arXiv:2304.00554v1 [math.SP] 2 Apr 2023

图的 A_α-矩阵的特征值与能量

NijaraKonch[a], A. Bharali[b], S. Pirzada[c]a, [b]印度阿萨姆邦迪布鲁加尔大学数学系[c]印度克什米尔斯利那加克什米尔大学数学系
[a]rs_nijarakonch@dibru.ac.in; [b]a.bharali@dibru.ac.in;
[c]pirzadasd@kashmiruniversity.ac.in

摘要

对于一个图 G，广义邻接矩阵 $A_\alpha(G)$是对角矩阵 $D(G)$与邻接矩阵 $A(G)$的凸组合，定义为 $A_\alpha(G) = \alpha D(G) + (1-\alpha)A(G)$，其中 $0 \le \alpha \le 1$。该矩阵被发现有助于融合图 $A(G)$的谱理论与无符号拉普拉斯矩阵 $Q(G)$的谱理论。广义邻接能量或 A_α-能量是 G的 A_α-特征值的平均偏差，定义为 $E(A_\alpha(G)) = \sum_{i=1}^{n} |p_i - \frac{2\alpha m}{n}|$，其中 p_i'是 G的 A_α-特征值。本文研究强正则图 G的 A_α-特征值。我们观察到，A_α- p_1 谱半径满足 $\delta(G) \le p_1 \le \Delta(G)$，其中 $\delta(G)$和 $\Delta(G)$分别是 G的最小度和最大度。此外，我们证明完全图是唯一恰有两个不同 A_α-特征值的图。我们根据 G的阶、边数和极值度，得到 A_α-能量的上下界。我们还讨论这些界的极值情形。

关键词：邻接矩阵； A_α-矩阵； A_α-特征值； A_α-能量

AMS学科分类（2010）：05C31，05C50

1 引言

设 $G = G(V(G)\ E(G))$ 是一个具有 n 个顶点和 m 条边的简单图，其中 $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ 和 $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ 分别是 G 的顶点集和边集。顶点 v_i 的度记为 $d(v_i)$，或简记为 d_i，其值等于与 v_i 相 incident 的边数。连接顶点 u 和 v 的边记为 uv。如果每个顶点的度都相等，则称图为正则图。对于一个阶为 n 的图 G，与 G 相关联的邻接矩阵是一个 $n \times n$ 矩阵，定义为 $A(G) = (a_{ij})$，其中，当顶点 v_i 与顶点 v_j 相邻时，$a_{ij} = 1$；否则为 0。邻接矩阵的特征值称为图的特征值。图能量的概念最早由 Gutman [9] 引入，定义为 $A(G)$ 的特征值绝对值之和。图 G 的对角矩阵 $D(G)$ 定义为 $D(G) = (d_{ij})$，其中当 $i = j$ 时，$d_{ij} = d(v_i)$（或简记为 d_i），否则为 0。如果图 G 的任意两个顶点之间都存在一条路径，则称其为连通图；否则称 G 为不连通图。

多年来，人们定义了若干与图相关的邻接类矩阵，例如拉普拉斯矩阵 $L(G) = D(G) - A(G)$、无符号拉普拉斯矩阵 $Q(G) = D(G) + A(G)$、距离矩阵、距离拉普拉斯矩阵（无符号拉普拉斯矩阵） $L^D(G)$ $(Q^D(G))$。迄今已有大量研究探讨这些矩阵的谱、能量及各种相关参数。更多详情可参见 [13, 15, 18, 20]。

Nikiforov [16] 引入了广义矩阵 $A_\alpha(G)$（若无歧义，也简称为 A_α），将 $D(G)$ 与 $A(G)$ 作凸组合，以统一邻接矩阵与无符号矩阵的谱理论，使得 $A_\alpha(G) = \alpha D(G) + (1-\alpha)A(G)$，其中 $0 \le \alpha \le 1$，并提出了该领域的诸多研究方向及开放问题。根据定义，显然有 $A_0(G) = A(G)$，$A_1(G) = D(G)$，$A_{\frac{1}{2}}(G) = \frac{1}{2}Q(G)$。

同样，Gutman 等人 [10] 引入了图的拉普拉斯能量 $LE(G)$，Abreu 等人 [1] 引入了图的无符号拉普拉斯能量 $QE(G)$，Gou 等人 [8] 将 A_α-能量定义为阶为 n、边数为 m 的图 G 的 $E(A_\alpha(G)) = \sum_{i=1}^{n} \left| p_i - \frac{2\alpha m}{n} \right|$，其中 p_i'是 G的 A_α-特征值。可见，$E(A_0(G)) = E(G)$，且 $E(A_{\frac{1}{2}}(G)) = \frac{1}{2}QE(G)$，这表明$A_\alpha$-能量融合了 $E(G)$和 $QE(G)$。关于 A_α-谱及其对应能量的更多研究，可参见 [5, 8, 11, 12, 19]。

本文其余部分安排如下。第 2 节给出一些记号和预备知识。第 3 节中，我们研究强正则图 G的 A_α-特征值。我们注意到， A_α-谱半径 p_1 满足 $\delta(G) \leq p_1 \leq \Delta(G)$，其中 $\delta(G)$和 $\Delta(G)$分别是 G的最小度和最大度，简记为 δ 和 Δ 。此外，我们证明完全图是唯一恰有两个不同 A_α-特征值的图。第 4 节中，我们根据 G的阶、边数和极值度，给出 A_α-能量的上下界。我们还讨论这些界的极值情形。

2 符号与预备知识

设 $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ 为 G 的度序列。 G 的 Zagreb 指数记为 M_1，定义为 $M_1 = \sum_{i=1}^{n} d_i^2$. 在本文中， G 中顶点的最小度和最大度分别记为 δ 和 Δ。矩阵 A 的迹是 A 的对角元之和，记为 $tr(A)$。对于一个有 n 个顶点和 m 条边的图 G，设 $p_i, i \in \{1, \ldots, n\}$ 为 $A_\alpha(G)$ 的特征值。最大特征值（记为 p_1）称为G 的 A_α-谱半径。最小特征值记为 p_n。矩阵 J 和 I 分别表示所有元素均为 1 的矩阵和适当阶数的单位矩阵。

设 G 是一个有 n 个顶点的 r-正则图。若对于 G 中任意两个相邻顶点， G 都有 $a(\geq 0)$ 个公共邻点；对于任意两个不相邻顶点， G 都有 $c(\geq 0)$ 个公共邻点，则称 G 是参数为 (n, r, a, c) 的强正则图。

以下结果将在本文中频繁使用。

引理 2.1. [16] $A_\alpha(K_n)$ 的特征值为 $p_1 = n - 1$ 和 $p_k = \alpha n - 1$，其中 $2 \leq k \leq n$。

引理 2.2. [19] 设 G 是一个阶为 n、边数为 m的连通图。那么

(i) $\sum_{i=1}^{n} p_i = 2\alpha m$(ii) $\sum_{i=1}^{n} p_i^2 = \alpha^2 M_1 + (1-\alpha)^2 2m$(iii) $\sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 = \alpha^2 M_1 + (1-\alpha)^2 2m - \frac{4\alpha^2 m^2}{n}$,

其中 $\eta_i = p_i - \frac{2\alpha m}{n}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ 是 $A_\alpha(G)$ 的辅助特征值。

引理 2.3. [17] 设 $n \geq 1$ 为整数，且 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ 为一些非负实数。那么 $\sum_{i=1}^{n} a_i(a_1+a_n) \geq \sum_{i=1}^{n} a_i^2+na_1a_n$，当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_s$ 和 $a_{s+1} = \cdots = a_n$ 对某个 $s \in \{1, \ldots, n\}$ 成立时，等号成立。

