arXiv:2304.00560v1 [math.SG] 2 Apr 2023

构造 b-半托里克系统

´JOAQUIM BRUGUES、SONJA HOHLOCH、PAU MIR 和 EVA MIRANDA

Abstract. 本文介绍了 b-半托里克系统，作为半托里克系统的一种推广，专为 b-辛流形量身定制。本文旨在提供一系列实例，并探究这类系统的独特性质。 b-半托里克系统是满足特定条件的四维 b可积系统：其一个动量映射分量为真映射，并生成有效的整体 S^1作用；所有奇异点均非退化且不含双曲分量。为说明这一概念，我们通过改造耦合自旋振子和耦合角动量，给出五个 b-半托里克系统的实例，并对其奇异点进行分类。此外，我们还通过各自动量映射的像来描述这些系统的动力学。

1. 引言

哈密顿系统用于模拟许多基本的物理现象，并见于数学的多个领域，如微分几何、变分法和天体力学，也见于物理学、生物学和工程学等其他科学领域。尤其是，守恒定律和辛刚性相关的问题与哈密顿系统有着天然的联系。

如果一个哈密顿系统具有可能的最大数量的独立守恒量，则称其为可积系统。可积系统领域有着悠久的传统，处于多个学科的交汇处，包括动力系统、常微分方程、偏微分方程、辛几何、李理论、代数几何、经典力学和数理物理。可积系统具有一定程度的可预测性，因为其流线始终位于动量映射的纤维中，并且通常呈周期性或拟周期性。不过，其整体行为可能十分复杂。

近几十年来，人们基于一系列不变量构建了若干可积系统分类方案，这些不变量从不同的等价概念出发，捕捉系统的各个方面。这些分类程序概述了某一特定类别中所有可能的系统，并使人们能够区分不等价的系统。可积系统自然伴有与经典作用-角坐标相关联的半局部托里克作用（见 Arnold [Arn76] 和 Duistermaat [Dui80]）。然而，这种作用并非总能扩展到全局

J. Brugu´es 获得 FWO-FNRS 卓越科学项目 G0H4518N“微分几何中的辛技术”（UA Antigoon 项目编号 36584）的全额资助，S. Hohloch 则获得部分资助。P. Mir 获得“la Caixa”基金会的 INPhINIT 博士生留任资助，资助编号为 100010434 LCF/BQ/DR21/11880025，部分经费由该资助提供。J. Brugu´es、P. Mir 和 E. Miranda 获得西班牙国家研究署 AEI 的部分资助，资助来自 MCIN/ AEI /10.13039/501100011033 的项目 PID2019-103849GB-I00，以及加泰罗尼亚自治区政府（AGAUR）的项目 2021 SGR 00603。E. Miranda 获得加泰罗尼亚高级研究院通过 2021年 ICREA Academia 奖提供的资助，并获得西班牙国家研究署通过 Severo Ochoa 和 Mar´ıa de Maeztu 卓越研发中心与单位计划（项目 CEX2020-001084-M）提供的资助。

。辛普列克类型的重要分类包括 Atiyah [Ati82],Guillemin 和 Sternberg [GS82]以及 Delzant [Del88]对托里克系统的分类。

四维完全可积系统中的一类特殊系统是半托里克系统，其中一个第一积分是真映射，并生成全局的 $\mathbb{S}^1$作用；假设奇点均为非退化，且没有任何奇点包含双曲分量（见定义7）。这些系统最初由 V˜u Ngo.c 在 [VN03、VN07]中定义并研究。这些系统可视为四维托里克系统的推广，重要区别在于只要求一个第一积分具有周期性。这使焦点-焦点纤维得以存在，而这反过来阻碍了作用-角坐标的全局存在性，参见 Duistermaat [Dui80]。

半托里克系统可视为托里克系统在四维情形下的首次推广，因为动量映射的一个分量在流形上诱导一个 $\mathbb{S}^1$-作用，另一个分量则诱导一个 $\mathbb{R}$-作用。对于一般的可积系统，两个分量都会诱导 $\mathbb{R}$-作用，且可能表现出极其复杂的行为。对于托里克系统，所有分量都会产生 $\mathbb{S}^1$-作用，因此对整个系统施加了诸多约束。

从拓扑的角度来看，半托里克系统可以借助奇异拉格朗日纤维化理论来描述，参见 Bolsinov and Fomenko [BF04] 和 Zung [Zun03]。从辛几何的角度来看，Pelayo 和 V˜u Ngo.c [PVN09，PVN11] 通过五个辛不变量对每个纤维至多含有一个焦点-焦点点的系统进行了分类。Palmer、Pelayo 和 Tang [PPT19]后来打破了这一限制。

半托里克系统自然地出现在物理学中，例如 Jaynes-Cummings 模型（参见 Babelon、Cantini 和 Dou¸cot [BCD09]）以及耦合角动量系统（参见 Sadovskii 和 Zhilinskii [SZ99]）。过去十年间，半托里克系统得到了广泛研究：Hohloch、Sabatini 和 Sepe [HSS15] 阐明了 Pelayo 和 Vu Ngoc [PVN09, PVN11]分类与 Karshon [Kar99] 对哈密顿 $\mathbb{S}^1$-空间所作分类之间的关系。Alonso、Dullin 和 Hohloch [ADH19, ADH20] 计算了由耦合自旋振子和耦合角动量系统给出的半托里克系统的不变量。Hohloch 和 Palmer [HP18] 将耦合角动量系统推广为一族含有两个焦点-焦点点的系统；Alonso 和 Hohloch [AH21] 则计算了这一系统某个子族的所谓高度不变量。Le Floch 和 Palmer [LFP18] 推广了这一方法，并通过扰动 Hirzebruch 曲面上的托里克系统找到了更多例子。De Meulenare 和 Hohloch [DMH21] 最终构造出一族含有四个焦点-焦点点的系统，这些点在某一时刻发生碰撞，形成两个焦点-焦点纤维，每个纤维中各有两个焦点-焦点点。Alonso 和 Hohloch [AH19] 的一篇综述概述了截至2019年有关分类不变量的例子与计算的最新进展。此后，允许出现双曲奇点促成了 Hohloch 和 Palmer [HP21] 提出所谓的超半托里系统，以及 Gullentops 和 Hohloch [GH22], 给出的显式例子；这两项工作都得益于 Efstathiou 和 Giaccobe [EG12], 、Bolsinov、Guglielmi 和 Kudryavtseva [BGK18], 以及 Kudryavtseva 和 Martynchuk [KM21b, KM21a]对抛物点的研究。

关于辛流形的一个自然问题是，能否将其推广到带边流形（参见 Nest 和 Tsygan [TN96]），或者更一般地，推广到在超曲面以外为辛结构的泊松流形（参见 Guillemin、Miranda 和 Pires [GMP14，GMP11]以及 Gualtieri 和 Li [GL14]）。文献中将这些结构称为 b^m

或对数辛流形（另见 Miranda 和 Planas [MP18], Guillemin、Miranda、Pires 和 Scott [GMPS17], Guillemin、Miranda 和 Weitsman [GMW18a，GMW18b，GMW19], Marcut 和 Osorno-Torres [MOT14b，MOT14a] 以及 Cavalcanti [Cav17] 关于 b^m- 或对数辛流形的拓扑学、几何学和动力学的进一步研究）。

这类奇点出现的一个重要例子，是对天体力学中某些问题进行正则化，例如受限三体问题（参见 Kiesenhofer 和 Miranda [KM17]，Kiesenhofer、Miranda 和 Scott [KMS16], Delshams、Kiesenhofer 和 Miranda [DKM17]，以及 Braddell、Delshams、Miranda、Oms 和 Planas [BDM+19]）。近年来，Painlev´é 超越函数领域也出现了进一步的应用（参见 Matveeva [Mat22]以及 Matveeva 和 Miranda [MM22]）。

本文研究 b-可积系统，即辛流形上完全可积系统的类比（M^{2n}、Z、ω），该概念最初由 Guillemin、Miranda 和 Pires 在 [GMP14] 中引入。一个 b-可积系统由一个 b-函数 $F: M \to \mathbb{R}^n$ 给出，该函数几乎处处具有最大秩，且其各分量相对于由 b-辛结构 ω 诱导的括号彼此对合。b-可积系统的特点之一是无法在临界超曲面 Z 上出现不动点，本文将对此进行讨论。Kiesenhofer、Miranda 和 Scott 在 [KMS16] 中研究了 b-辛流形的作用-角坐标；Miranda 和 Planas 在 [MP23] 中研究了 b^m-辛流形的作用-角坐标；Cardona 和 Miranda 在 [CM22] 中则研究了其折叠辛流形类比。Laurent-Gengoux、Miranda 和 Vanhaecke 在 [LGMV11] 中研究了一般泊松流形上的作用-角坐标，不过他们构造的作用-角坐标适用于泊松结构的正则点。Kiesenhofer 和 Miranda 在 [KM17] 中为六维情形下的 b-焦点-焦点型奇点提供了一个模型。然而，这些系统的全局分类仍有待完成。本文旨在提供一系列例子，并考察这些系统的具体特点。

托里克系统在 b-辛流形背景下的类似概念，由 Guillemin、Miranda、Pires 和 Scott 在 [GMPS15] 中进行了描述，Gualtieri、Li、Pelayo 和 Ratiu 则在 [GLPR17]中进行了阐述。在这一背景下，通过采用类似 Delzant 多面体的构造，已完整建立了与环面流形分类相类似的分类理论。

b-可积系统中的一种特殊类型是 b-半托里克系统。本文研究 b-半托里克系统这一类别，它同时推广了两类著名的可积系统：半托里克系统和四维 b-托里克系统。b-半托里克系统定义为奇异点均为非退化且不含双曲分量的四维 b-可积系统。因此，b-半托里克系统的不动点只能是椭圆-椭圆型或焦点-焦点型；根据临界超曲面Z上不存在不动点这一结果，这些不动点必定位于 Z之外。

b半托里克系统是对半托里克系统的推广，因为它们还包括定义在某些流形上的系统，在这些流形中，辛结构可沿某个超曲面发生奇异。在这类奇异辛流形上，可构造出具有半托里克特征的可积系统，其种类更加丰富。另一方面，b-半托里克系统是对四维 b-托里克系统的推广，因为诱导作用不再由 $\mathbb{T}^2$的作用给出

，而是只要求具有一个 $\mathbb{S}^1$ 分量。这使得人们能够研究四维 b-可积系统，这类系统不仅具有椭圆-椭圆奇点，还具有焦点-焦点型的不动点。

鉴于此，有两种自然的方法可以从已有系统构造出并非单纯半托里克系统或 b-托里克系统的 b-半托里克系统。一种方法是取一个半托里克系统（M， ω， $F=(f_1,\ f_2)$），选取一个奇异超曲面 $Z\subset M$，并将辛形式ω 替换为在 Z上奇异的 b-辛形式。随后，可以修改 f_1、 f_2 ，并为它们关联 b-函数。若以恰当的方式进行这些操作，就可以从该半托里克系统构造出一个 b-半托里克系统。另一种方法是取一个四维 b-托里克系统（M， Z， ω， $F=(f_1,\ f_2)$），并以某种方式扰动 f_1 或 f_2 ，使该系统仍然是 b-可积的，且具有焦点-焦点型奇点。

本文以两个已有的半托里克系统为出发点，构造五种不同的 b-半托里克系统。一方面，我们选取耦合自旋振子，这是 Jaynes-Cummings 模型在量子光学中的一个特例，由二维球面上的经典自旋与平面上的简谐振子耦合而成 [JC63] ，参见 Pelayo 和 V˜u Ngo.c [PVuN12]。我们通过两种不同的方式对其进行改造，构造出两个 b-半托里克系统，即b-耦合自旋振子和反向 b-耦合自旋振子。

另一方面，我们选取耦合角动量系统的单参数族，这是两个量子角动量相加的经典版本，定义在两个 $\mathbb{S}^2$副本的乘积上。例如，它刻画了平行电场和磁场存在时类氢原子的约化哈密顿量，参见 Sadovskii、Zhilinskii 和 Michel [SZM96]。我们通过三种不同的方式对其进行改造，构造出三族 b-半托里克系统。原有的耦合角动量单参数族是在托里克系统与托里克型半托里克系统之间的插值；而我们构造的其中两个系统，则分别在 b-托里克系统与b-半托里克系统之间进行插值。

对于所有构造出的例子，在证明它们确实是 b可积系统之后，我们对其不动点进行分类，并描述其动量映射。通过这种方式，我们完整地刻画了它们的动力学。对于 b耦合自旋振子以及反向 b耦合自旋振子这两种情形，判定奇异点类型的局部分析在本文中自成一体。对于 b耦合角动量的情形，为了判定奇异点的类型，我们将这些新系统的局部分析与已知的原耦合角动量系统奇异点分类结合起来。

我们对不同 b半托里克系统的分析，为寻找 b半托里克系统的全局分类开辟了道路。该分类大概将取决于若干不变量，类似于 Pelayo 和 V˜u Ngo.c 对半托里克分类所给出的辛不变量 [PVN09、PVN11]，并且还会考虑底层 b辛结构施加的约束。Braddell、Kiesenhofer 和 Miranda 提出的分类方案 [BKM23]将发挥关键作用。

本文也是从 b-辛几何的角度研究其他相关模型的良好切入点，尤其是 b-半托里模型，这些模型源自著名的半托里模型，例如八边形（参见 De Meulenaere 和 Hohloch [DMH21]）、球摆、香槟瓶，以及一般的四维 b-可积系统，它们具有 $\mathbb{S}^1$-作用。本文还与一个

Gullentops 和 Hohloch 提出的超半托里系统的一种潜在推广 [GH22],至 b-超半托里系统。

文章结构。 在第 2节中，我们回顾可积系统及其奇点分类的基本结果。我们给出托里克系统和半托里克系统的基本定义，并介绍用于构造以下系统的两个例子： b-半托里克系统，即耦合自旋振子和耦合角动量。我们还在本节给出 b-可积系统和b-托里克系统的定义。在第 3 节中，我们定义 b-半托里克系统的概念，并证明它在 Z中不含不动点。在第 4 节中，我们修改耦合自旋振子系统，构造两个 b-半托里克系统： b-耦合自旋振子 和 反向的 b-耦合自旋振子。我们确定它们的奇异点，对其进行分类，并刻画其动量映射的像。在第 5 节中，我们修改耦合角动量系统的单参数族，构造三个 b-半托里克系统族。我们还确定并分类它们的不动点，并计算其动量映射的像。

2. Preliminaries

本节总结了本文中需要用到的文献主要结果。我们介绍完全可积系统的基础知识，以及托里克系统和半托里克系统这一特殊系统族。我们还回顾了 b-辛几何和 b-托里克系统的基本概念。

