y=0}\|_{L^\infty(\mathbb{T})}\le\|I(0)|_{y=0}\|_{L^\infty(\mathbb{T})}+C_{s,\gamma}(1+W(t))W(t)^2 t, \tag{2.89}$$

结合式（2.80），可得式（2.75）。对于 $s\ge 4$，

$$\begin{aligned}\|\partial_t w|_{y=0}\|_{L^\infty(\mathbb{T})}&=\|(\partial_y^2 w-w)|_{y=0}\|_{L^\infty(\mathbb{T})}\\&\le CW(t).\end{aligned} \tag{2.90}$$

因此，直接估计可得

$$\min_{\mathbb{T}} w(t)|_{y=0}\ge\min_{\mathbb{T}} w_0|_{y=0}-CW(t)t, \tag{2.91}$$

结合式（2.82），可得式（2.76）。引理 2.6 的证明至此完成。 □

3 局部时间存在性与唯一性

3.1 局部时间存在性

在本小节中，我们重新使用符号 $(u^\epsilon,v^\epsilon,w^\epsilon)$ 而非第 2.1- 2.4 小节中的 (u,v,w)，以表示正则化系统 (2.1) 的解。为获得初边值问题的局部时间解

(1.1)-(1.3)，我们将通过取极限来构造普朗特方程 (1.1) 的解$\epsilon \to 0^+$。对于正则化普朗特方程 (2.1)，我们仅简要概述证明的五个步骤，更多细节见 [29]。

步骤 1. 根据 F 的定义、假设（1.7）以及正则化的伯努利定律，

$$\|F\|_{L^\infty} \le M < +\infty. \tag{3.1}$$

因此，对于任意 $\epsilon \in [0,1]$ 和任意 $t \in [0,T_1]$，我们得出一致估计

$$\|w^\epsilon\|_{H_g^{s,\gamma}} \le 4\|w_0^\epsilon\|_{H_g^{s,\gamma}}, \tag{3.2}$$

前提是 T_1 按（2.70）选取，使得

$$T_1 := \min\left\{\frac{3\|w_0\|^2_{H_g^{s,\gamma}}}{C_{s,\gamma,\sigma,\delta}M}, \frac{1-2^{2-s}}{2^{s-2}C_{s,\gamma,\sigma,\delta}\|w_0\|^{s-2}_{H_g^{s,\gamma}}}\right\}.$$

Step 2. 当 $s \ge 6$ 时，根据 Ω 的定义（2.77）以及 G，我们知道对于任意 $t \in [0,T_1\quad]$,

$$\Omega(t) \le 4\|w_0^\epsilon\|_{H_g^{s,\gamma}} \quad and \quad G(t) \le 4\|w_0^\epsilon\|_{H_g^{s,\gamma}} + M. \tag{3.3}$$

因此，若我们选择

$$T_2 := \min\left\{T_1, \frac{1}{64\delta^2 C_{s,\gamma}(1+4\|w_0\|_{H_g^{s,\gamma}})\|w_0\|^2_{H_g^{s,\gamma}}}, \frac{\ln 2}{C_{s,\gamma,\sigma,\delta}(1+4\|w_0\|_{H_g^{s,\gamma}}+M)}\right\},$$

那么利用不等式（2.75）以及关于初始数据的假设，

$$\sum_{|\alpha|\le 2} |(1+y)^{\sigma+\alpha_2} D^\alpha w|^2 \le \frac{1}{4\delta^2},$$

我们有上界

$$\|\sum_{|\alpha|\le 2} |(1+y)^{\sigma+\alpha_2} D^\alpha w^\epsilon(t)|^2\|_{L^\infty(\mathbb{T}\times\mathbb{R}^+)} \le \frac{1}{\delta^2} \tag{3.4}$$

对所有 $t \in [0,T_2]$。当 $s \ge 4$时，由初始数据的假设 $\|\omega_0\| \le C\delta^{-1}$，我们对所有 3.4) 得到相同的估计 $t \in [0,T_2]$。

步骤 3。我们取

$$T_3 := \min\left\{T_1, \frac{\delta}{8C_{s,\gamma}\|w_0\|_{H_g^{s,\gamma}}}, \frac{1}{6C_{s,\gamma,\sigma,\delta}N}, \frac{\ln 2}{C_{s,\gamma,\sigma,\delta}N}\right\},$$