引理 2.4. [16] 设 G 为一个有 n 个顶点和 m 条边的图。那么 $p_1 \geq \frac{2m}{n}$，当且仅当 G 是正则图时，等号成立。

引理 2.5. [6] 设 B 为一个非负的 $n \times n$ 矩阵，且 $n \geq 3$，$\rho(B)$ 是 B 的最大特征值，$a = tr(B)$ 且 $b = tr(B^2)$。那么

$$\rho(B) \leq \frac{a}{n} + \sqrt{\frac{n-1}{n}\left(b - \frac{a^2}{n}\right)}.$$

引理 2.6. [4] 若 G 是一个具有 $n \geq 2$ 个顶点、m 条边且顶点度为$d_1, d_2, \ldots, d_n$的简单图，那么 $\sum_{i=1}^{n} d_i^2 \leq m\left(\frac{2m}{n-1} + n - 2\right)$。

命题 2.7. 对任意连通图，最大 A_α-特征值的重数为 1。

命题 2.8. [16] 设 $\alpha \in [0, 1)$，且 G 是任意一个连通图。设 x 是对应于最大 A_α-特征值 p_1的非负特征向量。那么 x 为正，且在相差一个比例因子的意义下唯一。

命题 2.9. [16] 对于一个图 G，$\alpha \geq \frac{1}{2}$，$A_\alpha(G)$ 是半正定的。

定理 2.10. [3] （交错定理）若 M 是一个实对称 $n \times n$ 矩阵，且令$\lambda_1(M) \geq \lambda_2(M) \geq \ldots \lambda_n(M)$ 表示其按非递增顺序排列的特征值。设 A是一个实对称 $n \times n$ 矩阵，且 B 是 A 的一个阶为 $m \times m$的主子矩阵。那么对于$i \in \{1, \ldots, m\}$, $\lambda_{n-m+i}(A) \leq \lambda_i(B) \leq \lambda_i(A)$。

定理 2.11. *[14]* 设 G 为一个具有 n 个顶点和 m 条边的连通图。则

$$M_1 \geq \frac{4m^2}{n} + \frac{(\Delta - \delta)^2}{2},$$

当且仅当 G 是正则图时，等号成立。

引理 2.12. [7] 设 G 是一个具有 n 个顶点和 m 条边的连通图。那么

$$M_1 \leq \frac{4m^2}{n} + \frac{n}{4}(\Delta - \delta)^2,$$

当且仅当 G 是正则图时等号成立。

引理 2.13. [2] 设 G 是参数为 (n, r, a, c) 的强正则图，且 A 是 G的邻接矩阵。则 $A^2 = rI + aA + c(J - I - A)$。

3 关于图的 A_α-特征值

首先，我们求得强正则图的 A_α-特征值。

定理 3.1. 若 G 是一个参数为 (n, r, a, c) 且有 m 条边的强正则图，则 A_α的特征值为

(i) r ， 重数为 1。

(ii) $\dfrac{\{2r\alpha + (1-\alpha)(a-c)\} + \sqrt{d}}{2}$ *with multiplicity*

$$\frac{1}{2}\left[(n-1) + \frac{\{2r\alpha + (1-\alpha)(a-c)\}(n-1) + 2(r - 2\alpha m)}{\sqrt{d}}\right]$$

(iii) $\dfrac{\text{具有重数的}\{2r\alpha + (1-\alpha)(\ a-c\ \} - \sqrt{d}\,)}{2}$

$$\frac{1}{2}\left[(n-1) - \frac{\{2r\alpha + (1-\alpha)(a-c)\}(n-1) + 2(r - 2\alpha m)}{\sqrt{d}}\right]$$

其中 $d = \{2r\alpha + (1-\alpha)(a-c)\} + 4\{(r-c)(1-\alpha)^2 - r\alpha(1-\alpha)(a-c)\ - r^2\alpha^2\}$。

证明。在整个证明过程中，我们用 A_α 和 D 分别表示 $A_\alpha(G)$ 和 $D(G)$。我们有

$$A_\alpha^2 = (\alpha D + (1-\alpha)A)^2 = \alpha^2 D^2 + (1-\alpha)^2 A^2 + 2\alpha(1-\alpha)DA$$

$$
\begin{aligned}
&= \alpha^2 r^2 I + (1-\alpha)^2[rI + aA + c(J - I - A)] + 2r\alpha(1-\alpha)A \\
&= \left\{\alpha^2 r^2 + (1-\alpha)^2 r - c(1-\alpha)^2\right\} I \\
&+ \left\{(1-\alpha)^2 a + 2r\alpha(1-\alpha) - c(1-\alpha)^2\right\} \frac{1}{(1-\alpha)} \left\{A_\alpha - \alpha D\right\} + c(1-\alpha)^2 J.
\end{aligned}
$$

这意味着

$$
A_\alpha^2 - \left\{2r\alpha + (1-\alpha)(a-c)\right\} A_\alpha - \left\{(r-c)(1-\alpha)^2 - r\alpha(1-\alpha)(a-c) - r^2\alpha^2\right\} I = c(1-\alpha)^2 J.
$$

由于 G 是 r-正则的，因此 r 是 A_α 的一个特征值，其对应的特征向量为 $\mathbf{1}$（即所有分量均为 $\mathbf{1}$ 的 $n \times 1$ 列向量）。设 z 是 A_α 的另一个特征向量，对应于特征值 $\theta \neq r$，且满足 $A_\alpha \theta = \theta z$。那么

$$
\begin{aligned}
&A_\alpha^2 z - \left\{2r\alpha + (1-\alpha)(a-c)\right\} A_\alpha z - \left\{(r-c)(1-\alpha)^2 - r\alpha(1-\alpha)(a-c) - r^2\alpha^2\right\} Iz \\
&= c(1-\alpha)^2 Jz = 0
\end{aligned}
$$

因此，由于 $z \neq 0$，我们有

$$
\theta^2 - \left\{2r\alpha + (1-\alpha)(a-c)\right\} \theta - \left\{(r-c)(1-\alpha)^2 - r\alpha(1-\alpha)(a-c) - r^2\alpha^2\right\} = 0 \qquad (3.1)
$$

因此， A_α 中不同于 r 且满足方程

$$
x^2 - \left\{2r\alpha + (1-\alpha)(a-c)\right\} x - \left\{(r-c)(1-\alpha)^2 - r\alpha(1-\alpha)(a-c) - r^2\alpha^2\right\} = 0
$$

为 $\{\underline{2r\alpha + \ (1-\alpha) \ (\ a-c \ }\} + \sqrt{d}$ $= \theta_1$ ）（记作）和 $\{2r\alpha + \ (1-\alpha) \ ($ $\underline{\ a-c \ \}} - \sqrt{d}$ $= \theta_2$ ）（记作），其中二次方程的判别式为

$$
d = \{2r\alpha + (1-\alpha)(a-c)\} + 4\{(r-c)(1-\alpha)^2 - r\alpha(1-\alpha)(a-c) - r^2\alpha^2\}.
$$

利用强正则图的这些给定参数，可以得到 θ_1 和 θ_2的重数。若 m_1 和 m_2 分别为 θ_1 和 θ_2 的重数，则 $m_1 + m_2 + 1 = n$ 和$m_1\theta_1 + m_2\theta_2 + r = 2\alpha m$。解这两个方程并代入 θ_1 和 θ_2，得到

$$
m_1 = \frac{1}{2}\left[(n-1) + \frac{\{2r\alpha + (1-\alpha)(a-c)\}(n-1) + 2(r - 2\alpha m)}{\sqrt{d}}\right]
$$

and

$$m_2 = \frac{1}{2}\left[(n-1) - \frac{\{2r\alpha + (1-\alpha)(a-c)\}(n-1) + 2(r-2\alpha m)}{\sqrt{d}}\right].$$