2.1.可积系统的奇异点。

本文始终研究四维辛流形。本节预备知识中，我们将一些经典结果调整到四维情形，而对于其他结果，则保留其一般形式。

定义 1. 设 (M^{2n}, ω) 是一个辛流形，并设 $F = (f_1, \dots, f_n) \colon M \to \mathbb{R}^n$。若三元组 (M^{2n}, ω, F) 满足以下条件，则称其为一个完全可积系统： F是一个光滑映射，且 dF几乎处处具有最大秩，分量 f_i 两两对合，即对所有 i, j，均有 $\{f_i, f_j\} = 0$ 。

映射 $F = (f_1, \dots, f_n)$ 称为动量映射，其流由 $f_1, \dots, f_n$ 的流串接而成，并诱导出 $\mathbb{R}^n$ 的群作用。若点 $p \in M$ 处 $dF(p)$ 的秩达到最大值，则称其为正则点；若 $dF(p)$ 的秩低于 n，则称其为奇异点（或临界点）。集合 $F^{-1}(c) \subset M$ 称为 $c \in \mathbb{R}^n$ 上方的纤维。纤维的连通分支称为叶。阿诺德–刘维尔–米内尔定理完整描述了正则纤维上的动力学，而奇异纤维（即至少包含一个奇异点的纤维）的情况尚未完全明了，因此仍是一个活跃的研究领域。

我们关注非退化奇点；对于这些奇点，R¨ussmann [R¨us64]，Vey [Vey78]，Colin de Verdi`ere 和 Vey [CdVV79],Eliasson [Eli90a, Eli90b]，Dufour 和 Molino [DM88]，Miranda [Mir03, Mir14]，Miranda 和 Zung [MZ04],Miranda 和 V˜u Ngo.c [MVuN05],V˜u Ngo. c 及 Wacheux [VuNW13] 和 Chap- eron [Cha13]的工作建立了标准形。

定理 2（非退化奇点的局部标准形）。考虑一个 $2n$ 维完全可积系统 $(M, \omega, F = (f_1, \ldots, f_n))$，并令 $p \in M$ 为一个非退化奇点。那么

(1) 存在 p 的一个开邻域 $U \subset M$、局部辛坐标$(x_1$、……、x_n、ξ_1、……、$\xi_n)$ 以及其上的光滑函数 q_1、……、q_n：$U \to \mathbb{R}$，使得 p 在这些坐标中对应于原点，$\{q_i, f_j\} = 0$ 对所有 i、$j \in \{1, \ldots, n\}$ 成立，并且每个 q_i都具有以下形式之一：

- $q_i = (x_i^2 + \xi_i^2)/2$ (椭圆分量),
- $q_i = x_i\xi_i$ (双曲分量),
- $q_i = x_i\xi_{i+1} - x_{i+1}\xi_i$ 以及 $q_{i+1} = x_i\xi_i + x_{i+1}\xi_{i+1}$ (焦点-焦点分量),
- $q_i = \xi_i$ (正则分量)。

(2) 如果不存在双曲分量，那么方程组 $\{q_i, f_j\} = 0$ 关于 $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ 等价于存在一个局部微分同胚 g：$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，使得

$$g \circ f = (q_1, \ldots, q_n) \circ (x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n).$$

椭圆型、双曲型和焦点-焦点型分量的数量局部分类非退化奇点，并称为其*Williamson* 型。因此，四维流形上的可积系统恰好有六种可能的非退化奇点类型：

- 秩 *0*（不动点）：椭圆-椭圆型、焦点-焦点型、双曲-双曲型、双曲-椭圆型。
- 秩 *1*（诱导作用的一维轨道）：椭圆-正则型、双曲-正则型。

在第 4 节和 5 节中，我们将对定义在四维流形上的若干可积系统的奇点进行分类。分类时，我们遵循博尔西诺夫和福缅科的方案 [BF04]并采用他们的记号约定，下面将对此进行介绍。

定义 3. [BF04，Bolsinov 和 Fomenko，定义 1。22] 如果完全可积系统 $(M, \omega, F = (f_1, f_2))$ 的不动点满足由哈密顿向量场 $K(f_1, f_2)$ 的线性部分生成的李代数 X_{f_1} 和 X_{f_2} 在 $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{R})$ 中是 *Cartan* 子代数，则该不动点是非退化的。

李代数 $K(f_1, f_2)$ 可以用 f_1 和 f_2 来描述，特别是可以用它们的二次部分，即海森矩阵 $d^2 f_1$ 和 $d^2 f_2$来描述。它们生成线性辛算子 $A_{f_1} = \Omega^{-1} d^2 f_1$ 和 $A_{f_2} = \Omega^{-1} d^2 f_2$，其中 Ω 是辛结构的矩阵；这些算子与奇点处 X_{f_1} 和 X_{f_2} 的线性化相同。

要检验由线性算子 $K(f_1, f_2)$ 生成的代数是否为 $c_1 A_{f_1} + c_2 A_{f_2}$ 中的 Cartan 子代数，$\mathfrak{sp}(4, \mathbb{R})$，首先必须检验它是否为二维，并且是否包含一个所有特征值各不相同的元素。然后，必须证明它与 $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{R})$ 的下列四个 Cartan 子代数之一共轭（由 Williamson 分类 [Wil36]）：

$$(1) \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha & -\beta & 0 & 0 \\ \beta & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -\beta \\ 0 & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

其中 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$。

那么，非退化不动点 p 的类型由其共轭类决定 $c_1A_{f_1}+c_2A_{f_2}$，实际上则由其特征值决定 λ_1，λ_2，λ_3，λ_4（参见 Williamson [Wil36], Eliasson [Eli90b] 以及 Miranda 和 Zung [MZ04]）。特别地，p 的类型为：

- 椭圆-椭圆型：四个虚特征值 $\{\lambda_1,\lambda_2\}=\{\pm i\alpha\}$ 和 $\{\lambda_3,\lambda_4\}=\{\pm i\beta\}$，
- 椭圆-双曲型：两个实特征值和两个虚特征值$\{\lambda_1,\lambda_2\}=\{\pm i\alpha\}$ 以及 $\{\lambda_3,\lambda_4\}=\{\pm\beta\}$，

- 双曲-双曲型：四个实特征值 $\{\lambda_1,\lambda_2\}=\{\pm\alpha\}$ 和 $\{\lambda_3,\lambda_4\}=\{\pm\beta\}$，
- 焦点-焦点型：四个复特征值 $\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4\}=\{\pm\alpha\pm i\beta\}$

其中 α，$\beta\in\mathbb{R}^{\neq 0}$ 和 $\alpha\neq\beta$ 分别对应椭圆-椭圆型和双曲-双曲型情形。

总而言之，不动点的非退化性和类型可以通过线性算子 A 的特征值来确定；该算子由 $A_{f_1}=\Omega^{-1}d^2f_1$ 和 $A_{f_2}=\Omega^{-1}d^2f_2$ 的线性组合给出，且其特征值两两不同。A 的矩阵将与上述某个矩阵共轭，其谱将属于上述四种类型之一。

2.2. **托里克与半托里克系统**。如果只有单位元的作用是平凡的，则称该群作用是有效的 。完全可积托里克系统这一类最容易处理，因此自然可以尝试将其分类推广到更一般的系统。

定义 4. 若一个 $2n$维完全可积系统$(M,\omega,\mathcal{F})$ 满足：$\mathcal{F}$的流生成 $\mathbb{T}^n$ 在 M上的有效作用，则称该系统为托里克系统。

现在考虑以下多胞体类：

定义 5. 凸多胞体 $\Delta\subset\mathbb{R}^n$ 若满足以下条件，则称为Delzant 多面体：

(1) 简单，即每个顶点恰有 n 条边相交；*(2)* 有理，即所有边的斜率均为有理数，也就是说，它们具有如下形式：$p+vt$，其中 $p\in\mathbb{R}^n$ 是该顶点，$v\in\mathbb{Z}^n$ 是给定边的方向向量，$t\in\mathbb{R}$；以及 *(3)* 光滑，即在每个顶点处，相交边的方向向量构成 $\mathbb{Z}^n$ 的一组基。

紧致连通流形上的托里克系统完全由其动量映射的像分类：

定理 *6*（*Delzant* [*Del*88]）。在辛等变意义下，紧致连通辛 $2n$ 维流形 (M,ω) 上的任意托里克系统 (M,ω,F) 均由 $F(M)$ 唯一确定，其中 $F(M)$ 是一个 *Delzant* 多面体。反过来，对于任意 *Delzant* 多面体 Δ，都存在一个紧致连通辛 $2n$ 维流形 (M,ω) 和一个动量映射 $F\colon M\to\mathbb{R}^n$，使得 (M,ω,F) 是托里克系统，且 $F(M)$ 为 $=\Delta$。

托里克系统不允许存在具有双曲型或焦点-焦点型分量的奇异点，只允许椭圆型奇异点。在四维情况下，托里克系统的一种自然推广是范围更广的半托里克系统，它允许存在更复杂的不动点。

定义 7。四维完全可积系统$(M,\omega,F=(L,H))$ 称为半托里克，如果

(1) L 是真，并在 M 上生成一个有效的 $\mathbb{S}^1$ 作用，且

(2) $F=(L,H)$ 的所有奇异点均为非退化，且不包含双曲分量。

半托里克系统可以具有三种类型的奇异点：椭圆-椭圆型、焦点-焦点型和椭圆-正则型。若半托里克系统 $(M,\omega,F=(L,H))$ 的 L 的每个纤维中至多有一个焦点-焦点点，则称其为简单半托里克系统。Pelayo 和 V˜u Ngo. c [PVN09, PVN11] 根据五个不变量对简单半托里克系统进行了分类：焦点-焦点点的数量、半托里克多边形、高度不变量、泰勒级数不变量和扭转指标不变量。Palmer、Pelayo 和 Tang [PPT19] 将这一分类推广到了非简单系统。前三个不变量最初由 V˜u Ngo.c 在 [VN07] 中提出；Le Floch 和 Palmer [LFP18] 将它们整合为一个称为带标记的半托里克多边形不变量的单一不变量。泰勒级数不变量也由 V˜u Ngo. c [VuN03] 构造。总的来说，由于焦点-焦点奇点的存在，半托里克系统的行为要复杂得多。与托里克系统不同，后者的分类动量多面体由有限个顶点确定，而半托里克系统可能依赖于无穷多个数据，尤其是在泰勒级数不变量具有无穷多个非零系数时。我们将要转化为 b-半托里克系统的两个半托里克系统实例是耦合自旋振子和耦合角动量。

2.2.1. 耦合自旋振子。 半托里克系统中最简单的例子之一，是二维球面上的经典自旋 $\mathbb{S}^2$ 与平面上的简谐振子的耦合 $\mathbb{R}^2$。这个经典系统是 Jaynes-Cummings 模型的简化版本（参见 Babelon、Cantini 和 Doucot [BCD09]），Pelayo 和 V˜u Ngo.c 在 [PVuN12] 中对其进行了详细研究，Alonso、Dullin 和 Hohloch 也在 [ADH19]中进行了研究。

设 $\rho_1,\rho_2>0$ 为正常数。考虑带有笛卡尔坐标的乘积流形 $M=\mathbb{S}^2\times\mathbb{R}^2$，其中单位球面 $\mathbb{S}^2\subset\mathbb{R}^3$ 上的坐标为 (x,y,z)，平面 $\mathbb{R}^2$上的笛卡尔坐标为 (u,v)。考虑 M上的辛形式 $\omega=-\rho_1\,\omega_{\mathbb{S}^2}+\rho_2\,\omega_{\mathbb{R}^2}$，其中 $\omega_{\mathbb{S}^2}$ 和 $\omega_{\mathbb{R}^2}$ 分别是 $\mathbb{S}^2$ 和 $\mathbb{R}^2$ 上的标准辛结构。

定义 8. 耦合自旋振子是一个4维哈密顿可积系统$(M,\omega,F=(L,H))$，其中

$$\begin{cases} L(x,y,z,u,v)=\rho_1 z+\rho_2\frac{u^2+v^2}{2}, \\ H(x,y,z,u,v)=\frac{xu+yv}{2}. \end{cases}$$

耦合自旋振子系统是完全可积的半托里克系统（参见 Pelayo 和 V˜uNgo.c [PVuN12]）。映射 L 是球面绕其竖直轴旋转、平面绕原点旋转时的动量映射。映射 H 度量球面与平面上的极角之差。它有一个焦点-焦点奇点（位于点 $m:=(0,0,1,0,0)$），一个椭圆-椭圆奇点（位于点 $p:=(0,0,-1,0,0)$），以及从 p发出的两族椭圆-正则奇点的一参数族。耦合自旋振子的动量映射像如图 1 所示。

在 $\mathbb{S}^2$ 上，我们将使用笛卡尔坐标（x，y，z），并假设 $x^2+y^2+z^2=1$。不过，为了便于进行显式计算，使用笛卡尔坐标

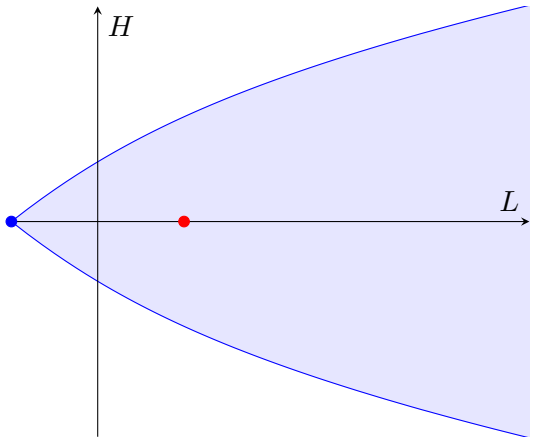


FIGURE 1. 耦合自旋振子的动量映射像。蓝点是椭圆-椭圆奇点的像，红点是焦点-焦点奇点的像。

（x， y），远离赤道，并使用柱坐标（θ， z），其定义为

$$\begin{cases} z = \pm\sqrt{1-x^2-y^2}, \\ \theta = \arg(x+iy), \end{cases}$$

远离极点。

具体而言，在赤道 $z=0$ 以外使用的适当坐标图为 (φ, U^+) 和 (φ, U^-)，其中 $U^+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{S}^2 \mid z>0\} \subset \mathbb{S}^2$, $U^- = \{(x,y,z) \in \mathbb{S}^2 \mid z<0\} \subset \mathbb{S}^2$ 并且

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x,y). \end{array}$$

要在极点 $z=\pm 1$ 以外进行研究，适当的坐标图为 (ϕ, U^0)，其中 $U^0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{S}^2 \mid |z|<1\} \subset \mathbb{S}^2$ 并且

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^1 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (\theta, z). \end{array}$$

这些坐标图与 $\mathbb{R}^2$ 上标准的 (u,v) 坐标图一起，延拓为 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2$ 上的自然坐标图。辛形式 $\omega = -\rho_1\, \omega_{\mathbb{S}^2} + \rho_2\, \omega_{\mathbb{R}^2} =$ 可写为

$$\omega = -\rho_1 \frac{1}{\pm\sqrt{1-x^2-y^2}} dx \wedge dy + \rho_2\, du \wedge dv$$

