arXiv:2304.00550v1 [math.MG] 2 Apr 2023

赋范空间中的费马–托里拆利问题

Daniil A. Ilyukhin

摘要

本文研究了经典费马–托里拆利问题向任意有限维赋范空间的推广。本文得出了固定空间中任意 n 个点的费马–托里拆利问题的解具有唯一性的充要条件，并给出了适用于赋范平面和三维空间的更精确条件。此外，还给出了在由正多面体确定的范数中应用该判据的实例。

1 引言

在度量空间中，寻找一个点使其到给定点集的距离之和最小，这一问题最早见于17世纪。1643年，费马提出了欧几里得平面上三个点的问题；同一世纪，托里拆利给出了该问题的一个解（[4]）。

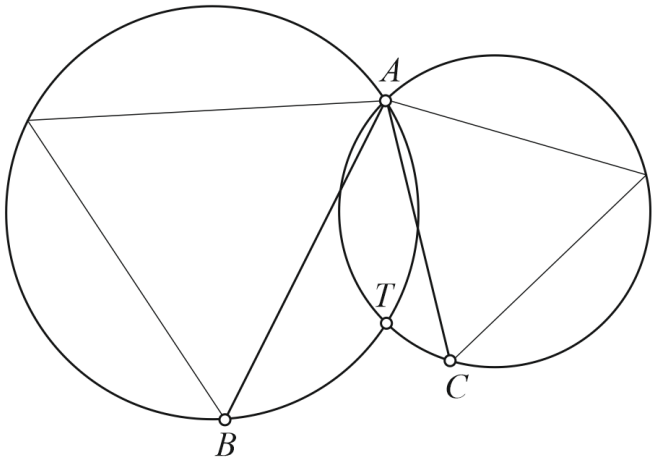


图1：托里拆利提出的设计。点 T 是给定点 A, B, C 的问题的解（[15]）

此后，人们研究了这一问题的各种推广形式。该问题被推广到任意数量的点、空间的维数，以及该空间中给定的范数。其表述简单，因此我们甚至可以在

任意度量空间中考虑这一问题。例如，D. Fagnano（[3], [12]）解决了欧几里得平面上四个点的情形。对于五个点的情形，研究证明该问题无法用根式求解，证明见 [1] 和 [6]。此外，还有一种推广问题，其中顶点还附带一些称为权重的正值。关于加权问题的发展，可参阅文献 [16], [17], [14]。特别是，研究者证明了欧几里得平面上三个点情形下此类问题的解存在且唯一（[12]）。

本文将讨论该问题的经典版本：在度量空间某个子集的元素中，寻找一个使其到这些元素的距离之和达到最小值的点。我们将这种表述称为广义费马–托里拆利问题 （或简称费马–托里拆利问题</*style*）。本文以文献为基础，该文献介绍了几何方法在这一问题中的应用，并给出了在实有限维赋范空间（称为闵可夫斯基空间）框架下获得的一些新结果。

本研究旨在为任意闵可夫斯基空间中任意 n 个点的费马–托里拆利问题，找出解唯一的充要条件。

我谨向我的导师、物理数学博士、教授 A.A. Tuzhilin，以及物理数学博士、教授 A.O. Ivanov 表达感谢，感谢他们提出这一问题并始终关心本研究。

2 费马–托里拆利问题及其求解方法

本节中的所有陈述均针对闵可夫斯基空间表述，因此不再另行说明。

定义 2.1。 若点 x_0 使 $x = x_0$最小化$\sum_{i=1}^{n} |xx_i|$，则称 x_0 为点 $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ 的费马–托里拆利点 。所有此类点构成的集合记为 ft(*A*)。

根据函数 $\sum_{i=1}^{n} |xx_i|$ 的性质，可以得到关于费马–托里拆利问题的解集的如下结论，参见例如 [5]。

命题 2.2。 设 $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ 为空间中的点，则$\mathrm{ft}(A)$ 是一个非空、紧致且凸的集合。

我们给出两个在平面上求解费马–托里拆利问题的例子。图 2 展示了一个等边三角形的顶点，先是在欧几里得平面中，然后是在由正六边形给出的范数下。在第一种情况下，解集仅包含一个点，该点的构造方式使其与指向三角形各顶点的射线之间的角相等。在第二种情况下，我们指定给定集合中各点的位置：其中一个点位于原点，另外两个点位于单位圆上相邻的顶点处。在这种条件下，解集将包含所构造三角形的所有点，包括内部和边界。

现在将介绍构造费马–托里拆利问题解的几何方法。使用该方法时，除了原空间 X，还必须考虑其对偶空间 X^*，该空间由线性泛函组成。

定义 2.3. 泛函 $\varphi \in X^*$ 称为向量 $x \in X$ 的范数化泛函，如果 $\|\varphi\| = 1$ 且$\varphi(x) = \|x\|$ 。

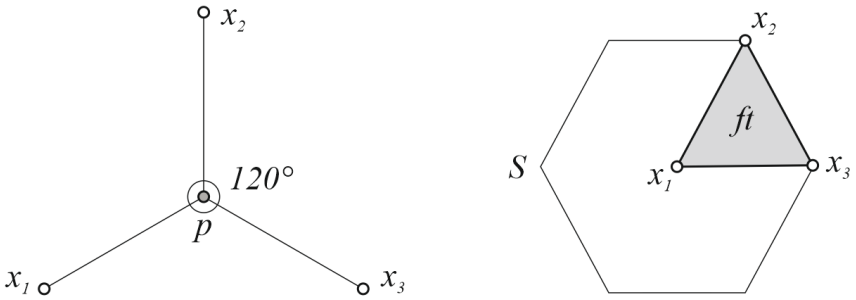


图 2：欧几里得平面和 λ-平面上的费马–托里拆利问题解示例

容易看出，将向量 x 乘以正数 k 得到的空间 X 中的元素具有相同的范数化泛函集合。也就是说，这类泛函的集合可以用单位球面上的点来描述。考虑某个赋范平面上的范数化泛函。