其中 $N\colon = 1+4\|w_0\|_{H^{s,}{}_g{}^\gamma} + M$。然后利用 2.77) 和 3.3，我们推得一致估计；该估计对任意 $\epsilon \in [0,1]$以及任意 $t \in [0,T_3]$,

$$\min_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}^+} (1+y)^\sigma w^\epsilon(t) \ge \delta. \tag{3.5}$$

步骤 4. 总之，对于任意 $t \in [0,T]$，只要选取 T使其满足 $T = \min\{T_1,T_2,T_3\}$，上述一致估计（3.2）、（3.4）-（3.5）均成立。进一步利用近似等价关系（1.21），可得

$$\sup_{0\le t\le T}(\|w^\epsilon\|_{H^{s,\gamma}} + \|u^\epsilon - U\|_{H^{s,\gamma-1}}) \le C\left(4\|w_0\|_{H_g^{s,\gamma}} + \sup_{0\le t\le T}\|\partial_x^s U\|_{L^2}\right) < +\infty. \tag{3.6}$$

由方程（2.1）、系统（2.3）、（3.6）和引理 1.10，还可得 $\partial_t w^\epsilon$ 和 $\partial_t(u^\epsilon - U)$ 在 $L^\infty([0,T];\, H^{s-2,\,\gamma})$ 和 $L^\infty([0,T];\, H^{s-2,\,\gamma-1})$ 中分别一致有界。根据 Lions-Aubin 引理以及 $H^{s,\,\gamma}$ 在 $H^{s'}_{loc}$ 中的紧嵌入，取一个子列后，当 $\epsilon_k \to 0^+$ 时，我们得到

$$\begin{cases} \omega^{\epsilon_k} \overset{*}{\rightharpoonup} \omega, & \text{in} \quad L^\infty([0,T];H^{s,\gamma}), \\ \omega^{\epsilon_k} \to \omega, & \text{in} \quad C([0,T];H^{s'}_{loc}), \\ u^{\epsilon_k} - U \overset{*}{\rightharpoonup} u - U, & \text{in} \quad L^\infty([0,T];H^{s,\gamma-1}), \\ u^{\epsilon_k} \to u, & \text{in} \quad C([0,T];H^{s'}_{loc}), \end{cases} \tag{3.7}$$

对所有 $s' < s$，其中

$$\begin{cases} w = \partial_y u \in L^\infty([0,T];H^{s,\gamma}) \cap \bigcap_{s'<s} C([0,T];H^{s'}_{loc}), \\ u - U \in L^\infty([0,T];H^{s,\gamma-1}) \cap \bigcap_{s'<s} C([0,T];H^{s'}_{loc}). \end{cases} \tag{3.8}$$

步骤 5. 利用 $\partial_x u^{\epsilon_k}$ 的局部一致收敛性，我们还得到 v^{ϵ_k} 的逐点收敛：当 $\epsilon \to 0^+$ 时，

$$v^{\epsilon_k} = -\int_0^y \partial_x u^{\epsilon_k}\, dy \to -\int_0^y \partial_x u\, dy =: v. \tag{3.9}$$

因此，在初边值问题 $\epsilon_k \to 0^+$ （2.1）中取极限可得，极限（u，v）在经典意义下满足初边值问题（1.5），（1.3）。此外，我们得到（u，v，b）在经典意义下满足初边值问题（1.1）-（1.3）。至此，存在性的证明完成。

3.2 解的唯一性

在本小节中，我们将证明二维磁性 Prandtl 模型解的唯一性。记（$\bar{u} - \bar{v}$）=（u_1，v_1）-（u_2，v_2），$\bar{w} = w_1 - w_2$，$\bar{b}_1 = b_{11} - b_{12}$ 和 $a_2 = \frac{\partial_y w_2}{w_2}$。容易验证，$\bar{g} = \bar{w} - a_2\bar{u} = w_2\partial_y(\frac{\bar{u}}{w_2})$，且 $\bar{g}$ 上的演化方程如下

$$\begin{aligned} (\partial_t + u_1\partial_x + v_1\partial_y - \partial_y^2 + 1)\bar{g} = {} & (\partial_t + u_1\partial_x + v_1\partial_y - \partial_y^2 + 1)\bar{w} - a_2(\partial_t + u_1\partial_x + v_1\partial_y - \partial_y^2 + 1)\bar{u} \\ & - \bar{u}(\partial_t + u_1\partial_x + v_1\partial_y - \partial_y^2 + 1)a_2 - 2\partial_y a_2 \bar{w}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