在 $M^{\pm} := U^{\pm} \times \mathbb{R}^2$ 上，并且作为

$$\omega = -\rho_1\, d\theta \wedge dz + \rho_2\, du \wedge dv,$$

在 $M^0 := U^0 \times \mathbb{R}^2$ 上。

函数 L 和 H 在 $M^{\pm}$ 上可改写为

$$\begin{cases} L(x,y,u,v) = \pm\rho_1\sqrt{1-x^2-y^2} + \rho_2 \frac{u^2+v^2}{2} \\ H(x,y,u,v) = \frac{1}{2}(xu+yv) \end{cases},$$

并且在 M^0上可改写为

$$\begin{cases} L(z,\theta,u,v) = \rho_1 z + \rho_2 \frac{u^2+v^2}{2} \\ H(z,\theta,u,v) = \frac{\sqrt{1-z^2}}{2}\left(u\cos\theta + v\sin\theta\right) \end{cases}.$$

2.2.2. 耦合角动量。 Sadovksii 和 Zhilinskii 研究了两个量子角动量的耦合 [SZ99]而这一系统的经典版本是一个著名的紧致半托里克系统，Hohloch 和 Palmer 对其进行了详细研究 [HP18], LeFloch 和 Pelayo [LFP19] 以及 Alonso、Dullin 和 Hohloch [ADH20], 特别是 Alonso 和 Hohloch 研究了其不变量 [AH21]。

考虑 $M = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$，并赋予其辛形式 $\omega = -(R_1\omega_{\mathbb{S}^2} + R_2\omega_{\mathbb{S}^2})$，其中 $\omega_{\mathbb{S}^2}$是 $\mathbb{S}^2$ 上的标准辛形式， $0 < R_1 < R_2$ 是常数。

设 $(x_i,\ y_i,\ z_i)$ 是单位球面 $x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 = 1$ 上的笛卡尔坐标，其中 $i \in \{1,2\}$，并考虑参数 $t \in \mathbb{R}$。耦合角动量是由 t 参数化并定义如下的一族四维完全可积系统:

$$\begin{cases} L(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2) \ := R_1 z_1 + R_2 z_2, \\ H(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2) := (1-t)z_1 + t(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2). \end{cases} \tag{2}$$

该系统有 4 个不动点，位于 $p_{\pm,\ \pm} = (0,\ 0,\ \pm 1,\ 0,\ 0,\ \pm 1)$，参见 Sadovksii 和 Zhilinskii [SZ99]。对于 t 的所有取值，它们均为椭圆-椭圆型，除了 $p_{+,\ -} = (0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ -1)$；当 $t < t^-$ 或 $t > t^+$ 时，该不动点是非退化的椭圆-椭圆型，当 $t^- < t < t^+$ 时为焦点-焦点型，而当 $t \in \{t^-, t^+\}$ 时则退化，其中

$$t^{\pm} = \frac{R_2}{2R_2 + R_1 \mp 2\sqrt{R_1R_2}}.$$

可以证明 $0 < t^- < \frac{1}{2} < t^+ \leq 1$，这意味着对于取值 $t = \frac{1}{2}$，总是存在一个焦点-焦点奇点。

在本节中，我们将使用 $M = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 上的不同坐标图。我们希望证明该系统的整体性质，双圆柱坐标图非常适合这一目的；同时，我们也研究双极点处不动点附近的局部行为，为此双笛卡尔坐标图更为合适。

为了研究远离极点 $z_1,\ z_2 = \pm 1$ 的系统，采用双柱坐标图 $(\phi_1,\ U_1^0) \times (\phi_2,\ U_2^0)$ 重写该系统很有用，其中 $U_i^0 = \{(x_i,\ y_i,\ z_i) \in \mathbb{S}^2 \mid |z| < 1\} \subset \mathbb{S}^2$对于$i \in \{1,2\}$ 和

$$\begin{array}{rccc} \phi_i: & \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^1 \\ & (x_i,y_i,z_i) & \longmapsto & (\theta_i, z_i). \end{array}$$

在这些坐标下，辛形式 $\omega = -(R_1\omega_{\mathbb{S}^2} + R_2\omega_{\mathbb{S}^2})$ 为

$$\omega = -R_1\, d\theta_1 \wedge dz_1 - R_2\, d\theta_2 \wedge dz_2,$$

系统可写为:

$$\begin{cases} L(z_1,\theta_1,z_2,\theta_2) = R_1 z_1 + R_2 z_2, \\ H(z_1,\theta_1,z_2,\theta_2) = (1-t)z_1 + t\left(\sqrt{(1-z_1^2)(1-z_2^2)}\cos(\theta_1-\theta_2) + z_1z_2\right). \end{cases}$$

该坐标图覆盖整个 M ，但不包括双极处的四个不动点，因此适合在全局范围内研究该系统。

另一方面，要研究双极点处不动点附近的系统，我们可以使用研究自旋振子时为 $\mathbb{S}^2$ 引入的相同坐标图，并用双笛卡尔坐标表示该系统。具体而言，除 $z_1 = 0$和 $z_2 = 0$赤道之外，适用于 $M = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$上各处的坐标图为（$\varphi_1$，$U_1^{\varepsilon_1}$）×（$\varphi_2$，$U_2^{\varepsilon_2}$），其中 ε_1，$\varepsilon_2 \in \{+,-\}$，并且 $U_i^{\varepsilon_i} = \{(x_i,\ y_i,\ z_i) \in \mathbb{S}^2 \mid \varepsilon_i z_i > 0\} \subset \mathbb{S}^2$对于 $i = 1,\ 2$，且

$$\begin{array}{rccc} \varphi_i : & \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x_i, y_i, z_i) & \longmapsto & (x_i, y_i) \end{array} .$$

在这些坐标下，辛形式 $\omega = -(R_1\omega_{\mathbb{S}^2} + R_2\omega_{\mathbb{S}^2})$为

$$\omega = -\varepsilon_1 R_1 \frac{1}{\sqrt{1-x_1^2-y_1^2}} dx_1 \wedge dy_1 - \varepsilon_2 R_2 \frac{1}{\sqrt{1-x_2^2-y_2^2}} dx_2 \wedge dy_2$$

在$U_1^{\varepsilon_1} \times U_2^{\varepsilon_2}$上，系统可写为：

$$\begin{cases} L(x_1, y_1, x_2, y_2) = \varepsilon_1 R_1 \sqrt{1-x_1^2-y_1^2} + \varepsilon_2 R_2 \sqrt{1-x_2^2-y_2^2} \\ H(x_1, y_1, x_2, y_2) = \varepsilon_1 (1-t)\sqrt{1-x_1^2-y_1^2} + t\left(x_1 x_2 + y_1 y_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sqrt{(1-x_1^2-y_1^2)(1-x_2^2-y_2^2)}\right) \end{cases} .$$

请注意，当 $t = 0$ 时，该系统是托里克系统；而当 $t = 1$ 时，它是托里克型半双托里克系统（确切定义见 V˜u Ngo.c 在 [VN07]中的著作）。在第一种情况下， L 是耦合旋转， H 是旋转；而在第二种情况下， L 又是耦合旋转， H 表示角度。请参见图 $0 \le t \le 1$ 中系统在 2的不同取值下的动量映射图像。

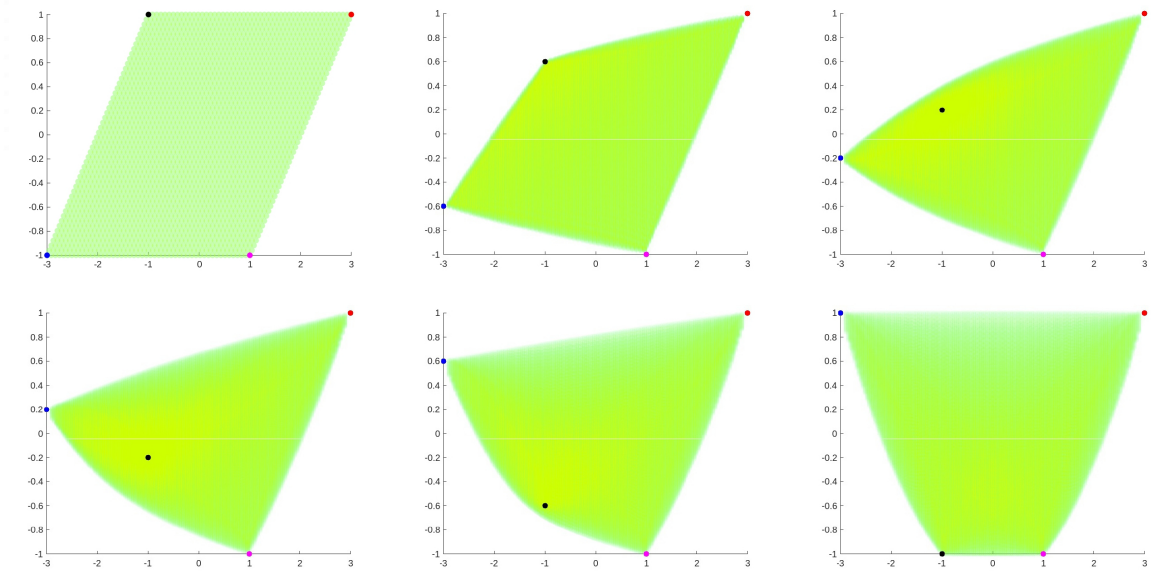


FIGURE 2. 经典耦合角动量的动量映射像，对应于 t 取值从0（左上）到1（右下）的情形。焦点-焦点奇点的像以红色标出。

2.3. **b-可积系统**。首先回顾 Guillemin、Miranda 和 Pires [GMP14]中的一些定义。

定义 *9*。 b-流形是一个二元组 (M, Z)，其中 M 是定向光滑流形，Z 是一个闭嵌入余维为 *1* 的子流形，通常称为奇异超曲面。一个 b-映射 $f: (M, Z) \to (M', Z')$ 是一个保定向映射 $f: M \to M'$，满足 $f^{-1}(Z') = Z$，且 f 与 Z' 横截。$Z \subset M$ 的定义函数是一个 b-映射 $z: (M, Z) \to (\mathbb{R}, \{0\})$。

b-切丛是一个 b-流形的向量丛 ${}^bTM \to M$，其截面恰好是与 Z 相切的向量场，也称为 b-向量场。其对偶记作 ${}^bT^*M$，即 b-余切丛；$\bigwedge^k \left({}^bT^*M\right)$ 的截面记作 ${}^b\Omega^k(M)$，称为 b-de Rham 形式。任意 b-*de Rham* 形式在 $M \setminus Z$ 上的限制定义了其上的光滑 *de Rham* 形式，而微分 d: $\Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ 可以自然地扩展为 ${}^b\Omega^\bullet(M)$。

一种 b-辛形式 是一个次数为二的 b-*de Rham* 形式 $\omega \in {}^b\Omega^2(M)$，它是闭的且非退化。

定理 10. [GMP14，定理 27] 该 b-上同调群属于 b-流形 (M, Z) *are*

$$ {}^bH^\bullet(M) \cong H^\bullet(M) \oplus H^{\bullet-1}(Z). $$

在 $p \in Z$ 的局部范围内，可以认为光滑形式通过 b 型的形式扩展到 ${}^b\Omega^k(M)$ 中，其中形式为 $\frac{dz}{z} \wedge \eta$，$\eta \in \Omega^{k-1}(M)$，且 z 是 Z的一个局部定义函数。特别地，形式$\frac{dz}{z}$ 总是闭的，但不是恰当的。

定义 11. 设 (M, Z) 是一个 b-流形。我们将 b-函数层 ${}^b\mathcal{C}^\infty(M)$ 定义为

$$ {}^b\mathcal{C}^\infty(U) = \{c \log|z| + g \mid c \in \mathbb{R}, g \in \mathcal{C}^\infty(U), z \in \mathcal{C}^\infty(U) \text{ a local defining function of } Z\}. $$

有了这一设定，我们现在可以将定义 1 推广到 b-流形 .

定义 *12*. [*GMP14*，定义 57] 在一个 b-辛流形 (M, Z, ω) 上的 b-可积系统是一个由 b 个 b-函数组成的元组 $(f_1, ..., f_n)$，满足 $\{f_i, f_j\} = 0$ 对所有 $1 \leq i, j \leq n$ 都成立，并且$df_1 \wedge ... \wedge df_n$ 作为 ${}^b\Omega^{2n}(M)$ 中的形式几乎处处不为零，且在 M 和 Z中也几乎处处不为零。

此定义与定义 1 有一个显著区别：除了我们考虑的是 b-辛形式而非光滑辛形式之外，我们还要求 $df_1, ..., df_n$ 在 Z上几乎处处线性无关。这样规定是为了避免出现如下情形：$(f_1, ..., f_n)$ 在 Z 上退化为秩为 $2n-2$ 的分布，这对证明标准形定理过于严格（例如参见 Guillemin、Miranda、Pires 和 Scott [GMPS15]，或 Kiesenhofer、Miranda 和 Scott [KMS16]）。

由此类系统的标准形（例如参见 Kiesenhofer 和 Mi- randa [KMS16，注 18]），可知

引理 13. 给定一个 b-可积系统$(M, Z, \omega, F = (f_1, ..., f_n))$，其奇点均为非退化奇点，则在 Z 中各点的邻域内存在 *Eliasson* 型标准形，且这些奇点处 dF 的最小秩沿 Z 为1 。

特别地，Z 不能包含该系统的不动点。

2.3.1. b-环面流形。关于 b-环面流形的情形，Guillemin、Mi- randa、Pires 和 Scott 在 [GMPS15] 中进行了深入研究，Gualtieri、Li、Pelayo 和 Ratiu 也在 [GLPR17]中进行了研究。这里我们概述前者的研究结果。

我们用 $\mathfrak{t}$ 表示环面 $\mathbb{T}^n$ 的李代数，用 $X^{\#} \in \mathfrak{X}(M)$ 表示由群作用中元素 $X \in \mathfrak{t}$ 所对应的基本向量场。

定义 14。 [GMPS15，定义 7] 设 $(M,\ Z,\ \omega)$ 是一个 b-辛流形，并考虑环面 $\mathbb{T}^n$的李群作用。

我们称其为哈密顿的，如果对所有的 X、$Y \in \mathfrak{t}$:

- $\iota_{X^{\#}}\omega$ 是恰当的，即它有一个原函数 $H_X \in^b \mathcal{C}^\infty(M)$。
- $\omega(X^{\#}Y^{\#}) = 0.$

若作用有效，且维数为环面型 $\dim(\mathbb{T}^n) = \frac{1}{2}\dim(M)$，则称其为环面型。

通过 b-Morse 引理的等变版本，可以证明，在曲面的特殊情形下，环面型哈密顿 b-作用具有特别简单的分类。

定理 15。 [GMPS15，定理 9] 一个 b-辛曲面，若具有环面型 $\mathbb{S}^1$-作用，则等变b-辛同构于以下两者之一：$(\mathbb{S}^2,\ Z)$ 或 $(\mathbb{T}^2,\ Z)$，其中 Z 是一族纬线圆（在 $\mathbb{T}^2$情形下，这族圆的数量为偶数），作用是标准旋转，而-辛形式由临界曲线的模周期和正则化李维尔体积确定。

