arXiv:2304.00533v2 [math.AG] 8 Apr 2024

极性单形簇 II

JOACHIM JELISIEJEW、KRISTIAN RANESTAD 和 FRANK-OLAF SCHREYER

Abstract. 我们讨论具有希尔伯特函数 $VPS(Q,\ H$且与一个满秩二次型反极的理想空间$H = (1,\ n,\ n,\ \ldots$。我们证明，其饱和理想的不可约分支与戈伦斯坦代数轨迹以及边界消去理论中的 Slip 分支密切相关。我们还指出[RS13] 中的一处重要错误，并给出必要的更正。

1. Introduction

对于固定的、定义在 n 个变量上的非退化二次曲面 q，极分单纯形是由点组成的一个元组$[\ell_1]$，.....，$[\ell_n] \in \mathbb{P}^{n-1}$，其中 ℓ_i 满足 $q = \ell_1^2 + \ldots + \ell_n^2$。所有极分单纯形构成的轨迹是群 $SO(q) \simeq SO_n$的一个主齐次空间。简单来说，极分单纯形簇是这一轨迹的紧化。如下文所述，实际上存在不止一种可能的紧化，而选择正确的紧化颇为微妙。这个代数簇之所以重要，主要有两个原因。首先，它是幂和簇中一个“最简单”的例子 [RS00],；这类簇可用作特殊射影簇的例子，也适用于张量方面的应用[HMV20, GRV18, BM18, RV17, CCO17, BB21]。其次，如下文所述，它可作为研究点的希尔伯特概形中戈伦斯坦轨迹的一种手段：它的维数较小，这对 [Ilt12] 等计算很重要，同时它又包含次数为 n的每个抽象戈伦斯坦子概形。

设 $S = k[x_1, \ldots, x_n]$ 是一个多项式环，我们将其视为 $\mathrm{P}^{n-1} = \mathrm{P}(S_1^*)$ 的齐次坐标环。固定一个数 d 和一个非零的 $f \in S_d^*$，则 $F = \{f = 0\} \subset \check{\mathrm{P}}^{n-1}$。有限子概形 $\Gamma \subseteq \mathrm{P}^{n-1}$ 与 F 对偶，当且仅当 $[f]$ 属于 Γ 在 $\mathrm{P}(S_d^*)$ 中的 d 重嵌入的张成空间。对偶性也可以用代数方式表述，见 §2：要求 $I_\Gamma \subseteq f^\perp$，即 S 中通过微分湮灭 f 的形式理想。此条件也可以推广到一般的理想；理想 $I \subset S$ 与 F 对偶，当且仅当 $I \subseteq f^\perp$。

考虑 $d = 2$ 和 $F = Q = \{q = 0\}$ 均为满秩二次型的特殊情形。令 $\mathrm{VPS}(Q, n) \subseteq \mathrm{Hilb}_n(\mathrm{P}^{n-1})$ 表示满足 $I_\Gamma \subseteq q^\perp$ 的 $\Gamma \subseteq \mathrm{P}^{n-1}$ 中次数为 n 的零维概形轨迹的闭包。结果 [RS13, Corollary 2.2] 和 [SSS22, Proposition 6.5] 均指出，每个 $\Gamma \in \mathrm{VPS}(Q, n)$ 都与 Q 反极。如下例所示，事实并非如此。

Date：2024年4月9日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 14J45,14M。

Key words and phrases. 湮灭理想、Fano n重簇、二次曲面、极分单纯形、异次元关系。JJ 获得国家科学中心资助，项目编号为 2020/39/D/ST1/00132。本研究部分得到主题研究计划“张量：几何、复杂性与量子纠缠”的支持；该计划由华沙大学卓越倡议——研究型大学项目及西蒙斯基金会授予波兰科学院数学研究所的第 663281 号奖项（2021—2023 年）提供支持。

例 1.1. 令 $n = 4$，令 $q = y_1y_4 + y_2y_3$，其中 y_i 是 x_i 的对偶，并考虑理想

$$I = (x_3x_1 - x_2^2,\, x_2x_3 - x_1x_4,\, x_2x_4,\, x_3x_4,\, x_4^2,\, x_3^2).$$

这个理想是饱和的，其希尔伯特函数为 $H_{S/I}(i) = 4$，对每个 $i \geq 1$ 均成立，因此$I = I_\Gamma$ 是 $\mathbb{P}^3$ 上一个次数为 4 的有限子概形 $\Gamma \subseteq$；特别地，$[\Gamma] \in \mathrm{VPS}(Q, 4)$。现在考虑 $\mathbb{P}^3$ 上与按 (0, 1, 0, 1) 分次相对应的一个 k^*-作用。二次曲面 Q 是该作用的半不变量，因此对每个 $\lambda \in k^*$，子概形$\Gamma_\lambda := \lambda \cdot \Gamma$ 对应于 $\mathrm{VPS}(Q, 4)$ 中的一个点 $[\Gamma_\lambda]$，其理想由下式给出

$$I(\Gamma_\lambda) = (x_3x_1 - \lambda^2x_2^2,\, \lambda(x_2x_3 - x_1x_4),\, \lambda^2x_2x_4,\, \lambda x_3x_4,\, \lambda^2x_4^2,\, x_3^2).$$

按次数取这些理想在 $\lambda \to 0$ 处的极限，得到理想

$$I_{\lim} := (x_2^4,\, x_4^2,\, x_2x_4,\, x_3x_4,\, x_1^2x_4,\, x_2x_3 - x_1x_4,\, x_3^2,\, x_1x_3),$$

其饱和化为 $I_{\lim}^{\mathrm{sat}} = (x_3, x_4, x_2^4)$。令 $\Gamma_0 = V(I_{\lim}^{\mathrm{sat}})$，则 Γ_0 是 $\lambda \to 0$ 时 Γ_λ 的一个极限，因此 $[\Gamma_0] \in \mathrm{VPS}(Q, n)$；而 $I_{\Gamma_0} = I_{\lim}^{\mathrm{sat}}$ 不包含于 $q^\perp$，所以 Γ_0 不与 Q 反极。

该例特别表明，[RS13] 中的若干主要结果按原文表述是错误的。本文旨在探讨哪些内容可以挽救以及如何挽救；此外，本文还将展示$\mathrm{VPS}(Q, n)$与戈伦斯坦代数模空间之间出人意料的联系，这一点本身也很有意义。

Weronika Buczyńska和Jaros lawBuczyński将多重分次希尔伯特概形引入对偶性研究，并指出，即使考虑VPS [BB21，§7。6]。

多重分次希尔伯特概形Hilb^H由[HS04], 定义，用于参数化具有给定希尔伯特函数 H的齐次理想。对于固定形式 f，条件$I \subset f^\perp$ 对于理想 I 而言是一个闭条件。上文例1.1 表明，对偶性条件 $I_\Gamma \subset f^\perp$ 在通常的希尔伯特概形中并非闭。因此，在多重分次希尔伯特概形中开展研究更为自然。

我们考虑希尔伯特函数 $H := (1, n, n, \ldots)$，并对满秩二次曲面Q定义

$$\mathrm{VPS}(Q, H) = \{I \in \mathrm{Hilb}^H \mid I \subset q^\perp\} \subset \mathrm{Hilb}^H.$$

这是 Hilb^H 的一个闭子概形。令 $\mathrm{VPS}^H(^{\mathrm{good}},Q)$ HVPS($\subseteq$,Q) 表示饱和理想的轨迹。根据 HJM22，定理 2. [，该轨迹是开集。令 VPS6]($^{\mathrm{sbl}}$,Q) 为其闭包，因此 VPS H($^{\mathrm{sbl}}$,Q) 是 VPS(H,Q) 的若干不可约分支之并。令 VPS H($^{\mathrm{uns}}$,Q) HVPS($=$,Q) H VPS $\setminus$ ($^{\mathrm{good}}$,Q)，并赋予其约化概形结构。类比于希尔伯特概形中可平滑化概形的轨迹，我们称 VPS H($^{\mathrm{sbl}}$,Q) 为 SaturaBLe 理想的轨迹；这与 HJM[的记号一致，这得益于推论 3.9。交集 VPS22] ($^{\mathrm{sbl}}$,Q) HVPS $\cap$ ($^{\mathrm{uns}}$,Q) 是未饱和极限理想的轨迹：即为反极的未饱和理想，且是饱和反极理想的极限。

将每个理想 $I \in \mathrm{VPS}(Q, H)$ 与该理想中的二次曲面空间 I_2 相对应，定义了一个遗忘映射

$$\pi_G : \mathrm{VPS}(Q, H) \to \mathbb{G}\left(\binom{n}{2}, q_2^\perp\right),$$

映射到 $q_2^\perp$ 中 $\binom{n}{2}$ 维子空间构成的格拉斯曼流形。我们记

$$\begin{aligned}\mathrm{VPS}(Q,H)_G :=&\pi_G(\mathrm{VPS}(Q,H))\\ \mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q,H)_G :=&\pi_G(\mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q,H))\\ \mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)_G :=&\pi_G(\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H))\\ \mathrm{VPS}^{\mathrm{uns}}(Q,H)_G :=&\pi_G(\mathrm{VPS}^{\mathrm{uns}}(Q,H)).\end{aligned}$$

本文将研究这些轨迹。映射 π_G 限制到 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q,H)$ 后是一个同构（见命题 4.5），而限制到其他轨迹时，一般而言则不是。

概形 $\mathrm{VPS}(Q,H)$ 一般不同于 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)$，$\mathrm{VPS}(Q,H)_G$ 与 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)_G$ 的情况也类似。对于 $n \leq 3$，概形 $\mathrm{VPS}(Q,H)$ 和 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q,H)$ 重合，并且同构于 $\mathrm{VPS}(Q,H)_G$，见命题 3.2。一旦 $n \geq 4$，$\mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q,H)$ 在 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)$ 中的补集，即交集 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)\cap\mathrm{VPS}^{\mathrm{uns}}(Q,H)$，以及 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)$ 在 $\mathrm{VPS}(Q,H)$ 中的补集，均非空。对于 $n=4$，交集 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)\cap\mathrm{VPS}^{\mathrm{uns}}(Q,H)$ 的理想与逆二次曲面 $Q^{-1}=\{q^{-1}=0\}$ 的几何存在一种出人意料而优美的联系。后者定义了共线变换 $q^{-1}\colon S_1^*\to S_1$，它是由 $q\colon S_1\to S_1^*$ 定义的对称共线变换的逆变换。

例 1.2. 对于 $n=4$，这些轨迹汇总于图 1 中。在此情形下，$\mathrm{VPS}^{\mathrm{uns}}(Q,H)$ 由理想 $I_\Gamma\cap q^\perp$ 给出，其中 $\Gamma\subseteq L$ 是长度为4的有限概形，而 L 是 $\mathbf{P}^3$ 中的一条直线。交集 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)\cap\mathrm{VPS}^{\mathrm{uns}}(Q,H)$ 的维数为 5，由理想 $I_\Gamma\cap q^\perp$ 组成，其中 $\Gamma\subseteq L$，且 L 是二次曲面 Q^{-1} 中的一条直线，该二次曲面与 Q 互逆，见第 3 节。

对于 $n\geq 6$ 轨迹 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q,H)\subseteq\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)$ 是奇异的（因为存在次数为 n 的受阻戈伦斯坦概形，见下文定理 1.4）。对于 $n\leq 3$，这两个轨迹重合，且同构于 $\mathrm{VPS}(Q,H)_G$，根据命题 3.2 和 [Muk92，命题 10]。我们证明：

定理 1.3（推论 4.3，推论 4.10）。对于 $n=4$，5 个 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)$ 和 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)_G$ 都是光滑的。

存在一个从多重分次希尔伯特概形到希尔伯特概形的映射。对于 $n\leq 13$，它将概形 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)$ 映射到幂和簇 $\mathrm{VSP}(Q,n)$。对于 $n\geq 4$，我们不知道 $\mathrm{VSP}(Q,n)$ 是否光滑；如上所述，希尔伯特概形紧化似乎不如另外两者有趣：反极性在希尔伯特概形中不是闭性质，因此 $\mathrm{VSP}(Q,n)$ 没有函子性解释，更多讨论见注记 4.4。

1.1. 与戈伦斯坦轨迹的联系。有限概形的饱和湮灭理想是局部 Gorenstein [BB14，命题2的证明.2]。令 $\mathrm{Hilb}_n^{\mathrm{good}}(\mathbf{P}^{n-1})\subset\mathrm{Hilb}_n(\mathbf{P}^{n-1})$ 表示满足 $h^1(\mathcal{I}_\Gamma(1))=0$ 的 $\Gamma\subseteq\mathbf{P}^{n-1}$ 的轨迹。饱和理想的轨迹 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q,H)\subset\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)$ 与 $\mathrm{Hilb}_n^{\text{good Gor}^*}(\mathbf{P}^{n-1})$ 中局部 Gorenstein Γ 的轨迹密切相关，后者是 $\mathrm{Hilb}_n^{\mathrm{good}}(\mathbf{P}^{n-1})$ 的子轨迹。

