arXiv:2304.00540v1 [math.GT] 2 Apr 2023

二桥结的等变交叉数

JUNDAI NANASAWA

Abstract. 结的对称性已得到广泛研究，强可反转结是其中一类。Lamm 定义了等变交叉数 $c_t(K)$，即强可反转结 K 的所有对称图中交叉数的最小值。本文将图示限制为两种类型，为二桥结定义 $c_2(K)$。这为 $c_t(K)$ 给出了上界。我们给出一种算法，用于确定任意二桥结的 $c_2(K)$。文中展示了通过计算机对交叉数不超过 14 的情形所得的结果。作为推论，我们展示了 Rolfsen 结表中交叉数不超过 10 的结的 20 个例子；在不增加交叉数的情况下，可以改进其对称性。

1. Introduction

纽结理论中存在许多种对称性。对于 S^3 中的光滑结 K，我们关注由保向周期同胚 h 实现的对称性，该同胚将偶对 (S^3, K) 映到自身。Smith [10] 证明，不动点集 Fix(h) 可能的形式为$\emptyset$、 S^0、 S^1 和 S^2。此外，Fox [2] 证明 Fix(h) $\cap K$ 同胚于 $\emptyset$、 S^0 或 S^1。特别地，当 Fix(h) 同胚于 S^1 时，根据史密斯猜想 [7] 的正面解，Fix(h) 可视为一个无结圆。因此，对于非平凡结，Fix(h) $\cap K$ 同胚于 $\emptyset$ 或 S^0。这两种对称性分别称为（循环）周期性和强可逆性。本文将重点研究强可反转结。

光滑结 K in S^3 被称为 强可逆，如果存在一个保向同胚 $h : (S^3, K) \to (S^3, K)$，满足以下条件:
1. h 的固定点集 F 同胚于 S^1，2. F 与 K 相交于两点，3. $h^2 = id$ 和 $h \neq id$。

Lamm 引入了一个新不变量 $c_t(K)$，它是强可逆结 K [4]的所有对称图示中交叉数的最小值。本文将不变量 $c_t(K)$称为 K 的等变交叉数。因此，上述问题指的是$c_t(K)$与通常的最小交叉数 $c(K)$之间的差。对于二桥结，Lamm 猜想， $c_t(K) = c(K)$当且仅当 K 是图3中的两种类型之一（猜想1）。这一猜想基于文献 [9] 中的命题3.6（本文中的命题3）。Lamm 猜想尚未得到证明，但猜想中的图示类型可用于给出 $c_t(K)$的一个上界。

为了理解双桥结的 $c_t(K)$，我们通过将图示限制为 Lamm 猜想中的两种类型，定义双桥等变交叉数$c_2(K)$。我们可以利用斜率 p/q 的连分数展开来判定双桥结 $K(p, q)$的 $c_2(K)$。计算 $c_2(K)$可为 $c_t(K)$给出一个上界。

2010 Mathematics Subject Classification. 57M25, 57M27.*Keywords.* 对称性，强可逆结，交叉数，等变。

众所周知，任意二桥结都可以写成仅由偶整数构成的连分数展开。我们称之为偶展开。然而，偶展开不能有效地为 $c_2(K)$提供上界。我们定义半偶展开，即对应于 Lamm 猜想中两种类型之一的展开。只需忽略偶展开中奇数位置整数的奇偶性，就能轻松得到这种展开。我们证明，作为 $c_2(K)$的上界，半偶展开优于偶展开。因此，我们可以得到一个用于确定 $c_2(K)$的有限算法。文中展示了使用计算机对 $c(K) = 14$ 进行计算的结果。若聚焦于满足 $c_2(K) = c(K)$的二桥结 K，则存在一个交叉数达到最小值的对称图。即使最初的图示并不对称，也可以根据展开结果轻松得到该结的对称图。在 Rolfsen 结表 [8]中找到了 20 个这样的例子，交叉数不超过 10。

本文安排如下。第2节介绍斜率的偶展开。第3节利用这一内容阐述 Lamm 猜想。第4节重点讨论半偶展开。第5节给出 $c_2(K)$ 的计算结果及其推论。附录中给出了计算 $c_2(K)$ 的算法详情。

2. Even expansion

本节介绍仅由偶整数构成的有理数展开。我们称之为偶展开。仅由正整数构成的通常展开称为正展开。请注意，每个有理数的正展开都是唯一的。本文中，若且唯若存在从 (S^3, K_1) 到 (S^3, K_2) 的同胚，我们就将两个结 K_1, K_2 视为同一个结。该同胚不必保持 S^3 的定向，因为取 K 的镜像不会影响交叉数。