接下来，我们分别计算方程（3.10）右端前三项的值。回顾涡量系统（1.6），可得

$$(\partial_t + u_i\partial_x + v_i\partial_y + 1)\partial_y w_i = \partial_y^3 w_i + \partial_x u_i \partial_y w_i - w_i \partial_x w_i. \tag{3.11}$$

然后，根据 a_i 的定义，我们得到

$$\begin{aligned} (\partial_t + u_i\partial_x + v_i\partial_y + 1)a_i &= \frac{(\partial_t + u_i\partial_x + v_i\partial_y + 1)\partial_y w_i}{w_i} - \frac{\partial_y w_i(\partial_t + u_i\partial_x + v_i\partial_y + 1)w_i}{w_i^2} \\ &= \frac{\partial_y^3 w_i}{w_i} + a_i\partial_x u_i - \partial_x w_i - a_i\frac{\partial_y^2 a_i}{w_i}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

结合这一事实

$$\frac{\partial_y^3 w_i}{w_i} - a_i\frac{\partial_y^2 a_i}{w_i} = \partial_y^2 a_i + 2a_i\partial_y a_i,$$

意味着

$$(\partial_t + u_i\partial_x + v_i\partial_y - \partial_y^2 + 1)a_i = a_i\partial_x u_i - \partial_x w_i + 2a_i\partial_y a_i. \tag{3.13}$$

此外，我们得出

$$(\partial_t + u_1\partial_x + v_1\partial_y - \partial_y^2 + 1)a_2 = a_2\partial_x u_2 - \partial_x w_2 + 2a_2\partial_y a_2 + (\bar{u}\partial_x + \bar{v}\partial_y)a_2. \tag{3.14}$$

对于$\partial_t + u_1\partial_x + v_1\partial_y - \partial_y^2 + 1)\bar{u}$和$\partial_t + u_1\partial_x + v_1\partial_y - \partial_y^2 + 1)\bar{w}$的估计，由方程（1.5）和（1.6），可推得

$$(\partial_t + u_1\partial_x + v_1\partial_y - \partial_y^2 + 1)\bar{u} = -\bar{u}\partial_x u_2 - \bar{v}\partial_y u_2, \tag{3.15}$$

and

$$(\partial_t + u_1\partial_x + v_1\partial_y - \partial_y^2 + 1)\bar{w} = -\bar{u}\partial_x w_2 - \bar{v}\partial_y w_2. \tag{3.16}$$

利用（3.10）和（3.14）-（3.16），可得

$$(\partial_t + u_1\partial_x + v_1\partial_y - \partial_y^2 + 1)\bar{g} = -2\bar{w}\partial_y a_2 - \bar{u}(\bar{u}\partial_x a_2 + \bar{v}\partial_y a_2 + 2a\partial_y a_2). \tag{3.17}$$

现在我们推导关于 $\bar{g}$的 L^2估计。对于任意 $t \in (0, T]$，乘以 $2\bar{g}$，然后在 $\mathbb{T}\times\mathbb{R}_+$上分部积分，可得

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|\bar{g}\|_{L^2}^2 + 2\|\bar{g}\|_{L^2}^2 + 2\|\partial_y\bar{g}\|_{L^2}^2 \\
&= \int_{\mathbb{T}} \bar{g}\partial_y\bar{g}|_{y=0}dx - 2\iint \bar{g}\bar{u}(\bar{u}\partial_x a_2 + \bar{v}\partial_y a_2 + 2a\partial_y a_2) - 4\iint \bar{g}\bar{w}\partial_y a_2 \\
&\quad - 2\iint \bar{g}(u_1\partial_x\bar{g} + v_1\partial_y\bar{g}).
\end{aligned} \tag{3.18}$$