定理 1.4 (命题2.5)。自然映射

$$\mathrm{GL}_n\times\mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q,H)\to\mathrm{Hilb}_n^{\mathrm{good}}(\mathbf{P}^{n-1});\quad (g,I)\mapsto g\cdot I$$

是光滑的，其像为 $\mathrm{Hilb}_n^{\text{good Gor}^*}(\mathbf{P}^{n-1})$。特别地，在 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q,H)$ 和 $\mathrm{Hilb}_n^{\text{good Gor}^*}(\mathbf{P}^{n-1})$ 上遇到的奇点类型相同。

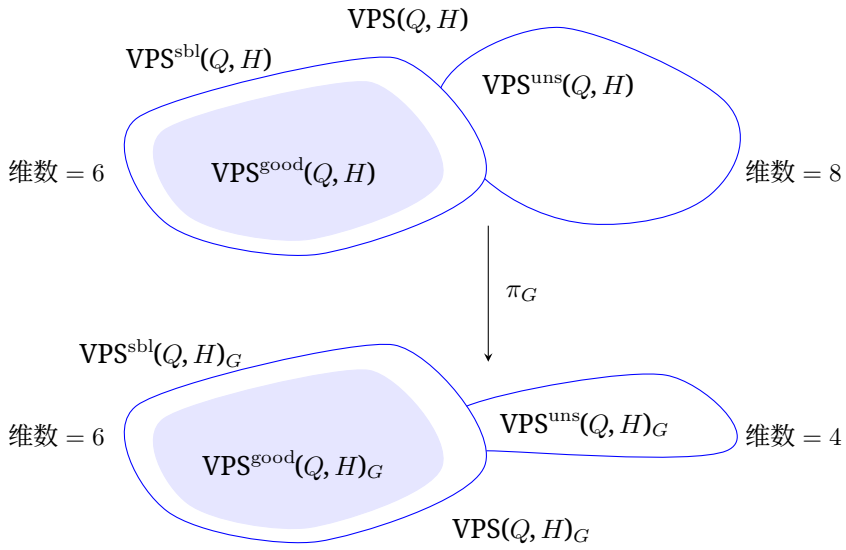


FIGURE 1. $n = 4$的模空间。

定理给出的桥梁使我们能够应用两方面的结果。首先，我们改进并精确回答了关于 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q,\ H)$ 何时可约的问题；该问题由 [RS13，定理 1 提出。3]。

推论1.5 (定理 2.7)。 轨迹 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q,\ H)$ 仅当$n \leq 13$时不可约。

其次，我们利用结果 [RS13，推论5。16] 来获得戈伦斯坦轨迹本身的性质。

推论1.6. 对于每个 $n \leq 6$，每个 $\mathrm{Hilb}_n(\mathbf{P}^k)$ 的戈伦斯坦轨迹都是约化的。

证明。 点 $[Z \subseteq \mathbf{P}^k] \in \mathrm{Hilb}_n(\mathbf{P}^k)$ 的约化性仅取决于底层的 Z，因此 $\mathrm{Hilb}_n(\mathbf{P}^k)$ 是约化的，当且仅当 $\mathrm{Hilb}_n^{\mathrm{good}}(\mathbf{P}^{n-1})$ 是约化的。由定理 1.4 可知，这当且仅当 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q,\ H)$ 是约化的。后者的约化性已由 [RS13，推论 5.12 和 5.16] 中证明。 □

定理 1.4 也推广到整个 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q, H)$。Hilb 中饱和理想的轨迹^H 是开集，其闭包称为 Sat^H。该闭包是 Hilb^H 的若干不可约分支之并；当 $n \leq 13$时，它是一个不可约分支，称为 Slip^H。由于其在边界反极性中的应用，这一轨迹近期受到广泛关注 [BB21， JM22]。定理推广如下。

定理1.7(命题3.8，推论3.9，推论4.3)。自然映射

$$\mathrm{GL}_n \times \mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q, H) \to \overline{\mathrm{Sat}}^H; \quad (g, I) \mapsto g \cdot I$$

是光滑的。对于 $n \leq 5$，$\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q, H)$ 是光滑的，而分量 Slip^H 沿此映射的像是光滑的。

分量 Slip^H 并非在所有点都光滑，即使对于 $n = 4$ 也不是：$\mathbb{P}^3$ 中一个点的二阶邻域的饱和理想会在 Slip^H 上产生一个奇异点。

1.2. 补救 [RS13]。 本节报告论文 [RS13] 中结果的现状。

我们的记号与 [RS13]，不同，而是采用 [RS00] 的记号。论文 [RS13] 将 $\mathrm{VPS}(Q,n)$ 用于指称希尔伯特概形的一个子概形，即极性单形簇；我们则将幂和簇记作 $\mathrm{VSP}(Q,n)$。论文 [RS13] 将 $\mathrm{VAPS}(Q,n)$ 用于指称概形 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)$ 在希尔伯特概形中的像。

关键错误出现在 [RS13 的推论 2 的证明中。2] 该证明错误地声称

$$\mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q,n) = \mathrm{VPS}(Q,n),$$

而我们所拥有的只是一个开浸入

$$\mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q,n) \subseteq \mathrm{VPS}(Q,n).$$

因此，我们讨论依赖于这一错误的论述。

1.2.1. 引言。[RS13，定理 1.1] 的第二部分断言：对于 $n \geq 6$，代数簇 $\mathrm{VSP}(Q,n)$ 是奇异的、有理的，且维数为 $\binom{n}{2}$。这也是成立的（在可能约化之后），证明相同。定理 1.1 的第一部分声称，对于 $2 \leq n \leq 5$，代数簇 $\mathrm{VSP}(Q,n)$ 还具有 Picard 秩 1，是光滑的，并且是指标为 2 的法诺代数簇。对于 $n = 2,3$，我们有 $\mathrm{VPS}(Q,H) = \mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)$，且 π_G 是到像 $\mathrm{VPS}(Q,H)_G$ 的同构。特别地，两者都同构于 $\mathrm{VSP}(Q,n)$，而 [RS13] 的论证是正确的。对于 $n = 4,5$，我们可以对 $\mathrm{VPS}(Q,H)$ 和 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)$ 及其在 π_G 下的像提出同样的问题。在这两种情形中，根据定理 1.3，$\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)$ 是光滑的，并且存在一个到光滑的 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)_G$ 的双有理态射，该态射收缩边界除子 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H) \setminus \mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q,H)$（参见注 3.11），因此 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)$ 的 Picard 秩至少为二。对于 $\mathrm{VSP}(Q,n)$，我们不知道它是否光滑；但若它光滑，见注 4.4，其 Picard 秩也至少为二。然而，当以格拉斯曼子概形 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)_G$ 替代 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)$ 时，我们也挽回了 [RS13，定理 1.1] 的第一部分。

挽救的定理 1.1（推论4.10）。 对于 $2 \leq n \leq 5$ 格拉斯曼子概形 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)_G$ 是一个光滑有理的 $\binom{n}{2}$维 Fano簇，指标为 2，皮卡数为1。

定理 [RS13，定理 1。2] 涉及 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)_G$，即格拉斯曼子概形。我们使用更精细的超额交方法，得到了该定理关于 $n = 4$的结论，并且次数正确。关于$n = 5$ 的情形仍未解决。记号方面，高斯映射请参见 [RS13]；本文不会用到它。

挽救的定理 1.2（命题 4.15）。 代数簇 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)_G$ 包含高斯映射的像 TQ^{-1}。当 $n = 4$ Pl ¨ucker 线丛生成 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)_G$ 的皮卡群时，次数为 362。

定理 [RS13，定理 1。3] 涉及 VPS 的线性张成$^{\mathrm{sbl}}(Q,H)_G$，且结论错误。未饱和极限的像 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{uns}}(Q,H)_G \cap \mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)_G$ 的

理想不包含在 TQ^{-1}（同上）的张成中。因此，$\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)_G$ 是否为格拉斯曼流形的线性截面，仍是一个未解决问题。对于 $n=3$，这一点成立；而对于 $n=4$，我们给出了一个计算证明。

最后，[RS13，命题 1。4] 在同一证明下仍然成立。

1.2.2. 第 2、3、4、5 节。这些章节的结果都是局部性的，证明不会因紧化方面的错误而受到影响，只需将范围限制在线性正规概形的轨迹上即可。也就是说，只要将 $\mathrm{VAPS}(Q,n)$ 和 $\mathrm{VPS}(Q,n)$ 替换为 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q,H)$ 及其可平滑分支，据我们所知，这些陈述都是正确的，唯独推论 2.2 的最后一部分除外。

1.2.3. 第 6 节。定理 [RS13，定理 6。3] 涉及格拉斯曼子概形 VPS 的次数 $\mathrm{sbl}(Q,H)_G$。VPS 中存在未饱和极限理想 $\mathrm{sbl}(Q,H)$ 意味着该定理的结论是错误的；相反，次数公式是使用超额交计算 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)_G$ 次数时的一项贡献。我们在 $n=4$ 的情形下证明这一点，见命题 4.15 和注记 4.16。

1.3. 说明。在第 2 节中，我们证明饱和湮灭理想的轨迹 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q,H)$ 不可约，当且仅当二次曲面 Q 的秩至多为 13。在接下来的第 3 节中，我们讨论边界 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)\setminus\mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q,H)$ 中未饱和的理想，并精确刻画 $n=4\leqslant 5$ 的情形。在第 4 节中，我们给出关于多重分次希尔伯特概形紧化 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)$ 和格拉斯曼紧化 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)_G$ of $\mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q,H)$ 整体性质的结果。附录 A 和 B 包含我们在计算论证中使用的 Macaulay2 [GS]，中的计算机代码[Sch23]，以及关于 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)_G$ for $n=4$ 的一项结果；对此我们只给出计算证明。

1.4. 记号。令 k 为一个零特征域。我们的计算（见附录 A 和 B）是在 $\mathbb{Q}$上进行的。令

$$S=k[x_1,\dots,x_n]\quad\text{and}\quad T=k[y_1,\dots,y_n]$$

是多项式环。我们将 x_1、……、x_n 和 y_1、……、y_n 视为对偶空间 S_1 和 T_1的对偶基。微分定义了双线性配对 $S_e\times T_d\to T_{d-e}$、$d\geq e$，由此诱导出同构 $S_d\to T_d^*$，对任意 $d\geq 0$均成立。从这个意义上说，我们称 T 与 S互为对偶。令 S 为 $\mathbf{P}^{n-1}$的坐标环，T 为对偶空间 $\check{\mathbf{P}}^{n-1}$的坐标环。因此，我们可以将 $\mathbf{P}^{n-1}=\mathbf{P}(T_1)$ 视为 T_1中一维子空间构成的射影空间。

对于齐次多项式 $f\in T_d\cong S_d^*$，令 $f^\perp\subset S$ 表示其湮灭理想。对于子概形 $\Gamma\subset\mathbf{P}^{n-1}$，令 $I_\Gamma\subset S$ 表示其齐次理想；注意该理想是饱和的。若理想 $I\subseteq S$湮灭 F（$=\{f=0\}$，即 $I\subseteq f^\perp$，则称其为反极于 F（$=\{f=0\}$。若零维 $\Gamma\subset\mathbf{P}^{n-1}$ 的齐次理想是反极的，也就是说，若 $I_\Gamma\subset f^\perp$，则称其反极于 F。我们通常用 q表示 T 中的二次型；它定义了二次曲面 $Q=\{q=0\}\subset\check{\mathbf{P}}^{n-1}$ 以及一个共线变换：$q\colon S_1\to T_1$。当 q 非退化时，令 $q^{-1}\in S_2$ 表示定义逆共线变换 $q^{-1}\colon T_1\to S_1$的二次型，并令 $Q^{-1}=\{q^{-1}=0\}\subset\mathbf{P}^{n-1}$ 表示相应的二次曲面。

我们还将 $q\in T_2$ 与其对应的映射 $q\colon S_2\to k$等同。若 $q\in T_2$ 是满秩二次曲面，则 $q^\perp\subset S$ 由二次齐次元素生成，且 $q_2^\perp=\ker(q\colon S_2\to k)$，因此，理想 I 与 Q 反极，当且仅当 $I_1=0$ 且 $I_2\subset\ker(q\colon S_2\to k)$。A