研究高维情形 首先需要理解 $\mathbb{T}^n$-作用在超曲面 Z附近半局部范围内的行为。为此，文中证明了等变达布定理。此外，作者还引入了 Z的一个连通分支的模权 这一概念。

定义 *16.* [*GMPS15*，注记 10] 对于每个连通分支 $Z' \subseteq Z$，都存在一个元素$v_{Z'} \in \mathfrak{t}^* = Hom(\mathfrak{t}, \mathbb{R})$，即 Z'的模权，使得对于每个 $X \in \mathfrak{t}$，由定义 *14* 给出的函数 H_X 在 Z'周围的管状邻域内具有形式 $v_{Z'}(X)\ log\ |z| + g$，其中 z是 Z' 的局部定义函数，且 $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$。

注记 17. [GMPS15，命题 13] 如果该作用是环面型的，那么 $v_{Z'} \neq 0$。

注记 18. [GMPS15，推论 16] 超曲面 Z 总是一个乘积，$Z \cong \mathcal{L} \times \mathbb{S}^1$。

借助这些工具，我们可以通过类比 Delzant 多面体来理解 b-环面哈密顿作用的整体行为。从某种意义上说，我们希望理解动量映射的像；正如我们在定义16 中看到的，它在Z的邻域内不是光滑函数。然而，在 Z之外，下述结论成立

注 19. [GMPS15，断言 19] 对于每个连通分支 $W \subseteq M \setminus Z$，其像 $\mu|_W(W)$是凸的。

为了全局定义 b-动量映射的像，有必要给出其陪域的概念。

定义 20. [GMPS15，定义 21] 设 $(M,\ Z,\ \omega)$ 是一个 b-辛流形，并考虑其上的一个由 $\mathbb{T}^n$ 作用所给出的环面哈密顿作用。与之相关的邻接图 $\mathcal{G} = (G,\ w)$ 由以下部分构成:

图 $G=(V,E)$，其顶点 $v\in V$ 是 $M\setminus Z$ 的连通分支；若 Z 的某个连通分支同时邻接 v 和 v'，则在 v 与 v' 之间连一条边，并且 $w\colon E\to\mathfrak{t}^*$ 是将每个连通分支 Z 映射到其模权 v_Z 的映射。当该作用有效时，图 G 必为具有偶数个顶点的圈或一条直线。

定义 *21.* 考虑这种图的一对 $\mathcal{G}=(G,w)$ 以及函数 $w\colon E\to\mathfrak{t}^*$，使得 $w(e)=kw(e')$，其中 $k<0$，如果 e 和 e' 在一个顶点相交。b-动量陪域 $(\mathcal{R}_\mathcal{G},\mathcal{Z}_\mathcal{G},\hat{}x)$ 是一个 b-流形 $(\mathcal{R}_\mathcal{G},\mathcal{Z}_\mathcal{G})$，带有光滑映射 $\hat{}x\colon \mathcal{R}_\mathcal{G}\setminus\mathcal{Z}_\mathcal{G}\to\mathfrak{t}^*$。那么，$b$-映射 $\mu\colon M\to\mathcal{R}_\mathcal{G}$ 是动量映射，当且仅当它是 $\mathbb{T}^n$ 等变的，并且 $\mathfrak{t}\ni X\mapsto\mu^X\in\mathcal{C}^\infty(M)$ 与 $\mu^X(p)=\langle\hat{}x\circ\mu(p)\ X\rangle$ 是线性的，此外

$$\iota_{X^\#}\omega=d\mu^X.$$

有关陪域定义的更多信息，请参见 [GMPS15，第 5] .

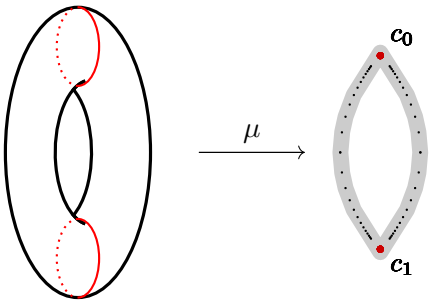


FIGURE 3. 动量映射 $\mu\colon\mathbb{T}^2\to\mathcal{R}_\mathcal{G}$。

定义 *22*。 [*GMPS15*，定义 28] *A* b-辛 *toric* 流形是 $(M^{2n},Z,\omega,\mu\colon M\to\mathcal{R}_\mathcal{G})$，其中 (M,Z,ω) 是 b-辛的，且 μ 是某个作用于 (M,Z,ω) 的 b-*toric* 作用的动量映射。

定义 23。 [GMPS15，定义 30 和 32] A b-多面体在 $\mathcal{R}_\mathcal{G}$ 是一个有界子集 P，它与 $\mathcal{Z}_\mathcal{G}$ 的每个连通分支都有交集，并且可以表示为有限个半空间的交集。

若满足以下条件，该多面体称为Delzant：

- 若 G 是一条直线，则当且仅当对每个顶点 $v\in P$，都存在 $\mathfrak{t}^*$ 的一个格基 $\{u_i\}$，使得与 v 相邻的边在 v 的某个邻域内可写为 $v+tu_i$，其中 $t\geq 0$。
- 若 G 是一个圈，则条件是 $\Delta_Z\subseteq\mathfrak{t}^*_w$ 为 *Delzant*。

由此，我们具备了建立分类所需的所有概念：

定理 24. [GMPS15，定理 35] 该映射

$$\left\{\begin{array}{c}b\text{-}symplectic\ toric\ manifolds\\(M,Z,\omega,\mu:M\to\mathcal{R}_\mathcal{G})\end{array}\right\}\to\left\{\begin{array}{c}Delzant\ b\text{-}polytopes\\in\ \mathcal{R}_\mathcal{G}\end{array}\right\}$$

它将一个 b-辛环面流形映射到其动量映射的像，这是一个双射；其中，b-辛环面流形按保持动量映射的等变 b-辛同胚关系取商。

定理 24 导出了对 b-环面流形的一种特别刚性的分类：

推论 25 。 [GMPS15，注 38] 每个 b-托里流形 b辛同构于以下二者之一

- 一个 b-辛 $\mathbb{T}^2$ 与一个光滑托里流形的乘积，或
- 通过在北极和南极“极冠”处进行一系列辛切割，从一个 b-辛 $\mathbb{S}^2$ 与一个光滑托里流形的乘积得到的流形；这些切割均在临界超曲面 Z之外进行。

2.3.2. b-具有焦点-焦点奇点的可积系统。 在四维情形下，允许出现焦点-焦点奇点，可将托里克系统推广为半托里克系统。本文旨在以同样的方式将四维的 b-托里克系统推广为 b-半托里克系统，即允许出现焦点-焦点奇点。

首批 b具有奇异点且这些奇异点不仅含有椭圆型分量，还含有焦点-焦点分量的可积系统，由 Kiesenhofer 和 Miranda [KM17]在六维流形上构造。在这些例子中，含有焦点-焦点分量的奇点位于 b-辛结构的临界集上，并通过 b-余切提升得到（更多详情请参见 Kiesenhofer 和 Miranda [KM17] ）。

例 26. 考虑群 $G := S^1 \times \mathbb{R}^+ \times S^1$ 以如下方式作用于 $M := S^1 \times \mathbb{R}^2$：

$$(\varphi, a, \alpha) \cdot (\theta, x_1, x_2) := (\theta + \varphi, aR_\alpha(x_1, x_2)),$$

其中， R_α 是对应于在 (x_1, x_2) 平面内旋转角度 α 的矩阵。

该作用的扭曲 b-余切提升在 b-辛流形 $(T^*M, \omega = \frac{1}{p}dp \wedge d\theta + dy_1 \wedge dx_1 + dy_2 \wedge dx_2)$ 上诱导出一个 b-可积系统，其动量映射为 $F = (f_1, f_2, f_3)$，其中：

$$\begin{aligned} f_1 &= \langle \lambda, X_1^\# \rangle = \log |p|, \\ f_2 &= \langle \lambda, X_2^\# \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2, \\ f_3 &= \langle \lambda, X_3^\# \rangle = x_1 y_2 - y_1 x_2. \end{aligned}$$

f_2 和 f_3 分量生成了一族具有焦点-焦点分量的奇异点，这些奇异点位于 $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = 0$。

定义 27. 设 (f_1, f_2, f_3) 是一个 b-可积系统，且 $p \in M$ 是系统的一个奇异点。若存在一个以 p 为中心的局部坐标图$(t, z, x_1, y_1, x_2, y_2)$，使得 ω 的临界超曲面在 p 附近局部表示为$t = 0$，且可积系统表示为

$$f_1 = c \log |t|, \quad f_2 = x_1 y_1 + x_2 y_2, \quad f_3 = x_1 y_2 - y_1 x_2.$$

在本文中，我们构造了具有焦点-焦点奇点的四维 b-可积系统的例子。在第 3 节中，我们证明这类奇异点不能位于 Z 的临界集 b-辛形式在此处是奇异的。因此，在四维 b-可积系统中，焦点-焦点奇点只能出现在 $M \setminus Z$中；它是一个开辛流形，我们可以在此应用关于半托里克系统的结果。

3. 半托里克系统

定义 28. 若一个四维 b-可积系统$(M, Z, \omega, (L, H))$ 满足： L 是真映射，并在 M 上生成一个有效的 S^1-作用，且 $F = (L, H)$ 的所有奇异点均为非退化且不含双曲分量，则称其为 b-半托里克系统。

正如引理 13所示，这样的系统在临界超曲面Z上不能有不动点。不过，还有另一种思路也可以得到相同的结论。

命题 29. 设 $(M, Z, \omega, (L, H))$ 是一个 b-半托里克系统。那么，(dL, dH) 在点$p \in Z$ 处的秩必须至少为 1。

证明。 该证明基于 Kiesenhofer 和 Miranda 在 [KM17的注 33]中提出的思路。我们沿用博尔西诺夫和福缅科 [BF04第 1 节中的记号。8]。

考虑一点 $p \in Z$，使得 $dL|_p = dH|_p = 0$。那么，流 $\varphi^t_{X_L}$ 和 $\varphi^t_{X_H}$ 的作用的线性化生成了 $\mathbb{R}^2$ 在 T_pM 上的作用；根据构造，该作用保持 b-辛形式 ω。这意味着它诱导出一个二维交换李群 $G(L, H) \subset \mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$，由此可导出一个交换李子代数 $K(L, H) \subset \mathfrak{sp}(4, \mathbb{R})$。

然而，向量场 X_L 和 X_H 在每一点都与 Z 相切，因此 $G(L, H)$ 必须保持 $T_pZ \subset T_pM$不变；它是一个 3 维子空间。因此，李代数 $K(L, H)$ 也必须保持T_pZ 不变。

由于点 p 是非退化的，我们知道 $K(L, H)$ 必须是一个 Cartan 子代数，因此它必与方程 1中的某个矩阵子代数共轭。在这些代数中，只有含有双曲分量的代数可能保持一个 3 维子空间不变；而这在 b-半托里克系统中不可能出现。因此，我们得出结论：点 p 必定是退化的，这也与我们的假设矛盾，所以不存在这样的点 $p \in Z$。 □

备注 30。 在命题 *29* 的证明中，我们没有用到条件 $(df_1, \ldots, df_n)$在 Z中几乎处处具有最大秩。这为研究满足定义 *1* 意义下可积的 b-辛流形上的系统，并且在 Z上具有双曲奇点，打开了大门。

Kiesenhofer 和 Miranda 已经针对秩 1 奇点提出了一些例子 [KM17]:

例 31. 考虑群 $G := S^1 \times \mathbb{R}^+$ 以如下方式作用于 $M := S^1 \times \mathbb{R}$：

$$(\varphi, g) \cdot (\theta, x) := (\theta + \varphi, gx),$$

也就是说，在 S^1 分量上，我们有旋转；在 R 分量上，我们有乘法。然后，李代数基 $\left(\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial g}\right)$ 在 M 上诱导出以下基本向量场：

$$X_1 := \frac{\partial}{\partial\theta}, \; X_2 := x\frac{\partial}{\partial x}.$$

我们考虑 在 T^*M 上的扭曲 b-余切提升，即 b-辛结构 $\omega = -d\lambda$ *wher* e

$$\lambda := \log|p|d\theta + ydx$$

且（θ、 p、 x、 y）是 T^*M 上的标准坐标。在 T^*M 上的提升作用是 b-哈密顿的，其动量映射由 $\mu := (f_1, f_2)$ 给出：

$$f_1 = \langle \lambda, X_1^{\#} \rangle = \log|p|,$$
$$f_2 = \langle \lambda, X_2^{\#} \rangle = xy.$$

奇异 该 b可积系统在 $x = y = 0$ 处的点具有一个双曲分量。

鉴于这些现象，研究存在焦点-焦点奇点且这些奇点远离临界集 Z的 b半托里克系统是有意义的。

4. The b-coupled spin-oscillator

本节通过修改耦合自旋振子，构造一个四维 b可积系统。该系统具有一个焦点-焦点型非退化奇点，且该奇点远离超曲面 Z ； 在该超曲面上， b辛形式是奇异的。

4.1. **由 b-耦合自旋振子。** 本节中，我们定义 b-耦合自旋振子。它由原始耦合自旋振子（见定义8）通过对辛形式 $z \mapsto \log|z|$ 和函数 ω 施加变换 L而构造。

令 ρ_1， $\rho_2 > 0$ 为正常数。考虑 b-流形

$$(M = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2,\ Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \mid z = 0\} \times \mathbb{R}^2).$$

考虑 M上的 b-辛形式 $\omega = -\rho_1\, \omega_{\mathbb{S}^2}^b + \rho_2\, \omega_{\mathbb{R}^2}$，其中 $\omega_{\mathbb{S}^2}^b$是（$\mathbb{S}^2$， $Z = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{S}^2 \mid z = 0\}$）上的标准 b-辛形式， $\omega_{\mathbb{R}^2}$是 $\mathbb{R}^2$上的标准辛形式。

回顾定义8 ，我们在 $U^{\pm}$ 和 U^0上分别有坐标图。在 U^0 上，以坐标（θ， z， u， v）表示时，b-辛形式可写为

$$\omega = -\rho_1\, d\theta \wedge \frac{dz}{z} + \rho_2\, du \wedge dv,$$

而在 $U^{\pm}$且在坐标 $(x,\ y,\ u,\ v)$ 中，它可写为

$$\omega = -\rho_1 \frac{1}{1 - x^2 - y^2} dx \wedge dy + \rho_2\, du \wedge dv.$$

定义 32. b-耦合自旋振子是一个4维哈密顿可积系统$(M, \omega, F = (L, H))$，其中

$$\begin{cases} L(x, y, z, u, v) = \rho_1 \log|z| + \frac{\rho_2}{2}\left(u^2 + v^2\right) \\ H(x, y, z, u, v) = \frac{1}{2}(xu + yv) \end{cases}. \tag{3}$$