图 3 显示了单位圆 S 的一段弧，其中同时包含扁平弧段和光滑弧段。我们来构造从原点出发、终点落在 S 上的向量的范数化泛函。在点 z 处，单位圆只有一条支撑直线，因此对应的向量有唯一的范数化泛函 φ_4，其等值线与这条支撑直线重合。内部扁平点 xy 对应的向量也有唯一的范数化泛函。在点 x 处，单位圆有不止一条参考直线。每条参考直线都定义一个范数化泛函，也就是说，终点位于 x 的向量有无穷多个范数化泛函。泛函 φ_1 和 φ_2 由参考直线的极限位置给出，而 φ_3 则是任意一个。

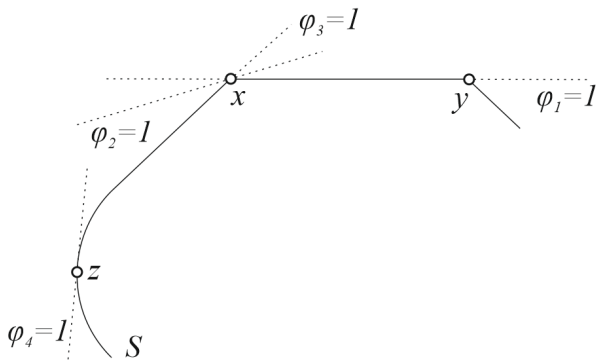


图 3：沿单位圆的支撑直线构造范数化泛函

下面的定理给出了某个点属于费马–托里拆利问题解集的判据。

定理 2.4 ([7], [10])。 设 $x_0, x_1, ..., x_n$ 是空间中的点，且 $x_0 \neq x_i$ 对于 $i = 1, ..., n$。那么，当且仅当每个向量 $x_i - x_0, i = 1, ..., n$ 都有一个范数化泛函 φ_i 使得 $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i = 0$ 时，x_0 是 $A = \{x_1, ..., x_n\}$ 的费马–托里拆利点。

下面给出一个在欧几里得平面上应用该定理的最简单例子。考虑圆周上的三个点，它们彼此等距，并假设坐标原点是这些点对应的费马–托里拆利问题的解。对于每个点x_1， x_2， x_3 ，都存在唯一一条支撑直线，它是某个泛函的等值线 $\varphi_i = 1$ 。这三条构造出的直线构成一个等边三角形，且与原点等距，因此它们所定义的泛函之和等于零。根据 2.4 定理，点 $p = 0$ 属于解集。

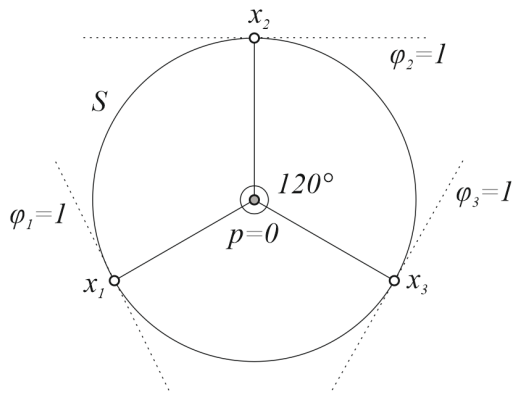


图 4：坐标原点属于点 x_1， x_2， x_3的解集

假设已找到一个点，它是集合 A的一个解。现在，利用 2.4 定理中的泛函，我们可以构造整个集合 ft(A)。为此，我们引入一个新对象。

定义 2.5。 设泛函 $\varphi \in X^*$ 和点 $x \in X$ 已知。定义 锥 $C(x, \varphi) = x - \{a : \varphi(a) = \|a\|\}$。

我们来看两个在曼哈顿平面上构造锥的例子（图5）。设泛函 φ_1 由与单位圆相交于一点的支撑直线给出， φ_2 为包含扁平部分的直线。集合 $\{a : \varphi_1(a) = \|a\|\}$ 是一条从原点出发并经过该点的射线。对于第二个泛函，这将是一组与所有扁平点相交的射线。在这两种情况下，我们接着将构造出的集合关于坐标原点作反射，再通过平移将其移动，使顶点落在给定的点上。

定理 2.6 ([7])。 设 $A = \{x_1, ..., x_n\}$ 为空间中的点，且 $p \in \mathrm{ft}(A) \setminus A$。根据 *2.4* 定理，对每个向量 $x_i - p, i = 1, ..., n$，都存在一个范数化泛函 φ_i，使得 $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i = 0$。于是 $\mathrm{ft}(A) = \cap_{i=1}^{n} C(x_i, \varphi_i)$。

2.4 定理和 2.6 定理构成了一种求解费马–托里拆利问题的几何方法。为了说明该定理的应用，我们更详细地考察一个例子：在六边形范数下，给定一个等边三角形的顶点（图6）。