设 $K(p, q)$ 是一个二桥结，$[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ 是其连分数展开（图 1）。换言之，p 和 q 互素，且

$$\frac{p}{q} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_n}}}.$$

Two-桥结由以下定理完全分类。参见 [中的定理 2.1.3 3]

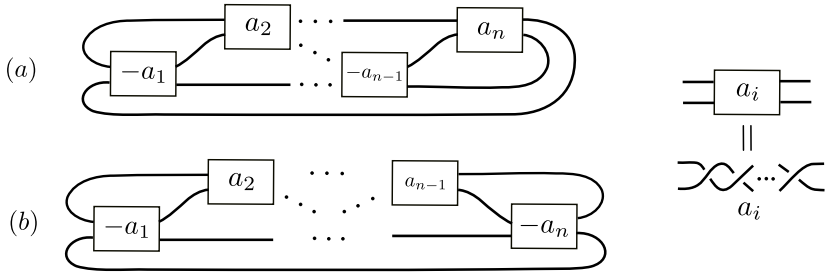


Figure 1. 双桥结。（a） n 为偶数，（b） n 为奇数。

例如。

定理1. 二桥结 $K(p, q)$ 和 $K(p', q')$ 表示同一个结，当且仅当$p = p'$ 且 $q \equiv q'^{\pm 1}$ 模 p。

众所周知， $K(p,q)$ 是一个结，当且仅当 p 为奇数。由这一事实和定理1可知，若 $K(p,q)$ 是一个结，则可将 q 取为一个偶整数，使得 $0<|q|<p$。

命题 1。对于任意二桥结 $K(p,\ q)$，其中 p 为奇数、q 为偶数，且 $0<|q|<p$，斜率p/q具有唯一的仅由偶整数构成的连分数展开，并且整数的个数也是偶数。换言之，p/q 具有如下由非零整数 a_i 构成的展开：

$$\frac{p}{q}=[2a_1,2a_2,\ldots,2a_{2n}]=2a_1+\cfrac{1}{2a_2+\cfrac{1}{\cdots+\cfrac{1}{2a_{2n}}}}.$$

例 1。对于 $K=6_3=K(13,\ 5)$，我们可以利用定理1将斜率 $13/5$ 替换为 $13/8$。必要时先将负号提出，这样可以假设展开的每一步中有理数均为正数。用正余数将分子除以分母。如果商为奇数，则将商加一，并将余数减一。重复这一过程，$13/8$ 即可展开为仅含偶整数的形式，如下所示：

$$\frac{13}{8}=2-\frac{3}{8}=2+\frac{1}{-2-\frac{2}{3}}=2+\frac{1}{-2+\frac{1}{-2+\frac{1}{2}}}=[2,-2,-2,2].$$

定义 1。对于二桥结 $K(p,\ q)$，命题 1 中的连分数展开称为 p/q 的偶展开。

3. Lamm's conjecture

有两种图示可实现强可逆性。Boyle 使用内向型 和横向型 这两个术语 [1]。轴垂直于图示平面的图示称为内向型，轴位于图示平面内的图示称为横向型（图 2）。 [1], 中允许存在同痕差异，但我们将对称图 定义如下。

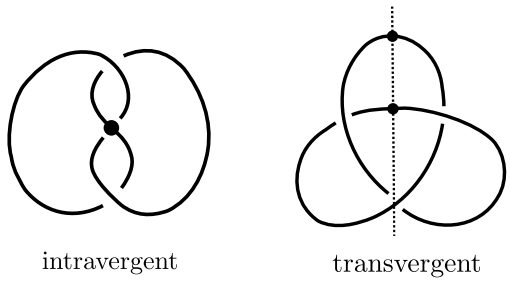


Figure 2. 三叶结的内向型图示和横向型图示。

定义 2. 强可逆结的对称图 K 定义为其横向型图示，即轴为图示平面内一条直线，且图示在绕该轴半周旋转后保持不变。

定义 3. 对于强可逆结 K，K 的等变交叉数 $c_t(K)$ 定义为所有对称图中交叉数的最小值。

显然， $c(K) \leq c_t(K)$，我们关注它们的差值。对于交替结，要得到 $c_t(K)$，我们可以限制所考察的图示。

命题 2. 设 K 是一个交替素强可逆结， D 是一个实现 c_t（K）的图示。当且仅当 D 是交替结时，c_t（K）$= c$（K）。

证明。由 [5], 中的推论 5.10 可知，交替结的非交替图示的交叉数不是最小的。因此，若 $c_t(K) = c(K)$，则 D 是交替结。设$c_t(K) > c(K)$。若 D 是交替结，则 D 不是约化的，并且可以去掉非约化部分中的交叉，同时保持对称性。于是 D 的交叉数小于 $c_t(K)$。这与 $c_t(K)$的定义矛盾。因此 D 不是交替结。□