引理 33. b-耦合自旋振子是一个 b-可积系统。

证明。 从几何上看， L 是球面绕其竖直轴旋转、平面绕原点旋转时对应的动量映射，而 H 衡量球面与平面上的极角之差。因此， H 沿着 L 的流保持不变，并且泊松括号 $\{L, H\}$ 处处为零。通过显式计算，在 $M^{\pm}$中：

$$\{L, H\} = X_L(H) = \left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} - v\frac{\partial}{\partial u} + u\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{1}{2}(xu + yv)\right) = \frac{1}{2}(-yu + xv - vx + uy) = 0,$$

并且，在 M^0中:

$$\{L,H\} = X_L(H) = \left(\frac{\partial}{\partial\theta} - v\frac{\partial}{\partial u} + u\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\sqrt{1-z^2}}{2}\left(u\cos\theta + v\sin\theta\right)\right)$$
$$= \frac{\sqrt{1-z^2}}{2}(-u\sin\theta + v\cos\theta - v\cos\theta + u\sin\theta) = 0.$$

□

注记 34. 注意， b-辛形式 $\omega = -\rho_1\,\omega^b_{\mathbb{S}^2} + \rho_2\,\omega_{\mathbb{R}^2}$ 中的符号选择使得，将 L的流投影到 $\mathbb{S}^2$后，会绕竖直轴逆时针旋转；投影到 $\mathbb{R}^2$后，也会逆时针旋转。另一方面， ω 的定义中的常数 ρ_1、 $\rho_2 > 0$ 确保 L 的流是 2π-周期的。这样，利用 $\mathbb{S}^2$ 在$\mathbb{R}^3$ 中的嵌入，并将 $\mathbb{S}^2$ 投影到 $z = 0$ 超平面， $\mathbb{S}^2$ 中的点与 $\mathbb{R}^2$ 中的点在 L的流作用下以相同的角速度运动，使标量积 $ux + vy = 2H$ 保持不变，因此系统 $\{L,H\}$ 是可积的。

命题35. b-耦合自旋振子的唯一奇点，是位于“北极”$((0,0,1),(0,0)) \in \mathbb{S}^2\times\mathbb{R}^2$和“南极”$((0,0,-1),(0,0)) \in \mathbb{S}^2\times\mathbb{R}^2$的两个焦点-焦点型非退化不动点。

证明. b-耦合自旋振子中的一点若其处的 $dF = (dL, dH)$ 的秩小于 2，则该点为奇点。秩仅在 $x = y = u = v = 0$ （或等价地，在 $z = \pm 1, u = v = 0$）处等于 0，此时 dL 和 dH 均为零。因此，可积系统 $F = (L,H)$ 只有两个不动点：“北极”$((0,0,1),(0,0)) \in \mathbb{S}^2\times\mathbb{R}^2$和“南极”$((0,0,-1),(0,0)) \in \mathbb{S}^2\times\mathbb{R}^2$。类似地可以验证，极点是 M 中 b-哈密顿向量场 X_L和 X_H 同时消失的唯一点。

为证明这些极点是非退化的焦点-焦点型，我们遵循博尔西诺夫和福缅科的第 1.8.2 节 [BF04]。具体而言，我们证明 L 和 H的二次部分，即它们的海森矩阵 d^2L 和 d^2H，作为形式彼此独立，并且存在辛算子 $\omega^{-1}d^2L$ 和 $\omega^{-1}d^2H$ 的一个线性组合，其具有四个不同的、形如 $\pm a \pm ib$ 的特征值。

在北极和南极处，以 $(x,\ y,\ u,\ v)$ 为坐标， L 和 H 的海森矩阵以及 ω 的矩阵形式如下:

$$d^2L = \begin{pmatrix} -\rho_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\rho_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \rho_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \rho_2 \end{pmatrix} \qquad d^2H = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\rho_1 & 0 & 0\\ \rho_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \rho_2\\ 0 & 0 & -\rho_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

矩阵 d^2L 和 d^2H 显然线性无关，并由此得到以下辛算子:

$$A_L := \Omega^{-1}d^2L = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_H := \Omega^{-1}d^2H = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho_1}\\ 0 & 0 & \frac{-1}{\rho_1} & 0\\ 0 & \frac{-1}{\rho_2} & 0 & 0\\ \frac{1}{\rho_2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

与线性组合 $A_L + 2A_H$ 对应的算子形式为

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \frac{1}{\rho_1} \\ 1 & 0 & \frac{-1}{\rho_1} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\rho_2} & 0 & -1 \\ \frac{1}{\rho_2} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

其四个不同的复特征值为 $\pm\frac{1}{\sqrt{\rho_1\rho_2}} \pm i$，这证明这些极点是焦点-焦点型的非退化奇点。

另一方面， $F = (L,\ H)$没有秩为 1 的奇异点。实际上，在极点处 dF 的秩为 0，在其他位置则为 2，因为 L 和 H 的微分在 $M^0 = M \setminus \{((0,\ 0,\ \pm 1),\ (0,\ 0))\}$上线性无关。事实上，在 M^0 上，它们可写为:

$$\begin{cases} dL = \rho_1 \frac{dz}{z} + \rho_2 (udu + vdv) \\ dH = \frac{\sqrt{1-z^2}}{2} \left(\frac{-z^2}{1-z^2} (u\cos\theta + v\sin\theta) \frac{dz}{z} + (-u\sin\theta + v\cos\theta) d\theta + \cos\theta du + \sin\theta dv \right) \end{cases}.$$

注意，它们都不为零，并假设存在一点使得 dF 的秩等于 1。那么， dL 和 dH 在该点线性相关，因此存在一个不为 0 的 μ，使得 $\mu dL + dH = 0$ 在该点成立。我们有以下等价关系:

$$\begin{aligned} & \mu dL + dH = 0 \\ \iff & \begin{cases} \frac{dz}{z} : \mu\rho_1 + \frac{-z^2}{1-z^2} (u\cos\theta + v\sin\theta) = 0 \\ d\theta : -u\sin\theta + v\cos\theta = 0 \\ du : \mu\rho_2 u + \cos\theta = 0 \\ dv : \mu\rho_2 v + \sin\theta = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} \mu\rho_1 + \mu\rho_2 \frac{z^2}{1-z^2} \left(u^2 + v^2\right) = 0 \\ \mu^2\rho_2^2 (u^2 + v^2) = 1 \end{cases} \\ \iff & \mu^2\rho_1\rho_2 + \frac{z^2}{1-z^2} = 0, \end{aligned}$$

但最后一个等式显然永远不成立，因为 $\mu^2\rho_1\rho_2$ 严格为正，而 $\frac{z^2}{1-z^2}$ 在 M^0上始终非负。因此，在 M^0 上不存在使 dF的秩等于 1 的点。□

命题 36. *b-耦合自旋振子的动量映射 (L, H): $S^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 是满射。*

证明. 我们首先断言， L: $S^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 是满射。

事实上，显然，对于任意选取的$\rho_1, \rho_2 > 0$和 $\ell \in \mathbb{R}$，方程 $\rho_1 \log|z| + \frac{\rho_2}{2}(u^2 + v^2) = \ell$ 都有解: 若 $\ell = 0$，则 $z = \pm 1$，$(u, v) = (0,0)$ 是一个原像；若 $\ell > 0$，则可取 $z = \pm 1$ 以及满足 $u^2 + v^2 = \frac{2\ell}{\rho_2}$的 (u, v)；若 $\ell < 0$，则可取 $z = \pm \exp\left(\frac{\ell}{\rho_1}\right)$ 以及 $(u, v) = (0,0)$。

此外，我们声称，将 H 限制在任意给定的纤维 $\{L = \ell\}$ 上时，它是满射。

为简便起见，我们仅考虑满足以下条件的点（$x,\ y,\ z,\ u,\ v$）: 向量（$x,\ y$）和（$u,\ v$）在 $\mathbb{R}^2$ 中共线。在这种情况下， H可表示为 $H = \pm\frac{1}{2} \| (x,\ y) \| \| (u,\ v) \|$,

其中，符号取决于（x，y）和（u，v）的方向是相同还是相反。由于（x，y，z）位于球面上，我们知道 $\|(x,\ y)\| = \sqrt{1-z^2}$。令 $N := \|(u,\ v)\|$。

采用这些记号，动量映射在此限制下可表示为

$$\begin{cases} L(z,N) = \rho_1 \log|z| + \frac{\rho_2}{2} N^2 \\ H(z,N) = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1-z^2}N \end{cases}.$$

现在假设 $L(z,\ N) = \ell$ 对于某个 $\ell \in \mathbb{R}$。我们将分别研究满足$\ell \geq 0$ 和 $\ell \leq 0$的情形。

- 如果 $\ell \geq 0$，则随后 z 可以在 $[-1,1]$内取任意值，因此我们可以关于 z解出 N，

$$N = \sqrt{\frac{2}{\rho_2}(\ell - \rho_1 \log|z|)},$$

由此可得 $N \geq \sqrt{\frac{2\ell}{\rho_2}}$。此外，表达式

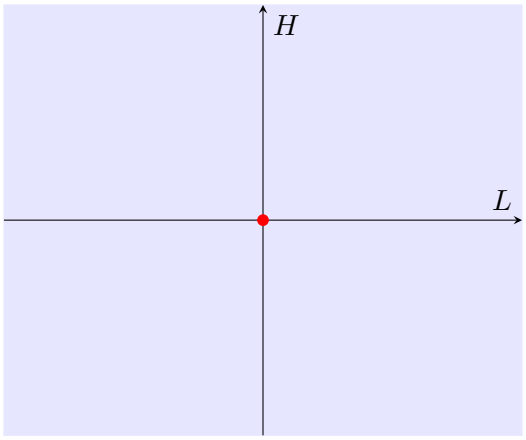
$$H_+ = \frac{1}{2}\sqrt{1-z^2}N = \frac{1}{2}\sqrt{1-z^2}\sqrt{\frac{2}{\rho_2}(\ell - \log|z|)}$$

可以取任意非负值（因为 $H_+(1) = 0$，$\lim_{z\to 0} H_+(z) = +\infty$，且 H_+ 连续），因此在假设 $L = \ell$ 成立的情况下，H 是满射。

- 如果 $\ell \leq 0$，那么 N 可以取任意非负值，并且我们可以关于 N将 $|z|$ 分离出来，

$$|z| = \exp\left(\frac{1}{\rho_1}\left(\ell - \frac{\rho_2}{2}N^2\right)\right),$$

这意味着 $|z| \leq \exp\left(\frac{\ell}{\rho_1}\right)$。由此可得，表达式 $H_+ = \frac{1}{2}\sqrt{1-z^2}N$ 可以取任意非负值，因此 H 在纤维$\{L = \ell\}$上是满射。



b耦合自旋振子的动量映射像。红点是焦点-焦点奇点的像。

□

注 37. 注意，由于系统的对称性，点(x, y, u, v)经动量映射(L, H)得到的像，与点$(-x, -y, -u, -v)$的像相同。这一点，加上(L, H) 的像为整个 $\mathbb{R}^2$这一事实，意味着每个开半球的像都是 $\mathbb{R}^2$。

推论 38。 耦合自旋振子的动量映射在两个开半球上都是满射这一事实 M^+ 和 M^- 也可以视为命题 *35*的推论。

证明。考虑北半球 M^+。它是一个辛流形，在此处该系统按经典意义而言是半托里克的。半托里克系统中焦点-焦点奇点在动量映射中的像位于整个像的内部，因此 $\mathbb{R}^2$ 的原点（北极的像）包含在 $F =$（L， H）像的内部。现在，令 $U \in \mathbb{R}^2$ 为不属于 F 像的点集。注意到 U 是开集，因此，如果 U 非空，则 F 的像具有非空边界。在半托里克系统中，动量映射像的边界由原像为 M^+ 上动量映射奇异点的点组成。但除了北极之外， M^+ 中没有其他奇异点，因此 U 必为空集，且 F 到 M^+ 是满射。

同样的论证证明， F 在南半球 M上是满射 $^-$. □

注 39。 命题 *35*和 *36*的结果总结在图 *4*所绘的动量映射像中。图中显示， b耦合自旋振子与原始的耦合自旋振子表现不同；后者有一个焦点-焦点奇点、一个椭圆-椭圆奇点，以及从发出的两个椭圆-正则奇点单参数族（见图 *1*）。

4.2. **反向 b耦合自旋振子。** 为定义可积系统， b辛形式的符号 ω 必须与动量映射的 L 分量中的符号一致（该分量生成 $\mathbb{S}^1$作用）。在定义 b耦合自旋振子时（定义 32）选择了其中一种，但还有另一种同样有效的可能。

令 ρ_1， $\rho_2 > 0$ 为正常数。再次考虑 b-流形

$$(M = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2,\ Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \mid z = 0\} \times \mathbb{R}^2).$$

现在换一种方式，考虑 M 上的 b-辛形式 $\omega = \rho_1\, \omega^b_{\mathbb{S}^2} + \rho_2\, \omega_{\mathbb{R}^2}$，其中 $\omega^b_{\mathbb{S}^2}$ 是 $(\mathbb{S}^2, Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \mid z = 0\})$ 上的标准b-辛形式，而 $\omega_{\mathbb{R}^2}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的标准辛形式。

再次回顾定义 8中的坐标图 U^0 和 $U^\pm$ 。在 U^0 上，使用坐标（θ， z， u， v）， b-辛形式可写为

$$\omega = \rho_1\, d\theta \wedge \frac{dz}{z} + \rho_2\, du \wedge dv,$$

而在 $U^\pm$ 上，使用坐标（x， y， u， v），可写为

$$\omega = \rho_1 \frac{1}{1 - x^2 - y^2} dx \wedge dy + \rho_2\, du \wedge dv.$$

定义 40。 反向 b-耦合自旋振子 是一个4维哈密顿可积系统$(M, \omega, F = (L, H))$，其中

$$\begin{cases} L(x, y, z, u, v) = -\rho_1 \log|z| + \frac{\rho_2}{2}\left(u^2 + v^2\right) \\ H(x, y, z, u, v) = \frac{1}{2}\left(xu + yv\right) \end{cases}. \tag{4}$$

反向 b-耦合自旋振子本质上与 b-耦合自旋振子是同一个同时旋转系统，但耦合略有不同，而这种差异不会改变其可积性。

引理 41。 反向 b耦合自旋振子是一个 b可积系统。

证明。 从几何上看，这与 b耦合自旋振子的图景相同。具体而言， L是球面绕其竖直轴同时旋转、平面绕原点旋转所对应的动量映射，而 H 衡量球面与平面上的极角之差。因此， H 沿着 L 的流保持不变，且泊松括号 $\{L, H\}$ 处处为零。□

注 42。 泊松括号的显式计算与引理*33*的证明类似，因为二者 X_L 和 H 具有相同的表达式。

与 b耦合自旋振子不同，在反向系统中，两个不动点对应于椭圆-椭圆型的非退化奇点，并且存在无穷多个秩 1 奇异点。具体而言，我们有：

命题 43。 反向的 b耦合自旋振子的奇点包括两个椭圆-椭圆型非退化不动点，分别位于“北极”$((0,\ 0,\ 1),\ (0,\ 0)) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2$和“南极”$((0,\ 0,\ -1),\ (0,\ 0)) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2$，以及从极点延伸出的四个椭圆-正则奇点单参数族。