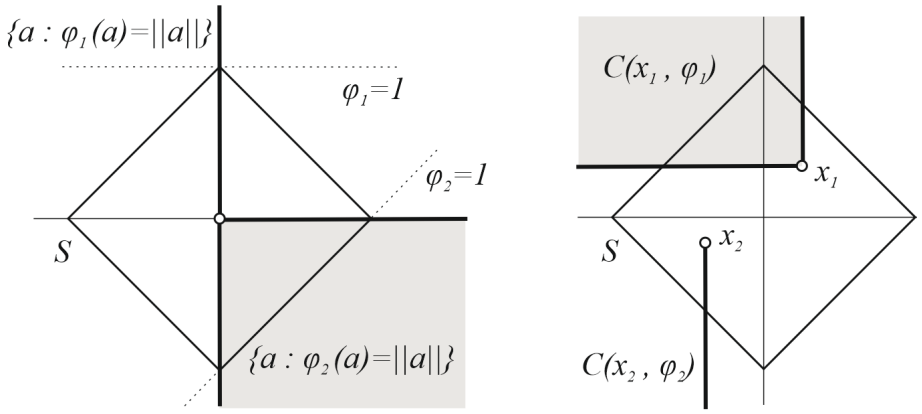


图5：在曼哈顿平面上构造锥

首先，我们至少求出一个解。取 $p = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$，并运用 2.4 定理证明 $p \in \text{ft}(A)$。为此，考虑向量 $x_1 - p$，$x_2 - p$，$x_3 - p$，并构造它们的赋范泛函。由于这些向量方向相同，且其方向上有内部扁平点，因此对每个向量 $x_i - p$，恰有一个泛函 φ_i 的等值线包含相应的扁平点。这些扁平部分到原点的距离相等，并构成一个等边三角形；因此，由它们构造的泛函之和为零，定理的条件得以满足。

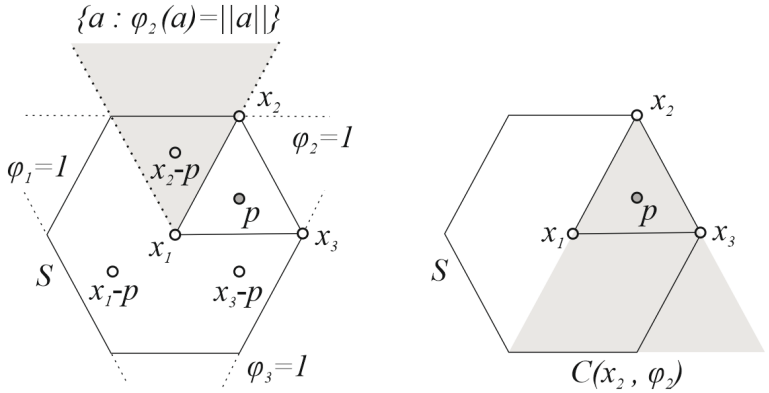


图6：在具有六边形范数的平面上，为点 x_1、x_2、x_3 构造完整的解集

现在让我们用 2.6 定理找出所有解。我们根据泛函 φ_2 和向量 $x_2 - p$构造一个锥。由于该泛函对所有扁平点都是范数化的，因此集合 $\{a : \varphi_2(a) = \|a\|\}$ 是从原点发出并经过扁平点的射线集合，也就是说，它是一个两边分别包含两个相邻顶点的角。现在我们将这个角

关于原点作反射，并进行平移，使角的顶点落在点 x_2处。类似地构造另外两个锥后，我们得到它们的交集就是整个三角形 $x_1x_2x_3$。

注 2.7。 2.6 定理的陈述不取决于点 p 和泛函 φ_i的选择。

几何方法给出了费马–托里拆利问题在各种给定点集上的解的一般描述——这些解是以该点集中的各点为顶点的若干锥的交集。对于平面情形，这一观察使我们能够表述以下结论：

命题 2.8 ([13]). 设空间中点集 $A = \{x_1, ..., x_{2k+1}\}$ 按编号顺序位于同一条直线上。则 $\mathrm{ft}(A) = \{x_{k+1}\}$。若 $A = \{x_1, ..., x_{2k}\}$，则$\mathrm{ft}(A) = x_kx_{k+1}$。

3 唯一性判据

3.1 维数为 d的空间中 n 个点的判据

设 X 是一个维数为 d的闵可夫斯基空间。在 X 中，我们针对n 个点提出费马–托里拆利问题。若 $x_i \in X, 1 \le i \le n$，则解为集合 ft$(x_1, \dots, x_n)$，其中包含所有使函数 $\sum_{i=1}^{n} |xx_i|$ 达到最小值的点 $x \in X$ 。

考虑空间 X的单位球面 S 。

定义 3.1。面是单位球面与某个支撑超平面的交集。若一个面的点的线性张成是维数为 k的子空间 X ，则称该面为（$k-1$）维。

定义 3.2。取闵可夫斯基空间的单位球面 S 的有限个面。对其中每个面，我们选取一个支撑超平面 π_i ，使其与 S 的交集仅为该面。设超平面 π_i 定义了某个线性泛函 φ_i的等值面 $\varphi_i = 1$ 。若存在一组支撑超平面，使构造出的泛函之和等于零，则称这组面为相容的。

根据定义，若从相容集的每个面中各取一个点，就得到一组点，其中 $x = 0$ 是费马–托里拆利问题的一个解。根据集合中各面的维数及其相互排列方式，可以得到各种类型的解，包括唯一解和非唯一解。事实证明，在空间 X 中寻找一组具有非唯一解的点的问题，等价于该空间中存在一组具有特定性质的相容面集。

定理 3.3。 设 X 是一个维数为 d的闵可夫斯基空间。

如果 $n \ge 3$ 是奇数，那么在空间 X 中，存在 n 个点，使得费马–托里拆利问题的解不唯一，当且仅当 X 具有一组相容的 n 个单位球面的面S ，并满足以下条件：