由此命题可知，为了确定交替结的 $c_t(K) = c(K)$，只需考虑交替图示。一种初步方法是将交叉分配到三个区域——左侧、中间（轴）和右侧——并考察所有连接模式。然而，对于较大的交叉数，这种方法并不有效。据作者所知，下列结的 $c_t(K)$ 等于 $c(K)$:

$$6_1, 6_2, 7_1, 7_2, 7_3, 7_4, 7_5, 7_6, 7_7, 8_1, 8_2, 8_3, 8_4, 8_5, 8_6, 8_{11}, 8_{12}, 8_{15}, 8_{16}, 8_{18}, 8_{19}, 8_{20}, 8_{21}.$$

此外， $c_t(K) \leq c(K) + 1$ 对所有满足 $c(K) \leq 8$ 的结 K 都成立。这些结论基于第5节对 $c_2(K)$ 的研究，以及 Lamm [4] 对三桥结的研究。

Lamm 猜想，对于二桥结， $c_t(K) = c(K)$ 当且仅当 K 是两种图示类型之一。

猜想1 (Lamm [4]). 设 K 为一个二桥结。那么 $c_t(K) = c(K)$ 当且仅当 K可表示为以下类型之一的连分数展开 $[a_1, \ldots, a_n]$ （图*3*）。

(A) 所有 a_i 均为正数， n 为偶数，且 a_2、 a_4、.....、 a_n 均为偶数。(B) 所有 a_i 均为正数， n 为奇数，整数呈回文式排列，使得 $a_1 = a_n$、 $a_2 = a_{n-1}$、.....，且中央整数 $a_{(n+1)/2}$ 为奇数。

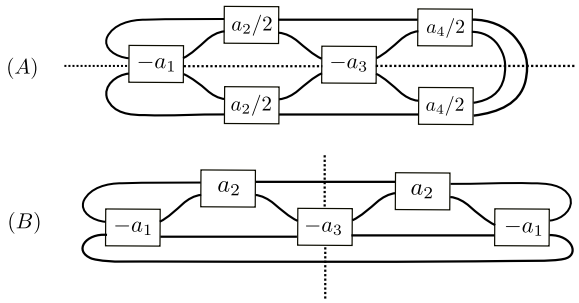


FIGURE 3. 猜想1的两种类型。

This 猜想源自 Sakuma 提出的以下命题（ [9]中的命题3.6）。

命题 3 (Sakuma [9])。 设 $K = K(p, q)$ 为一个二桥结， $[a_1, \ldots, a_n]$ 是其偶展开，且 n为偶数。则 K 具有如下强反演（图*4*）。(1) 若 $q^2 \not\equiv 1$ 模 p，则

$$I_1(a_1, a_3, \ldots, a_{n-1}; a_2/2, a_4/2, \ldots, a_n/2),$$

$$I_1(-a_n, -a_{n-2}, \ldots, -a_2; -a_{n-1}/2, -a_{n-3}/2, \ldots, -a_1/2).$$

(2) *If* $q^2 \equiv 1 \mod p$, *then*

$$I_1(a_1, a_3, \ldots, a_{n-1}; a_2/2, a_4/2, \ldots, a_n/2), \quad I_2(a_1, a_2, \ldots, a_{n/2}).$$

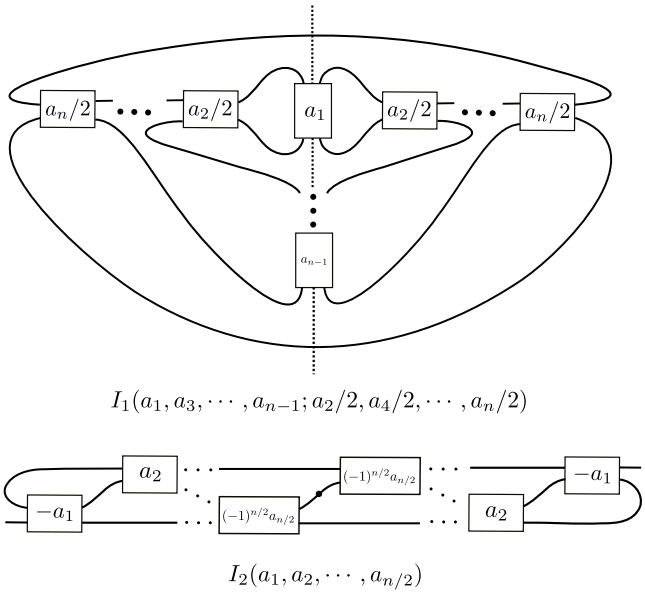


FIGURE 4. 二桥结的两种强反演。

为了计算二桥结的 $c_t(K)$，我们将图示限定为图3中的两种类型。

定义4。对于二桥结 K，二桥等变交叉数 $c_2(K)$ 定义为图3中类型为（A）或（B）的所有 K 图示中交叉数的最小值。

从现在起，我们将关注二桥结的 $c_2(K)$。根据定义，$c(K) \leq c_t(K) \leq c_2(K)$。这意味着 $c_2(K)$ 是 $c_t(K)$ 的上界。研究斜率的连分数展开有助于确定 $c_2(K)$。