证明。 反向的 b耦合自旋振子中，若点处 $dF = (dL,\ dH)$的秩小于 2，则该点为奇点。直接计算可知，只有在北极和南极 $((0,\ 0,\ \pm 1),\ (0,\ 0)) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2$处秩才为 0。我们再次遵循博尔西诺夫和福缅科 [BF04] 第 1.8.2 节的论证，证明这些极点是椭圆-椭圆型非退化不动点。

在北极和南极处，在坐标 $(x,\ y,\ u,\ v)$ 中，我们有：

$$d^2L = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_2 \end{pmatrix} \qquad d^2H = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & \rho_1 & 0 & 0 \\ -\rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_2 \\ 0 & 0 & -\rho_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

矩阵 d^2L 和 d^2H 相互独立，并产生：

$$A_L := \Omega^{-1}d^2L = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_H := \Omega^{-1}d^2H = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{\rho_1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho_1} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\rho_2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\rho_2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

对于任意 $\gamma > 0$，线性组合 $A_L + 2\gamma A_H$ 具有如下形式

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \frac{-\gamma}{\rho_1} \\ 1 & 0 & \frac{\gamma}{\rho_1} & 0 \\ 0 & \frac{-\gamma}{\rho_2} & 0 & -1 \\ \frac{\gamma}{\rho_2} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

其特征值为 $\pm i\left(1+\frac{\gamma}{\sqrt{\rho_1\rho_2}}\right)$、$\pm i\left(1-\frac{\gamma}{\sqrt{\rho_1\rho_2}}\right)$。于是，线性组合 $A_L+2\gamma A_H$ 具有四个不同的、类型为 $\pm ia$、$\pm ib$ 的虚特征值（除非 γ 恰好等于 $\sqrt{\rho_1\rho_2}$；但我们只需证明存在 A_L 与 A_H 的一个线性组合具有此性质）。这说明这两个极点是椭圆-椭圆型的非退化奇点。

现在，我们来确定 $F=(L,\ H)$ 在 $M^0=M\setminus\{((0,\ 0,\ \pm1),\ (0,\ 0))\}$ 上秩为 1 的奇异点。在 M^0 上，L 和 H 的微分可写为：

$$\begin{cases} dL=-\rho_1\frac{dz}{z}+\rho_2\left(udu+vdv\right) \\ dH=\frac{\sqrt{1-z^2}}{2}\left(\frac{-z^2}{1-z^2}\left(u\cos\theta+v\sin\theta\right)\frac{dz}{z}+\left(-u\sin\theta+v\cos\theta\right)d\theta+\cos\theta du+\sin\theta dv\right) \end{cases}.$$

它们都不会在 M^0 上消失，因此，在 dF 的秩等于 1 的点处，dL 和 dH 线性相关，且存在 $\mu\neq0$ 使得 $\mu dL+dH=0$ 在该处成立。按照我们在命题 35 的证明中所做的相同计算，可得以下等价关系：

$$\mu dL+dH=0\iff\begin{cases}-\mu\rho_1+\frac{-z^2}{1-z^2}\left(u\cos\theta+v\sin\theta\right)=0\\-u\sin\theta+v\cos\theta=0\\\mu\rho_2u+\cos\theta=0\\\mu\rho_2v+\sin\theta=0\end{cases}\iff\begin{cases}\frac{z^2}{1-z^2}=\mu^2\rho_1\rho_2\\\mu^2\rho_2^2(u^2+v^2)=1\\u\sin\theta=v\cos\theta\end{cases}.$$

最后一个系统对任意 $\mu\neq0$ 值均可求解，且当 $z=0$ 或 $(u,\ v)=(0,\ 0)$ 时无解。解集可仅用 2 个参数表示。具体而言，M^0 上秩为 1 的奇异点集合 K_1 是一个二维子流形，可由 $\theta\in[0,2\pi)$ 和 $z\in(-1,\ 0)\cup(0,\ 1)$ 参数化如下：

$$(u(\theta,z),v(\theta,z))=\pm\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}\left(\cos\theta,\sin\theta\right).$$

注意，对于任意 $(\theta,\ z)\in[0,2\pi)\times(-1,\ 0)\cup(0,\ 1)\subset\mathbb{S}^2$，都有两个点 $(u,\ v)\in\mathbb{R}^2$满足该方程组。考察北半球，其中 $\theta\in[0,2\pi)$ 和$z\in(0,\ 1)$，可见有两个这样的点，分别从相应的极点出发。南半球的情形类似，这意味着秩 1 奇异点子流形由四个连通分支构成。

在秩 1 奇异点处，b-哈密顿向量场 X_L 和 X_H 平行，其流生成 $\mathbb{S}^1$-轨道。由于在 M^0 中，我们有

$$X_L=\frac{\partial}{\partial\theta}-v\frac{\partial}{\partial u}+u\frac{\partial}{\partial v}. \tag{5}$$

$\mathbb{S}^1$秩 1 奇异点（$z,\ \theta,\ u,\ v$）的 $\mathbb{S}^1$-轨道由所有其他秩 1 奇异点组成，这些奇异点可由（$z,\ \theta,\ u,\ v$）经由（$z,\ \theta$）绕 $\mathbb{S}^2$ 的竖直轴同时旋转，以及（$u,\ v$）绕 $\mathbb{R}^2$ 的原点旋转而得到。以坐标（$z,\ \theta,\ u,\ v$）表示的四族 $\mathbb{S}^1$-轨道如下：

$$\left(z,\theta,\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}\cos\theta,\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}\sin\theta\right)\qquad z\in(0,1),\theta\in[0,2\pi),$$

$$\left(z,\theta,-\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}\cos\theta,-\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}\sin\theta\right)\qquad z\in(0,1),\theta\in[0,2\pi),$$

$$\left(z,\theta,\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}\cos\theta,\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}\sin\theta\right) \qquad z\in(-1,0),\theta\in[0,2\pi),$$
$$\left(z,\theta,-\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}\cos\theta,-\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}\sin\theta\right) \qquad z\in(-1,0),\theta\in[0,2\pi).$$

□

推论 44. 反向自旋振子的动量映射 (L,H)：$S^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 的像是 $\mathbb{R}^2$ 中的开区域，其边界由原点以及从原点出发的两条开直线构成，这两条直线分别对应椭圆-正则奇点的像。

证明。 F 上秩 1 的临界点处，函数 L 和 H 为：

$$\begin{cases} L(z,\theta,u,v)=-\rho_1\log|z|+\rho_1\frac{1-z^2}{2z^2} \\ H(z,\theta,u,v)=\pm\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}\frac{1-z^2}{2z} \end{cases}. \tag{6}$$

正如预期，这些点处动量映射的取值与 θ 的取值无关，因为它在 $\mathbb{S}^1$-轨道的所有点处都相同。

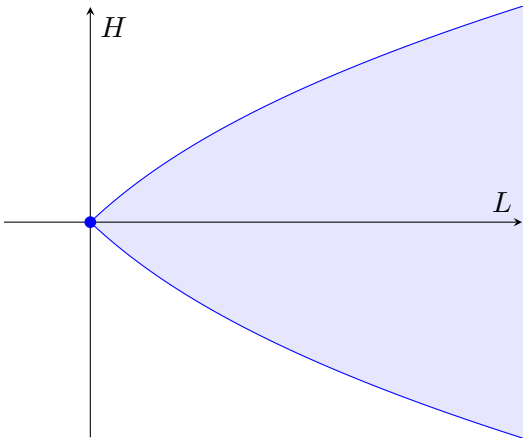


FIGURE 5. 反向 b-耦合自旋振子的动量映射像。蓝点是椭圆-椭圆奇点的像。

□

注 45。 b-耦合自旋振子和反向 b-耦合自旋振子是经典耦合自旋振子的两种自然 b-辛扩展，其表述见定义 *8*。

5. THE b-COUPLED ANGULAR MOMENTA

有三种自然的方法，可以对耦合角动量系统进行修改，从而构造一个 b-可积系统（L,H），该系统定义在（$M=\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2,\omega=-(R_1\omega_{\mathbb{S}^2}+R_2\omega_{\mathbb{S}^2}$)上，如第2.2.2节所述。这些方法均通过选取一个超曲面 $Z\subset M$ 以及一个定义在 b上的M -辛结构（它在 Z处是奇异的），并将函数 L,H 修改为与该 b-辛结构相容的 b-函数来实现：

- 系统 1：取 $Z=\{z_1=0\}\subset M$，在 M 上赋予 b-辛形式 $\omega=-(R_1\frac{1}{z_1}\omega_{\mathbb{S}^2}+R_2\omega_{\mathbb{S}^2})$，并将 L 修改为：$L(z_1,\theta_1,z_2,\theta_2)=R_1$ 对数 $|z_1|+R_2z_2$。
- 系统 2：在与前一种情形相同的设定下，我们也将 H 修改为：$H(z_1,\theta_1,z_2,\theta_2)=(1-t)\log|z_1|+t\left(\sqrt{(1-z_1^2)(1-z_2^2)}\cos(\theta_1-\theta_2)+z_1z_2\right)$。
- 系统 3：取 $Z=\{z_2=0\}\subset M$，赋予 M 以 b-辛形式 $\omega=-(R_1\omega_{\mathbb{S}^2}+R_2\frac{1}{z_2}\omega_{\mathbb{S}^2})$，并将 L 修改为：$L(z_1,\theta_1,z_2,\theta_2)=R_1z_1+R_2\log|z_2|$。

本节的目标是研究这三个 b-可积系统并对其奇点进行分类。我们首先证明它们确实都是可积的，然后分别分析这三个系统的奇点。

引理 46. 系统 *1*、*2* 和 *3* 是 b-可积系统。

证明. 我们验证微分 dL和 dH 几乎处处线性无关，并且$\{L,H\}=0$ 在整个 M上成立。我们对系统 1 进行明确计算，因为对于系统 2 和系统 3，可以用类似的方法重复计算，并得到相同的结果。

首先，在第 z_1节 θ_1*2.2.* z_2中引入的双柱面坐标图（$\theta_2,\in U_1^0\times U_2^0$,2 dL, dH ）下，系统 1 的

$$
(7)\qquad \begin{cases} dL(z_1,\theta_1,z_2,\theta_2) & = R_1\frac{1}{z_1}dz_1+R_2dz_2 \\ dH(z_1,\theta_1,z_2,\theta_2) & = \left(1-t+tz_2-t\frac{z_1}{\sqrt{1-z_1^2}}\sqrt{1-z_2^2}\cos(\theta_1-\theta_2)\right)dz_1 \\ & \quad +t\left(z_1-\frac{z_2}{\sqrt{1-z_2^2}}\sqrt{1-z_1^2}\cos(\theta_1-\theta_2)\right)dz_2 \\ & \quad -t\sqrt{(1-z_1^2)(1-z_2^2)}\sin(\theta_1-\theta_2)d\theta_1 \\ & \quad +t\sqrt{(1-z_1^2)(1-z_2^2)}\sin(\theta_1-\theta_2)d\theta_2 \end{cases}.
$$

点集 $K\subset M$ 中 dL 和 dH 线性相关的点由三个子集构成，它们的测度均为零。第一个子集仅由四个双极点组成；在系统中，只有这些点处的微分会同时消失，这一点可在笛卡尔坐标下验证。第二个子集由满足方程（$\mu dL+\lambda dH=0$）中7的点构成，它是 $\{\theta_1=\theta_2\}\cup\{\theta_1=\theta_2+\pi\}$ 的子集，因此在 M中是零测集。第三个子集是 M 中唯一未被双笛卡尔坐标或双圆柱坐标覆盖的部分的子集，即二维子流形 $\{p_+,p_-\}\times\mathbb{S}^2$和 $\mathbb{S}^2\times\{p_+,p_-\}$，其测度同样为零。因此，$dL\wedge dH\neq 0$ 几乎处处成立。

其次，系统 1 上 $\{L,H\}$对 $U_1^0\times U_2^0$的计算结果为：

$$
\begin{aligned}\{L,H\}=X_L(H)&=\left(-\frac{\partial}{\partial\theta_1}-\frac{\partial}{\partial\theta_2}\right)\left((1-t)z_1+t\left(\sqrt{(1-z_1^2)(1-z_2^2)}\cos(\theta_1-\theta_2)+z_1z_2\right)\right)\\&=t\sqrt{(1-z_1^2)(1-z_2^2)}\sin(\theta_1-\theta_2)-t\sqrt{(1-z_1^2)(1-z_2^2)}\sin(\theta_1-\theta_2)=0.\end{aligned}
$$

由 $\{L,H\}$的连续性可知，它在整个流形 M上恒为 0。 □

注释 47。 为完整起见，请注意，显然还有第四种同样自然的选择，可以将经典耦合角动量转变为一个 b-可积系统：取 Z 如系统 *1* 和系统 *2* 中那样，并仅像系统 *2* 中那样修改 H；但这一选择实际上并不会产生一个 b-可积系统。事实上，如果我们取 $Z=\{z_1=0\}$, L（$z_1,\theta_1,z_2,\theta_2$）$=R_1z_1+R_2z_2$和 H（x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2）$=(1-t)$ 对数 $|z_1|+t$（$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$），那么该系统就不是可积的。

从非正式的层面来看，考虑到向量场 X_L在该系统中将不再表示旋转，我们可以理解这一事实。具体地，在 $U_1^0 \times U_2^0$ 中，

$$\{L, H\} = t(z_1 - 1)\sqrt{\left(1 - z_1^2\right)\left(1 - z_2^2\right)}\sin\left(\theta_1 - \theta_2\right),$$

它通常不同于0。

5.1. 经典耦合角动量不动点的局部分析。 在研究本节作为 b-可积系统引入的耦合角动量的 3 b-辛形式的临界点之前（情形 (1)、(2) 和 (3)），先考察经典耦合角动量中已分类的不动点的局部分析将会很有帮助。

为确定 b-辛系统奇异点的性质，我们将利用这样一个事实：可积系统不动点的非退化性和类型，仅取决于动量映射各分量的局部性质，且只需考虑到二阶（等价地，在系统的不动点 $(M,\ \omega,$ $(H,\ L)$) 处，表达式 ω、 d^2L 和 d^2H 决定其类型）。更确切地说，我们将利用 b-可积系统不动点的局部形式与经典耦合角动量不动点的局部形式之间存在相似性这一点。如前所述，后者根据参数 $t,\ R_1,\ R_2$ 进行分类，因此，利用这些相似性，我们便能够刻画前者并确定其类型。

为了利用系统的局部表达式分析不动点，下面给出经典耦合角动量在四个不动点 $p_{\pm,\ \pm}$ 处的 Ω、 d^2L, d^2H、$\Omega^{-1}d^2L$、$\Omega^{-1}d^2H$ 的局部表达式。本节稍后，我们将计算每个 3 b-可积系统在其不动点处的相同局部表达式，并发现其中一些与这些表达式相同，这意味着相应不动点的性质也相同。