如上所述，子概形 Γ 与 Q 反极，当且仅当其齐次理想 I_Γ 是反极的。

致谢。感谢 Tomasz Ma´ndziuk 和 Emanuele Ventura 指出论文早期版本中的一个问题，也感谢匿名审稿人对行文表达提出的宝贵意见。

2. Good points of VPS

以下结果本质上已见于 [RS13], ，但鉴于其重要性，我们仍给出完整证明。

命题 2.1 ([RS13，引理 2.6])。 设 $\Gamma \subset \mathbf{P}^{n-1}$ 的长度为 n。以下条件等价

(1) $\Gamma \subset \mathrm{P}^{n-1}$ 是（局部）戈伦斯坦且线性正规；(2) 存在一个满秩二次型 Q ，使得 Γ与 Q反极。

证明。令 $A = H^0(\mathcal{O}_\Gamma)$。假设 (1) 成立，因此对偶化 A-模 $\omega_A = \mathrm{Hom}_A(A, k)$ 同构于 A。令 $\varphi \in \omega_A$ 为其生成元，则由 a_1、a_2 映至 a_1a_2 的配对$A \times A \to k \mapsto \varphi$ 是对称且完美的。由于 $\Gamma \subset \mathrm{P}^{n-1}$是线性正规的，线性形式 $S_1 \to H^0(\mathcal{O}_\Gamma(1)) \simeq A$ 的限制是一个同构，因此我们得到一个对称的完美配对 $S_1 \times S_1 \to k$。令 $q \in T_2$为相应的二次曲面。它具有满秩。此外，它由以下交换图得到

$$\begin{array}{ccccccc} S_1 \times S_1 & \longrightarrow & H^0(\mathcal{O}_\Gamma(1)) \times H^0(\mathcal{O}_\Gamma(1)) & \xrightarrow{\simeq} & A \times A & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ (I_\Gamma)_2 & \hookrightarrow & S_2 & \longrightarrow & H^0(\mathcal{O}_\Gamma(2)) & \xrightarrow{\simeq} & A \xrightarrow{\varphi} k \end{array}$$

因此 $q^\perp \supset (I_\Gamma)_2$, hence Γ 与 Q 反极。

假设(2)。考虑上述图，其中 $\varphi\colon\ A \to k$ 是由 $q\colon\ S_2 \to k$诱导的泛函。由于 q 具有满秩，自然映射 $S_1 \to A$ 必为单射，因此通过比较维数可知它是同构。这表明 $A \times A \to k$在图中是一个完美配对，因此 ω_A 同构于 A，进而 Γ 是局部 Gorenstein 的。□

回顾一下，Hilb^H 是参数化具有希尔伯特函数 $H = (1, n, n, n, \ldots)$ 的理想的多重分次希尔伯特概形。记 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q, H) \subseteq \mathrm{Hilb}^H$为与 Q 反极且饱和的理想所构成的轨迹。回顾一下，我们有一个自然映射 $\mathrm{Hilb}^H \to \mathrm{Hilb}_n(\mathrm{P}^{n-1})$。记 $\mathrm{Hilb}_n^{\mathrm{good}}(\mathrm{P}^{n-1}) \subseteq \mathrm{Hilb}_n(\mathrm{P}^{n-1})$ 为 Γ 的开轨迹，其中 $H^1(I_\Gamma(1)) = 0$；等价地说，这些是张成 P^{n-1} 的子概形，或者换句话说，是具有 $H_{S/I_\Gamma} = H$ 的子概形。

命题 2.2。轨迹 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q, H)$ 在 Hilb^H 中是局部闭的。在映射 $\mathrm{Hilb}^H \to \mathrm{Hilb}_n(\mathrm{P}^{n-1})$ 下，它同构映射到 $\mathrm{Hilb}_n^{\mathrm{good}}(\mathrm{P}^{n-1})$ 中极关联子概形的轨迹上。

证明。 令 $\mathrm{Hilb}^{H,\mathrm{sat}}$ 中H 表示饱和理想的子集，这是一个开子集 [JM22，定理 2.6] 因此带有自然的概形结构。条件 $I \subseteq q^\perp$ 在 Hilb^H 中是闭的，因此 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q, H)$ 在 $\mathrm{Hilb}^{H,\mathrm{sat}}$中是闭的。根据 [JM22，定理 3.9] 子集 $\mathrm{Hilb}^{H,\mathrm{sat}}$ 同构映射到

在自然映射 $\mathrm{Hilb}^H \to \mathrm{Hilb}_n(\mathbb{P}^{n-1})$ 下映到 $\mathrm{Hilb}_n^{\mathrm{good}}(\mathbb{P}^{n-1})$。将这一同构限制到 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q,H)$，便得到最后的结论。□

现在我们描述 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q,H)$ 的拓扑。

命题 2.3。空间 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q,H)$ 是连通的。

证明。这可由 [RS13 第 6] 节中的论证推出；当从 $\mathrm{VPS}(Q,H)$ 限制到 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q,H)$ 时，该论证是正确的。基本相同的论证也独立见于 [HJNY21 的命题 4.1]：$\mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q,H)$ 中任意 k 点 Γ 都会退化到一个固定点，并且由于这种退化保持了 Γ 的定向，因此可以在 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q,H)$ 内进行；其定义见 [HJNY21 第 2.1] 节。□

在给出关于拓扑的更精细信息之前，我们需要引入一个正交化的技术概念，它将 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q,H)$ 与 $\mathrm{Hilb}_n^{\mathrm{good}}(\mathbb{P}^{n-1})$ 联系起来。

2.1. 正交化。以下关键技术定理表明，任何湮灭理想的无穷小变形都可以“正交化”为 $q^\perp$ 中的一个变形。本质上，它说明如下：设 $I' \subseteq q^\perp$ 是一个湮灭理想，而 I 是它在带有幂零 ε（使得 $I|_{\varepsilon=0} = I'$）的基底上的一个变形（在多重分次意义下）。可能出现 I 不属于 $q^\perp$ 的情况，例如当 I 来自一个使 q 移动的无穷小坐标变换时。定理指出，这基本上是唯一的可能性：存在一个坐标变换 $g = g(\varepsilon)$，使得 $g \circ I$ 包含于理想 $q^\perp$ 中。这是因为 GL_n 对满秩二次型的作用在 q 的无穷小邻域内是传递的。

我们先介绍相关设定。对于一个 k-代数 A，设 $S_A := S \otimes_k A \simeq A[x_1,\dots,x_n]$。对于 k-代数的一个满射 $A \twoheadrightarrow A'$，我们得到一个满射 $S_A \twoheadrightarrow S_{A'}$；用通俗的话来说，它会将多项式的系数模 $J = \ker(A \to A')$ 化简。设 T 是与 S 对偶的多项式环，并设 $q \in T_2 \subseteq (T_A)_2$ 是一个满秩二次型，如第 §2 节开头的设定所示。设 $q^\perp \subset S_A$ 是它的湮灭理想。我们也用 $q^\perp$ 表示它在 $S_{A'}$中的像。

定理 2.4（正交化）。设 $A \twoheadrightarrow A'$ 是有限局部 k-代数到另一个代数的满射，其核为 J，并满足 $J^2 = 0$。设 $I' \subseteq S_{A'}$、$I \subseteq S_A$ 为分次向量子空间。假设

（1）$I'_2 \subseteq q^\perp$，（2）$(S_A/I)_2$ 是自由 A-模，（3）I_2 在 $(S_{A'})_2$ 中的像为 I'_2。

则存在可逆矩阵 $g \in \mathrm{GL}_n(A)$，使得 g 模 $J = \mathrm{Id}_n$ 且 $(g \circ I)_2 \subseteq q^\perp$。

证明。S 与 T 的对偶性诱导出自由 A-模 $(S_A)_2$ 与 $(T_A)_2$ 之间的对偶性，进而诱导出自由 A'-模 $(S_{A'})_2$ 与 $(T_{A'})_2$ 之间的对偶性。与 $q \in (T_A)_2$ 正交补的空间为 $q^\perp \subset (S_A)_2$。由于 $S_{A'}/q^\perp$ 是秩一自由 A'-模，满射

$$(S_{A'})_2 \twoheadrightarrow (S_{A'}/I)_2 \twoheadrightarrow S_{A'}/q^\perp$$

对偶化为复合映射 $A' \to (S_{A'}/I)_2^\vee \to (T_{A'})_2$，它将 1 映射到 q。

A-模 $(S_A/I)_2, (S_A/q^\perp)_2$ 是自由的，因此

$$\mathrm{Hom}_A\left(\left(\frac{S_A}{I}\right)_2, \left(\frac{S_A}{q^\perp}\right)_2\right) \otimes A' \simeq \mathrm{Hom}_{A'}\left(\left(\frac{S_{A'}}{I'}\right)_2, \left(\frac{S_{A'}}{q^\perp}\right)_2\right).$$

由于 $I_2' \subseteq q^\perp$，右边包含自然满射 $(S_{A'}/I')_2 \twoheadrightarrow (S_{A'}/q^\perp)_2$。我们将其提升为满射 $\varphi\colon (S_A/I)_2 \to (S_A/q^\perp)_2$。这些满射

$$(S_A)_2 \longrightarrow \left(\frac{S_A}{I}\right)_2 \xrightarrow{\varphi} \left(\frac{S_A}{q^\perp}\right)_2$$

对偶化为

$$A \to \left(\frac{S_A}{I}\right)_2^\vee \to (T_A)_2. \tag{1}$$

令 $\widetilde{q} \in (T_A)_2$ 表示 $1 \in A$ 的像 I。由于 I' 模 J 的序列归约为 $\widetilde{q}$ 的序列，二次曲面 $\widetilde{q} \equiv q$ 满足 J 模 g 不变。我们将二次曲面与对称矩阵对应起来。对于元素 $h \in \mathrm{GL}_n(A)$，g 在（1）上的作用给出

$$A \to \left(\frac{S_A}{g \circ I}\right)_2^\vee \to (T_A)_2 \tag{2}$$

将 $1 \in A$ 映射到二次曲面 $g \circ \widetilde{q}$。我们声称存在一个 g，使得 g 模 $J = \mathrm{Id}_n$ 且 $g \circ \widetilde{q} = q$。我们将向量空间 T_2 视为一个代数簇。由于 q 具有满秩，轨道映射 $\mathrm{GL}_n \to T_2\colon (h \mapsto h \circ q)$ 是光滑的。二次曲面 $\widetilde{q}$ 可以解释为一个映射 $\widetilde{q}\colon \mathrm{Spec}\,(A) \to T_2$。令 $\mathrm{Spec}\,(A') \to \mathrm{GL}_n$ 为取值于单位矩阵的常值映射。由于 $\widetilde{q} \equiv q$ 模 J，我们得到一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}\,(A') & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n \\ \downarrow & & \downarrow \text{smooth} \\ \mathrm{Spec}\,(A) & \xrightarrow{\widetilde{q}} & T_2 \end{array}$$

根据无穷小提升判别准则 [Sta23, Tag 02H6]，存在一个提升

$$\mathrm{Spec}\,(A) \to \mathrm{GL}_n\colon 1 \mapsto h, \text{ with } h \circ q = \widetilde{q}.$$

取 $g = h^{-1}$ 可得到所需的元素，使得 $g \circ \widetilde{q} = q$。将（2）对偶化，得到 $(g \circ I)_2 \subseteq q^\perp$。□

暂且将关注点从 Hilb^H 转移到 $\mathrm{Hilb}_n^{\mathrm{good}}(\mathbf{P}^{n-1}) \subseteq \mathrm{Hilb}_n(\mathbf{P}^{n-1})$。根据命题 2.2 读者可以从两种视角中任选其一：要么考虑 $\mathrm{Hilb}_n^{\mathrm{good}}(\mathbf{P}^{n-1})$，要么考虑 Hilb 的饱和轨迹 ^{H}。

命题 2.5。作用映射 $\mathrm{GL}_n \times \mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q, H) \to \mathrm{Hilb}_n^{\mathrm{good}}(\mathbf{P}^{n-1})$ 是光滑的，其像是 $\mathrm{Hilb}_n^{\mathrm{good}}(\mathbf{P}^{n-1})$ 中的戈伦斯坦轨迹。

证明。我们利用命题 2.2，将 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q, H)$ 视为 $\mathrm{Hilb}_n(\mathbf{P}^{n-1})$ 的局部闭子集。设 $\mathcal{U} \to \mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q, H)$ 为泛族的限制。根据命题 2.1，$\mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q, H)$ 中的点是线性正规的。根据上同调与基底变换，$\mathcal{O}_{\mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q,\ H)}$-模

$$\left(\frac{S \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q,H)}}{I_{\mathcal{U}}}\right)_2$$

是局部自由的，其在点 $[\Gamma]$ 上的纤维为 $(S/I_\Gamma)_2$。由定理2.4 以及无穷小提升判别准则 [Sta23, Tag 02H6]，即可得出该结论。□

注记 2.6. 如引言中所述，[RS13 的推论 516]揭示了关于点谱 $(S/(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2)^\perp)$（即所谓的 G-胖点）在 $\mathrm{Hilb}_6^{\mathrm{Gor}}(\mathbf{P}^5)$ 中的有趣结论。

定理 2.7. 概形 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q,H)$ 不可约，其中 $n \leq 13$。

证明。 首先，我们证明 $\mathrm{Hilb}_n^{\mathrm{good}}(\mathbf{P}^{n-1})$ 是不可约的。为此，注意到零维子概形的变形理论与其射影嵌入无关，例如参见 [Art76，第4]页。Gorenstein 轨迹是连通的，参见 [HJNY21，命题 4。1] 或 [CN09]，，并且 Hilb 中 Gorenstein 轨迹上的线性正规条件$_n^{\mathrm{good}}(\mathbf{P}^{n-1})$ 在 Gorenstein 轨迹 $\mathrm{Hilb}_n(\mathbf{P}^{n-1})$ 中是开条件。因此，当后者不可约时，前者也是不可约的。但根据$n \leq 13$ [CJN15，定理 A]，后者是不可约的。