■

例如，强正则图(5, 2, 0, 1)，即5阶圈的 A_α-特征值为2、$\frac{1}{2}\left(-1+5\alpha-\sqrt{5}\sqrt{1-2\alpha+\alpha^2}\right)$、$\frac{1}{2}\left(-1+5\alpha+\sqrt{5}\sqrt{1-2\alpha+\alpha^2}\right)$，其重数分别为1、2、2。

定理3.2. 设 G 是一个度序列为 $\{d_1, \ldots, d_n\}$ 的图。对于 $0 \le \alpha < 1$， G 的 A_α-谱半径满足 $\delta \le p_1 \le \Delta$。若 G 连通，则两种情况下等号成立当且仅当 G 是正则图。

证明. 设 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ 是对应于 p_1 的非负特征向量。由于 $(\alpha D + (1-\alpha)A)x = \lambda x$，因此，对于 $1 \le k \le n$，有

$$\begin{aligned} p_1 x_k &= \alpha d_k x_k + (1-\alpha)\sum_{k\sim j} x_j \\ &\le \alpha\Delta x_k + (1-\alpha)\Delta x_k = \Delta x_k. \end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned} p_1 x_k &= \alpha d_k x_k + (1-\alpha)\sum_{k\sim j} x_j \\ &\ge \alpha\delta x_k + (1-\alpha)\delta x_k = \delta x_k. \end{aligned}$$

也就是说， $\delta x \le p_1 x \le \Delta x$，因此由命题 2.9 可得 $\delta \le p_1 \le \Delta$。若 G 连通且为 r-正则，则 $p_1 = r = \delta = \Delta$。反之，若 $p_1 = \delta = \Delta$，则

$$\delta x_k = \alpha d_k x_k + (1-\alpha)\sum_{k\sim j} x_j = \Delta x_k,\ 1 \le k \le n$$

由此得到 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 和 $d_1 = d_2 = \cdots = d_n$。因此， G 是一个正则图。 ■

设 G 是一个图，其 A_α-特征值为 β、γ、τ，对应的重数分别为 l、m、k。在本文中，我们始终用记号 $\{[\beta]^l, [\gamma]^m, [\tau]^k\}$表示它。 A_α的特征值集合（记作 A_α的谱，或称为 A_α-谱）表示为 $Spec(A_\alpha(G))$。

定理 3.3. 设 G 是一个具有 n 个顶点和 m 条边的 r-正则连通图。对于 $\alpha \in [0, 1)$，若存在一些非负整数 a 和 b，使得 $Spec\,(A_\alpha(G))=\{r, [r\alpha + (1-\alpha)]^a, [r\alpha - (1-\alpha)]^b\}$，则 $a = 0$, $b = r = n - 1$ 和 $G \cong K_{r+1}$。

证明。这里 $1 + a + b = n$，并利用引理 2.2，可得

$$r + a\{r\alpha + (1-\alpha)\} + b\{r\alpha - (1-\alpha)\} = \alpha nr$$
$$r^2 + a\{r\alpha + (1-\alpha)\}^2 + b\{r\alpha - (1-\alpha)\}^2 = \alpha^2 nr^2 + (1-\alpha)^2 nr$$

因此，化简这些方程后，我们得到 $a = 0$ 和 $b = r = n - 1$。所以， $A_\alpha(G)$的谱化为 $\{n-1, [n\alpha - 1]^{n-1}\}$。因此 $G \cong K_{r+1} = K_{\frac{2m}{n}+1}$。 ∎

定理 3.4. 对于 $0 \le \alpha < 1$，一个阶为 $n \ge 2$ 的简单连通图 G 恰有两个A_α-特征值，当且仅当 G 同构于完全图 K_n。

证明。若 $G \cong K_n$，则由引理 2.1 可知， K_n 的 A_α 谱为 $\{[n-1]^1, [\alpha n - 1]^{n-1}\}$，因此充分性部分自动成立。

反过来，若可能，设 G 有两个不同特征值，分别为 β 和 γ（其中 $\beta > \gamma$，不失一般性），且不是完全图。对于 $n = 2$，这一假设并不成立，因此结论显然成立。对于 $n > 2$， G 的连通性保证 $Spec\,(A_\alpha(G))=\{[\beta]^1, [\gamma]^{n-1}\}$。由于 G 不是完全图，它至少包含一对不同的顶点 u、$v \in V(G)$，其中$d(u) \ge d(v)$，但 $uv \notin E(G)$。因此，顶点 u 和 v 诱导出一个形如 $M = \begin{bmatrix} \alpha d(u) & 0 \\ 0 & \alpha d(v) \end{bmatrix}$ 的主子矩阵，它包含在 $A_\alpha(G)$ 中。因此，根据交错定理 2.10，有 $\gamma = \lambda_2(M) = \alpha d(v)$。此外，由于 G 连通，存在某个 $u' \in V(G)$ 使得 $u'v \in E(G)$。由此还可得到 $A_\alpha(G)$ 的另一个由u' 和 v 诱导的主子矩阵 M'，其中 $M' = \begin{bmatrix} \alpha d(v) & 1-\alpha \\ 1-\alpha & \alpha d(u') \end{bmatrix}$.

现在， M' 的特征多项式为

$$\lambda^2 - \lambda\alpha\{d(v) + d(u')\} + \alpha^2 d(v)d(u') - (1-\alpha)^2 = 0$$

这意味着

$$\lambda = \frac{\alpha(d(v) + d(u')) \pm \sqrt{\alpha^2\{d(v) + d(u')\}^2 - 4\alpha^2 d(v)d(u')}}{2}.$$

根据交错定理，我们得到 $\lambda_n(A_\alpha(G)) \leq \lambda_2(M') \leq \lambda_2(A_\alpha(G))$。因此

$$\alpha d(v) = \frac{\alpha(d(v) + d(u')) - \sqrt{\alpha^2\{d(v) + d(u')\}^2 - 4\alpha^2 d(v)d(u')}}{2},$$

这意味着

$$\alpha^2(d(v) - d(u'))^2 + 4(1-\alpha)^2 = \alpha^2(d(u') - d(v))^2,$$

这与.....矛盾，除非 $\alpha = 1$ ，由此得证。 ■

4 A_α-图能量

本节从对文献 [19] 中定理 3.1 的一个修改开始。令 $s_i = |p_i - \frac{2\alpha m}{n}|, i \in \{1, \cdots, n\}$ ，使得 $s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_n \geq 0$。因此，我们可以将 G 的 A_α-能量写为 $E(A_\alpha(G)) = \sum_{i=1}^{n} s_i$。

定理 4.1。（对 ***[19]*** 中定理 3. 1 的某种修改）若 G 是一个阶为 $n \geq 2$ 、有 $m \geq 1$ 条边的连通图，则对于 $\alpha \in [0, 1)$ ，有

$$E(A_\alpha(G)) > \sqrt{2\left(\alpha^2 M_1 + (1-\alpha)^2 2m - \frac{4\alpha^2 m^2}{n}\right)},$$

其中，连通图无法取到等号。

证明。由 $s_i = |p_i - \frac{2\alpha m}{n}|$、 $i \in \{1, \cdots, n\}$，可得

$$E(A_\alpha(G))^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} s_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} s_i^2 + 2\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} s_i s_j \tag{4.2}$$

此外,

$$2\sum_{1\le i\le j\le n} s_i s_j = 2\sum_{1\le i\le j\le n}\left|p_i-\frac{2\alpha m}{n}\right|\left|p_j-\frac{2\alpha m}{n}\right| = 2\sum_{1\le i\le j\le n}\left|\left(p_i-\frac{2\alpha m}{n}\right)\left(p_j-\frac{2\alpha m}{n}\right)\right|$$

$$\ge 2\left|\sum_{1\le i\le j\le n}\left(p_i-\frac{2\alpha m}{n}\right)\left(p_j-\frac{2\alpha m}{n}\right)\right| \tag{4.3}$$

$$= 2\left|\sum_{1\le i\le j\le n} p_i p_j - \frac{4\alpha^2 m^2(n-1)}{2n}\right|$$

$$= \left|\left(2\sum_{1\le i\le j\le n} p_i p_j - 4\alpha^2 m^2\right) + \frac{4\alpha^2 m^2}{n}\right|$$