4. 半偶展开

本节定义图3中与（A）对应的展开。在猜想1中，所有 a_i 均为正这一条件对应于 $c_2(K) = c(K)$。更一般地，即使展开中的某些整数为负（即 $c_2(K) > c(K)$），我们也只需考虑图3中的两类图示。我们将类型 A 和类型 B 定义如下。

（类型 A） n 为偶数，且 $a_2, a_4, \ldots, a_n$ 均为偶数。

（类型 B） n 为奇数，整数呈回文式，使得 $a_1 = a_n$，$a_2 = a_{n-1}$，$\ldots$ 且中间整数 $a_{(n+1)/2}$ 为奇数。

定义5. 连分数展开的交叉数 由数值 $\sum_{i=1}^{n} |a_i|$ 定义，其中 $[a_1, \ldots, a_n]$。

判断 $c_2(K) = c(K)$ 是否成立的一种简单方法是对斜率 p/q $(p, q > 0)$ 作正展开，并检查它属于类型 A 还是 B。注意，这种展开是唯一的。然而，定理1中的斜率之差是允许的。二桥结$K(p, q)$(p 为奇数， q 为偶数， $0 < q < p$，最大公约数$(p, q) = 1$)有四个斜率，满足 $0 <$ (分母)< (分子):

$$\frac{p}{q}, \quad \frac{p}{p-q}, \quad \frac{p}{q'}, \quad \frac{p}{p-q'} \quad (qq' \equiv 1 \mod p).$$

偶数分母を持つ斜率を用いて $c_2(K)$を定める。一方、$c_2(K) \geq c(K) + 1$が分かれば、次の手順で $c_2(K)$を定められる。

步骤 *1*。 列出所有由正整数构成、总和为 $c(K) + 1$的 A 或 B 类型的展开。步骤 *2*。 为每个展开添加一些负号，并计算所有模式对应的连分数。如果出现 K 的四个斜率之一，则 $c_2(K) = c(K) + 1$。否则，继续步骤 3。

步骤 *3*。 再增加一个交叉，并从步骤 1 重复。

由于当交叉数较大时这一过程较为复杂，我们引入另一种展开方式。类型 A 只要求偶数位置上的整数为偶数。因此，在命题 1 中可以忽略奇数位置上整数的奇偶性。

定义 6。 设 p/q 是一个有理数（p 为奇数， q 为偶数，且 $0 < q < p$ 与 $\gcd(p, q) = 1$）。半偶展开 是由所有偶数位置均为偶数的整数构成的连分数展开。

命题 4. 对于半偶展开 $p/q = [a_1, \ldots, a_n]$， n 为偶数当且仅当 q 为偶数。

证明. 该展开如下:

$$\frac{p}{q} = a_1 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_{n-2} + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}.$$

若 n 为偶数，则 $a_{n-1} + 1/a_n$ 的形式为 $odd/even$。取倒数并加上 a_{n-2} 后，形式变为 $even/odd$。如此交替重复，最终得到 $odd/even$。这表明 q 为偶数。若 n 为奇数，则 $a_{n-1} + 1/a_n$ 的形式为 $odd/*$，其中 $*$ 表示奇数或偶数。取倒数并加上 a_{n-2} 后，形式变为 $*/odd$。如此交替重复，最终得到 $*/odd$。这表明 q 为奇数。□

由于半偶展开生成了一个类型为 A 的对称图示， $c_2(K)$ 不大于该展开的交叉数。因此，上述三个步骤经过有限次重复即可结束。

例 2. 设 K 为 $6_3 = K(13,8)$。由于 $8 \cdot 5 \equiv 1$ 模 13， K 的四个斜率为

$$\frac{13}{8}, \quad \frac{13}{5}, \quad \frac{13}{5}, \quad \frac{13}{8}.$$

正展开为

$$\frac{13}{8} = 1 + \frac{5}{8} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{3}{5}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{3}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}} = [1, 1, 1, 1, 2],$$

$$\frac{13}{5} = 2 + \frac{3}{5} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{2}{3}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = [2, 1, 1, 2].$$