我们需要逐项估计积分方程（3.18），并应用简单的迹定理和杨氏不等式,

$$\begin{aligned}
|\int_{\mathbb{T}} \bar{g}\partial_y\bar{g}|_{y=0}dx| &\le |\iint a_2|\bar{g}|^2dxdy| + |\iint \partial_y a_2|\bar{g}|^2dxdy| + 2|\iint a_2\bar{g}\partial_y\bar{g}dxdy| \\
&\le \frac{1}{2}\|\partial_y\bar{g}\|_{L^2}^2 + C_{\sigma,\delta}\|\bar{g}\|_{L^2}^2,
\end{aligned} \tag{3.19}$$

其中用到了 $\partial_y\bar{g}|_{y=0} = -a_2\bar{g}|_{y=0}(\partial_y\bar{w} = 0)$。我们断言 $\|\frac{\bar{u}}{1+y}\|_{L^2} \le C_{\sigma,\ \delta}\|\bar{g}\|_{L^2}$，因此由引理1.11,

$$\begin{aligned}
-2\iint \bar{g}\bar{u}(\bar{u}\partial_x a_2 + \bar{v}\partial_y a_2 + 2a\partial_y a_2) &\le 2\|(1+y)(\bar{u}\partial_x a_2 + \bar{v}\partial_y a_2 + 2a\partial_y a_2)\|_{L^\infty}\|\frac{\bar{u}}{1+y}\|_{L^2}\|\bar{g}\|_{L^2} \\
&\le C_{\gamma,\sigma,\delta}(1 + \|w_i\|_{H_g^{4,\gamma}} + \|\partial_x^4 U\|_{L^2(\mathbb{T})})\|\bar{g}\|_{L^2}^2.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

下面我们给出事实： $\|\frac{\bar{u}}{1+y}\|_{L^2}$可以由$\|\bar{g}\|_{L^2}$控制，因为 $\delta \le (1+y)^\delta w_2 \le \delta^{-1}$,

$$\|\frac{\bar{u}}{1+y}\|_{L^2} \le \delta^{-1}\|(1+y)^{-\sigma-1}\frac{\bar{u}}{w^2}\|_{L^2} \le C_{\sigma,\delta}\|(1+y)^{-\sigma}\partial_x(\frac{\bar{u}}{w_2})\|_{L_2} \le C_{\sigma,\delta}\|\bar{g}\|_{L^2}. \tag{3.21}$$

此外，我们还有

$$\|\bar{w}\|_{L^2} \leq \|\bar{g}\|_{L^2} + \delta^{-2}\|\frac{\bar{u}}{1+y}\|_{L^2} \leq C_{\sigma,\delta}\|\bar{g}\|_{L^2}, \tag{3.22}$$

and

$$-4\iint \bar{g}\bar{w}\partial_y a_2 \leq C_{\sigma,\delta}\|\bar{g}\|_{L^2}^2. \tag{3.23}$$

对于 (3.18) 中的最后一项，利用分部积分、边界条件 $(u_1,\ v_1)\big|_{y=0}$ 以及 $\partial_x u_1 + \partial_y v_1 = 0$，可得

$$-2\iint \bar{g}(u_1\partial_x\bar{g} + v_1\partial_y\bar{g}) = 0. \tag{3.24}$$

结合上述所有估计 (3.18)-(3.24)，可得

$$\frac{d}{dt}\|\bar{g}\|_{L^2}^2 \leq C_{\gamma,\sigma,\delta}(1 + \|w_i\|_{H_g^{4,\gamma}} + \|\partial_x^4 U\|_{L^2(\mathbb{T})})\|\bar{g}\|_{L^2}^2. \tag{3.25}$$