- 这个相容集中所有面的线性张成的交集包含一条直线。

如果 $n \geq 4$ 是偶数，那么在空间 X 中，对于任意 n 个不共线的点，费马–托里拆利问题的解唯一，当且仅当单位球面是严格凸的。

证明。令 n 为奇数。

充分性。我们来证明，若存在这样的相容集 A，则存在一组点，使得费马–托里拆利问题的解不唯一。从每个面中取一个内点。记这些点为 x_1、.....、x_n。根据 2.4 定理，点 $x = 0$ 是其中一个解。根据 2.6 定理，完整的解是从各顶点出发且包含点 $x = 0$的锥的交集。此外，一个 $(k+1)$ 维锥从 k 维面伸出。根据假设，存在一条直线 l，它属于 A 中任意面的线性张成，也就是说，属于任意锥的线性张成。因此，这些锥中的每一个都包含直线 l上点 $x = 0$ 的某个一维邻域。所以，所有锥的交集也包含一个零点的邻域。该解不唯一。

必要性。设空间 X 包含 n 个点 x_1、.....、x_n，使得费马–托里拆利问题的解不唯一。设点 p 属于该解集。那么，对于这些点 $x_i - p$，解也不唯一，且 $x = 0$ 是其中一个解。根据 2.6 定理，集合 ft($x_1 - p$、.....、$x_n - p$) 是若干个锥 C_1、.....、C_n 的交集，这些锥以点 $x_i - p$为顶点。考虑构造这些锥所用的范数化泛函，即单位球面与支撑超平面 $\varphi_i = 1$的交集。我们得到 n 个面，它们显然构成一个相容集。由于解不唯一，且解集是若干个锥的交集，因此它包含一条含有 $x = 0$ 的非空线段。每个锥也都包含这条线段。于是，该锥的线性张成包含一条经过这条线段的直线。因此，所有这些面的线性张成的交集包含一条直线。

设 n 为偶数。

设范数严格凸。则对于任意 n个点，费马–托里拆利问题的解是顶点位于这些点的一维锥的交集。由于这些顶点不在同一条直线上，这些锥只能交于一点，也就是说，解总是唯一的。

设单位球面包含一个不止一个点的面。在其中任取 $\frac{n}{2}$ 个互不相同的内点 x_1，.....，$x_{\frac{n}{2}}$。考虑 $\pm x_1$，.....，$\pm x_{\frac{n}{2}}$的解集。对于每个点，我们定义一个泛函，其等值面是一个参考超平面，该超平面定义了该点所属的面。由于这些面彼此相对且包含相同数量的点，所有泛函之和等于零。根据定理，2.4 $x = 0$ 是其中一个解。完整的解集是这些锥的交集。所有锥的维数相同，位于同一个维数相同的子空间内，并且都包含点 $x = 0$ 作为内点。因此，所有锥的交集包含对应维数的零点某个邻域。该解并不唯一。

该定理已得到证明。 □

注 3.4. 由于整个空间是最大维数的一个面的线性张成，在定理的条件中只需考虑非极大面的交集。因此，若相容集仅由极大面组成，则附加条件自动满足。

如果空间 d 的维数等于 2 或 3，则可以进一步细化该等价条件。下面我们将更详细地考察这两种情况。

3.2 平面上 n点的判据

设 X 为闵可夫斯基平面。 X中的 n 个点的费马–托里拆利问题如下提出。单位圆 S 只有两类面。我们将它们称为点和平坦部分。

命题 3.5。 如果在 X 中存在一个由 n个平坦部分组成的单位圆面相容集，那么在该平面上存在点 x_1、.. .、 x_n，使得集合ft(x_1、.. .、 x_n) - 是一个非退化多边形。

证明。 设 $x_1, \dots, x_n$是相容集中的内部平坦点。然后，根据 3.2 的定义取泛函 $\varphi_1, \dots, \varphi_n$，由定理 2.4 可得 $p = 0$属于 ft($x_1, \dots, x_n$)。根据 2.6 定理，ft($x_1, \dots, x_n$)是从点 $x_1, \dots, x_n$出发的锥的交集。由于所有泛函都包含平坦部分，因此所有锥都是非退化角。此外，由于点 x_i 不是平坦部分的边界，每个锥都包含零点的某个满维邻域。因此，交集处的锥构成一个多边形。

□

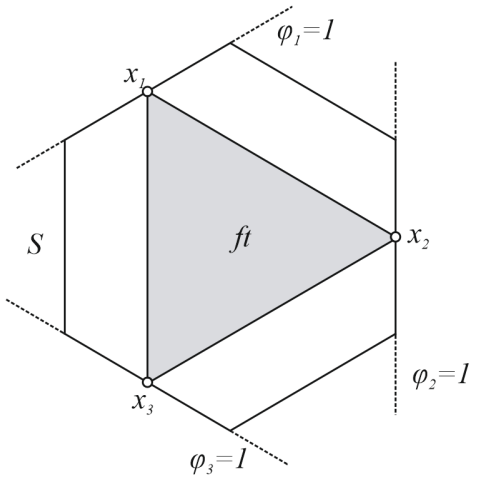


图 7： $n = 3$的第一个非唯一性条件

命题 3.6. 若在 X 中存在一个由 $n - 1$个扁平点和一个点组成的单位圆相容的面集，则在此平面内存在 $x_1, \dots, x_n$，使得解集ft($x_1, \dots, x_n$) 是一个非退化线段。

证明。 设点 $x_1, \dots, x_{n-1}$是内部平坦点， x_n是相容集中的一个点。与前一个证明类似，我们得到 $p = 0$属于 ft($x_1, \dots, x_n$)。从 $x_1, \dots, x_{n-1}$出发的锥包含原点的一个邻域，并且一条射线从点 x_n出发并穿过原点。因此，在交集处我们得到一个非退化线段。