由于

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_i p_j = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)^2 \tag{4.4}$$

and

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_i p_j = \sum_{i=1}^{n} p_i^2 + 2\sum_{1\le i\le j\le n} p_i p_j \tag{4.5}$$

因此，利用公式 4.4 和 4.5，我们得到

$$2\sum_{1\le i\le j\le n} s_i s_j \ge \left|\sum_{i=1}^{n} p_i^2 - \frac{4\alpha^2 m^2}{n}\right| = s_i^2 \text{ (using Lemma 2.2}(iii)\text{)}$$

因此，根据公式 4.2，我们有

$$E(A_\alpha(G))^2 \ge 2\sum_{i=1}^{n} s_i^2$$

$$\text{i.e. } E(A_\alpha(G)) \ge \sqrt{2\left(\alpha^2 M_1 + (1-\alpha)^2 2m - \frac{4\alpha^2 m^2}{n}\right)}$$

现在，公式 4.3 中等号成立当且仅当 $\left(p_i-\frac{2\alpha m}{n}\right)\ge 0$ for $i\in\{1,\cdots,n\}$，即 $p_i\ge\frac{2\alpha m}{n}$ for all i。但在这种情况下，引理 2.2(i) 对 G 的 A_α-特征值不成立。因此，连通图无法取到等号，故为严格不等式。

■

定理 4.2. 对于 $\alpha \in [0,1)$，设 G 是一个阶为 $n \geq 2$、边数为 $m \geq 1$的图。假设存在某些 t、$1 \leq t \leq n$，使得 $s_1 = s_2 = \cdots = s_t = h \geq s_{t+1} = s_{t+2} = \cdots = s_n = k$。那么

$$E(A_\alpha(G)) \geq 2\sqrt{(\alpha^2 M_1 + (1-\alpha)^2 2m - \frac{4\alpha^2 m^2}{n})n}\frac{\sqrt{s_1 s_n}}{s_1 + s_n},$$

其中，当且仅当 $G \cong \frac{n}{2}K_2$或 $G \cong K_{\frac{2m}{n}+1}$或满足以下任一条件时，等号成立：

(i) G 具有不同特征值 $\frac{2m}{n}, \frac{2m}{n}(2\alpha - 1)$ $\frac{2m\alpha}{n} + (1-\alpha)$ 和 $\frac{2m\alpha}{n} - (1-\alpha)$。

(ii) G 具有不同特征值 $\frac{2m\alpha}{n} + h, \frac{2m\alpha}{n} - h, \frac{2m\alpha}{n} + k$ 和 $\frac{2m\alpha}{n} - k$，其中 $h > \frac{2m}{n}(1-\alpha)$ 和 $h > k$。

证明。我们有

$$E(A_\alpha(G)) = \sum_{i=1}^{n} s_i \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} s_i^2 + n s_1 s_n}{s_1 + s_n} \tag{4.6}$$

$$= \frac{\alpha^2 M_1 + (1-\alpha)^2 2m - \frac{4\alpha^2 m^2}{n} + n s_1 s_n}{s_1 + s_n} \tag{4.7}$$

$$\geq \frac{2\sqrt{(\alpha^2 M_1 + (1-\alpha)^2 2m - \frac{4\alpha^2 m^2}{n}) n s_1 s_n}}{s_1 + s_n}$$

$$= 2\sqrt{(\alpha^2 M_1 + (1-\alpha)^2 2m - \frac{4\alpha^2 m^2}{n})n}\frac{\sqrt{s_1 s_n}}{s_1 + s_n} \tag{4.8}$$

现在，根据引理 2.3，当且仅当对于某个 $t \in \{1, 2, \ldots, n\}$，$s_1 = s_2 = \cdots = s_t = h \geq s_{t+1} = s_{t+2} = \cdots = s_n = k$时，等式 4.6 中等号成立。同样，当且仅当以下条件成立时，等式 4.8 中等号成立

$$\alpha^2 M_1 + (1-\alpha)^2 2m - \frac{4\alpha^2 m^2}{n} = n s_1 s_n. \tag{4.9}$$

因此，我们得到 $h^2 t + k^2(n-t) = nhk$，由此可得

$$t(h+k) = nk. \tag{4.10}$$

现在， h 和 k 有三种可能。
情形 1. $h = k$. 那么，对于所有 i， $s_i = |p_i - \frac{2\alpha m}{n}| = h$，即 $p_i = h + \frac{2\alpha m}{n}$ 或 $p_i = -h + \frac{2\alpha m}{n}$，对于$i \in \{1, \ldots, n\}$。因此， $Spec(A_\alpha(G))$=$\{[h + \frac{2\alpha m}{n}]^a, [-h + \frac{2\alpha m}{n}]^b\}$，其中 $a + b = n$。现在，由引理 2.2(i)，我们得到 $a(h + \frac{2\alpha m}{n}) + b(-h + \frac{2\alpha m}{n}) = 2\alpha m$，这意味着 $h(a - b) = 0$，因此 $h = 0$ 或 $h \neq 0$，但 $a = b$。

如果 $h = 0$, then $Spec(A_\alpha(G))$=$\{[\frac{2\alpha m}{n}]^n\}$，根据引理 2.4，这是不可能的。

如果 $h \neq 0$ 和 $a = b$，那么我们得到 G 的谱半径为 $p_1 = h + \frac{2\alpha m}{n}$，其中为 $A_\alpha -$。

因此，对于 $n = 2$，有 $Spec(A_\alpha(G))$=$\{h + \frac{2\alpha m}{n}, -h + \frac{2\alpha m}{n}\}$，从而得到 $G \cong K_2$（因为 G 有两个不同特征值）。

再设 $n > 2$。那么命题 2.7 表明 G 是不连通的，且设 G' 为 G的一个连通分支。 G' 的谱半径为 $h + \frac{2\alpha m}{n}$，其中为 $A_\alpha -$。因此， G 恰好有 $\frac{n}{2}$个连通分支，记为 G_1、G_2、.....、$G_{\frac{n}{2}}$，使得对于 $i \in \{1, \ldots, \frac{n}{2}\}$， G_i的谱为 $\{h + \frac{2\alpha m}{n}, -h + \frac{2\alpha m}{n}\}$。由此我们得出，每个 G_i 恰好有两个顶点，因此 $G_i \cong K_2$。因此 $G \cong \frac{n}{2}K_2$。

情形 2。 $h \neq k$ 且不失一般性，令 $h > k$。
令 p_1 的重数为 l'，并存在某个 $l \geq l' \geq 1$，使得 A_α-谱为 G 的 $Spec(A_\alpha(G))$ $= \{[\frac{2m\alpha}{n} + h]^{l'}, [\frac{2m\alpha}{n} - h]^l, [\frac{2m\alpha}{n} + k]^a, [\frac{2m\alpha}{n} - k]^b\}$，其中 $a + b = n - l$。根据引理 2.4，有 $p_1 \geq \frac{2m}{n}$，这意味着 $h \geq \frac{2m}{n}(1 - \alpha)$。
子情形 2。1 G是一个连通图。那么， A_α-谱半径 p_1 是单的，即 $l' = 1$。现在，对于 $l \geq 2$、$p_i = \frac{2m\alpha}{n} - h$、 $i \in \{1, \ldots, n\}$。如果 $h = \frac{2m}{n}(1 - \alpha)$，则 $p_1 = \frac{2m}{n}$，因此根据引理 2.4， G是一个$\frac{2m}{n}$-正则图。利用方程 4.9，我们得到 $k = 1 - \alpha$. 因此，对于 $l + a + b = n$，有

$$Spec\ (A_\alpha(G)) = \left\{ \frac{2m}{n}, \left[\frac{2m}{n}(2\alpha - 1)\right]^{l-1}, \left[\frac{2m\alpha}{n} + (1 - \alpha)\right]^a, \left[\frac{2m\alpha}{n} - (1 - \alpha)\right]^b \right\}.$$