由于 这些既不是类型 A 也不是 B，我们有 $c_2(6_3) > 6$。斜率 $13/8$ 甚至用于一个 d 半偶展 开。偶展开为

$$\frac{13}{8} = 2 - \frac{3}{8} = 2 + \frac{1}{-2 - \frac{2}{3}} = 2 + \frac{1}{-2 + \frac{1}{-2 + \frac{1}{2}}} = [2, -2, -2, 2].$$

交叉数为 8。半偶展开为

$$\frac{13}{8} = 1 + \frac{5}{8} = 1 + \frac{1}{2 - \frac{2}{5}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{-2 + \frac{1}{-2}}} = [1, 2, -2, -2].$$

交叉数为 7，这意味着 $c_2(6_3) \leq 7$。因此 $c_2(6_3) = 7$。

半偶展开的交叉数通常比偶展开的交叉数小。证明如下。

命题 5. 对于每个斜率 p/q （p 为奇数， q 为偶数， $0 < q < p$，最大公约数$(p, q) = 1$），半偶展开的交叉数小于或等于偶展开的交叉数。

证明。 虽然偶展开和半偶展开是为形式为奇数/偶数的分数定义的，但我们将它们扩展到形式为偶数/奇数 的分数。在这种情况下，半偶展开中奇数位置上的整数必须是偶数。例如，$8/3 = [2, 1, 2]$。注意，偶数/奇数 的偶展开中的整数个数会变为奇数。令 F 为所有连分数的集合，并令 $s : F \to \mathbb{Z}$ 为一个按如下方式计算交叉数的映射:

$$s([a_1, \ldots, a_n]) = \sum_{i=1}^{n} |a_i|.$$

设 $A(p, q) = [a_1, \ldots, a_n]$ 为偶展开， $B(p, q) = [b_1, \ldots, b_m]$ 为半偶展开。我们通过对分子的大小作归纳来证明 $s(B(p, q)) \leq s(A(p, q))$。对于分子较小的分数，这一公式由

$$\frac{3}{2} = [2, -2] = [1, 2], \quad \frac{4}{3} = [2, -2, 2] = [2, -1, -2].$$

假设该公式对分子小于 p 的分数成立。只需证明 $A(p,\ q) \neq B(p,\ q)$ 的情形。比较两个展开，并假设它们首次在第 i 位不同。注意， i 是奇数。根据展开过程， $A(p,\ q)$ 在第 i 位的整数恰好比 $B(p,\ q)$ 大一。令 $C(p,\ q)$ 为一个新的展开，它从 $A(p,\ q)$ 的第 $(i + 1)$ 位开始采用半偶展开。换言之， $C(p,\ q)$ 在第 i 位之前为偶展开，从第 $(i + 1)$ 位开始为半偶展开。例如，在 $13/8$ 的情形下，

$$A(13, 8) = [2, -2, -2, 2], \quad B(13, 8) = [1, 2, -2, -2], \quad C(13, 8) = [2, -2, -1, -2].$$

现在，我们证明以下公式:

$$s(B(p, q)) \leq s(C(p, q)) \leq s(A(p, q)).$$

我们重点讨论第一个不等式，因为第二个不等式可由归纳假设得到。考虑在第 i 个位置进行展开的过程，下一步要展开的两个分数 $B(p,\ q)$ 和 $C(p,\ q)$ 具有如下形式： $P/Q, P/(P - Q)$，其中 $P,\ Q \in \mathbb{Z}, 0 < Q < P$，最大公约数$(P,\ Q) = 1, P$ 为偶数，而 Q 为奇数。注意，由于符号不影响交叉数，这两个分数都取正值。例如，在 $13/8$ 的情况下，

这些值为 $i = 1$, $P = 8$ 和 $Q = 3$。由于 $s(B(p,\ q))$ 与 $s(C(p,\ q))$ 相比，恰好在第 i 个位置之前小 1，因此只需证明

$$|s(B(P,Q)) - s(B(P,P-Q))| \leq 1.$$

由于我们考虑的是 P/Q 和 $P/(P-Q)$ 这一对，因此可以假设 $Q < P/2 < P-Q$。注意，$B(P,\ P-Q)$ 总是从 2 开始。

- 情形 $Q > P/3$ $B(P,\ Q)$ 从 2 开始。取若干整数 α，β_1，$\ldots$，β_k，

$$\frac{P}{Q} = 2 + \frac{1}{\frac{Q}{P-2Q}} = [2, \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_k].$$

  Then

$$\frac{P}{P-Q} = 2 - \frac{1}{\frac{P-Q}{P-2Q}} = 2 - \frac{1}{\frac{Q}{P-2Q} + 1} = [2, -(\alpha+1), -\beta_1, \ldots, -\beta_k].$$