最后，我们证明 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q,\ H)$ 不可约，当且仅当 $\mathrm{Hilb}_n^{\mathrm{good}}(\mathbf{P}^{n-1})$ 不可约。我们注意到，这两个空间都是连通的（参见命题 2.3），并且通过光滑映射相关联

$$\mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q,H) \leftarrow \mathrm{GL}_n \times \mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q,H) \to \mathrm{Hilb}_n^{\mathrm{good,Gor}}(\mathbf{P}^{n-1}),$$

见命题2.5，因此，其中一个包含一个同时位于两个不可约分支上的点，当且仅当另一个也包含这样的点。□

3. Unsaturated limit ideals

在讨论了 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q,H)$ 后，下面我们分析边界 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)\ \setminus \mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q,H)$。我们将看到，当且仅当 $n \geq 4$ 时，边界非空，并给出 $\mathrm{VPS}(Q,H)$ 中的一个点属于 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)$ 的必要条件。对于 $n=4$ 和 $n=5$，我们将对边界中的点进行分类。这些分类的两个关键依据是 [JM22] 的结果和正交化，见命题 3.8。由此得到的一个重要且全新的几何结论，是它与逆二次曲面 Q^{-1} 的联系，见推论 3.5。

我们从一个一般性观察开始。

命题 3.1。边界 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)\setminus\mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q,H)$ 的每个不可约分支都是 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)$ 中的一个除子。

证明。 考虑自然的射影映射 $\varphi\mathrm{Hilb}^H \to \mathrm{Hilb}_n(\mathbf{P}^{n-1})$。由命题 2.2 轨迹 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q,H)$ 同构映射到其像上。令

$$X := \overline{\varphi(\mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q,H))} \subseteq \mathrm{Hilb}_n(\mathbf{P}^{n-1})$$

为像的闭包，因此 $X = \varphi(\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H))$。令 $\mathcal{D} \subseteq \mathrm{Hilb}_n(\mathbf{P}^{n-1})$ 表示由不线性正规的 Γ 构成的轨迹。由于 $h^0(\mathcal{O}_\Gamma(1)) = h^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(1))$，轨迹 $\mathcal{D}$ 是一个除子。事实上，在泛概形 $\tilde{\Gamma} \subset \mathrm{Hilb}_n(\mathbf{P}^{n-1}) \times \mathbf{P}^{n-1}$ 上，向量丛之间的映射 $H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(1))|_{\tilde{\Gamma}} \to H^0(\mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}}(1))$ 的秩为 n，其秩在除子 $\mathcal{D}$ 上下降。由命题 2.1，交集 $X \cap \mathcal{D}$ 包含于 X 中 $\varphi(\mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q,H))$ 的补集。因此，边界 $X \setminus \varphi(\mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q,H))$ 是 X 的除子之并，所以 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)\ \setminus \mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q,H)$ 是除子之并。□

现在我们转而对边界进行更详细的描述。

命题 3.2. 设 $n \leq 5$ 且令 $[I] \in \mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)$ 为一个未饱和极限理想。则 $\Gamma = V(I)$ 包含一个包含在直线上的长度为4子概形。特别地，对于 $n \leq 3$，不存在未饱和极限理想。此外，在相同假设下，S/I_Γ 的希尔伯特函数为 $(1, n-2, n-1, n, n, \ldots)$，或者当 $n=5$ 时为 $(1, 2, 3, 4, 5, 5, \ldots)$。

证明。 考虑希尔伯特函数 H 的 $S/(I_\Gamma)_2$。由于 I 未饱和（次数为 2）， $h^1(\mathcal{I}_\Gamma(2)) \neq 0$, 因此 $H(2) \leq n-1$由 Macaulay 增长定理（参见 [CJN15，§2E 和引理 2。9], 可得

(1) 当 $n \leq 3$ 时，对于所有 $m \geq 2$，我们得到 $H(m) \leq 2$，因此产生矛盾；(2) 当 $n = 4$ 时，对于所有 $m \geq 2$，我们得到 $H(m) = m+1$，因此 $(I_\Gamma)_2$ 定义了一条满足 $\Gamma \subset L$ 的直线 L；(3) 当 $n = 5$ 时，对于所有 $m \geq 2$，我们得到 $H(m) = m+1$ 或 $H(m) = m+2$，因此$V((I_\Gamma)_2)$ 是一条直线，或是希尔伯特多项式为 $m+2$ 的子概形；后一种情况下，它要么是一条带有嵌入点的直线 L，要么是一条带有不相交点的直线 L。两种情况下， $\Gamma \cap L$ 的长度都至少为 $n-1=4$。□

以下是我们用来区分 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)$ 与 $\mathrm{VPS}(Q,H)$ 的主要工具。

命题 3.3（[JM22，例 4.2]）。设 I 是一个非饱和齐次理想，使得 S/I 的希尔伯特函数为 $(1,n,n,n,\ldots,)$，而 S/I^{sat} 的希尔伯特函数为 $(1,n-2,n-1,n,n,\ldots)$。此外，假设 $V(I_2)$ 是一条直线 L 和若干点（可能是嵌入点）（当 $n \leq 5$ 时这自动成立，见命题 3.2）。

如果 I 是饱和理想的极限，那么 $I^{\mathrm{sat}} \cdot I_L$（其中 I_L 是 L 的理想）包含于 I。

对于线性空间 $L \subseteq T_1$，我们用 $L^\perp \subseteq S_1$ 表示其正交补（这个概念与 q 毫无关系！）。还要回顾一下，线性映射 $q: S_1 \to T_1$ 和 $q^{-1}: T_1 \to S_1$ 是非退化的，且互为逆映射。

引理 3.4. 设 $L, N \subset T_1$ 为线性子空间，且 $\dim L + \dim N = \dim T_1$。那么下列条件等价

(1) $L^\perp \cdot N^\perp \subseteq q^\perp$,
(2) $q(L^\perp \cdot N^\perp) = 0$,
(3) $q(L^\perp) = N$,
(4) $q^{-1}(N) = L^\perp$,
(5) $q^{-1}(N \cdot L) = 0$,
(6) $N \cdot L \subseteq (q^{-1})^\perp$。

证明。注意到 $q(L^\perp)(N^\perp) = q(L^\perp \cdot N^\perp)$，由定义可立即得到这些等价关系。□

推论 3.5 (关于属于 VPS 的几何条件$^{\mathrm{sbl}}(Q、H)$)。 在命题 *3.3* 的记号下，假设 $I \subseteq q^\perp \subset S$。设 $L \subset T_1$ 为 $V(I_2)$中的直线，且设 $N \subset T_1$ 为 $V(I^{\mathrm{sat}})$的线性张成。那么 $q^{-1}(L \cdot N) = 0$。

证明。 我们有 $I^{\mathrm{sat}} \cdot I_L \subseteq I \subseteq q^\perp$。张成空间 N 等于 $(I^{\mathrm{sat}})_1^\perp$，且 L 等于 $(I_L)_1^\perp$。根据命题 3.3 的假设，我们有维数 N + 维数 L = 维数 T_1，因此由引理 3.4 可得结论。□

推论 3.6。设 $[I] \in \mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)$ $n \leq 5$ 是一个非饱和极限理想。那么 $\Gamma = V(I)$ 包含一个位于直线 L 上的长度为4的子概形，且直线 L 包含于逆二次曲面 Q^{-1}.。特别地，当 $n = 4$, $I = I_\Gamma \cap q^\perp$ 时。

证明。 设 $I = I_\Gamma \cap q^\perp$，当然， $I_\Gamma = I^{\mathrm{sat}}$。那么，$N = V(I_\Gamma) \subset T_1$ 的线性张成包含 L。但是 $L^2 \subset N \cdot L$，因此由推论3.5， $q^{-1}(L^2) = 0$，这意味着 $L \subset Q^{-1}$。当 $n = 4$, I_Γ 的希尔伯特函数为

（1, 2, 3, 4, 4, . . .），而 $I_\Gamma \cap q^\perp$ 的希尔伯特函数为（1, 4, 4, 4, 4, .. .），因此 $I = I_\Gamma \cap q^\perp$。□

最小长度的有限阿波极方案是戈伦斯坦的。这一性质对未饱和极限理想不一定成立。

例 3.7（ $n = 5$的非饱和极限理想，非戈伦斯坦）。令 $q = y_1y_4 + y_2y_3 + y_5^2$。考虑由理想给出的 $\mathbb{A}^1 =$ 谱 $\mathbb{C}[t]$ 上的族

$$\left(x_4x_5,\, x_3x_5,\, x_1x_5,\, x_4^2,\, x_3x_4,\, x_1^2t + x_2x_4,\, x_1x_4 - x_5^2,\, x_3^2,\, x_2x_3 - x_5^2,\, x_1x_3,\, x_1^4\right)$$

它包含于 $q^\perp$ 中，且在 $t = \lambda \neq 0$ 上的纤维是饱和的。在 $t = 0$上的纤维不饱和，并且抽象同构于谱 $\mathbb{C}[\varepsilon_1, \varepsilon_2]/(\varepsilon_1^4, \varepsilon_1\varepsilon_2, \varepsilon_2^2)$；因此它不是戈伦斯坦的。

回顾一下，~~Sat~~$^H \subseteq$Hilb^H 是 Hilb^H 的不可约分支之并，定义为饱和 $[I] \in$ Hilb^{H}轨迹的闭包。下面的定理使我们能够关联 VPS$^{\mathrm{sbl}}(Q, H)$中的点 $[I] \in$ 的光滑性与 Sat^{H}中的同一点 $[I] \in$ 的光滑性。这在理论上和计算中都很有用，见下文的情形$n = 4$,5。

命题 3.8. 对于 Hilb^H 中任意 GL$_n$-稳定的局部闭子概形 $\mathcal{Z}$，映射

$$\mathrm{GL}_n \times (\mathrm{VPS}(Q, H) \cap \mathcal{Z}) \to \mathcal{Z}; \quad (g, I) \mapsto g \cdot I$$

是光滑的，且纤维的维数为 $\binom{n+1}{2}$。

证明。根据定理 2.4 和无穷小提升判据 [Sta23, Tag 02H6]，该映射的光滑性即得。对于纤维，借助 GL$_n$-等变性，只需计算任意点 $I \in$ VPS$(Q, H) \cap \mathcal{Z}$上的纤维维数。该纤维由满足 $g^{-1}I \subset q^\perp$的配对 $(g, g^{-1}I)$ 构成。该包含关系等价于$I \subset (g \cdot q)^\perp$。现在，由于 $H(2) = n$，存在一个由满足 $I \subset (q')^\perp$的二次曲面q' 构成的 n维空间。该纤维同构于映入该空间的 $g \in$ GL$_n$ 的集合q。GL$_n$ 在二次曲面上的作用是传递的，因此纤维的维数为 $n + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{2}$，如所述。□

推论 3.9（是否为饱和对象的极限，与是否属于 VPS(Q, H) 无关）。作为概形，VPS$^{\mathrm{sbl}}(Q, H) =$VPS$(Q, H) \cap$Sat^H。对于 $n \leq 13$，~~作为~~概形，VPS$^{\mathrm{sbl}}(Q, H) =$VPS$(Q, H) \cap$ Slip^H。

证明。根据定义，我们有 VPS$^{\mathrm{sbl}}(Q, H) \subseteq$ VPS$(Q, H) \cap$ Sat^H ~~作为~~概形。为证明反向包含，取一点 $[I] \in$VPS$(Q, H) \cap$Sat^H，并令 $A = \widehat{\mathcal{O}}_{\overline{\mathrm{Sat}}^H, [I]}$为 $[I] \in$ Sat^{H}的完备局部环。由于 A 是完备的，对映射~~ϕ~~: Spec $(A) \to$Sat^H 的有限阶截断应用定理 2.4，可得一对映射 g: Spec $(A) \to$GL$_n$和 ψ: Spec $(A) \to$ ~~VPS~~$(Q, H) \cap$Sat^H，其中 $\phi = g \cdot \psi$。取任意泛点 $\eta \in$ Spec (A)。由于 Sat^H 是饱和轨~~迹~~的闭包，理想 $\phi(\eta)$ 是饱和的。我们有 $\phi(\eta) = g(\eta) \cdot \psi(\eta)$，~~因此~~理想 $\psi(\eta)$ 也饱和。该理想与 Q 反极，因此 $\psi(\eta)$ 属于 VPS$^{\mathrm{good}}(Q, H)$。这对每个泛点 η都成立，因此 ψ 经由 VPS$^{\mathrm{good}}(Q, H)$ 的闭包分解，也就是说，经由 VPS$^{\mathrm{sbl}}(Q, H)$ 分解。这就证明了命题中的另一包含关系。对于 $n \leq 13$，所有 Gorenstein代数都可平滑化，因此轨迹 VPS$^{\mathrm{good}}(Q, H)$