由格朗沃尔不等式可得

$$\|\bar{g}(t)\|_{L^2}^2 \leq \|\bar{g}(0)\|_{L^2}^2 e^{Ct}, \tag{3.26}$$

其中 $C = C_{\gamma,\ \sigma,\ \delta}(1 + \|w_i\|_{H^{4,\ }{}_{g}{}^{\gamma}} + \|\partial_x^4 U\|_{L^2(\mathbb{T})})$，这意味着 $\bar{g} = 0$，这是由于 $u_1\big|_{t=0} = u_2\big|_{t=0}$。由于 $w_2\partial_y(\frac{u_1-u_2}{w_2}) = \bar{g} = 0$，因此得到

$$u_1 - u_2 = qw_2 \tag{3.27}$$

对于某个函数 $q = q(t,x)$。现在利用 Oleinik 单调性假设 $w_2 > 0$ 和边界条件$u_1\big|_{y=0} = u_2\big|_{y=0} = 0$，可得 $q = 0$，进而得到 $u_1 = u_2$。此外，利用 $\partial_x u + \partial_y v = 0$ 和 $\partial_y u + \partial_y^2 b_1 = 0$，即可唯一确定 v_i 和 b_{1i}（即 $v_1 = v_2$ 和 $b_{11} = b_{12}$）。

致谢：本文部分得到国家自然科学基金（合同编号：12171082）、中央高校基本科研业务费（合同编号：2232022G-13、2232023G-13）以及云南省教育厅科学研究基金（合同编号：2023J0133）的资助。

参考文献

[1] R. Alexander、Y. Wang、C. Xu 和 T. Yang, 《索伯列夫空间中普朗特方程的适定性》, J. Amer. Math. Soc., 28(3)(2015), 745-784。[2] R.E. Caflisch 和 M. Sammartino, 《普朗特边界层方程的存在性与奇点》, Z. Angew. Math. Mech., 80(11-12)(2000), 733-744。[3] M. Cannone、M.C. Lombardo 和 M. Sammartino, 《普朗特方程的存在性与唯一性》, C. R. Acad. Sci. Paris, 332(3)(2001), 277-282。[4] D. Chen、Y. Wang 和 Z. Zhang, 《非单调剪切流附近线性化普朗特方程的适定性》, Ann. I. H. Poincaré-AN, 35(2018), 1119-1142。[5] D. Chen、Y. Wang 和 Z. Zhang, 《具有单调性的普朗特方程在索伯列夫空间中的适定性》, J. Differential Equations, 264(2018), 5870-5893。[6] W.F. Cope 和 D.R. Hartree, 《可压缩流中的层流边界层》, Philos. Trans. R. Soc. A., 241(827)(1951), 1-69。[7] W. E, 《边界层理论与纳维–斯托克斯方程的零黏度极限》, Acta Math. Sin., 16(2000), 207-218。[8] W. E 和 B. Engquist, 《非定常普朗特方程解的爆破》, Comm. Pure Appl. Math., 50(12)(1997), 1287-1293。[9] H. Dietert 和 D. Gérard-Varet, 《无需任何结构性假设的普朗特方程适定性》, Ann. Partial Differential Equations, (2019) 5:8, https://doi.org/10.1007/s40818-019-0063-6。[10] J. Gao、D. Huang 和 Z. Yao, 《二维非齐次不可压缩磁流体力学方程的边界层问题》, Anal. Partial Differential Equations, (2018), arXiv:1810.11258v2。[11] F. Gargano、M. Sammartino 和 V. Sciacca, 《普朗特方程的奇点形成》, Phys. D., 238(19)(2009), 1975-1991。[12]D. Gérard-Varet 和 E. Dormy, 《关于普朗特方程的适定性不良》, J. Amer. Math. Soc., 23(2)(2010), 591-609。[13] D. Gérard-Varet、Y. Maekawa 和 N. Masmoudi, 《二维纳维–斯托克斯方程普朗特展开的Gevrey稳定性》, (2016), arXiv: 1607.06434v1。[14] D. Gérard-Varet 和 N. Masmoudi, 《无需解析性或单调性的普朗特系统适定性》, Ann. Sci. Éc. Norm. Supr., 48(6)(2015), 1273-1325。[15] D. Gérard-Varet 和 T. Nguyen, 《关于普朗特方程适定性不良的评述》, Asymptot. Anal., 77(1-2)(2012), 71-88。[16] D. Gérard-Varet 和 M. Prestipino, 《磁流体力学中边界层模型的形式推导与稳定性分析》, Z. Angew. Math. Phys., 68(3)(2017), Art., 76。[17] S. Gong、Y. Guo 和 Y. Wang, 《二维可压缩纳维–斯托克斯方程的边界层问题》, Anal. Appl., 14(1)(2016), 1-37。[18] Y. Guo 和 T. Nguyen, 《普朗特边界层札记》, Comm. Pure Appl. Math., 64(10)(2011), 1416-1438。[19] Y. Guo 和 T. Nguyen, 《运动平面上定常纳维–斯托克斯流的普朗特边界层展开》, Ann. Partial Differential Equations, 3(10)(2017), DOI: 10.1007/s40818-016-0020-6。