  因此，$|s(B(P,\ Q)) - s(B(P,\ P-Q))| \leq 1$ 成立。

- Th情形 e $Q < P/3$ $B(P,\ Q)$ 从 $2\alpha\,(\alpha \geq 2)$ 开始。取若干整数 β_1，$\ldots$，β_k，

$$\frac{P}{Q} = 2\alpha + \frac{1}{\frac{Q}{P-2\alpha Q}} = [2\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_k].$$

  Then

$$\begin{aligned} \frac{P}{P-Q} &= 2 - \frac{1}{\frac{P-Q}{P-2Q}} = 2 - \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{P-2Q}{Q}}} = 2 - \frac{1}{1 + \frac{1}{2\alpha - 2 + \frac{1}{\frac{Q}{P-2\alpha Q}}}} \\ &= [2, -1, -(2\alpha-2), -\beta_1, \ldots, -\beta_k]. \end{aligned}$$

  因此 $|s(B(P,Q)) - s(B(P,P-Q))| \leq 1$ 成立。

因 此，我们有 $s(B(p,q)) \leq s(C(p,q)) \leq s(A(p,q))$，这意味着 $s(B(p,q)) \leq s(A(p,q)$). □

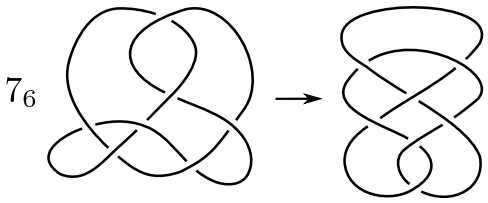
5. Results of calculation for $c_2(K)$

命题 5 表明，对于 $c_2(K)$，半偶展开作为上界优于偶展开。然而，半偶展开并不涵盖类型 A 的所有情况。因此，当半偶展开的交叉数大于或等于 $c(K)+2$ 时，无法立即确定 $c_2(K)$。在这种情况下，我们必须考察所有可能的展开模式。根据目前得到的结果，给出了计算 $c_2(K)$ 的算法。该算法见附录。作者使用 Python 编写了这一过程，并根据 KnotInfo 中截至 12 个交叉的资料计算了 $c_2(K)$ [6]。对于交叉数为 n 的双桥结，另一种获取斜率数据的方法如下：列出所有具有 n 个交叉的正展开，计算斜率，并根据定理1去除重复的纽结类型。从理论上说，该列表可以用于计算任意大的 n 所对应的 $c_2(K)$，但这需要耗费大量时间。表1列出了截至 14 个交叉的数据。两种方法在截至 12 个交叉范围内所得的结果相同。

关于目前已有的结果，我们可以改善 Rolfsen结表 [8] 中二桥结的对称性。对于 $c_2(K) = c(K)$ 且未以对称方式绘制的结 K，我们可以将其变形为对称图，同时保持交叉数不变。我们发现了20个这样的例子，交叉数不超过10个。图5展示了其中一个例子。所有例子均见图6。

$c(K)$	所有结	二桥结	$c_2(K)$			
			$c(K)$	$c(K)+1$	$c(K)+2$	$c(K)+3$
3	1	1	1			
4	1	1	1			
5	2	2	2			
6	3	3	2	1		
7	7	7	7			
8	21	12	7	5		
9	49	24	17	7		
10	165	45	17	25	3	
11	552	91	44	36	11	
12	2176	176	49	98	26	3
13	9988	352	109	152	89	2
14	46972	693	128	351	177	37

TABLE 1. 交叉数为 $c_2(K)$ 的结的数量，在最多 14 个交叉的范围内，$c(K)+j\,(j=0,\ 1,\ 2,\ 3)$。



Rolfsen结表中 7_6 的对称性改进。

在表1中，如果 $c(K)$ 增大，$c_2(K)$ 往往也会增大，但这一点尚未得到证明。关于 $c_2(K)$ 和 $c_t(K)$ 的未解问题如下。

问题 1. (1) 对于任意正整数 n，是否存在一个结 K，使得 $c_2(K)=c(K)+n$? (2) 能否用 $c(K)$来计算 $c_2(K)$? 特别是，半偶展开的交叉数是否可以计算? (3) Lamm 猜想（猜想1）能否得到证明？若能证明，则对于满足 $c_2(K)\le c(K)+1$。的结K，$c_t(K)=c_2(K)$。(4) Lamm 猜想能否推广到 $c_t(K)>c(K)$的情形？若可以，$c_t(K)$将恰好与 $c_2(K)$相同。(5) 对于一般的结，是否有方法检测或计算 $c_t(K)$?