□

命题 3.7。 设 $2 \le k \le n - 1$。若在 X 中存在一个由 k 个平坦部分和 $n - k$ 个点组成的单位圆的相容的面集，且这些点的线性张成是一条直线，则

该平面中存在 $x_1, \ldots, x_n$，使得解集 $\mathrm{ft}(x_1, \ldots, x_n)$ 是一条非退化线段。

证明。设 $x_1, \ldots, x_k$ 为内部平坦点，$x_{k+1}, \ldots, x_n$ 为相容集中的点。由 3.2 的定义得到的泛函 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ 满足 2.4 定理，且点 $x = 0$ 属于 ft($x_1, \ldots, x_n$)。根据 2.6 定理，解 ft(x_1, x_2, x_3) 是 k 条包含原点且位于同一直线上的射线与 $n - k$ 个非退化角的交集，其中每个角都包含零点的一个邻域。由此得到一条线段。 □

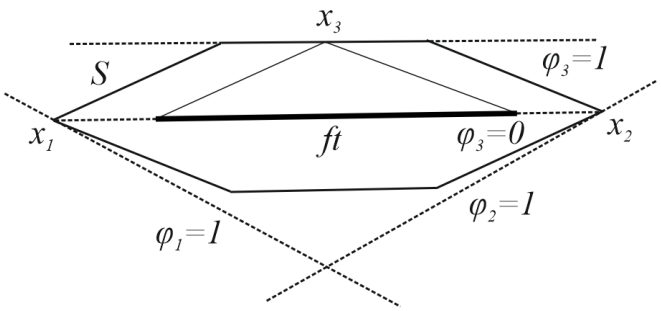


图 8：关于 $n = 3$ 的第三个非唯一性条件

定理 3.8。若 $n \geq 3$ 为奇数，则在赋范平面中，对于任意 n 个点，费马–托里拆利问题的解唯一，当且仅当单位圆的任意相容的面集至多包含 $n - 2$ 个平坦部分，且面点的线性张成的维数等于2。

若 $n \geq 4$ 为偶数，则在赋范平面中，当且仅当范数严格凸时，对于任意 n 个不在同一条直线上的点，费马–托里拆利问题的解唯一。

证明。在这两种表述中，必要性均由命题 3.5、3.6 和 3.7 得出。下面证明充分性。设 n 为奇数，且存在点 $x_1, \ldots, x_n$，使得费马–托里拆利问题的解不唯一。由于解是锥的交集，因此它要么是多边形，要么是线段。若为多边形，则所有锥都是非退化角。考虑定义这些锥的泛函。它们的等值线包含单位圆的平坦部分，而这些平坦部分显然构成相容的面集。

线段可以由至少一个非退化角与位于同一直线上的射线相交得到。若所有锥都是射线，则 x_i 的所有点都位于同一直线上，但根据命题 2.8，此时解唯一。类似地，我们考虑定义这些锥的泛函。由于所有退化锥都位于同一直线上，单位圆与这些泛函的等值线的交点也位于同一直线上。也就是说，相容集中的点的线性张成等于 1。

当 n 为偶数时，该结论可由 3.3 定理推出。

□

3.3 三维空间中 n点的判据

设 X 为三维闵可夫斯基空间。 n 个点的费马–托里拆利问题在 X 中提出。

定理 3.9. 若 $n \geq 3$ 为奇数，则在三维闵可夫斯基空间中存在 n 个点，使得费马–托里拆利问题的解不唯一，当且仅当 X 包含单位球面 S 的 n 个面构成的相容集，且该相容集满足以下条件：

- 该相容集中所含面点的线性张成的交集包含一条直线，
- 对于该相容集中所含的任意一对面点和线段面，它们的线性张成的维数为2，
- 该相容集中所含线段面的线性壳的交集包含一条直线。

若 $n \geq 4$ 为偶数，则在三维闵可夫斯基空间中，对于任何不共线的 n 个点，费马–托里拆利问题的解唯一，当且仅当范数严格凸。

证明。 设 n 为奇数。

充分性。设存在一个相容集，其中有 n 个面，且所有条件均得到满足。我们来构造给定各面的内点集的费马–托里拆利问题的一个解。根据 2.4 定理，点 $x = 0$ 属于该解。完整的解是从顶点出发并以 $x = 0$ 为内点的若干锥的交集。

设该相容集包含面点。此类面的线性张成是一条直线，该直线包含该面本身的点以及 $x = 0$。根据对相容集施加的第一个条件，这条直线对其所有点都相同。记这条直线为 l。所有从面点出发的一维锥的交集包含一条位于 l 中且以 $x = 0$ 为内点的非空线段。

第二类面的线性张成是平面，其中包含从这些元素出发的二维锥。根据假设，每个这样的平面都包含所有点面，因此也包含它们所在的直线 l。存在一条位于 l 中且以 $x = 0$ 为内点的非空线段，它位于每个二维锥中。由此可知，所有一维锥和二维锥的交集至少包含一条线段。若相容集中没有面点，则根据假设，我们取任意一条位于这些平面交集处的直线作为 l 。

由于三维锥的交集包含点 $x = 0$ 的某个满维邻域，它们与所得线段的交集并不唯一。也就是说，所有锥的交集至少包含一条线段。充分性已得证。

必要性。设空间 X 包含 n 个点 $x_1, \ldots, x_n$，使得费马–托里拆利问题的解不唯一。设点 p属于该解。则点 $x_i - p$ 的解也不唯一，且 $x = 0$ 是其中一个解。根据 2.6 定理，集合 ft($x_1 - p, \ldots, x_n - p$) 是若干个从点$x_i - p$出发的锥 $C_1, \ldots, C_n$的交集。我们来考察构造这些锥所用的赋范泛函，即单位球面与支撑平面 $\varphi_i = 1$的交集。由此得到一个相容的单位球面的面集。我们来确定这个面集满足哪些条件。