[20] Q. Hou、C. Liu、Y. Wang 和 Z. Wang，趋化作用产生的黏性双曲型系统边界层的稳定性：一维情形，SIAM 数学分析期刊，50(3)(2018)，3058-3091。[21] Y. Huang、C. Liu 和 T. Yang，可压缩磁流体力学边界层的局部适定性，J. Differential Equations，266(2019)，2978-3013。[22] M. Ignatova 和 V. Vicol，普朗特边界层方程的近乎整体存在性，Arch. Ration. Mech. Anal.，220(2)(2016)，809-848。[23] I. Kukavica、N. Masmoudi、V. Vicol 和 T.K. Wong，关于具有多个单调区域的普朗特方程与静水欧拉方程的局部适定性，SIAM 数学分析期刊，46(2014)，3865-3890。[24] W. Li、D. Wu 和 C. Xu，普朗特方程的 Gevrey 类平滑效应，SIAM 数学分析期刊，48(3)(2016)，1672-1726。[25] W. Li 和 T. Yang，具有非退化临界点的普朗特方程在 Gevrey 空间中的适定性，欧洲数学会杂志，22(3)(2020)，717-775。[26] C. Liu、F. Xie 和 T. Yang，Sobolev 空间中无单调性的磁流体力学边界层，I. 适定性理论，偏微分方程分析，(2016)，arXiv 1611.05815v4。[27] C. Liu、F. Xie 和 T. Yang，Sobolev 空间中无单调性的磁流体力学边界层，II. 收敛理论，偏微分方程分析，(2018)，arXiv:1704.00523v4。[28] M.C. Lombardo、M. Cannone 和 M. Sammartino，边界层方程的适定性，SIAM 数学分析期刊，35(4)(2003)，987-1004。[29] N. Masmoudi 和 T. K. Wong，通过能量方法得到普朗特方程解的局部时间存在性与唯一性，Comm. Pure Appl. Math.，68(10)(2015)，1683-1741。[30] M. Medve ˇd一种分析 Henry 型积分不等式及其 Bihari 型形式的新方法，数学分析与应用期刊，214(2)(1997)，349-366。[31] O.A. Oleinik 和 V.N. Samokhin，《边界层理论中的数学模型》，应用数学与数学计算，第15卷，Chapman and Hall/CRC，博卡拉顿，佛罗里达州，1999年。[32] Y. Qin，《积分不等式与离散不等式及其应用》，第I卷：非线性不等式；第II卷：非线性不等式，Springer International Publishing AG，Birkhauser，2016年。[33] Y. Qin，《解析不等式及其在偏微分方程中的应用》，Springer International Publishing，2017年。[34] Y. Qin 和 X.Dong，Sobolev 空间中无单调性且具有下界的二维混合普朗特方程解的局部适定性，待提交。[35] F. Xie 和 Y. Tong，普朗特–哈特曼区域内二维磁流体力学边界层的整体时间稳定性，SIAM 数学分析期刊，50(6)(2018)，5749-5760。[36] F. Xie 和 T. Yang，一般剪切流经解析扰动后的磁流体力学边界层方程解的寿命，数学应用学报（英文版），35(1)(2019)，209-229。[37] Z. Xin 和 L. Zhang，关于普朗特系统解的整体存在性，数学进展，181(2004)，88-133。[38] C. Xu 和 X. Zhang，Sobolev 空间中普朗特方程的长时间适定性，J. Differential Equations，263(2017)，8749-8803。[39] P. Zhang、Z. Zhang，小解析初值下普朗特系统的长时间适定性，泛函分析期刊，270(7)(2016)，2591-2615。