再次，对于连通的 G，如果 $l \geq 2$ 且 $h > \frac{2m}{n}(1 - \alpha)$，那么 G 不是正则的，并且 A_α-谱为 $Spec(A_\alpha(G))$=$\{\frac{2m\alpha}{n} + h, [\frac{2m\alpha}{n} - h]^{l-1}, [\frac{2m\alpha}{n} + k]^a, [\frac{2m\alpha}{n} - k]^b\}$，其中 $a + b + l = n$。现在，由方程 4.10，我们得到 $l(h + k) = nk$，从而有 $h = \frac{k(n-l)}{l}$。因此，由引理 2.2 (i)，我们

get

$$\left(\frac{2m\alpha}{n}+h\right)+(l-1)\left(\frac{2m\alpha}{n}-h\right)+a\left(\frac{2m\alpha}{n}+k)+(n-a-l\right)\left(\frac{2m\alpha}{n}-k\right)=2m\alpha.$$

这给出 $2h-lh+2ak-nk+kl=0$, 因此 $(2-l)(n-l)+2al-nl+l^2=0$, 因为 $k\neq 0$。这意味着 $a=b(l-1)$。因此, $Spec(A_\alpha(G))=\{\frac{2m\alpha}{n}+h,[\frac{2m\alpha}{n}-h]^{l-1},[\frac{2m\alpha}{n}+k]^{b(l-1)},[\frac{2m\alpha}{n}-k]^b\}$, 其中 $l(b+1)=n$。

同样, 若 $l=1$, 则 $Spec(A_\alpha(G))=\{\frac{2m\alpha}{n}+h,[\frac{2m\alpha}{n}+k]^a,[\frac{2m\alpha}{n}-k]^b\}$, 其中 $a+b=n-1$。现在, 若 $h=\frac{2m}{n}(1-\alpha)$, 则 G是一个 $\frac{2m}{n}-$正则图, 因此 $Spec(A_\alpha(G))=\{\frac{2m}{n},[\frac{2m\alpha}{n}+(1-\alpha)]^a,[\frac{2m\alpha}{n}-(1-\alpha)]^b\}$, 其中 $a+b=n-1$。因此, 由定理 3.3, $G\cong K_{\frac{2m}{n}+1}$。

此外, 若 $h>\frac{2m}{n}(1-\alpha)$, 则方程 4.10 表明 $h=(n-1)k$, 其中 $k\neq 0$。因此, $Spec(A_\alpha(G))=\{\frac{2m\alpha}{n}+(n-1)k,[\frac{2m\alpha}{n}+k]^a,[\frac{2m\alpha}{n}-k]^{n-a-1}\}$。利用这个 A_α-谱, 由引理 2.2(i), 我们得到 $a=0$ (因为 $k\neq 0$), 于是谱变为 $Spec\,(A_\alpha(G))=\{\frac{2m\alpha}{n}+(n-1)k,[\frac{2m\alpha}{n}-k]^{n-1}\}$, 这只有在 $G\cong K_n$ 时才可能。这与 G 不是正则图矛盾。因此, 对于 $l=1,l'=1$, 有 $h\neq\frac{2m}{n}(1-\alpha)$。

子情形 2.2. 设 G 为不连通图。

若 G 是正则图, 则 $q_1=\frac{2m}{n}$, 这仅当 $h=\frac{2m}{n}(1-\alpha)$ 时才可能成立, 因此, 如上所述, 我们得到 $k=1-\alpha$。因此, 对于 $l+l'+a+b=n$, $A_\alpha-$ 的谱为$Spec(A_\alpha(G))$ $=\{[\frac{2m}{n}]^{l'},[\frac{2m}{n}(2\alpha-1)]^{l-l'},[\frac{2m\alpha}{n}+(1-\alpha)]^a,[\frac{2m\alpha}{n}-(1-\alpha)]^b\}$。

若 G 不是正则图, 则意味着 $h>\frac{2m}{n}(1-\alpha)$, 因此按照情形 1 的方法推导, 我们得到 $\frac{b}{a}=\frac{l'}{l}=r$ （记作）, 因此, 所得的 A_α-谱变为

$$Spec\,(A_\alpha(G))=\left\{\left[\frac{2m\alpha}{n}+h\right]^{lr},\left[\frac{2m\alpha}{n}-h\right]^{l},\left[\frac{2m\alpha}{n}+k\right]^{a},\left[\frac{2m\alpha}{n}-k\right]^{ar}\right\},$$

其中 $(1+r)(l+a)=n$。 ■

现在, 我们通过对参数 $\sqrt{s_1s_n}s_1+s_n$ 进行一些估计, 进一步简化 $E(A_\alpha(G))$ 的下界

推论 4.3. 设 G 是一个阶为 $n \geq 3$ 、边数为 $m \geq 2$ 的连通图。若 $s_n \geq \frac{\sqrt{c}}{2n}$，其中 $c = m\{\alpha^2 n^3 + n^2(2 - 4\alpha - \alpha^2) + n(4\alpha - 2 - 2\alpha^2 m) + 4\alpha^2 m\}$，则对于 $\alpha \in [0, 1)$，

$$E(A_\alpha(G)) \geq \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{\left((1-\alpha)^2 2m + \frac{\alpha^2}{2}(\Delta - \delta)^2\right) n}, \tag{4.11}$$

其中，当且仅当 $G \cong K_3$ 时，等号成立。

证明。利用引理 2.5 和引理 2.6，我们得到

$$\begin{aligned} s_1 = |p_1 - \frac{2\alpha m}{n}| = p_1 - \frac{2\alpha m}{n} &\leq \frac{tr(A_\alpha)}{n} + \sqrt{\frac{n-1}{n}\left\{trA_\alpha^2 - \frac{(trA_\alpha)^2}{n}\right\}} - \frac{2\alpha m}{n} \\ &\leq \sqrt{\frac{n-1}{n}\left\{\alpha^2 m\left(\frac{2m}{n-1} + n - 2\right) + (1-\alpha)^2 2m - \frac{4\alpha^2 m^2}{n}\right\}} \\ &= \frac{\sqrt{2\alpha^2 m^2 n + (n^2 - n)\{mn\alpha^2 - 2\alpha^2 m + 2m(1-\alpha)^2\} - 4\alpha^2 m^2 (n-1)}}{n} \\ &= \frac{\sqrt{c}}{n}, \end{aligned}$$

其中 $c = m\{\alpha^2 n^3 + n^2(2 - 4\alpha - \alpha^2) + n(4\alpha - 2 - 2\alpha^2 m) + 4\alpha^2 m\}$。因此，$\frac{\sqrt{c}}{2n} \leq s_n \leq s_1 \leq \frac{\sqrt{c}}{n}$，从而 $\frac{\sqrt{s_1 s_n}}{s_1 + s_n} \geq \frac{\sqrt{\frac{\sqrt{c}}{2n}\frac{\sqrt{c}}{n}}}{\frac{\sqrt{c}}{2n} + \frac{\sqrt{c}}{n}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$。现在，由定理 4.2 可得

$$E(A_\alpha(G)) \geq 2\sqrt{\left(\alpha^2 M_1 + (1-\alpha)^2 2m - \frac{4\alpha^2 m^2}{n}\right) n}\,\frac{\sqrt{s_1 s_n}}{s_1 + s_n} \tag{4.12}$$

$$\geq \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{\left(\alpha^2 M_1 + (1-\alpha)^2 2m - \frac{4\alpha^2 m^2}{n}\right) n} \tag{4.13}$$

$$\geq \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{\left(\frac{\alpha^2}{2}(\Delta - \delta)^2 + (1-\alpha)^2 2m\right) n}, \tag{4.14}$$