我们通过使用对应于每个临界点 $p_{\varepsilon_1,\ \varepsilon_2}$ 的符号组合 $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2 \in \{+, -\}$，同时计算这四个临界点的相关表达式。也就是说，对于每个双极 $p_{\varepsilon_1,\ \varepsilon_2}$ =（0，0，$\varepsilon_1$1），（0，0，$\varepsilon_2$1），我们使用笛卡尔坐标图（$\varphi_1,\ U_1^{\varepsilon_1}$）×（$\varphi_2,\ U_2^{\varepsilon_2}$）。

在每个双重 极点 $p_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$，它在坐标 (x_1, y_1, x_2, y_2) 中对应于 (0,0,0,0)，我们有 :

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon_1 R_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 R_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 R_2 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 R_2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad d^2L = \begin{pmatrix} -\varepsilon_1 R_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_1 R_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_2 R_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 R_2 \end{pmatrix},$$

$$d^2H = \begin{pmatrix} \varepsilon_1(-1 + t - \varepsilon_2 t) & 0 & t & 0 \\ 0 & \varepsilon_1(-1 + t - \varepsilon_2 t) & 0 & t \\ t & 0 & -\varepsilon_1\varepsilon_2 t & 0 \\ 0 & t & 0 & -\varepsilon_1\varepsilon_2 t \end{pmatrix}.$$

对于任意 $t,\varepsilon_1,\varepsilon_2$，矩阵 d^2L 和 d^2H 线性无关，并给出 $A_L^0 := \Omega^{-1}d^2L$ 和 $A_H^0 := \Omega^{-1}d^2H$，其表达式为：

$$A_L^0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_H^0 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-\varepsilon_2 t+t-1}{R_1} & 0 & \frac{t}{\varepsilon_1 R_1} \\ -\frac{-\varepsilon_2 t+t-1}{R_1} & 0 & -\frac{t}{\varepsilon_1 R_1} & 0 \\ 0 & \frac{t}{\varepsilon_2 R_2} & 0 & -\frac{\varepsilon_1 t}{R_2} \\ -\frac{t}{\varepsilon_2 R_2} & 0 & \frac{\varepsilon_1 t}{R_2} & 0 \end{pmatrix},$$

其中上标 0 仅表示它们对应于经典耦合角动量的情形。线性组合 $A^0 := A_L^0 + A_H^0$ 具有如下形式

$$A^0 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-\varepsilon_2 t+t-1}{R_1} - 1 & 0 & \frac{t}{\varepsilon_1 R_1} \\ -\frac{-\varepsilon_2 t+t-1}{R_1} + 1 & 0 & -\frac{t}{\varepsilon_1 R_1} & 0 \\ 0 & \frac{t}{\varepsilon_2 R_2} & 0 & -\frac{\varepsilon_1 t}{R_2} - 1 \\ -\frac{t}{\varepsilon_2 R_2} & 0 & \frac{\varepsilon_1 t}{R_2} + 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

在四个极点 $p_{\varepsilon_1,\ \varepsilon_2}$, A^0 处为：

$$A^0_{p_{+,+}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{R_1} - 1 & 0 & \frac{t}{R_1} \\ \frac{1}{R_1} + 1 & 0 & -\frac{t}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{t}{R_2} & 0 & -\frac{t}{R_2} - 1 \\ -\frac{t}{R_2} & 0 & \frac{t}{R_2} + 1 & 0 \end{pmatrix}, A^0_{p_{+,-}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2t-1}{R_1} - 1 & 0 & \frac{t}{R_1} \\ -\frac{2t-1}{R_1} + 1 & 0 & -\frac{t}{R_1} & 0 \\ 0 & -\frac{t}{R_2} & 0 & -\frac{t}{R_2} - 1 \\ \frac{t}{R_2} & 0 & \frac{t}{R_2} + 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^0_{p_{-,+}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{R_1} - 1 & 0 & -\frac{t}{R_1} \\ \frac{1}{R_1} + 1 & 0 & \frac{t}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{t}{R_2} & 0 & \frac{t}{R_2} - 1 \\ -\frac{t}{R_2} & 0 & -\frac{t}{R_2} + 1 & 0 \end{pmatrix}, A^0_{p_{-,-}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2t-1}{R_1} - 1 & 0 & -\frac{t}{R_1} \\ -\frac{2t-1}{R_1} + 1 & 0 & \frac{t}{R_1} & 0 \\ 0 & -\frac{t}{R_2} & 0 & \frac{t}{R_2} - 1 \\ \frac{t}{R_2} & 0 & -\frac{t}{R_2} + 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

它们的特征多项式分别为：

$$\begin{aligned} P^0_{+,+}(\lambda) =& \lambda^4 + \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{2(t^2+R_2)}{R_1R_2} + \frac{t(t+2R_2)}{R_2^2} + 2\right)\lambda^2 + \frac{(-t^2+tR_1+t+R_1R_2+R_2)^2}{R_1^2R_2^2}, \\ P^0_{+,-}(\lambda) =& \lambda^4 + \left(\frac{(1-2t)^2}{R_1^2} + \frac{2(R_2-t^2-2tR_2)}{R_1R_2} + \frac{t(t+2R_2)}{R_2^2} + 2\right)\lambda^2 \\ &+ \frac{(-t^2+tR_1-2tR_2+t+R_1R_2+R_2)^2}{R_1^2R_2^2}, \\ P^0_{-,+}(\lambda) =& \lambda^4 + \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{2(R_2-t^2)}{R_1R_2} + \frac{t(t-2R_2)}{R_2^2} + 2\right)\lambda^2 + \frac{(t^2-tR_1-t+R_1R_2+R_2)^2}{R_1^2R_2^2}, \\ P^0_{-,-}(\lambda) =& \lambda^4 + \left(\frac{(1-2t)^2}{R_1^2} + \frac{2(R_2+t^2-2tR_2)}{R_1R_2} + \frac{t(t-2R_2)}{R_2^2} + 2\right)\lambda^2 \\ &+ \frac{(-t^2+tR_1+2tR_2+t-R_1R_2-R_2)^2}{R_1^2R_2^2}. \end{aligned}$$

关于经典耦合角动量的研究（参见 Sadovksii 和 Zhilinskii [SZ99],Hohloch 和 Palmer [HP18], Le Floch 和 Pelayo [LFP19], Alonso、Dullin 和 Hohloch [ADH20]以及 Alonso 和 Hohloch [AH21]）表明，矩阵 $A^0_{p_+,+}$,$A^0_{p_-,+}$,$A^0_{p_-,-}$ 具有两对虚特征值，这说明非退化不动点 $p_{+,+}$, $p_{-,+}$,$p_{-,-}$ 属于椭圆-椭圆型。矩阵 $A^0_{p_+,-}$ 在 $0 \le t < t^-$ 时具有两对虚特征值，或者在 $1 \ge t > t^+$

时具有四对复共轭特征值，这表明 $p_{+,\,-}$ 分别是椭圆-椭圆型或焦点-焦点型的非退化不动点。此外，对于 $t \in \{t^-, t^+\}$ $p_{+,\,-}$ 是退化的。

5.2. 系统 1 的临界点。 我们取 $Z = \{z_1 = 0\} \subset M$，赋予 M b-辛形式 $\omega = -(R_1 \frac{1}{z_1}\omega_{\mathbb{S}^2} + R_2\omega_{\mathbb{S}^2})$，并将 L 修改为:— $L(z_1,\ \theta_1,\ z_2,\ \theta_2) = R_1 \log\ |z_1| + R_2 z_2$。用柱坐标表示的 b-辛形式为

$$\omega = R_1 \frac{dz_1}{z_1} \wedge d\theta_1 + R_2 dz_2 \wedge d\theta_2,$$

用笛卡尔坐标表示则为

$$\omega = -\frac{R_1}{1 - x_1^2 - y_1^2} dx_1 \wedge dy_1 - \varepsilon_2 \frac{R_2}{\sqrt{1 - x_2^2 - y_2^2}} dx_2 \wedge dy_2.$$

现在柱坐标下的动量为

$$\begin{cases} L(z_1, \theta_1, z_2, \theta_2) = R_1 \log |z_1| + R_2 z_2 \\ H(z_1, \theta_1, z_2, \theta_2) = (1-t)z_1 + t\left(\sqrt{(1 - z_1^2)(1 - z_2^2)}\cos(\theta_1 - \theta_2) + z_1 z_2\right) \end{cases},$$

用笛卡尔坐标表示则为

$$\begin{cases} L(x_1, y_1, x_2, y_2) = \frac{1}{2} R_1 \log\left|1 - x_1^2 - y_1^2\right| + \varepsilon_2 R_2 \sqrt{1 - x_2^2 - y_2^2} \\ H(x_1, y_1, x_2, y_2) = \varepsilon_1 (1-t)\sqrt{1 - x_1^2 - y_1^2} + t\left(x_1 x_2 + y_1 y_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sqrt{(1 - x_1^2 - y_1^2)(1 - x_2^2 - y_2^2)}\right) \end{cases}.$$

引理 48。 设 ρ： $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 表示在第一个 $\mathbb{S}^2$ 分量上的对跖反射，并在第二个 $\mathbb{S}^2$ 分量上为恒等变换。则系统 *1* 具有全局对称性 $(L, H) = (L, -H) \circ \rho$。

证明。这一全局对称性用双柱坐标表示为 $(L,\ H)(z_1,\ \theta_1,\ z_2,\ \theta_2) = (L,\ -H)(-z_1,\ \theta_1 + \pi,\ z_2,\ \theta_2)$。直接计算可得

$$L(-z_1, \theta_1 + \pi, z_2, \theta_2) = R_1 \log|-z_1| + R_2 z_2 = R_1 \log|z_1| + R_2 z_2 = L(z_1, \theta_1, z_2, \theta_2)$$

并且

$$\begin{aligned} H(-z_1, \theta_1 + \pi, z_2, \theta_2) &= (1-t)(-z_1) + t\left(\sqrt{(1 - (-z_1)^2)(1 - z_2^2)}\cos(\theta_1 + \pi - \theta_2) + (-z_1)z_2\right) \\ &= -(1-t)z_1 - t\left(\sqrt{(1 - z_1^2)(1 - z_2^2)}\cos(\theta_1 - \theta_2) + z_1 z_2\right) = -H(z_1, \theta_1, z_2, \theta_2) \end{aligned}$$

在 $U_1^0 \times U_2^0$ 上。由 L 和 H 的连续性可知，这个等式可延拓至 M。 □

注 *49*。该全局对称性在笛卡尔坐标中表示为 $(L, H)(x_1, y_1, x_2, y_2) = (L, -H)(-x_1, -y_1, x_2, y_2)$。在此情形下，必须考虑到：若 $(-x_1, -y_1, x_2, y_2)$ 被坐标图 $(\varphi_1, U_1^{\varepsilon_1}) \times (\varphi_2, U_2^{\varepsilon_2})$ 覆盖，则 (x_1, y_1, x_2, y_2) 被坐标图 $(\varphi_1, U_1^{-\varepsilon_1}) \times (\varphi_2, U_2^{\varepsilon_2})$ 覆盖。

推论 50。 系统 $(L,\ H)$ 中位于 $M = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 的两点，其在第一个 $\mathbb{S}^2$分量 M 中互为对跖点，且在第二个 $\mathbb{S}^2$ 分量 M 中具有相同坐标，因此具有相同的秩、非退化性和类型。

证明。 可积系统（f_1，……， f_n）在一点邻域内的局部标准形，在函数 f_1，……， f_n 进行正则线性变换时保持不变（见 Bolsinov 和博尔西诺夫和福缅科 [BF04]）。由于一点的秩、非退化性和类型由其局部标准形决定，因此与点 $p \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 相对应的这些特征$\rho(p) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$。 □

命题 51. 系统 *1* 在双极点 $p_{\pm,\pm} = ((0, 0, \pm 1), (0, 0, \pm 1)) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$处有4 个不动点。不动点 $p_{+,+}$ 和 $p_{-,+}$ 对于 t的所有取值均为椭圆-椭圆型非退化奇点，而 $p_{+,-}$ 和 $p_{-,-}$ 在 $t < t^-$ 或 $t > t^+$时为椭圆-椭圆型非退化奇点，在 $t^- < t < t^+$ 时为焦点-焦点型奇点，在 $t \in \{t^-, t^+\}$时则退化，其中

$$t^{\pm} = \frac{R_2}{2R_2 + R_1 \mp 2\sqrt{R_1 R_2}}.$$

证明。系统的奇点对应于 $dF = (dL, dH)$的秩小于 2 的点。 dF的秩仅在四个双极点 $p_{\pm,\pm} = ((0, 0, \pm 1), (0, 0, \pm 1)) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$处等于 0，这意味着它们是系统仅有的不动点。为了判断这些不动点是否非退化并确定其类型，我们按照第 5.1 节中的方法进行局部分析。我们按照第 5.1 节中的做法，利用对应于每个双点的符号组合 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{+, -\}$，同时对四个临界点 $p_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ 进行计算。

在每个双极 $p_{\varepsilon_1,\ \varepsilon_2}$ 处，它在坐标图 $(\varphi_1,\ U_1^{\varepsilon_1})$ 的坐标 $(x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2)$ 中对应于 $(0,\ 0,\ 0,\ 0) \times (\varphi_2,\ U_2^{\varepsilon_2})$，我们有：

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -R_1 & 0 & 0 \\ R_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 R_2 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 R_2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad d^2L = \begin{pmatrix} -R_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_2 R_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 R_2 \end{pmatrix},$$

$$d^2H = \begin{pmatrix} \varepsilon_1(-1 + t - \varepsilon_2 t) & 0 & t & 0 \\ 0 & \varepsilon_1(-1 + t - \varepsilon_2 t) & 0 & t \\ t & 0 & -\varepsilon_1\varepsilon_2 t & 0 \\ 0 & t & 0 & -\varepsilon_1\varepsilon_2 t \end{pmatrix}.$$

矩阵 d^2L 和 d^2H 对任意 t，ε_1，ε_2 都是独立的，并产生 $A_L^1 := \Omega^{-1} d^2L$ 和 $A_H^1 := \Omega^{-1} d^2H$，其表达式为：

$$A_L^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_H^1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\varepsilon_1(-\varepsilon_2 t + t - 1)}{R_1} & 0 & \frac{t}{R_1} \\ -\frac{\varepsilon_1(-\varepsilon_2 t + t - 1)}{R_1} & 0 & -\frac{t}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{t}{\varepsilon_2 R_2} & 0 & -\frac{\varepsilon_1 t}{R_2} \\ -\frac{t}{\varepsilon_2 R_2} & 0 & \frac{\varepsilon_1 t}{R_2} & 0 \end{pmatrix}.$$