在概形意义下包含于 Slip^H 中，因此其闭包 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)$ 包含于 Slip^H中。由此（仍对 $n \le 13$）得到一串概形包含关系

$$\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H) \subseteq \mathrm{VPS}(Q,H) \cap \mathrm{Slip}^H \subseteq \mathrm{VPS}(Q,H) \cap \overline{\mathrm{Sat}}^H = \mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H),$$

因此必须是等式。 □

推论 3.10. 设 Γ 是包含在 Q^{-1} 中一条直线上的长度为4的概形，并令 $I = I_\Gamma \cap q^\perp$，则 I 是 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)$ 中的未饱和极限理想。

证明。 I 是一个未饱和极限理想，由 [JM22，命题 4。2] 且它与 Q反极，因此属于 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q, H)$，由推论 3.9。 □

3.1. 情形下的未饱和极限理想 $n = 5$。参见 [JM22，§4.4.2 和 §4.4。3], 我们将描述 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q, H) \cap \mathrm{VPS}^{\mathrm{uns}}(Q, H)$，当 $n = 5$时。

对于 $[I] \in \mathrm{VPS}(Q, H) \setminus \mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q, H)$，根据命题 3.2，长度为五的概形$\Gamma \subseteq \mathbf{P}^4$ 包含一个包含在一条直线上的长度为四的子概形 Γ' 。由此可知，$\mathrm{VPS}^{\mathrm{uns}}(Q, H)$ 是两个族的并集 $\mathcal{F}_1$，$\mathcal{F}_2$，描述如下。

$\mathcal{F}_1$ 的一般点是一个理想 I，满足 $V(I^{\mathrm{sat}}) = \Gamma' \sqcup \{p\}$，其中 p 是一个点，而 Γ' 是长度为四且包含于一条直线中的概形。对于一般的 Γ' 和p， S/I^{sat} 的希尔伯特函数为 $(1, 3, 4, 5, 5, \ldots)$，因此 $I = I^{\mathrm{sat}} \cap q^\perp$；理想 I由 I^{sat} 确定，正如长度为五的概形的情形。族 $\mathcal{F}_1$ 是不可约的，维数为 $6 + 4 + 4$。

对于族 $\mathcal{F}_2$ ，一般点是一个理想 I ，满足 $\Gamma = V(I^{\mathrm{sat}})$ 是直线上的长度为五的概形。理想 I 由 I^{sat} 通过交集$I = I^{\mathrm{sat}} \cap c^\perp \cap q^\perp$ 得到，其中 c 是一个三次型，满足 $H_{S/I}(2) = 5$。我们不知道族 $\mathcal{F}_2$ 是否不可约，也不知道其维数是多少。

现在考察这两个族中的可饱和元素。由推论 3.5–3.6 以及 [JM22, §4.4.2] 可知，$\mathcal{F}_1 \cap \mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q, H)$ 恰好由满足以下条件的理想 I 组成：直线 $L = \langle \Gamma' \rangle$ 包含于 Q^{-1} 中，且 p 包含于关于 L的极平面中；此处 p满足 $\mathrm{Supp}\ \Gamma = \{p\} \cup \mathrm{Supp}\ \Gamma'$，并按重数计数。 $\mathcal{F}_1$ 中的未饱和极限理想集合的维数为 $3 + 4 + 2$。在 $\mathcal{F}_2$的情形下，同样由推论 3.6 可知，直线 $\langle \Gamma \rangle$ 必须包含于 Q^{-1}中。此外，根据 [JM22, §4.4.3], , 立方形式 c 必须具有 $\ell^2 \cdot \mu$的形式，其中 ℓ 是直线上的线性形式，而 μ 是极平面上的线性形式。 $\mathcal{F}_2$中的未饱和极限理想集合的维数为 $3 + 5 + 1$。

注 3.11。当 $n = 4$、5 和 I 是一个非饱和极限理想时，该映射

$$\pi_G : \mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H) \setminus \mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q,H) \to \mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)_G; \quad [I] \mapsto [I_2]$$

是一个纤维维数为正的遗忘映射。根据命题 3.1，边界 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H) \setminus \mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q,H)$ 是一个除子；当 $n = 4$ 和 $n = 5$ 时，其维数分别为 5 和 9。理想 I_2 在包含 $V(I^{\mathrm{sat}})$ 的一个长度为四（或五）的子概形的直线上消失。在 $n = 4$ 和 $n = 5$ 且 $I \in \mathcal{F}_1$ 的情形中，理想 I_2 分别仅取决于一条直线，以及一条直线和一个点，因此像 π_G 中的理想族 I_2 的维数分别为 1 和 5。在 $n = 5$和 $I \in \mathcal{F}_2$的情形中，像 $I_2 \in \mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)_G$取决于这条直线和一个特殊的三次型，因此像 π_G 中的理想族 I_2 的维数至多为 6。

4. The schemes $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)$ and $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)_G$ for $n \le 5$

如上所述，令 $H=(1,n,n,\dots)$。由命题 3.2 可知，当 $n\le 3$时，概形 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)$ 和 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)_G$ 都等于 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q,H)$，因而是光滑的。我们还将证明，当 $n=4$时，它们也都是光滑的，5。对于 $n\ge 6$，$\mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q,H)$ 已经是奇异的。

证明的思路是证明 Slip^H 在 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)$ 的未饱和极限理想处光滑，然后利用命题 3.8 和推论 3.9，对于 $\mathcal{Z}=\mathrm{Sat}^H=\mathrm{Slip}^H$，推导出 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)$ 本身也具有相同性质，最后证明它们在格拉斯曼流形中的投影是光滑的。我们首先证明 Slip^H 在 $\mathrm{VPS}(Q,H)$ 的未饱和极限理想处光滑。

命题 4.1. 设 $n=4,5$，并考虑一个齐次理想 $[I]\in \mathrm{Slip}^H$，使得 $H_{S/I^{\mathrm{sat}}}=(1,n-2,n-1,n,n,\dots)$。那么 $[I]$ 是 Slip^H 上的一个光滑点。

证明。我们将给出 Slip^H at $[I]$ 的切空间维数上界。遗憾的是，这个空间没有函子性解释，因此我们从切空间 $T_{[I]}\mathrm{Hilb}^H\simeq \mathrm{Hom}_S(I,S/I)_0$ 开始。短正合列 $0\to I^{\mathrm{sat}}/I\to S/I\to S/I^{\mathrm{sat}}$ 给出

$$0\to \mathrm{Hom}_S(I,I^{\mathrm{sat}}/I)_0\to \mathrm{Hom}_S(I,S/I)_0\to \mathrm{Hom}_S(I,S/I^{\mathrm{sat}})_0.$$

我们有 $(I^{\mathrm{sat}}/I)_3=0$，而 $(I^{\mathrm{sat}}/I)_2$ 是一维的，因此

$$\dim_k \mathrm{Hom}_S(I,I^{\mathrm{sat}}/I)_0=\dim_k I_2=\binom{n}{2},$$

因此

$$\dim_k T_{[I]}\mathrm{Hilb}^H\le \dim_k \mathrm{Hom}_S(I,S/I^{\mathrm{sat}})_0+\binom{n}{2}.$$

短正合列 $0\to I\to I^{\mathrm{sat}}\to I^{\mathrm{sat}}/I\to 0$ 给出

$$0\to \mathrm{Hom}_S(I^{\mathrm{sat}},S/I^{\mathrm{sat}})_0\to \mathrm{Hom}_S(I,S/I^{\mathrm{sat}})_0\to \mathrm{Ext}^1(I^{\mathrm{sat}}/I,S/I^{\mathrm{sat}})_0.$$

根据命题3.2 和 [JM22，例 4。1]，我们得到

$$\dim_k \mathrm{Ext}^1(I^{\mathrm{sat}}/I,S/I^{\mathrm{sat}})_0=1.$$

由于 $n-2\le 3$，根据 [JM22，推论 3。16] 我们得到点 $[I^{\mathrm{sat}}]\in \mathrm{Hilb}^{H_{S/I^{\mathrm{sat}}}}$ 是光滑的。该希尔伯特概形的饱和轨迹同构映射到其在 $\mathrm{Hilb}_n(\mathbf{P}^{n-1})$ 中的像，见 [JM22，命题 3。9]，因此维数为

$$\dim_k \mathrm{Hom}_S(I^{\mathrm{sat}},S/I^{\mathrm{sat}})_0=(n-1)(n-4)+2(n-2)+4=(n-1)n-2n+4,$$

其中 $(n-1)(n-4)$ 来自对 $n-4$ 个点的选择，$2(n-2)$ 来自对一条直线的选择，而 4 来自对其上四个点的选择。总之，我们得到一个界

$$\dim_k T_{[I]}\mathrm{Hilb}^H\le (n-1)n-(2n-4)+\binom{n}{2}+1. \tag{3}$$

现在我们转到 $T_{[I]}\mathrm{Slip}^H$。包含映射 $\mathrm{Hom}_S(I,I^{\mathrm{sat}}/I)_0\subseteq \mathrm{Hom}_S(I,S/I)_0$ 对应于 $\varphi^{-1}([I^{\mathrm{sat}}])\subseteq \mathrm{Hilb}^H$ 嵌入的切映射，其中$\varphi\colon \mathrm{Hilb}^H\to \mathrm{Hilb}_n(\mathbf{P}^{n-1})$ 是自然映射。

根据命题 3.3 可知，交集 $\varphi^{-1}([I^{\mathrm{sat}}])\cap \mathrm{Slip}^H$ 由满足以下条件的 I组成

$$I_1^{\mathrm{sat}}\cdot (I_L)_1\subseteq I_2,$$

其中 L 是 $V(I_2^{\mathrm{sat}}$中的直线）。这一结论在概形意义下也成立，并表明上述交集是格拉斯曼流形 $\mathbb{G}\left(1, I_2^{\mathrm{sat}}/(I_1^{\mathrm{sat}} \cdot (I_L)_1\right)$，其维数为 $\dim_k I_2^{\mathrm{sat}} - 1 - \dim_k I_1^{\mathrm{sat}} \cdot (I_L)_1 = \binom{n}{2} - (2n-5)$。如上所述，估计式（3）给出

$$\dim_k T_{[I]}\mathrm{Slip}^H \leq (n-1)n-(2n-4)+\binom{n}{2}+1-(2n-5) = (n-1)n+\frac{1}{2}(n-4)(n-5).$$

代数簇 Slip^H 与 $\mathrm{Hilb}_n(\mathbb{P}^{n-1})$ 的可平滑分支双有理等价，因此其维数为 $(n-1)n$。这证明了对于 $n = 4$，5. □，$[I] \in \mathrm{Slip}^H$ 是光滑的

命题 4.2. 设 $n = 5$，并考虑一个齐次理想 $[I] \in \mathrm{Slip}^H$，使得 $H_{S/I^{\mathrm{sat}}} = (1, 2, 3, 4, 5, 5, \ldots)$。那么 $[I]$ 是 Slip^H 上的一个光滑点。

证明. 证明的策略与命题 4.1 中相同。与该命题中一样，我们指出，$[I^{\mathrm{sat}}] \in \mathrm{Hilb}^{(1,2,3,4,\ldots,5)}$ 处的切空间是 11 维的，因为具有此希尔伯特函数的饱和理想轨迹由 6 维的直线选择和 5 维的五个点选择参数化。因此，$T_{[I]}\mathrm{Hilb}^H$ 是至多 12 维空间 $V := \mathrm{Hom}_S(I, S/I^{\mathrm{sat}})$ 与 $\mathrm{Hom}_S(I, I^{\mathrm{sat}}/I)$ 的扩张。后一个空间是纤维 $\pi^{-1}([I^{\mathrm{sat}}])$ 的切空间，其中 $\pi\colon \mathrm{Hilb}^H \to \mathrm{Hilb}_n(\mathbb{P}^{n-1})$。该纤维是光滑且有理的，维数为 14，其参数化见 [JM22, §4.4.3]。此外，根据 [JM22, §4.4.3]，交集$\pi^{-1}([I]) \cap \mathrm{Slip}^H$ 是光滑且有理的，维数为 8。因此，在 26 维空间 $T_{[I]}\mathrm{Hilb}^H$ 内，$T_{[I]}\mathrm{Slip}^H$ 与 $T_{[I]}\pi^{-1}([I^{\mathrm{sat}}])$ 的交集是 8 维的。后一个空间是 14 维的，因此 $T_{[I]}\mathrm{Slip}^H$ 的维数至多为 $26-14+8 = 20$，这与 Slip^H 的维数相同，所以等号成立，且 $|I]$ 是 Slip^H 上的一个光滑点。□

推论 4.3. 对于 $n = 4$，5，代数簇 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q, H)$ 是光滑的。

证明。光滑性在光滑映射下保持。因此，根据命题 2.5，良好部分 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q, H)$ 是光滑的。根据命题 3.8 、推论 3.9 以及命题 4.1-4.2，代数簇 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q, H)$ 在未饱和极限理想处是光滑的。□