其中，如定理 4.2 的情形所示，公式 4.12 中等号成立；当且仅当 $s_1 = \frac{\sqrt{c}}{n}$ 和 $\frac{\sqrt{c}}{2n}$ 时，公式 4.13 中等号成立；对于连通正则图，公式 4.14 中等号成立，由此可知，公式 4.11 中等号成立仅当 $G \cong K_{\frac{2m}{n}+1} = K_n$。此外，对于 K_n，有 $s_1 = \frac{\sqrt{c}}{n} = (n-1)(1-\alpha)$ 和 $s_n = \frac{\sqrt{c}}{2n} = 1 - \alpha$，由此得到 $n = 3$。因此，公式 4.11 中等号成立

仅当 $G \cong K_3$。反之，若 $G \cong K_3$，则 $Spec(A_\alpha(G))=\{2,[3\alpha-1]^2\}$，使得 $E(A_\alpha(K_3)) = 4(1-\alpha) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{\left(\frac{\alpha^2}{2}(\Delta-\delta)^2+(1-\alpha)^2 2m\right)n}$. ■

推论 4.4. 对于一个阶为 $n \geq 3$、边数为 $m \geq 2$ 的连通图 G，若 $s_n \geq \frac{\sqrt{c}}{n^3}$ 对于推论 4.3 中提到的同一个 c 成立，则对于 $\alpha \in [0,1)$

$$E(A_\alpha(G)) > \frac{2n}{1+n^2}\sqrt{\left((1-\alpha)^2 2m + \frac{\alpha^2}{2}(\Delta-\delta)^2\right)n}.$$

证明. 类似推论 4.3，可得到此结论；当且仅当 $G \cong K_n$、 $s_n = \frac{\sqrt{c}}{n^3}$ 和 $\frac{\sqrt{c}}{n}$ 时，等号成立，也就是说， $s_n = \frac{\sqrt{c}}{n^3} = 1-\alpha$ 和 $\frac{\sqrt{c}}{n} = (n-1)(1-\alpha)$，由此得到 $n^2 = n-1$，这与假设矛盾。因此，在这种情况下等号不成立。 ■

根据命题 2.9，对于 $\alpha \geq \frac{1}{2}$，最小的 A_α-特征值，即 $p_n \geq 0$。在上述推论中，我们假设 $s_n \geq \frac{\sqrt{c}}{n^3}$，这给出 $s_n \to 0$，因为 $n \to \infty$，也就是说， $p_n \to 0$ 作为 $n \to \infty$. 。因此，对于 $\alpha \geq \frac{1}{2}$，以及给定的一个小正数 ϵ，研究如何刻画所有 $n \in \mathbb{N}$ 都满足 $s_n \geq \epsilon$ 的图，将是一个有趣的问题。取 $s_n = 0$，我们得到以下改进后的界。

定理 4.5. 设 G 是一个阶为 n、边数为 m 的连通图。若 $s_n = 0$，则对于 $\alpha \in [0,1)$，有

$$E(A_\alpha(G)) \geq \frac{\alpha^2 M_1 + (1-\alpha)^2 2m - \frac{4\alpha^2 m^2}{n}}{s_1},$$

当且仅当以下任一条件成立时，等号成立。

(i) G 有互不相同的 A_α-特征值 $\frac{n}{2}$, $^{n}{}_{(2\alpha-1)2}$ 且 $\frac{n\alpha}{2}$，即 $G \cong K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$。

(ii) G 有互不相同的 A_α-特征值 $h+\frac{2m\alpha}{n}, -h+\frac{2m\alpha}{n}$，且对于 $h > \frac{2m}{n}(1-\alpha)$，有 $\frac{2m\alpha}{n}$。

证明。由方程 4.7 可得

$$\sum_{i=1}^{n} s_i \geq \frac{\alpha^2 M_1 + (1-\alpha)^2 2m - \frac{4\alpha^2 m^2}{n}}{s_1} \quad (\text{as } s_n = 0) \tag{4.15}$$

当且仅当对于某个 $1 \leq t \leq n$, $s_1 = s_2 = \cdots = s_t$ 和 $s_{t+1} = \cdots = s_n = 0$ 时等号成立。假设方程 4.15 中等号成立。那么对于 $i \in \{1, \ldots, t\}$, $s_i = |p_i - \frac{2m\alpha}{n}| = h$, 且对于 $j \in \{t+1, \ldots, n\}$, $s_j = |p_j - \frac{2m\alpha}{n}| = 0$, 也就是说, $p_i \in \{h + \frac{2m\alpha}{n}, -h + \frac{2m\alpha}{n}\}$ 和 $p_j = \frac{2m\alpha}{n}$。

由于 G 是连通的, 我们有$p_1 = h + \frac{2m\alpha}{n}$, 也就是说, G 的 A_α-谱半径是单的, 因此 $Spec(A_\alpha(G))$=$\{h + \frac{2m\alpha}{n}, [-h + \frac{2m\alpha}{n}]^{t-1}, [\frac{2m\alpha}{n}]^{n-t}\}$。

情形 1. 若 G 是 $r = \frac{2m}{n}$ 正则图, 则 $h = \frac{2m}{n}(1-\alpha)$, 因此 $Spec(A_\alpha(G))$=$\{r, [r(2\alpha - 1)]^{t-1}, [r\alpha]^{n-t}\}$。因此, 利用引理 2.2[i] 和引理 2.2[ii], , 我们有

$$r + (t-1)r(2\alpha - 1) + (n-t)r\alpha = 2m\alpha$$

这给出 $t = 2$ 以及方程

$$r^2 + r^2(2\alpha - 1)^2 + (n-t)r^2\alpha^2 = \alpha^2 M_1 + (1-\alpha)^2 2m$$

给出 $r = \frac{n}{2}$。该因此, G的 A_α-谱为 $\{\frac{n}{2}, {}^{n}{}_{(2\alpha-1)\,2}, [\frac{n\alpha}{2}]^{n-2}\} \cong Spec(A_\alpha(K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}))$.

情形 2. 如果 G 不是正则图, 则 $h > \frac{2m}{(1-\alpha)n}$, 因此 $\alpha-$ 的特征值为 $h + \frac{2m\alpha}{n}$、$-h + \frac{2m\alpha}{n}$ 和 $\frac{2m\alpha}{n}$, 其重数分别为 1、$t-1$ 和 $n-t$。对于 $t = 1$, $Spec(A_\alpha(G))$=$\{h + \frac{2m\alpha}{n}, [\frac{2m\alpha}{n}]^{n-1}\}$, 这意味着 G 具有两个不同特征值, 从而 $G \cong K_n$, 这与 G 不是正则图相矛盾。因此 $t \geq 2$, 所以

$$\left(h + \frac{2m\alpha}{n}\right) + (t-1)\left(-h + \frac{2m\alpha}{n}\right) + (n-t)\left(\frac{2m\alpha}{n}\right) = 2m\alpha,$$

这给出 $t = 2$ (因为 $h \neq 0$)。因此,

$$Spec\,(A_\alpha(G)) = \left\{h + \frac{2m\alpha}{n}, -h + \frac{2m\alpha}{n}, \left[\frac{2m\alpha}{n}\right]^{n-2}\right\}$$