所有从点面出发的一维锥都必须位于同一条直线上，否则它们的交集将只包含点 $x = 0$。换句话说，这些面的线性张成的交集就是这条直线。设这条直线为 l。

二维锥由线段面产生。由于解不唯一，设它们的交集包含一条含有 $x = 0$ 的非空线段。再设该线段属于直线 l，前提是相容集包含点且构造了这样一条直线。那么，任一线段面的线性张成，即包含相应锥的平面，都包含这条包含该线段的直线。我们发现，线段面的线性张成的交集包含一条直线。若存在面点，这条直线就是 l。因此，包含线段面的平面也包含任一面点。也就是说，任意一对面点和线段的线性张成的维数为 2。相容集的所有条件均得到满足。

偶数 n 的情形可由 3.3 定理得出。

□

4 R正多面体与三维赋范空间 es

文章 [9] 展示了判据在线段面上的应用——由正多边形定义的赋范平面。考虑某些三维空间中的问题。

假设 4.1。 正多面体只有五种：四面体、立方体、八面体、二十面体和十二面体。其中四种（除了四面体）决定了三维空间中的范数。

让我们检验在给定空间中，任意三个点的费马–托里拆利问题的解是否唯一。为此，需要研究这些空间中存在的相容面集。

引理 4.2。 如果闵可夫斯基空间的单位球面的三个面构成一个相容集，那么它们两两不相交。

证明。 相容集中的每个面都对应一个泛函，其等值面包含给定的面。所有这些面的泛函之和等于零。如果其中两个面有公共点，那么它们的泛函在该点处的值之和等于 2。于是第三个泛函在该点处取值为 -2，因此它不是范数化的。矛盾。

□

命题 4.3. 在由正立方体定义的赋范空间中，存在三个点，使得费马–托里拆利问题的解不唯一。此外，如果解不唯一，那么它是一条线段。

证明. 设 X 为所考虑的空间。在 X 中考察相容集的所有可能情况。

设 X中有一个相容集，且其中至少有两个是二维面。根据 4.2 引理，这两个面没有公共点。因此，它们互为对面，其泛函之和等于零。但这样一来，第三个泛函也为零。矛盾。

设相容集恰好包含一个二维面。它与另外两个面都没有公共点。如果剩下的两个面是立方体棱，那么它们属于相对的那个二维面，彼此不相邻。对应于二维面的泛函在两条棱上都取值 -1。于是，另外两个泛函在另一条棱上各自取值为零。这意味着它们的等值平面与立方体的相邻面成 45 度角。这些平面相交于一条直线，在这条直线上，两个泛函之和

等于 2。然而，第一个泛函在这条直线上取值 $-\frac{3}{2}$。泛函之和不等于零，矛盾。第二个和第三个面也不可能是一个棱和一个点，或两个点，因为在这种情况下，它们的线性张成不包含一条直线，而判据条件要求其包含一条直线。

设匹配集由三条棱组成。如果其中任意两条棱属于同一个面，那么第三条棱必然属于与之相对的面。设第三条棱与前两条中的一条对称。这样，问题就归结为为正方形的三个顶点构造泛函，该正方形定义了平面上的范数。这样的泛函确实存在。令与对称顶点对应的泛函的等值线在正方形对角线的延长线上相交于范数为 2 的点。第三个泛函的等值线则经过剩下的顶点，并垂直于这条对角线。此时，泛函之和等于零。立方体棱对应的泛函也可用类似方法构造。这些棱的线性包壳的交集是一条直线。在这些棱上任取三个内点，所得解中就有一条位于该直线上的非空线段。

如果第三条棱不与其他棱平行，那么所有棱的直线张成的交集是一个点。如果没有两条棱属于同一个面，那么它们的线性包络仍交于一点。判据条件不成立。

如果一个相容集由两条棱和一个点组成，那么该点必须与每条棱都位于同一个二维子空间中。在这种情况下，该点必定是两条棱之一的端点。如果一个相容集由一条棱和两个顶点组成，那么通过这两个顶点的直线就是立方体的对角线，它必须与这条棱位于同一平面内，但不存在这样的棱。

因此，in X 中只存在由三条平行棱组成的相容集，而解 of 费马—托里拆利问题要么是一个线段，要么是一个点。命题得证。

□

命题 4.4. 在由正八面体确定的赋范空间中，对于任意三个点，费马—托里拆利问题的解是唯一的。

证明。 在单位球面为正八面体的赋范空间中，坐标为 $a = (x, y, z)$ 的点的范数由公式 $\|a\| = |x| + |y| + |z|$ 给出。因此，对于点$a_i = (x_i, y_i, z_i)$ 和点 $a = (x, y, z)$，我们有

$$\sum_{i=1}^{n} |aa_i| = \sum_{i=1}^{n} \|a - a_i\| = \sum_{i=1}^{n} (|x - x_i| + |y - y_i| + |z - z_i|) = \sum_{i=1}^{n} |x - x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y - y_i| + \sum_{i=1}^{n} |z - z_i|$$

也就是说，该问题归结为一维问题；根据 2.8，位于同一直线上的三个点的解是唯一的。断言得证。

□

命题4.5。 在由正十二面体确定的赋范空间中，存在三个点，使得费马–托里拆利问题的解不唯一。此外，若解不唯一，则该解为一条线段。

证明。 考虑 X 中相容集的所有可能变体。为方便起见，我们为十二面体的元素引入记号和表述。f_i 用于表示二维面。属于面 f_i, f_j 的棱记作 $e_{i,\ j}$；属于面 f_i, f_j, f_k 的顶点记作 $v_{i,\ j,\ k}$。面 f_1 和 f_{12} 分别称为顶面和底面。