命题4.1 的一些自然的简化版本并不成立：例如，Hilb^H在陈述中所述的点处可能是奇异的，而 Slip^H 在命题所述轨迹之外也可能是奇异的；这两种病态情形对于 $n = 4$都存在。值得探究命题4.1 是否适用于更高的 n。

注 4.4. 我们不知道即使对于 $n = 4$，5，$\mathrm{VSP}(Q, n) \subset \mathrm{Hilb}_n(\mathbb{P}^{n-1})$ 是否光滑。映射 $\varphi\colon \mathrm{Slip}^H \to \mathrm{Hilb}_n(\mathbb{P}^{n-1})$ 限制为映射 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q, H) \to \mathrm{VSP}(Q, n)$，该映射在 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q, H)$ 上是同构。对于 $n = 4$，此映射在点上也是双射，因为对于一个未饱和极限理想 I，我们有 $I = I^{\mathrm{sat}} \cap q^{\perp}$。这表明对于 $n = 4$，代数簇 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q, H)$ 是 $\mathrm{VSP}(Q, n)$ 的正规化。

现在我们证明，Grassmann紧化也

$$\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q, H)_G \subset \mathbb{G}\left(\binom{n}{2}, q_2^{\perp}\right) \subset \mathbb{G}\left(\binom{n}{2}, S_2\right)$$

对 $n = 4$，5. 对于 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q, H)_G$和$\mathbb{G}\left(\binom{n}{2}, S_2\right)$ 不能指望命题3.8 成立，因为后者缺乏结构。不过，这种情况下存在希尔伯特概形的一个类比。我们将协同子式轨迹

在这种设置下的希尔伯特概形。我们将协同子式轨迹 $\mathrm{Syz}_n \subseteq \mathbb{G}\left(\binom{n}{2}, S_2\right)$定义为由行列式方程给出的闭子概形；在点$[V] \in \mathbb{G}\left(\binom{n}{2}, S_2\right)$ 处，这些方程归结为 $H_{S/(V)}(3) \geq n$，其中 $(V) \subset S$是由 $V \subset S_2$生成的理想。在满足 $H_{S/(V)}(3) = n$ 的点处，$[V] \in \mathrm{Syz}_n$ 的切空间由下式给出

$$\mathrm{Hom}_S\left((V) + S_{\geq 4}, \frac{S}{(V) + S_{\geq 4}}\right)_0.$$

称其为紧化的理由如下。

命题 4.5. 映射 $\pi_G \colon \mathrm{Hilb}_n^{\mathrm{good}}(\mathbb{P}^{n-1}) \to \mathrm{Syz}_n$，由 $\pi_G(I) = I + S_{\geq 4}$ 给出，是一个开浸入。特别地，映射

$$\pi_G \colon \mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q, H) \to \mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q, H)_G$$

是到 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q, H)_G$ 上的一个同构。

证明。$\mathrm{Hilb}_n^{\mathrm{good}}(\mathbb{P}^{n-1})$ 的一个点对应于一个饱和理想 I，使得模去 I 后的商具有希尔伯特函数 H。由此可知，该商的正则度为一，而 I 的正则度为二。根据 [Erm12，命题 3.1]，$[I] \in \mathrm{Hilb}_n^{\mathrm{good}}(\mathbb{P}^{n-1})$ 与 $\pi_G([I]) \in \mathrm{Syz}_n$ 的完备局部环同构。由此，根据 [Sta23，Tag 039M]，π_G 在 $[I]$ 处是 ´étale 的。由正则度也可知，I 由 I_2 生成，因此 π_G 在点上是单射。根据 [Sta23，Tag 025G]，此映射是一个开浸入。关于 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q, H)$ 的结果可通过与反极于 Q 的轨迹取交得到。□

命题 4.6。设 $n = 4$，令 $[I] \in \mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q, H)$ 为一个非饱和极限理想，并令 $[I_2] = \pi_G([I]) \in \mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q, H)_G$。那么，$[I_2]$ 是 Slip^H 在 $\mathbb{G}(6, S_2)$ 中像的一个光滑点。

证明。每个非饱和极限理想 I 定义了一个概形 $\Gamma = V(I)$，根据命题 3.3 和推论 3.6，它在二次曲面上的一条直线上长度为四。理想 I 本身由 Γ 确定，具体为 $I = I_\Gamma \cap q^\perp$。通过不改变二次曲面的环面作用，我们可以进一步退化，使得 Γ 仅支撑在一个点上。于是，经过坐标变换后，非饱和极限理想只有一个。若 $q = y_1y_3 + y_2y_4$，则可以取其为 $I := (x_2^4, x_3, x_4) \cap q^\perp$。

使用软件包 *VersalDeformations* [Ilt12]，（见附录 A），我们检验发现，在点 $[I_2] \in \mathrm{Syz}_n$ 附近，概形 Syz_n 是约化的，且有两个不可约分支 $\mathcal{Z}_1$，$\mathcal{Z}_2$ 经过 $[I_2]$；它们的维数分别为 12 和 10。此外，这两个分支在 $[I_2]$处都光滑。Slip^H 在映射π_G: $\mathrm{Hilb}^H \to \mathbb{G}(6, S_2)$ 下的像是一个 12 维不可约代数簇，因此必与较大的分支重合：$\pi_G(\mathrm{Slip}^H) = \mathcal{Z}_1$。特别地，$[I_2]$ 是其光滑点。□

命题 4.7. 设 $n = 5$ 且令 $[I] \in \mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q, H) \cap \mathrm{VPS}^{\mathrm{uns}}(Q, H)$ 为一个非饱和极限理想。则其像 $[I_2] = \pi_G([I]) \in \mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q, H)_G$ 是 $\mathbb{G}(10, S_2)$ 中 Slip^H 的像的光滑点。

证明。论证与命题 4.6类似，不过要将问题化归为有限多个可能的极限，需要更多工作（我们需要有限多个这样的极限来计算切空间维数）。由推论3.6 和命题 3.2，一个非饱和极限理想 I 对应于一个长度为五的概形 $\Gamma = V(I^{\mathrm{sat}})$，它含有一个位于直线 $\Gamma_0 \subset \Gamma$ 上的长度为四的子概形 $L \subseteq Q^{-1}$，以及一个可能嵌入的第五个

点。经过坐标变换，我们可以假设 $q = y_1y_3 + y_2y_4 + y_5^2$，且直线 L 是 $x_1 = x_4 = x_5 = 0$。我们有 $q^{-1} = 4x_1x_3 + 4x_2x_4 + x_5^2$。对于 $\Gamma = V(I^{\mathrm{sat}})$，分两种情况讨论：

(1) 概形 Γ 包含于 L 中，(2) 概形 Γ 不包含于 L 中。

我们从情形 (2) 开始。根据推论3.5 第五个点位于平面$\Pi = (x_1 = x_4 = 0)$ 上。考虑一个坐标变换

$$\begin{aligned} x_5 &\mapsto x_5 + \lambda_4 x_4 + \lambda_1 x_1, \\ x_3 &\mapsto x_3 - \frac{1}{4}\lambda_1^2 x_1 - \frac{1}{4}\lambda_1\lambda_4 x_4 - \frac{1}{2}\lambda_1 x_5, \\ x_2 &\mapsto x_2 - \frac{1}{4}\lambda_4^2 x_4 - \frac{1}{4}\lambda_1\lambda_4 x_1 - \frac{1}{2}\lambda_4 x_5. \end{aligned}$$

它保持 Q^{-1} 和 L 不变，并将点 $[0 : 0 : 0 : 0 : 1] \in \Pi$ 映射到 $[\lambda_1 : 0 : 0 : \lambda_4 : 1]$。利用这样的作用，我们可以假设第五个点不是 $[0 : 0 : 0 : 0 : 1]$。考虑环面作用

$$t \circ [y_1 : y_2 : y_3 : y_4 : y_5] = [ty_1 : ty_2 : ty_3 : ty_4 : t^2y_5].$$

对于 $t \to 0$ 第五个点收敛到 L 中的一个点。像的奇点集合是闭的，因此我们可以将问题归约到第五个点位于一条直线上的情形；该点要么是嵌入的，要么我们将问题归约到情形 (1)。下面考虑情形(1)，因此假设该点是嵌入的。

对于每个 $\lambda \in \mathbb{C}$，坐标变换 $x_2 \mapsto x_2 + \lambda x_3$, $x_1 \mapsto x_1 - \lambda x_4$ 都将 Q^{-1}, L 和 Π 映到自身。对一般的 λ 使用这样的作用，我们可以假设 Γ 的支集不包含在 $[0 : 1 : 0 : 0 : 0]$ 处。考虑如下环面作用：

$$t \circ [y_1 : y_2 : y_3 : y_4 : y_5] = [y_1 : ty_2 : y_3 : t^{-1}y_4 : y_5].$$

同样，它保持 Q^{-1}, L 和 Π 不变。任意点在 $t \to 0$ 下的极限

$$[0 : y_2 : y_3 : 0 : 0] \in L \setminus \{[0 : 1 : 0 : 0 : 0]\} \text{ is } [0 : 0 : 1 : 0 : 0].$$

因此，我们归结为以下情形：Γ 支集位于 $[0 : 0 : 1 : 0 : 0]$ 且具有一个嵌入点，因此 $\Gamma_0 = (x_1 = x_2^4 = x_4 = x_5 = 0)$ 和 Γ 张成 Π。这里 I由 $I = I(\Gamma) \cap q^{\perp}$决定。我们在附录 A中验证其光滑性。（这是例 3.7中的情形。）

情形 (1) 类似，但稍微更具代数性，因为在这种情况下，坐标变换需要考虑 I 的结构，而不是 I^{sat}。根据 [JM22，命题 4.4(3)]，，空间 $I_3^{\perp}$ 由 $y_2^3, y_2^2y_3, y_2y_3^2, y_3^2$ 和 $y_5 \cdot \ell^2$ 张成，其中$\ell \in \mathbb{C}[y_2, y_3]_1$。进行如上所述的坐标变换后，我们可以假设 $\Gamma = V(I^{\mathrm{sat}})$ 的支集不包含在 $[0 : 1 : 0 : 0 : 0]$ 处，且 ℓ 不与 y_2 成比例。然后，如上所述进行环面退化，可将我们归结为 $y_5y_3^2$ 和 Γ 的支集位于 $[0 : 0 : 1 : 0 : 0]$, 的情形，因此 I 可表示为 $I = I(\Gamma) \cap (y_5y_3^2, q)^{\perp}$。同样，我们在附录 A 中验证其光滑性。□

注 4.8. 实际上，根据 §A 中的计算，在 $[I_2]$ 代数簇$\pi_G(\mathrm{Hilb}^H)$ 等于 Syz_n 当 $n = 4, 5$。

命题 4.9. 设 $\pi_G\colon \mathrm{Hilb}^H \to \mathrm{Syz}_n$ 为自然映射。该映射

$$\mathrm{GL}_n \times \mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q, H)_G \to \pi_G(\mathrm{Slip}^H); \quad (g, I_2) \mapsto g \cdot I_2$$

是光滑的，因此特别地，对于 $n = 4, 5$，$\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q, H)_G$ 是光滑的。

证明。我们有 $\pi_G(\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)) = \mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)_G$，且映射 π_G 将 I 送到 I_2，因此由定理 2.4 可知该映射是光滑的。对于 $n \leq 5$，轨迹 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q,H)$ 是光滑的，因此由命题 4.5 可知 $\pi_G(\mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q,H))$ 是光滑的。此外，由命题 4.6-4.7 以及映射 $\mathrm{GL}_n \times \mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)_G \to \pi_G(\mathrm{Slip}^H)$ 的光滑性，概形 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)$ 在未饱和极限理想处是光滑的。因此，$\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)_G$ 是光滑的。□

当 $n=1$ 和 $n=2$ 代数簇 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)_G$ 是 $\mathbf{P}^1$，分别是 $\mathbb{G}(2,5)$ 的三维一般线性截面，参见 [Muk92]。特别地，在这两种情况下，格拉斯曼子概形 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)_G$ 都是指标为 2 的 Fano簇。同样的结论也适用于 $n=4,5$。

推论 4.10。$\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)_G$ 在 $n=4$、5 时是指标为 2 的 Fano簇。

证明。 我们沿用 [RS13，定理 61]中的论证。考虑集合

$$H_h = \{[I_2] \in \mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)_G \mid V(I_2) \cap h \neq \emptyset\}$$

其中 $h \subset \mathbf{P}(T_1)$ 是一个超平面。在 [RS13 中，引理 4.9] 中的集合 H_h 是为概形 $\Gamma \in \mathrm{VPS}(Q,n)$ 定义的，但该定义可以自然地推广。类似地，引理的证明也可推广，从而说明 H_h 是 Pl¨ucker 除子在 $\mathbb{G}\left(\binom{n}{2}, S_2\right)$ 上的限制。注意，当 $n=4$ 为 5 时，除子 H_h 包含所有未饱和极限理想的像，因为在这些情形下，$V(I_2)$ 含有一条必然与超平面 h 相交的直线。根据 [RS13，命题 5.11]，，H_h 的补集同构于一个仿射空间，而根据命题 4.9，H_h 是很充足的。所有未饱和极限理想的集合在 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)_G$ 中的像 $BL \subset$ 不是一个除子，因此 [RS13，定理 6.1] 的证明论证适用：由于 H_h 的补集同构于一个仿射空间，只要特殊 Pl¨ucker 除子的限制 H_h 不可约，$\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)_G$ 的皮卡群就是 $\mathbb{Z}$。因此，假设 $H_h = H_1 + H_2$。