6. 附录

本节介绍计算 $c_2(K)$的算法。设 $K=K(p,\ q)$（p 为奇数，q 为偶数，且 $0<q<p$ 与最大公约数$(p,\ q)=1$）是一个二桥结。$c_2(K)$由以下过程确定。图7展示了该算法的流程图。

步骤 *1.* 对 K 的全部四个斜率进行正展开。如果其中一个属于类型 A 或 B，则 $c_2(K)=c(K)$。否则，$c_2(K)\ge c(K)+1$，然后继续步骤 2。步骤 *2.* 选择 K 中分母为偶数的斜率，并进行半偶展开。令 m为这些展开的最小交叉数。然后 $c_2(K)\le m$。如果 $m=c(K)+1$,

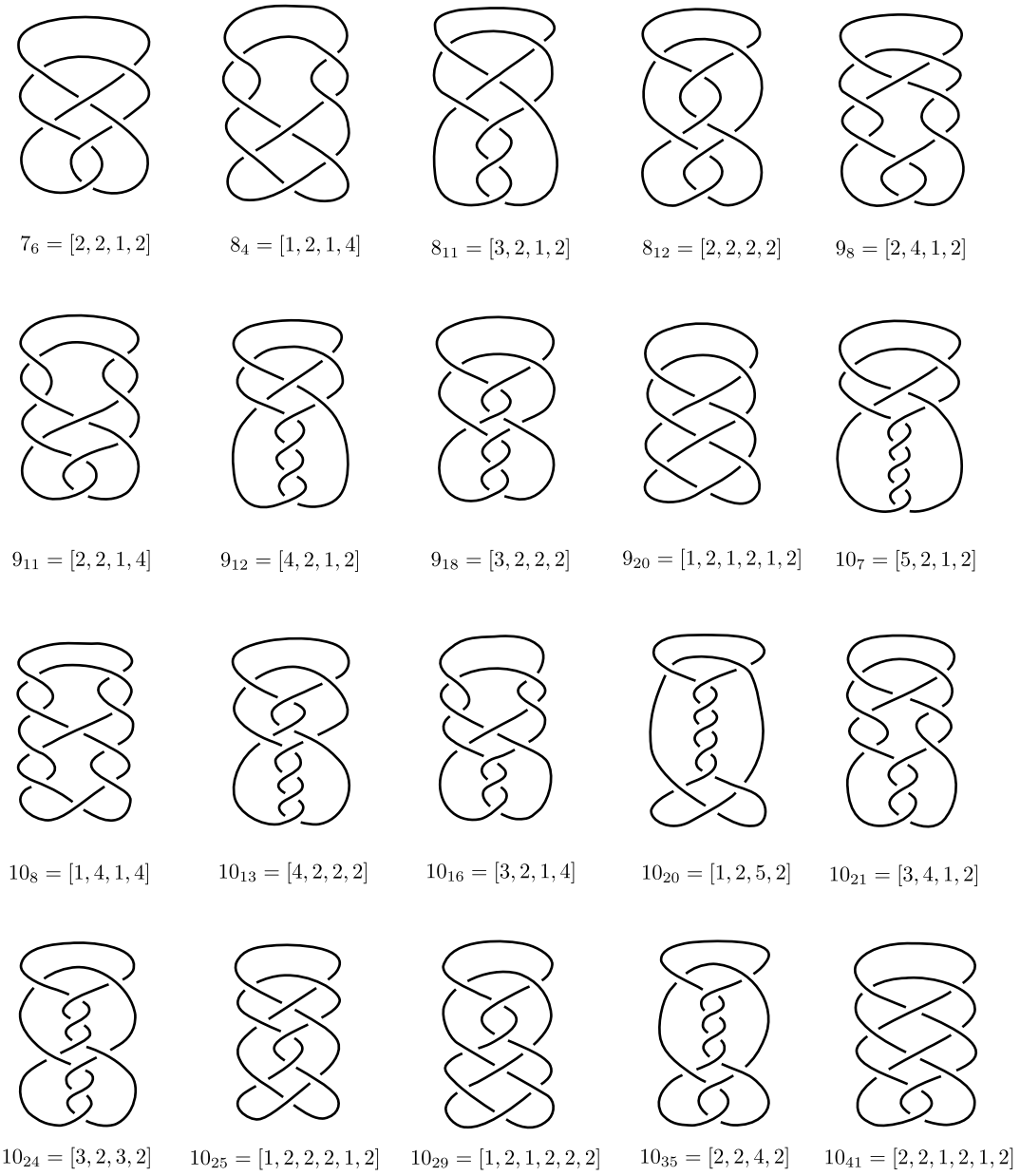


FIGURE 6. Rolfsen结表中对称性的改进。

那么 $c_2(K) = c(K) + 1$。如果 $m \geq c(K) + 2$，则继续步骤 3。步骤 *3.* 列出所有类型为 A 或 B 、由正整数构成且总和为 $c(K) + 1$ 的展开。步骤 *4.* 为每个展开添加一些负号，并计算所有模式的连分数。如果出现了 K 的四个斜率之一，则 $c_2(K) = c(K) + 1$。否则，继续步骤 5。