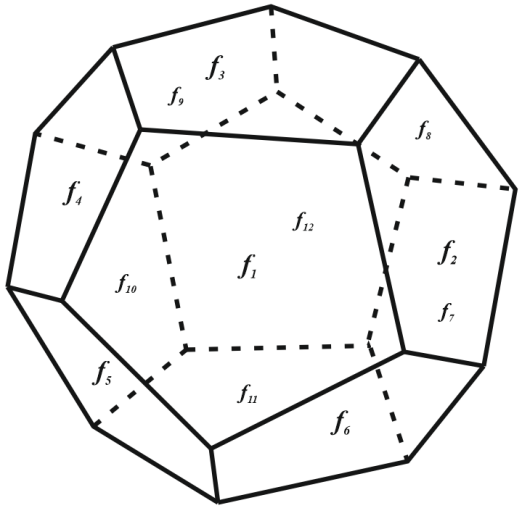


图9：正十二面体在三维空间中确定范数

如果边和顶点不与顶面和底面相交，则它们属于十二面体的赤道。

假设相容集至少包含两个二维面。根据 4.2 引理，它们不能相邻且相对，因此我们假设这两个面是 f_1 和 f_7。如果相容集的第三个元素也是二维面，那么它只能是 f_9 或f_{10}。由于它们相对于前两个面的位置对称，因此它们要么同时使这两个面构成相容集，要么同时不能使其构成相容集。但如果它们能使其构成相容集，那么它们的泛函必须相同，而事实并非如此。

令第三个元素为一条棱。除 $e_{9,\ 10}$ 之外，所有棱相对于所考察的两个面都对称，因此不能包含在相容集中。棱$e_{9,\ 10}$ 的泛函在顶点 $v_{2,\ 6,\ 7}$处等于 -1 。在同一顶点处， f_7 的泛函等于 1，但 f_1 的泛函不等于零。泛函之和不等于零。

设第三个元素是一个顶点。与前面的推理类似，只需检查顶点 $v_{4、9、10}$。在这种情况下，在顶点 $v_{2、6、7}$ 处，泛函之和同样不等于零。

考虑相容集包含单个面 f_1 的情形。设另外两个元素是棱。如果其中一条棱属于底面，那么第二条棱的泛函的零水平集会经过该棱。但在这种情况下，它是与顶面相邻的棱之一，这与 4.2 引理矛盾。设其中一条棱连接赤道和底面。但此时，任意一条剩余的棱相对于所考虑的面和棱都是对称的，因此无法与它们组成相容集。因此，两条棱都必须属于赤道，并且关于中心对称。经过这两条棱的平面是 f_1 面泛函的零水平集，但它与该泛函不平行，这是不可能的。

设面 f_1 由位于同一平面内的一条棱和一个顶点补充。由赤道上的棱所定义的子空间只包含作为该棱端点的顶点以及对面的棱。这些子空间中的每一个都关于自身对称。同样，底面的棱也

不能包含在相容集中。底面与赤道之间存在棱。只需检查棱$e_{8,\ 9}$ 以及顶点 $v_{5,\ 6,\ 11}$即可。在这种情况下，在连接顶点 $v_{5,\ 6,\ 11}$ 和 $v_{3,\ 8,\ 9}$ 的直线上，面泛函 f_1 等于零。但是，这条直线不平行于面的平面。矛盾。

如果面 f_1 由两个对称顶点补全，那么它们必定是赤道上的一对顶点。但是，经过这两个顶点的直线并不平行于面的平面。这与面泛函在这条直线上的值必须为零相矛盾。

有些相容集的变体不包含任何一个面。假设某个相容集由三条棱组成，且其子空间的交集至少包含一条直线。设其中两条棱互为对棱，例如 $e_{1,\ 4}$ 和 $e_{7,\ 12}$。它们共有的二维子空间确定了第三条棱泛函的零水平集。只有棱 $e_{2,\ 6}$ 和 $e_{9,\ 10}$ 平行于这个平面。它们互为对称，因此只需考虑第一条棱。

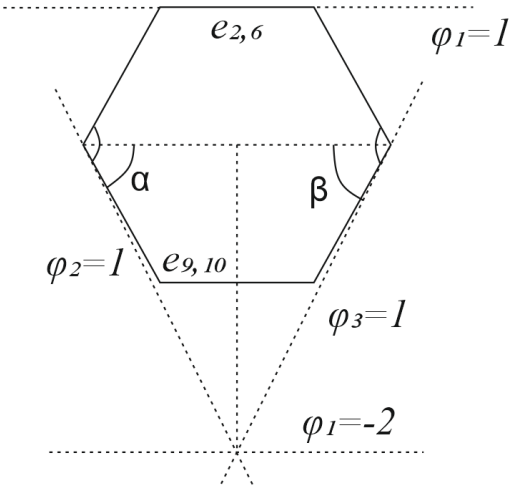


图 10

设泛函 φ_1 的水平集经过棱 $e_{2,\ 6}$，并与相邻面成相等的二面角。泛函水平集 φ_2 和 φ_3 分别包含棱$e_{1,\ 4}$ 和 $e_{7,\ 12}$ 。在这两条棱所在的平面内，两个泛函之和等于零。现在考虑一个平面，该平面经过棱 $e_{2,\ 6}$ 以及棱$e_{1,\ 4}$ 和 $e_{7,\ 12}$的中点。正十二面体被此平面截出的截面如图 10 所示。由于两个泛函之和等于零，等值线 $\varphi_2 = 1$ 和 $\varphi_3 = 1$ 的交点属于直线 $\varphi_1 = -2$。设 α 为水平集 $\varphi_1 = 0$ 与该面之间的二面角， β 为水平集 $\varphi_1 = 0$与 $\varphi_2 = 1$之间的角。如果 $\beta > \alpha$，则这样的泛函存在，相应棱所构成的相容集也存在。我们将证明情况确实如此。角 α 是正十二面体二面角的一半，即