任意 apolar 方案 Γ 都包含在某个 h的补集中，因此子集 BL 是特殊除子 H_h的基轨迹。但 BL 不是除子，因此 H_1 和 H_2 都必须移动，且其基轨迹包含于 BL中。

现在，对每条直线 $l \subset \mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)_G \setminus BL$，都有 $H_h \cdot l = 1$，因此两个不可约分支中至多只有一个与 l有正交数。特别地，其中一个不可约分支（记作 H_2）与 $H_2 \cdot l = 0$ 的交数为 $H_2 \cdot l = 0$，并包含它所相交的每条直线 l。由 [RS13 引理 6.2]，，任意两个光滑 apolar 方案 $\Gamma, \Gamma' \in$VPS$^{\mathrm{sbl}}(Q,H)_G \setminus BL$ 都可由一串直线连接，因此 H_2 将包含整个 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)_G$。所以 H_h 是不可约的。

在 [RS13 定理 6.1] 中对 Fano指标的计算 $n=4$，同样适用于 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,\ H)_G$，另见注 4.14。

□

4.1. $^{\mathrm{sbl}}(Q,H)_G$ 的 VPS 概形，适用于 $n=4$。在 $n=4$ 的情形下，我们对 Grassmann紧化给出更精确的描述，首先考虑 $\pi : \mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H) \to \mathrm{Syz}_n$ 这一映射下，$\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)$ 中非饱和极限理想族的像$BL \subset \mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)_G$。由推论 3.6 和 3.10 可知，每个未饱和极限理想都包含于 Q^{-1} 中某条直线的理想内，而这类理想的二次部分仅取决于该直线：它是该直线理想中属于 $q^{\perp}$ 的那些二次曲面的空间。因此

$$BL = \mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)_G \cap \mathrm{VPS}^{\mathrm{uns}}(Q,H)_G = C_1 \cup C_2$$

是两条互不相交的有理曲线 C_1 和 C_2 的不交并，在 Q^{-1} 中每个直线铅笔对应一条曲线。

引理 4.11. 设 $n = 4$。两条曲线 C_1 和 C_2 是 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)_G \subset \mathbb{G}\left(6, q_2^{\perp}\right)$中的 6 次有理正规曲线。

证明. 对于每条直线 $L \subset Q^{-1}$，我们令 I_L 为其理想与湮灭理想 $q^{\perp}$中的二次曲面空间的交。因此， I_L 在 $q^{\perp}$中是 6 维的，其正交补是一个 3 维子空间 $I_L^{\perp} \subset (q_2^{\perp})^*$。我们接下来在 $\mathbb{G}\left(3, (q_2^{\perp})^*\right)$中进行论证。从射影角度看，子空间 $\mathrm{P}(I_L^{\perp})$ 是圆锥曲线 $v_2(L) \subset v_2(Q^{-1})$ 在 Veronese 嵌入 $v_2 : \mathrm{P}(T_1) \to \mathrm{P}(T_2)$ 下的张成空间。随着 L 沿 Q^{-1} 中的一条直线铅笔移动，由这些张成空间构成的有理 P^2-丛 X 是有理正规丛：对于 Q^{-1}中的同一直线铅笔内任意三条直线，相应的 X 上的圆锥曲线不包含在任何超平面中，因此 X 的次数至少为 6，即 $\mathrm{P}((q_2^{\perp})^*)$中三维簇的最小次数。另一方面， $v_2(Q^{-1})$是线性正规的，因此 X也是，所以 X 的次数为 6。平面有理正规丛 X 在平面格拉斯曼流形 $\mathbb{G}\left(3, (q_2^{\perp})^*\right)$ 中的格拉斯曼嵌入是一条有理正规曲线，且次数与 X相同。直线铅笔的空间 $\mathrm{P}(I_L)$在 $\mathbb{G}\left(6, q_2^{\perp}\right)$ 中的对应嵌入与其射影等价，因此次数也为 6。□

引理 4.12. 对于 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)_G$ 中的每条有理正规曲线 $C_i, i = 1, 2$，限制在 C_i 上的 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)_G$ 的切丛为 $\mathcal{O}(2)^{\oplus 6}$ ，法丛为 $\mathcal{O}(2)^{\oplus 5}$。

证明。选取坐标，使得 $Q = y_1y_4 + y_2y_3$ 和 C 是包含点 $p = [(x_3, x_4) \cap q^{\perp}]$ 的有理正规曲线。具体而言，我们有

$$(x_3, x_4) \cap q^{\perp} = (x_1x_3, x_2x_3 - x_1x_4, x_3^2, x_2x_4, x_3x_4, x_4^2). \tag{4}$$

考虑 SL_2 对 $k[x_1, \ldots, x_4]$ 的作用，其中矩阵 $[a_{ij}] \in \mathrm{SL}_2$ 的作用方式为

$$\begin{pmatrix} a_{00} & 0 & a_{10} & 0 \\ 0 & a_{00} & 0 & -a_{10} \\ a_{01} & 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & -a_{01} & 0 & a_{11} \end{pmatrix}$$

该二次曲面 Q 在此作用下保持不变，因此 SL_2 作用于 $\mathrm{VPS}(Q, H)_G$ 并作用于 C。实际上，在 C 上的作用是传递的；点 p 映射为 $(x_1a_{01} + x_3a_{11}, -x_2a_{01} + x_4a_{11}) \cap q^{\perp}$；因此，诱导映射 $\mathrm{SL}_2 \to \mathrm{Aut}(C) \simeq \mathrm{PGL}_2$ 是通常的映射。上述作用在命题所述的切丛和法丛上诱导出 SL_2-线性化。SL_2的标准环面的作用将 (4) 的二次部分分解为权空间

$$\langle x_1x_3, x_2x_3 - x_1x_4, x_2x_4\rangle, \quad \text{and} \quad \langle x_3^2, x_3x_4, x_4^2\rangle$$

其权分别为 0 和 -2。切空间 $T_p\mathrm{VPS}(Q,H)_G$ 等于

$$\mathrm{Hom}_S\left(\left((x_3, x_4) \cap q^{\perp}\right) + S_{\geq 4},\ \frac{q^{\perp}}{(x_3, x_4) \cap q^{\perp} + S_{\geq 4}}\right)_0,$$

其为 9 维。设 $W = \langle x_1^2, x_1x_2, x_2^2\rangle \subset q^{\perp}$，这是权为二的权空间。从 $(x_3, x_4) \cap q^{\perp}$ 中权为零的空间到 W 的任意线性映射 ρ_2 都具有权二。要证明 ρ_2 可以提升为切向量 ρ，只需检查它在三次部分诱导出的线性映射 ρ_3 在其线性 syzygy 上为零

$(x_3, x_4) \cap q^{\perp}$，因为线性 syzygy 生成了 $(x_3, x_4) \cap q^{\perp}$ 的所有异次元关系。由于 ρ_2 具有权二，它在三次部分诱导出一个从权一空间 $\langle x_1, x_2\rangle \cdot \langle x_1x_3, x_2x_3 - x_1x_4, x_2x_4\rangle$ 到由三次齐次多项式构成的权三空间的映射 ρ_3。

但是，$(x_3, x_4) \cap q^{\perp}$ 的任意线性异次元关系 ± 1 都意味着，将 ρ_2 在权为-2的空间 $\langle x_3^2, x_3x_4, x_4^2\rangle$上扩展为零映射，便意味着 ρ_3 在这些异次元关系上为零。因此，我们得出结论：ρ_2 可提升为一个切向量 ρ。

映射空间 ρ_2 的维数为9，因此等于 $T_p\mathrm{VPS}(Q, H)_G$，即$\mathrm{VPS}(Q, H)_G$ 在 p处的切空间。由此可知，标准环面SL_2 在 $T_p\mathrm{VPS}(Q, H)_G$ 上的作用，其权均为2。陈述中切丛的纤维是该环面下 $T_p\mathrm{VPS}(Q, H)_G$ 的一个子表示，因此其所有权也均为2。法丛的纤维是它的商表示，因此这里也同样成立。根据 $\mathbb{P}^1$上向量丛的分类，我们发现切丛为 $\mathcal{O}(2)^{\oplus 6}$，而法丛为 $\mathcal{O}(2)^{\oplus 5}$。□

注4.13. 曲线的次数和法丛 C_1 以及 C_2 也可在 Macaulay2 计算中找到 [Sch23]。

注4.14. 两条曲线 $C_1 \cup C_2 = \mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q, H)_G \cap \mathrm{VPS}^{\mathrm{uns}}(Q, H)_G$ 的法丛可用于计算后一个代数簇作为 Fano 簇的指标。皮卡群由 H 生成，因此典范除子为 $K = -aH$，其中 a 是某个整数。由于 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q, H)_G$ 中两条有理曲线 C_i 各自的法丛次数为 10，而每条曲线的次数为 6，伴随公式推出 $-2 = \deg K_{C_i} = 10 - \deg(aH \cap C_i)$，因此 $a = 2$，且 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q, H)_G$ 的 Fano 指标为 2。

命题 4.15. 设 $n = 4$。子概形 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q, H)_G$ 在 $\mathbb{G}\left(6, q_2^{\perp}\right)$ 内是一个算术 Cohen-Macaulay 簇，也是一个光滑线性截面

$$\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q, H)_G = \mathbf{P}^{38} \cap \mathbb{G}\left(6, q_2^{\perp}\right),$$

次数为 362。非饱和极限理想集合的像 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q, H)_G \cap \mathrm{VPS}^{\mathrm{uns}}(Q, H)_G$ 构成两个互不相交的有理正规曲线之并，每条曲线的次数均为 6。

包含 $C_1 \cup C_2$ 的一般余维 6 线性空间与轨迹 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q, H)_G$ 相交于 310 个点。

证明。 接下来只需证明线性截面和 Cohen–Macaulay性质，并进行次数计算。这涉及 Macaulay2 计算 [Sch23], 参见定理 B.1 附录 B。该计算证明，线性截面 $X := \mathbf{P}^{38} \cap \mathbb{G}\left(6, q_2^{\perp}\right)$，其中 $\mathbf{P}^{38}$ 是 VPS 的线性张成$^{\mathrm{sbl}}(Q, H)_G$是一个维数为 6、次数为 362 的算术 Cohen–Macaulay 代数簇。

现在我们论证，X 的次数与 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q, H)_G$ 的次数相同，因此 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q, H)_G$ 是 X 中唯一具有最大维数的分支。不过，由于 X 是算术 Cohen–Macaulay 的，每个分支的维数都最大，因此若 X 与 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q, H)_G$ 的次数相同，则二者相同。

次数论证使用超额交。令 L 为一个一般的余维6线性空间，它包含两条曲线 $C_1 \cup C_2$。这两条曲线在交集 $L \cap \mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q, H)_G$ 中的超额交由以下公式计算[Ful98，命题9.1.1.(2)]:

$$\deg(L \cdot \mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q, H)_G)^{C_i} = \deg(c_1(N_L)) - c_1(N_{C_i}) = 6(H \cdot C_i) - 10 = 6^2 - 10,$$

其中， N_L 是 L 在 C_i 上的法丛，而 H 是一个超平面的类。因此，沿着 $C_1 \cup C_2$ 的超额交的次数为$2(6^2 - 10) = 52$。根据下面的注记，线性空间 L 与

$$\mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q, H)_G = \mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q, H)_G \setminus (C_1 \cup C_2)$$

位于 310 个点上。因此，$\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q, H)_G$ 与一个一般的余维 6 线性空间的交为 $310 + 52 = 362$，这与 X次数的计算一致。□

注 4.16. 在 [RS13] 特殊的 Pl¨ucker 超平面在 VPS 的一项计算中被考虑$^{\mathrm{sbl}}(Q, H)_G$。它们已在推论 4.10的证明中出现。对于超平面 $h = V(l) \subset \mathbf{P}(T_1)$，集合

$$H_h = \{[I_2] \in \mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q, H)_G \mid V(I_2) \cap h \neq \emptyset\}$$

是 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q, H)_G$ 的一个 Pl¨ucker 超平面截面。由于 $V(I_2)$ 对每个非饱和极限理想 I 都包含一条直线，每个除子 H_h 都包含所有非饱和极限理想的像。根据 [RS13，定理 6.3]，，当 $n = 4$ 时，六个一般超平面 H_h 的交包含 310 个极性单形的理想，即 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q, H)_G$ 上的点。该定理声称，这也是 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q, H)_G$ 的次数，其依据是一个错误的假设，即该代数簇是闭的。轨迹

$$\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q, H)_G \setminus \mathrm{VPS}^{\mathrm{good}}(Q, H)_G = C_1 \cup C_2$$