. ■

推论 4.6. 对于任意阶为 n、边数为 m 且 $\alpha \in [0, 1$ 的连通图 G, 若 $s_n = 0$, 则

$$E(A_\alpha(G)) \begin{cases} > \frac{(1-\alpha)^2 2m + \frac{(\Delta-\delta)^2}{2}}{\Delta - \frac{2\alpha m}{n}} & \text{for non regular } G \\ \geq (1-\alpha)n & \text{for regular } G \text{ and equality attains iff } G \cong K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}} \end{cases}$$

证明. 由于 $s_1 = |p_1 - \frac{2\alpha m}{n}| = p_1 - \frac{2\alpha m}{n} \le \Delta - \frac{2\alpha m}{n}$，因此由公式 4.14 可得

$$\begin{aligned} E(A_\alpha(G)) &\ge \frac{\alpha^2 M_1 + (1-\alpha)^2 2m - \frac{4\alpha^2 m^2}{n}}{s_1} \\ &\ge \frac{(1-\alpha)^2 2m + \frac{\alpha^2(\Delta-\delta)^2}{2}}{\Delta - \frac{2\alpha m}{n}}, \end{aligned}$$

其中，第一个等号成立当且仅当 $Spec(A_\alpha(G)) = \{\frac{n}{2}, {}^{n}(2\alpha-1)\ 2\ ,\ [\frac{n\alpha}{2}]^{n-2}\}$ 或 $Spec(A_\alpha(G)) = \{h + \frac{2m\alpha}{n}, -h + \frac{2m\alpha}{n}, [\frac{2m\alpha}{n}]^{n-2}\}$ 对 $h > \frac{2m}{n}(1-\alpha)$ 成立；第二个等号成立当且仅当 G是正则图。因此，若 G不是正则的，则 $E(A_\alpha(G)) > (1-\alpha)^2 2m + \frac{\alpha^2\ \Delta-\delta\ ^2}{2}(\ )$；若 G是正则的，则 $E(A_\alpha(G)) = (1-\alpha)^2 2m + \frac{\alpha^2(\Delta-\delta)^2}{2}$ $\Delta - \frac{2\alpha m}{n} = n(1-\alpha)$。 ■

推论 4.7. 对于一个连通的 r-正则图 G，其阶为 n、边数为 m，有

$$E(A_\alpha(G)) \ge \begin{cases} (1-\alpha)n, \ \textit{if } s_n = 0 \textit{ and equality holds if and only if } G \cong K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}} \\ 2(1-\alpha)nr\dfrac{\sqrt{s_n}}{r+s_n}, \ \textit{if } s_n > 0. \end{cases} \tag{4.16}$$

证明。对于一个 r-正则图，我们有 $2m = nr$, $M_1 = nr^2$，其最大 A_α-特征值为 r，即 $s_1 = r(1-\alpha)$。因此，由定理 4.5 可知，式 4.16 中的第一个不等式显然成立。对于$s_n > 0$，由定理 4.2 可知，式 4.16 中的第二个不等式也显然成立。

■

8。 设 G 是一个阶为 n、边数为 m 的图。那么，对于 $\alpha \in [0,1)$，我们有 e

$$E(A_\alpha(G)) \le \sqrt{\frac{y}{n}} + \sqrt{(n-1)\left(y - \frac{y}{n}\right)},$$

其中 $y = \alpha^2 M_1 + (1-\alpha)^2 2m - \frac{4\alpha^2 m^2}{n}$，且当且仅当 $G \cong K_2$ 或 $G \cong \frac{n}{2}K_2$. 时等号成立

证明。令 $\eta_i = p_i - \frac{2\alpha m}{n}$为 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$，其中 $\eta_1 \ge \eta_2 \ge \cdots \ge \eta_n$。对于 $\alpha \in [0,1)$，我们有$p_1 \ge \frac{2m}{n} > \frac{2\alpha m}{n}$，因此利用柯西-施瓦茨不等式可得

$$E(A_\alpha(G)) = |\eta_1| + \sum_{i=2}^{n} |\eta_i|$$

$$\leq \eta_1 + \sqrt{(n-1)\sum_{i=2}^{n}\eta_i^2}$$

$$= \eta_1 + \sqrt{(n-1)\left(\alpha^2 M_1 + (1-\alpha)^2 2m - \frac{4\alpha^2 m^2}{n} - \eta_1^2\right)} \text{ (using Lemma 2.2(iii))}$$

现在，考虑定义域 $0 < x \leq \sqrt{\alpha^2 M_1 + (1-\alpha)^2 2m - \frac{4\alpha^2 m^2}{n}}$ 上的函数 $f(x) = x + \sqrt{(n-1)\left(\alpha^2 M_1 + (1-\alpha)^2 2m - \frac{4\alpha^2 m^2}{n} - x^2\right)}$，其中变量 x 表示 η_1。于是

$$f'(x) = 1 - \frac{x\sqrt{n-1}}{\sqrt{\alpha^2 M_1 + (1-\alpha)^2 2m - \frac{4\alpha^2 m^2}{n} - x^2}}$$

因此， f 在.....上递减

$$U = \left\{ x \middle| \sqrt{\frac{\alpha^2 M_1 + (1-\alpha)^2 2m - \frac{4\alpha^2 m^2}{n}}{n}} \leq x \leq \sqrt{\alpha^2 M_1 + (1-\alpha)^2 2m - \frac{4\alpha^2 m^2}{n}} \right\}$$

并且在.....上递增

$$V = \left\{ x \middle| 0 < x \leq \sqrt{\frac{\alpha^2 M_1 + (1-\alpha)^2 2m - \frac{4\alpha^2 m^2}{n}}{n}} \right\}.$$

设 $y = \alpha^2 M_1 + (1-\alpha)^2 2m - \frac{4\alpha^2 m^2}{n}$。现在，若 $\eta_1 \in V$，则有

$$E(A_\alpha(G)) \leq f(\eta_1) \leq f(\sqrt{\frac{y}{n}}) \tag{4.17}$$

$$= f(\sqrt{\frac{y}{n}} + \sqrt{(n-1)(y - \frac{y}{n})}) \tag{4.18}$$

因此，公式4.17的第一部分等号成立，当且仅当 $\eta_2 = \eta_3 = \cdots = \eta_n$；公式4.17的第二部分等号成立，当且仅当 $\eta_1 = \sqrt{\alpha^2 M_1 + (1-\alpha)^2 2m - \frac{4\alpha^2 m^2}{n}}$。最后，公式4.17等号成立，当且仅当 $\eta_1 = \sqrt{\alpha^2 M_1 + (1-\alpha)^2 2m - \frac{4\alpha^2 m^2}{n}}$ 并且

$\eta_i = p_i - \dfrac{2\alpha m}{n} = \pm\sqrt{\dfrac{\alpha^2 M_1 + (1-\alpha)^2 2m - \frac{4\alpha^2 m^2}{n}}{n}}$ (using Lemma 2.2(iii)) for $i \in \{2, 3, \ldots, n\}$.

that is, $p_1 = \sqrt{\dfrac{\alpha^2 M_1 + (1-\alpha)^2 2m - \frac{4\alpha^2 m^2}{n}}{n}} + \dfrac{2\alpha m}{n}$ and $p_i \in \left\{ \sqrt{\dfrac{\alpha^2 M_1 + (1-\alpha)^2 2m - \frac{4\alpha^2 m^2}{n}}{n}} + \dfrac{2\alpha m}{n}, -\sqrt{\dfrac{\alpha^2 M_1 + (1-\alpha)^2 2m - \frac{4\alpha^2 m^2}{n}}{n}} + \dfrac{2\alpha m}{n} \right\}$ for $i \in \{2, 3, \ldots, n\}$.