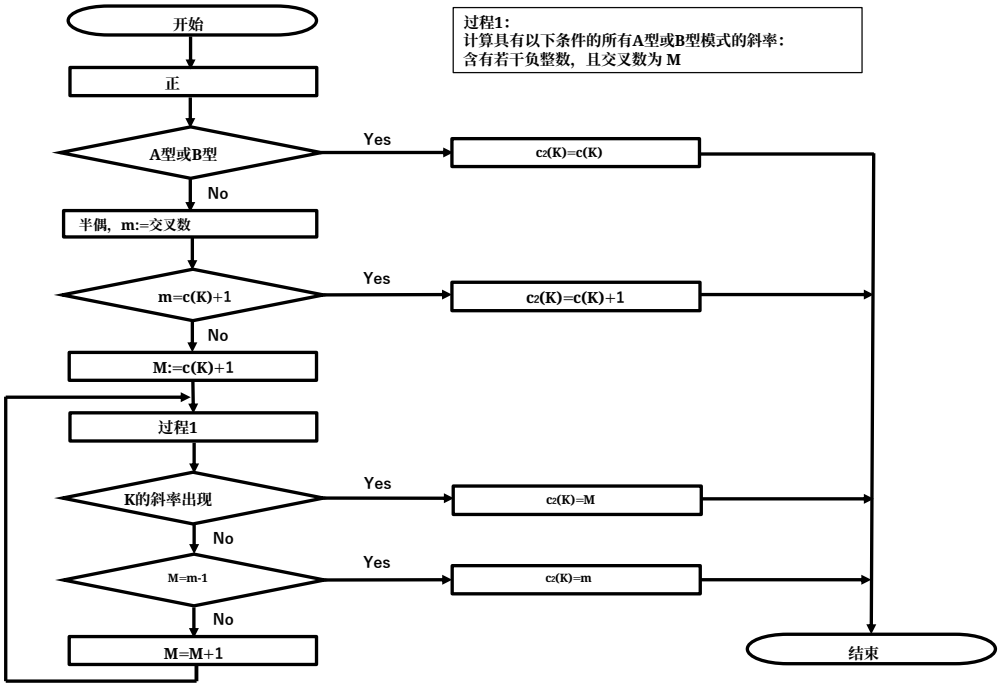


FIGURE 7. 计算二桥结的 $c_2(K)$ 流程图。

步骤 *5.* 再增加一个交叉，并从步骤 3 重复。如果 $c_2(K)$ 无法由 $m-1$个交叉确定，则 $c_2(K) = m$。

ACKNOWLEDGEMENT

Th作者衷心感谢村上淳和 Makoto Sakum 提出的宝贵意见 a.

REFERENCES

[1] K. Boyle, *Involutions of alternating links*, 《美国数学会会刊》**149** (2021年), 第 7 期, 3113–3128。[2] R. H. Fox, *Knots and periodic transformations*, 1962年, Topology of 3-manifolds and related topics (Proc. The Univ. of Georgia Institute, 1961年), 第 177–182 页。[3] A. Kawauchi, *A survey of knot theory*, Birkh¨ auser Verlag, 巴塞尔, 1996年。[4] C. Lamm, *Symmetric diagrams for all strongly invertible knots up to 10 crossings*, arXiv:2210.13198。[5] W. B. R. Lickorish, *An introduction to knot theory*, 数学研究生教材, 第 175 卷。施普林格出版社, 纽约, 1997年。[6] C. Livingston 和 A. H. Moore, KnotInfo：纽结不变量表, knotinfo.math.indiana.edu, 今天的日期（例如, 2022年12月3日）。[7] J. W. Morgan 和 H. Bass, *The Smith conjecture*, 《纯粹与应用数学》, 第 112 卷, 学术出版社, 奥兰多, 佛罗里达州, 1984年。[8] D. Rolfsen, *Knots and links*, 数学讲座系列, 第 7 卷。Publish or Perish 公司, 休斯敦, 得克萨斯州, 1990年。[9] M. Sakuma, *On strongly invertible knots*, 代数与拓扑理论（城崎, 1984年）, 176–196, 纪伊国屋, 东京, 1986年。[10] P. A. Smith, *Transformations of finite period II*, 《数学年刊》(2) **40** (1939年), 690–711。

Department of Pure and Applied Mathematics, School of Fundamental Science and Engineering, Waseda University, 3-4-1 Okubo, Shinjuku, Tokyo 169-8555, Japan*Email address*: jun15@fuji.waseda.jp