它包含在每个超平面中 H_h。因此，六个一般超平面截面的交 H_h 还包含 $C_1 \cup C_2$，除了 VPS 上的 310 个点之外$^{\mathrm{good}}(Q, H)_G$。因此，要使用$^{\mathrm{sbl}}(Q, H)_G$ 中的公式计算 VPS 的次数 [RS13，定理 6。3]，就转化为一个超额交问题，即求出 $C_1 \cup C_2$ 对交的次数所作的贡献。

Appendix A. Computer code

本节展示用于证明 VPS 中特定点光滑性的计算机代码$^{\mathrm{sbl}}(Q, H)_G$，其中 $n = 4$, 5。计算在 $\mathbb{Q}$ 上进行。详情请参阅程序包 [Ilt12] 。

```
loadPackage("VersalDeformations", Reload=>true);
computeComponents = I -> (
    -- 检查 Syz 和 Hilb 是否一致 assert(hilbertFunction(3, I) == dim ring
    I); J = 理想 select(flatten entries mingens I, x->sum 次数 x<=2); -- 理想
    I_2 + S_{\geq 4} Jtr = 理想 mingens(J + (理想 gens ring J)^4); tg =
    normalMatrix(0,Jtr); reducedtg = CT^1(0, Jtr); ob = CT^2(0, Jtr);
    (F,R,G,C) = versalDeformation(mingens Jtr,reducedtg,ob); IG = 理想
    mingens 理想 sum G; pd = primaryDecomposition IG; assert(#pd == 2);
    -- 实际上，那些是线性空间 assert(dim 理想 singularLocus pd_0 == -1);
    assert(dim 理想 singularLocus pd_1 == -1);
```

重置默认环返回–（秩 源 tg - 余维 投射维数_0, ）； $n = 4$ 的代码如下。
QQ[x_0.. x_3]; Q = x_0*x_2 + x_1*x_3; Qperp = inverseSystem(Q); I = intersect(Qperp, ideal(x_1^4, x_2, x_3)); --case n=4computeComponents(I) == (12,10) -- true $n = 5$ 的代码非常相似。QQ[z_0.. z_4]; Qz = z_0*z_2 + z_1*z_3 + z_4^2; Qzperp = inverseSystem(Qz); I = ideal(z_3*z_4, z_2*z_4, z_0*z_4, z_3^2, z_2*z_3, z_1*z_3, z_0*z_3-z_4^2, z_2^2, z_1*z_2 - z_4^2, z_0*z_2, z_0^4); computeComponents(I) == (20,20) -- true I = intersect(ideal(z_0, z_3, z_4, z_1^5), inverseSystem(z_4*z_2^2), inverseSystem(Qz)) ; computeComponents(I) == (20,20) -- true $n = 4$ 的代码如下。QQ[x_1.. x_4]; Q = x_1*x_3 + x_2*x_4 ; Qperp = inverseSystem(Q) ; I = intersect(Qperp, ideal(x_2^4, x_3, x_4)); --case n=4 computeComponents(I) == (12,10) -- true $n = 5$ 的代码非常相似。QQ[x_1.. x_5]; Qz = x_1*x_3 + x_2*x_4 + x_5^2; Qzperp = inverseSystem(Qz); I = ideal(x_4*x_5, x_2*x_5, x_1*x_5, x_4^2, x_1*x_4,x_3*x_4, 2*x_2*x_4-x_5^2,x_1^2,x_1*x_2, 2*x_1*x_3 - x_5^2, x_2^4); computeComponents(I) == (20,20) -- true I = intersect(ideal(x_1, x_4, x_5, x_2^5), inverseSystem(x_5*x_3^2), inverseSystem(Qz)); computeComponents(I) == (20,20) -- true

rank source tg - codim pd 1);

Appendix B. Remarks on the package vsp4.m2

在我们的程序包中，我们通过计算证明了以下定理。计算是在 $\mathbb{Q}$上进行的。

定理 B.1. 考虑 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q, H)$，其中 $H = (1, 4, 4, \ldots)$。Grassmannian模型

$$\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q, H)_G \subset \mathbb{G}\left(6, q_2^{\perp}\right) \subset \mathbf{P}^{\binom{9}{6}-1}$$

光滑。因此，$\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q, H)_G$ 是 $\mathbb{G}\left(6, q_2^{\perp}\right)$ 与 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q, H)_G$ 在 $\mathrm{P}\binom{9}{6}-1$中的线性张成的交。它是一个算术 Cohen-Macaulay 代数簇，次数为 362，h-向量为 (1, 32, 148, 148, 32, 1)。

证明是通过计算得到的。第一步是计算理想 [Hau83] 的展开 $\left(x_0^2,\ x_0x_1,\ x_1^2,\right.$ $\left.x_0x_2-x_1x_3,\ x_1x_2,\ x_0x_3,\ x_2^4\right)$ 并通过 Gr¨obner 基计算平坦性关系。结果表明，该族的底空间由两个不可约分支构成，其维数分别为 8 和 6。8 维族由$\mathbf{P}^3$ 中的直线以及 4 个点构成。6 维族的一般元素由 4 个不共线的不同点构成，这些点作为点集变化，且关于 q反极。两族的交由逆二次曲面 Q^{-1}上的一条直线上的 4 个点构成。因此，交有两个不可约分支，分别对应于 Q^{-1}上的两族直线。它们的维数为 5。

下一步，我们计算这些族在格拉斯曼流形$\mathbb{G}\left(6,q_2^{\perp}\right)$中的像。在计算上，可以求出$\mathrm{P}\binom{9}{6}-1$中的线性方程。显然，8维族的像与 $\mathbb{G}(2,4)\subset\mathrm{P}^5$ 的三重嵌入相同。

分析6维族的像在计算上十分困难。其线性张成为一个P^{38}，而1050个Pl¨ucker二次曲面在这个P^{38}上限制为380个线性无关的二次曲面。此外，这些二次曲面定义了一个维数为7、次数为362的饱和理想 J。因此，J 对应于一个次数为362的6维概形 X。X 的希尔伯特函数的六阶差分函数取值为(1, 32, 148, 148, 32, 1)。

这使我们猜想 X 是 $\mathrm{P}^{38}\subset\mathrm{P}\binom{9}{6}-1$中的一个算术戈伦斯坦子概形。注意到 $\binom{31+2}{2}=148+380$。因此，如果 X 是算术戈伦斯坦的，其在 P^{38} 中的齐次理想由这 380 个二次曲面生成。然而，我们无法直接验证这个 6 维族的像的齐次理想是由二次曲面生成的。

我们转而通过检验来证明 X 是算术 Cohen–Macaulay 的：对于精心选取的稀疏序列 $\ell_1,\ldots,\ell_6$，理想 $J+(\ell_1,\ldots,\ell_i)$ 在 $i=1\ldots,6$ 时仍然饱和。由于 $\dim(J+(\ell_1,\ldots,\ell_6))=1$（我们通过计算予以验证），理想 $J+(\ell_1,\ldots,\ell_6)$ 定义了 P^{32} 中的一个次数为 362 的零维子概形。因此，存在一个最终的线性形式ℓ_7，使得 $\ell_1,\ldots,\ell_7$ 构成 X的齐次坐标环的正则序列。

这证明了 X 是算术 Cohen–Macaulay 的，因此是无混合的。

在上面的命题4.15 中，我们应用过度交理论证明，两个簇 X 和 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)_G$ 次数相同，因此必定重合。

根据 Macaulay2 的计算，这两个族交集的像由两条 6 次有理正规曲线 C_1，C_2 组成，如上所述。此外，计算还验证了 X 沿着正规曲线 $C_i\cong\mathbf{P}^1$ 光滑，且它们的法丛同构于 $\oplus_1^5\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(2)$，这与引理 4.11 和4.12一致。最后，通过检查定义从 6 维族到格拉斯曼流形的映射的 6×9 矩阵，我们看到 $\mathrm{VPS}^{\mathrm{sbl}}(Q,H)_G$ 在 $C_1\cup C_2$之外光滑。

References

[Art76] Michael Artin。 *Deformations of singularities*。C.S. Seshadri 和 Allen Tan- nenbaum 的笔记。塔塔基础研究院，印度孟买，1976 年。[BB14] Weronika Buczy´nska 和 Jaros law Buczy´nski。高次数 Veronese 再嵌入的割线簇、催化矩阵与可平滑化 Gorenstein 概形。

Duke Math., ( ): –。

J. 23 1 63 69, 2014

[BB21] Weronika Buczy´nska 和 Jaros law Buczy´nski。对偶性、边界秩与多重分次希尔伯特概形。 *Duke Math. J.*，170(16)：3659–3702，2021 年。[BM18] Michele Bolognesi 和 Alex Massarenti。幂和簇与 (1, 7)-极化阿贝尔曲面的模空间。 *J. Geom. Phys.*，125：23–32，2018 年。[CCO17] Enrico Carlini、Maria Virginia Catalisano 和 Alessandro Oneto。华林轨迹与施特拉森猜想。 *Adv. Math.*，314：630–662，2017 年。[CJN15] Gianfranco Casnati、Joachim Jelisiejew 和 Roberto Notari。通过射线族证明希尔伯特概形中戈伦斯坦轨迹的不可约性。 *Algebra Number Theory*，9(7)：1525–1570，2015 年。[CN09] Gianfranco Casnati 和 Roberto Notari。关于某些点状希尔伯特概形的戈伦斯坦轨迹。 *J. Pure Appl. Algebra*，213(11)：2055–2074，2009 年。[Erm12] Daniel Erman。点的希尔伯特概形中希尔伯特函数分层的墨菲定律。*Math. Res. Lett.*，19(6)：1277–1281，2012 年。[Ful98] William Fulton。

Intersection theory 2 *Ergebnisse der Mathematik und ihrer*，第 卷。施 *Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]* 普林格出版社，柏林，第二版，1998 年。[GRV18] Matteo Gallet、Kristian Ranestad 和 Nelly Villamizar。托里克曲面上反极子概形的簇。 *Ark. Mat.*，56(1)：73–99，2018 年。[GS] Daniel Grayson 和 Michael Stillman。Macaulay2：用于代数几何研究的软件系统，版本 1.21。可在 https://macaulay2.com 获取。[Hau83] Herwig Hauser。构造孤立奇点半普适变形的一种算法。载于 *Singularities Part 1 (Arcata, Calif., 1981)* 40 *Proc.*，第 卷，第 – *Sympos. Pure Math.* 567 573 1983 页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，。[HJNY21] Marc Hoyois 、 Joachim Jelisiejew 、 Denis Nardin 和 Maria Yakerson。通过定向戈伦斯坦代数研究 Hermitian K-理论，2021 年。[HMV20] Hang Huang、Mateusz Micha lek 和 Emanuele Ventura。消失海森矩阵、野形式及其边界 VSP。 *Math. Ann.*，378(3-4)：1505–1532，2020 年。[HS04] Mark Haiman 和 Bernd Sturmfels。多重分次希尔伯特概形。 *J. Algebraic Geom.*，13 4 725 769，2004 ( )：–。[Ilt12] Nathan Owen Ilten。韦尔萨尔变形与局部希尔伯特概形。

J. Softw. Algebra , ：–16, *Geom.* 4 12 2012 年。[JM22] Joachim Jelisiejew 和 Tomasz Ma´ndziuk。饱和理想的极限。2022 年。arXiv:2210.13579。[Muk92] Shigeru Mukai。法诺三维簇。 *London Math. Soc., Lect. Notes Ser.*，179：255–263，1992 年。[RS00] Kristian Ranestad 和 Frank-Olaf Schreyer。幂和簇。

J. Reine , ：–。[RS *Angew. Math.* 525 147 181, 2000 13] Kristian Ranestad 和 Frank-Olaf Schreyer。极分单纯形簇。 *Doc. Math.*，18 469：–505，2013 年。[RV17] Kristian Ranestad 和 Claire Voisin。幂和簇与三次四维簇模空间中的除子。 *Doc. Math.*，22：455–504，2017 年。[Sch23] Frank-Olaf Schreyer。vsp4：一个用于计算有理数域上二次曲面极分单纯形簇的 Macaulay2 软件包。P^3，2023 年。

https://www.math.uni-sb.de/ag/schreyer/index.php/computeralgebraSSS[Roy Mikael Skjelnes 和 Gustav Sæd22] en St´ahl。点的希尔伯特概形标准开集的显式射影嵌入。˚，590：254–276，2022 年。 *J. Algebra*Sta[Stacks 项目作者。Stacks 项目。23] ，2023 年。

Faculty of Mathematics, Informatics and Mechanics, University of Warsaw, Banacha2, Warsaw, Poland*Email address*: j.jelisiejew@uw.edu.plMatematisk institutt, Universitetet i Oslo, PO Box 1053, Blindern, NO-0316 Oslo,Norway*Email address*: ranestad@math.uio.noMathematik und Informatik, Universität des Saarlandes, D-66123 Saarbrücken, Ger-many*Email address*: schreyer@math.uni-sb.de