情形 1。 G 是连通的，也就是说， G 的谱半径的重数为 1。因此， $Spec\ (G) = \left\{ \sqrt{\frac{\alpha^2 M_1 + (1-\alpha)^2 2m - \frac{4\alpha^2 m^2}{n}}{n}} + \frac{2\alpha m}{n}, \left[-\sqrt{\frac{\alpha^2 M_1 + (1-\alpha)^2 2m - \frac{4\alpha^2 m^2}{n}}{n}} + \frac{2\alpha m}{n} \right]^{n-1} \right\}$.

于是，我们有

$$\left(\sqrt{\frac{\alpha^2 M_1 + (1-\alpha)^2 2m - \frac{4\alpha^2 m^2}{n}}{n}} + \frac{2\alpha m}{n} \right) + (n-1)\left(-\sqrt{\frac{\alpha^2 M_1 + (1-\alpha)^2 2m - \frac{4\alpha^2 m^2}{n}}{n}} + \frac{2\alpha m}{n} \right)$$
$$= \sqrt{\frac{\alpha^2 M_1 + (1-\alpha)^2 2m - \frac{4\alpha^2 m^2}{n}}{n}}(2-n) + 2\alpha m,$$

只要 $n = 2$，就满足引理 2.2(i)。因此，对于连通图，公式 4.18 中等号成立当且仅当 $G \cong K_2$。

情形 2. 若 G 不连通，则存在某个自然数 l，其中 $2 \le l < n$，使得 A_α-图的谱为 $\sqrt{\frac{\alpha^2 M_1 + (1-\alpha)^2 2m - \frac{4\alpha^2 m^2}{n}}{n}} + \frac{2\alpha m}{n}$、 $-\sqrt{\frac{\alpha^2 M_1 + (1-\alpha)^2 2m - \frac{4\alpha^2 m^2}{n}}{n}} + \frac{2\alpha m}{n}$，其重数分别为 l 和 $n - l$。于是我们有

$$l\left(\sqrt{\frac{\alpha^2 M_1 + (1-\alpha)^2 2m - \frac{4\alpha^2 m^2}{n}}{n}} + \frac{2\alpha m}{n} \right) + (n-l)\left(-\sqrt{\frac{\alpha^2 M_1 + (1-\alpha)^2 2m - \frac{4\alpha^2 m^2}{n}}{n}} + \frac{2\alpha m}{n} \right)$$
$$= \sqrt{\frac{\alpha^2 M_1 + (1-\alpha)^2 2m - \frac{4\alpha^2 m^2}{n}}{n}}(2l-n) + 2\alpha m,$$

只要 $2l + n = 0$，就满足引理 2.2(i)，也就是说，$l = \frac{n}{2}$，这意味着 n 是偶自然数且满足 $n \ge 2$。由于 G 不连通，因此显然 $G \cong \frac{n}{2}K_2$。

同样，如果 $\eta_1 \in U$，即

$$\sqrt{\frac{\alpha^2 M_1 + (1-\alpha)^2 2m - \frac{4\alpha^2 m^2}{n}}{n}} \le \eta_1 \le \sqrt{\alpha^2 M_1 + (1-\alpha)^2 2m - \frac{4\alpha^2 m^2}{n}}$$

因此与公式 4.18 相同。由此，结论如上所述。 ■

Cor论 4.9. 设 G 是一个有 n 个顶点和 m 条边的连通图。 n

$$E(A_\alpha(G)) \leq n\sqrt{\frac{2m(1-\alpha)^2}{n} + \frac{\alpha^2}{4}(\Delta - \delta)^2},$$

其中，当且仅当 $G \cong K_2$. 时等号成立

证明. 这里的不等式可由引理 2.12 得出。此外，当且仅当 G 是正则的且 $n = 2$ 时等号成立，这意味着 $G \cong K_2$. ■

推论 4.10. 设 G 是一个阶为 n 、边数为 m 的正则图。那么

$$E(A_\alpha(G)) \leq n(1-\alpha)\sqrt{\frac{2m}{n}}$$

当且仅当 $G \cong K_2$ 时等号成立。

证明。令 G 为正则图，即可由定理 4.8 得到此结果。 ■

5 结论

在本文中，我们得到了具有给定参数的强正则图的 A_α-谱，以及关于图的 A_α-特征值的一些结果。我们对文献 [19] 中得到的图 G 的 A_α-能量下界进行了修正。此外，我们还根据图 G 给定的阶、边数、 Zagreb 指数和极值度，得到了图的 A_α- 能量的一些界。我们还分析了等号成立的情形，并得到了极值图。

致谢：S. Pirzada 的研究由 SERB-DST（新德里）通过研究项目 CRG/2020/000109 资助。
A. Bharali 感谢 SERB-DST（新德里）通过卓越研究教师助理计划（档案编号：
TAR/2021/000045）支持其研究。

参考文献

[1] N. Abreu、D. M. Cardoso、I. Gutman、E. A. Martins 和 M. Robbiano，关于无符号拉普拉斯能量的界，《线性代数及其应用》，435 (2011) 2365-2374。[2] R. B. Bapat，《图与矩阵》，Springer London，2010。[3] A. E. Brouwer 和 W. H. Haemers，《图的谱》，Springer New York，2012。[4] D. de Caen，图中度数平方和的一个上界，《离散数学》，185 (1998) 245-248。[5]Y. Chen、D. Li 和 J. Meng，关于图的第二 A_α-特征值的 Nordhaus-Gaddum 型不等式，《线性代数及其应用》，602 (2020) 57-72。[6] Y. Chen 和 L. Wang，图的无符号拉普拉斯矩阵最大特征值的紧界，《线性代数及其应用》，433 (2010) 908-913。[7] G. H. Fath-Tabar，图的新旧 Zagreb 指标，《MATCH 数学与计算化学通讯》，64(1) (2011) 79-84。[8] H. Gou 和 B. Zhou，图的 α-谱半径，arXiv:1805.03245v1，(2018)。[9] I. Gutman，图能量：新旧结果，《代数组合及其应用》，(2001) 196-211。[10] I. Gutman 和 B. Zhou，图的拉普拉斯能量，《线性代数及其应用》，414 (2006) 29-37。[11] H. Lin、X. Liu 和 J. Xue，由其 A_α-谱确定的图，《离散数学》，342 (2019) 441-450。[12] H. Lin、J. Xue 和 J. Shu，关于图的 A_α-谱，《线性代数及其应用》，556 (2018) 210-219。

[13] M. Liu、H. Shan 和 K. C. Das，若干由其（无符号）拉普拉斯谱唯一确定的图，《线性代数及其应用》，449 (2014) 154-165.[14] E. I. Milovanovi´c 和 I. ˇZ Milovanovi´c，第一 Zagreb 指数和第一 Zagreb 余指数的精确界，《米什科尔茨数学札记》，16(2) (2015) 1017-1024.[15] B. Mohar，图的拉普拉斯谱，《图论、组合学及其应用》，（美国密歇根州卡拉马祖，1988），Wiley-Intersci. Publ., Wiley，纽约，2 (1991) 871-898.[16] V. Nikiforov，合并 A-谱理论与 Q-谱理论，《应用分析与离散数学》，11 (1) (2017) 81-107.[17] M. R. Oboudi，图能量的新下界，《线性代数及其应用》，508 (2019) 384-395.[18] S. Pirzada 和 H. A. Ganie，关于图的拉普拉斯特征值与拉普拉斯能量，《线性代数及其应用》，486 (2015) 454-468.[19] S. Pirzada、B.A. Rather、H. A. Ganie 和 R. ul Shaban，关于图的 α-能量与 Zagreb 指数，《AKCE 国际图与组合学杂志》，18 (2021) 39-46.[20] P. Wang 和 Q. Huang，图的无符号拉普拉斯能量的一些新界，arXiv:2010.03980v1[math.CO] 72020年10月。