$$\alpha = \frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

长度　　边的长度 $e_{2,\ 6}$ 和 $e_{9,\ 10}$ 等于 $a = 1$。其余边的长度为.....　　he

截面中所形成的六边形的其余边长等于正五边形的高，即 $b = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}$。求斜边为 b 且锐角为 α 的直角三角形的两条直角边：

$$c = b\cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}, d = b\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}$$

现在我们可以计算角 β 的正切：

$$\tan\beta = \frac{2d}{c+\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}+\frac{1}{2}} = 2$$

由于 $\arctan 2 > \frac{1}{2}\arccos(-\frac{1}{\sqrt{5}})$，因此 $\beta > \alpha$，而十二面体的边构成一个相容集。由于由这三条棱确定的二维子空间沿一条直线相交，因此该集合给出了费马–托里拆利问题的非唯一解，而且这些解都位于某条直线上，也就是线段。

如果十二面体的三条棱中没有一对相对的棱，那么包含这些棱的二维子空间至多交于一点。

相容的十二面体集合不可能由两条棱和一个顶点组成，因此在这种情况下，该顶点必须与每条棱都位于同一平面内。由此可知，两条棱相对，而该顶点是其中一条棱的端点，这与引理 4.2 矛盾。

此外，也不存在由一条棱和两个位于同一平面内的顶点组成的相容集。如果存在这样的集合，那么根据引理 4.2，这两个顶点就是与给定棱相对的那条棱的端点。参见图 10，假设考虑的是棱 $e_{2,\,6}$，而这两个顶点是棱 $e_{9,\,10}$ 的端点。那么，泛函 φ_2 和 φ_3 的等值线经过这两个顶点，并交于直线 $\varphi_1 = -2$。从图中可以看出，这是不可能的。

因此，十二面体的相容集只能由三条棱组成。此外，若得到非唯一的解，则解集为一条线段。该断言得证。

□

命题 4.6. 若一个三维赋范空间的单位球面为棱柱，则对任意$n \geq 2$，都存在 n 个点，使得费马–托里拆利问题的解不唯一。

证明. 考虑一个赋范平面，其单位圆与该棱柱的底面重合。在此赋范平面中，任取一个相容集及定义该相容集的泛函。在棱柱的两个底面上画出这些泛函的等值线。存在唯一一组支撑平面通过这些等值线，从而在原空间中定义了 n 个泛函。这些泛函之和为零，且这些面的线性张成包含一条直线。判据 3.9 的条件得到满足，因此该断言得证。

□

参考文献

[1] Bajaj C. 1988, “几何优化问题的代数次数”, 离散与计算几何, 3, 177–191。

[2] Bannikova A. G., Ilyutko D. P., Nikonov I. M. 2016, 《赋范空间中极值网络的长度：麦克斯韦公式》, 数学科学杂志, 214:5, 593–608。

[3] Boltyanski V., Martini H., Soltan V. 1999, 《几何方法与优化问题》, Kluwer 学术出版社。[4] Brazil M., Graham R. L., Thomas D. A., Zachariasen M. 2013, 《欧氏斯坦纳树问题的历史》。[5] Cieslik D. 1988, 《闵可夫斯基空间中的Fermat–Steiner–Weber问题》, 《Optimization》19, 485–489。[6] Cockayne E. J., Melzak Z. A. 1969, 《图最小化问题中的欧氏可构造性》, Math. Mag., 42, 206–208。[7] Durier R., Michelot C. 1985, 《Fermat–Weber问题的几何性质》, Europ. J. Oper. Res. 20, 332–343。[8] Ilyukhin D. A. 2022, 《赋范平面三点集情形下的费马–托里拆利问题》, ArXiv e-prints, arXiv:2210.04374。[9] Ilyukhin D. A. 2022, 《赋范平面三点集情形下的费马–托里拆利问题》, 《Chebyshevskii Sbornik》。第23卷第5期：72–86。[10] Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. 2002, 《赋范空间中的分支测地线》, Izvestiya: Mathematics, 2002, 66:5, 905–948。[11]Jarn´ík V., K¨ossler M. 1934, 《包含给定n个点的最小图》, ˆCas, Pˆestov´an´ı Mat. (Essen) 第63卷：223—235。[12] Kupitz Y. S., Martini H. 1997, 《广义Fermat–Torricelli问题的几何方面》, 《Bolyai Society Mathematical Studies》6, 55–127。[13] Martini H., Swanepoel K. J., Weis G. 2002, 《赋范平面和空间中的费马–托里拆利问题》, 《Journal of Optimization Theory and Applications》115, 283–314。[14] Nguyen S. D. 2018, 《实Hilbert空间中的约束Fermat–Torricelli–Weber问题》, ArXiv e-prints, arXiv:1806.04296。[15] Torricelli E. 1919, 《论最大值与最小值》。Evangelista Torricelli作品集, 意大利Faenza。[16] Uteshev A. Y. 2014, 《广义Fermat–Torricelli问题的解析解》, 《The American Mathematical Monthly》121(4), 318–331。[17] Zachos A. N. 2014, 《单位球面上加权Fermat–Torricelli问题的解析解》, ArXiv e-prints, arXiv:1408.6495。