线性组合 $A^1 := A_L^1 + A_H^1$ 的形式为

$$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\varepsilon_1(-\varepsilon_2 t + t - 1)}{R_1} - 1 & 0 & \frac{t}{R_1} \\ -\frac{\varepsilon_1(-\varepsilon_2 t + t - 1)}{R_1} + 1 & 0 & -\frac{t}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{t}{\varepsilon_2 R_2} & 0 & -\frac{\varepsilon_1 t}{R_2} - 1 \\ -\frac{t}{\varepsilon_2 R_2} & 0 & \frac{\varepsilon_1 t}{R_2} + 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

在四个极点中的每一个处， A^1 为：

$$A^1_{p_{+,+}}=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{R_1}-1 & 0 & \frac{t}{R_1} \\ \frac{1}{R_1}+1 & 0 & -\frac{t}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{t}{R_2} & 0 & -\frac{t}{R_2}-1 \\ -\frac{t}{R_2} & 0 & \frac{t}{R_2}+1 & 0 \end{pmatrix}, A^1_{p_{+,-}}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{2t-1}{R_1}-1 & 0 & \frac{t}{R_1} \\ -\frac{2t-1}{R_1}+1 & 0 & -\frac{t}{R_1} & 0 \\ 0 & -\frac{t}{R_2} & 0 & -\frac{t}{R_2}-1 \\ \frac{t}{R_2} & 0 & \frac{t}{R_2}+1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^1_{p_{-,+}}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{R_1}-1 & 0 & \frac{t}{R_1} \\ -\frac{1}{R_1}+1 & 0 & -\frac{t}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{t}{R_2} & 0 & \frac{t}{R_2}-1 \\ -\frac{t}{R_2} & 0 & -\frac{t}{R_2}+1 & 0 \end{pmatrix}, A^1_{p_{-,-}}=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{2t-1}{R_1}-1 & 0 & \frac{t}{R_1} \\ \frac{2t-1}{R_1}+1 & 0 & -\frac{t}{R_1} & 0 \\ 0 & -\frac{t}{R_2} & 0 & \frac{t}{R_2}-1 \\ \frac{t}{R_2} & 0 & -\frac{t}{R_2}+1 & 0 \end{pmatrix}.$$

注意到 $A^1_{p_{+,+}}$ 等于 $A^0_{p_{+,+}}$ 根据第 5.1 节。因此，对于 t, $p_{+,+}$ 的所有取值，它也是该系统中的一个椭圆-椭圆型非退化不动点。类似地，由于$A^1_{p_{+,-}}$ 等于$A^0_{p_{+,-}}$，不动点 $p_{+,-}$ 在 $t<t^-$ 或 $t>t^+$ 时是非退化的椭圆-椭圆型不动点，在 $t^-<t<t^+$ 时为焦点-焦点型，而在 $t\in\{t^-,t^+\}$ 时退化，其中

$$t^{\pm}=\frac{R_2}{2R_2+R_1\mp 2\sqrt{R_1R_2}}.$$

另一方面，根据推论 50，由于 $p_{-,+}$ 与 $p_{+,+}$ 对称，因此二者类型相同，所以它是一个非退化的椭圆-椭圆型不动点。类似地，$p_{-,-}$ 与 $p_{+,-}$ 对称，因此当 $t<t^-$ 或 $t>t^+$ 时，它是非退化的椭圆-椭圆型；当 $t^-<t<t^+$ 时，它是焦点-焦点型；当 $t\in\{t^-,t^+\}$ 时，它是退化的。□

5.3. **系统 2 的临界点**。我们再次取 $Z=\{z_1=0\}\subset M$，赋予 M b-辛形式 $\omega=-($ $R_1\frac{1}{z_1}\omega_{\mathbb{S}^2}+R_2\omega_{\mathbb{S}^2})$，将 L 修改为：$L(z_1,\theta_1,z_2,\theta_2)=R_1\log|z_1|+R_2z_2$，并将 H 修改为：$H($ $z_1,\theta_1,z_2,\theta_2)=(1-t)\log|z_1|+t\left(\sqrt{(1-z_1^2)(1-z_2^2)}\cos(\theta_1-\theta_2)+z_1z_2\right)$。

b-辛形式在柱坐标中的表达式为

$$\omega=R_1\frac{dz_1}{z_1}\wedge d\theta_1+R_2dz_2\wedge d\theta_2,$$

在笛卡尔坐标中则为

$$\omega=-\frac{R_1}{1-x_1^2-y_1^2}dx_1\wedge dy_1-\varepsilon_2\frac{R_2}{\sqrt{1-x_2^2-y_2^2}}dx_2\wedge dy_2.$$

$(L,\ H)$在柱坐标中的表达式为

$$\begin{cases} L(z_1,\theta_1,z_2,\theta_2)=R_1\log|z_1|+R_2z_2 \\ H(z_1,\theta_1,z_2,\theta_2)=(1-t)\log|z_1|+t\left(\sqrt{(1-z_1^2)(1-z_2^2)}\cos(\theta_1-\theta_2)+z_1z_2\right) \end{cases},$$

在笛卡尔坐标中则为

$$\begin{cases} L(x_1,y_1,x_2,y_2)=\frac{1}{2}R_1\log\left|1-x_1^2-y_1^2\right|+\varepsilon_2R_2\sqrt{1-x_2^2-y_2^2} \\ H(x_1,y_1,x_2,y_2)=(1-t)\frac{1}{2}\log\left|1-x_1^2-y_1^2\right|+t\left(x_1x_2+y_1y_2+\varepsilon_1\varepsilon_2\sqrt{(1-x_1^2-y_1^2)(1-x_2^2-y_2^2)}\right) \end{cases}.$$

命题52. 系统 *2* 在双极点 $p_{\pm,\pm}=((0,0,\pm1),(0,0,\pm1))\in\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2$处有4 个不动点。不动点 $p_{+,+}$, $p_{-,+}$ 和 $p_{-,-}$ 在所有取值下均为椭圆-椭圆型非退化不动点

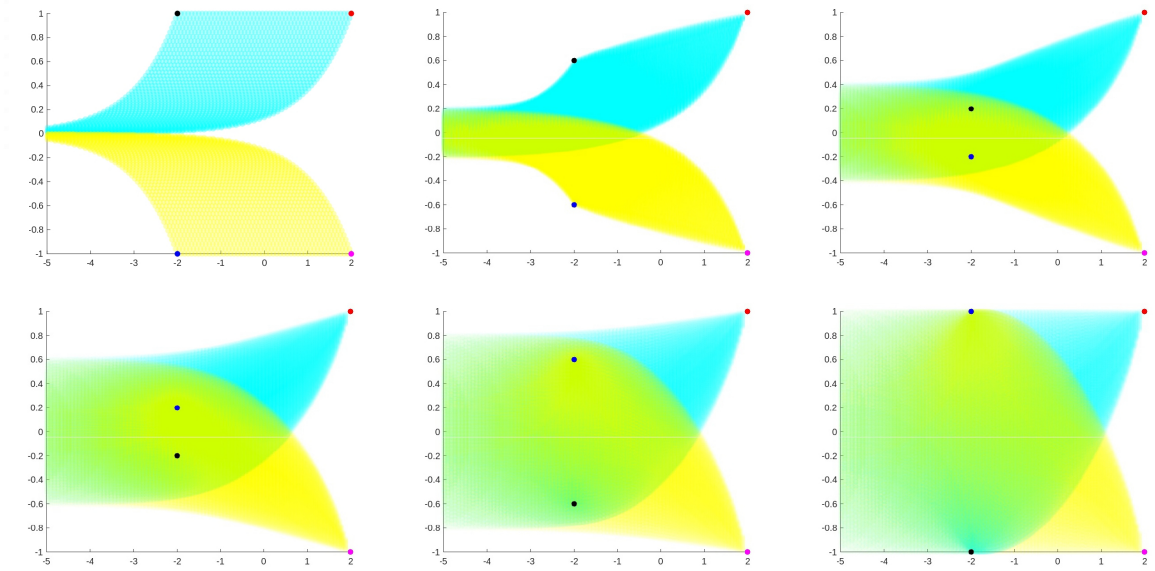


FIGURE 6. 系统 1 的动量映射图像，其中 t的取值介于 0（左上）和 1（右下）之间，间隔为 0。2。四个不动点的图像$p_{+,+}$、$p_{+,-}$、$p_{-,+}$、$p_{-,-}$ 分别以红色、黑色、品红色和蓝色表示。子流形 $\mathbb{S}^+ \times \mathbb{S}^2$ 的图像以天蓝色表示，子流形 $\mathbb{S}^- \times \mathbb{S}^2$ 的图像以黄色表示，二者均通过数值方法获得。注意， b-半托里克系统的动量映射图像不一定是凸的（半托里克系统同样如此，参见 Le Floch 和 Palmer 的工作中关于 Hirzeburg曲面的例子 [LFP18]）。

对于 t，$p_{+,-}$ 在 $t < t^-$ 或 $t > t^+$时为非退化的椭圆-椭圆型，在 $t^- < t < t^+$ 时为焦点-焦点型，在 $t \in \{t^-, t^+\}$时退化，其中

$$t^\pm = \frac{R_2}{2R_2 + R_1 \mp 2\sqrt{R_1 R_2}}.$$

证明。 该系统唯一的不动点是四个双极点 $p_{\pm,\pm} = ((0,0,\pm 1),(0,0,\pm 1)) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$。在每个不动点 $p_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$处，它对应坐标 (x_1, y_1, x_2, y_2) 和坐标图 $(\varphi_1, U_1^{\varepsilon_1}) \times (\varphi_2, U_2^{\varepsilon_2})$ 中的 (0,0,0,0)，我们有：

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -R_1 & 0 & 0 \\ R_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 R_2 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 R_2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad d^2 L = \begin{pmatrix} -R_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_2 R_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 R_2 \end{pmatrix},$$

$$d^2 H = \begin{pmatrix} -1 + t - \varepsilon_1\varepsilon_2 t & 0 & t & 0 \\ 0 & -1 + t - \varepsilon_1\varepsilon_2 t & 0 & t \\ t & 0 & -\varepsilon_1\varepsilon_2 t & 0 \\ 0 & t & 0 & -\varepsilon_1\varepsilon_2 t \end{pmatrix}.$$

对于任意 $t, \varepsilon_1, \varepsilon_2$，矩阵 d^2L 和 d^2H 相互独立，并产生 $A^2_L := \Omega^{-1}d^2L$ 和 $A^2_H := \Omega^{-1}d^2H$，其表达式为：

$$A^2_L = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^2_H = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-\varepsilon_1\varepsilon_2 t+t-1}{R_1} & 0 & \frac{t}{R_1} \\ -\frac{-\varepsilon_1\varepsilon_2 t+t-1}{R_1} & 0 & -\frac{t}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{t}{\varepsilon_2 R_2} & 0 & -\frac{\varepsilon_1 t}{R_2} \\ -\frac{t}{\varepsilon_2 R_2} & 0 & \frac{\varepsilon_1 t}{R_2} & 0 \end{pmatrix}.$$

线性组合 $A^2 := A^2_L + A^2_H$ 具有如下形式

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-\varepsilon_1\varepsilon_2 t+t-1}{R_1} - 1 & 0 & \frac{t}{R_1} \\ -\frac{-\varepsilon_1\varepsilon_2 t+t-1}{R_1} + 1 & 0 & -\frac{t}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{t}{\varepsilon_2 R_2} & 0 & -\frac{\varepsilon_1 t}{R_2} - 1 \\ -\frac{t}{\varepsilon_2 R_2} & 0 & \frac{\varepsilon_1 t}{R_2} + 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

在四个极点中的每一个处，A^2 均为：

$$A^2_{p_{+,+}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{R_1} - 1 & 0 & \frac{t}{R_1} \\ \frac{1}{R_1} + 1 & 0 & -\frac{t}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{t}{R_2} & 0 & -\frac{t}{R_2} - 1 \\ -\frac{t}{R_2} & 0 & \frac{t}{R_2} + 1 & 0 \end{pmatrix}, A^2_{p_{+,-}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2t-1}{R_1} - 1 & 0 & \frac{t}{R_1} \\ -\frac{2t-1}{R_1} + 1 & 0 & -\frac{t}{R_1} & 0 \\ 0 & -\frac{t}{R_2} & 0 & -\frac{t}{R_2} - 1 \\ \frac{t}{R_2} & 0 & \frac{t}{R_2} + 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^2_{p_{-,+}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2t-1}{R_1} - 1 & 0 & \frac{t}{R_1} \\ -\frac{2t-1}{R_1} + 1 & 0 & -\frac{t}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{t}{R_2} & 0 & \frac{t}{R_2} - 1 \\ -\frac{t}{R_2} & 0 & -\frac{t}{R_2} + 1 & 0 \end{pmatrix}, A^2_{p_{-,-}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{R_1} - 1 & 0 & \frac{t}{R_1} \\ \frac{1}{R_1} + 1 & 0 & -\frac{t}{R_1} & 0 \\ 0 & -\frac{t}{R_2} & 0 & \frac{t}{R_2} - 1 \\ \frac{t}{R_2} & 0 & -\frac{t}{R_2} + 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

由于$A^2_{p_{+,+}}$与 $A^0_{p_{+\text{相同},+}}$ 根据第 5.1节，$p_{+,+}$ 对于 t的所有取值均为非退化的椭圆-椭圆型。同样，由于 $A^2_{p_{+,-}}$与 $A^0_{p_{+\text{相同},-}}$，$p_{+,-}$ 在 $t < t^-$ 或 $t > t^+$时为非退化的椭圆-椭圆型，在 $t^- < t < t^+$ 时为焦点-焦点型，在 $t \in \{t^-, t^+\}$时则退化，其中

$$t^\pm = \frac{R_2}{2R_2 + R_1 \mp 2\sqrt{R_1 R_2}}.$$

另一方面，通过直接计算可知，$A^2_{p_{-,+}}$的特征多项式与第 5.1 节中定义的 $P^0_{-,-}(\lambda)$ 相同。因此，$p_{-,+}$ 对于 t 的所有取值均为非退化的椭圆-椭圆型不动点。同样，$A^2_{p_{-,-}}$ 的特征多项式与第 5.1 节的 $P^0_{-,+}(\lambda)$ 相同，因此 $p_{-,-}$ 对于 t的所有取值也均为非退化的椭圆-椭圆型不动点。□

5.4. 系统 3 的临界点。我们取 $Z = \{z_2 = 0\} \subset M$，赋予 M b-辛形式 $\omega = -(R_1\omega_{\mathbb{S}^2} + R_2 \frac{1}{z_2}\omega_{\mathbb{S}^2})$，并将 L 修改为：$L(z_1, \theta_1, z_2, \theta_2) = R_1 z_1 + R_2 \log |z_2|$。柱坐标中的 b-辛形式表达式为

$$\omega = R_1 dz_1 \wedge d\theta_1 + R_2 \frac{dz_2}{z_2} \wedge d\theta_2,$$

而在笛卡尔坐标中，它是

$$\omega = -\frac{R_1}{\sqrt{1 - x_1^2 - y_1^2}} dx_1 \wedge dy_1 - \frac{R_2}{1 - x_2^2 - y_2^2} dx_2 \wedge dy_2.$$

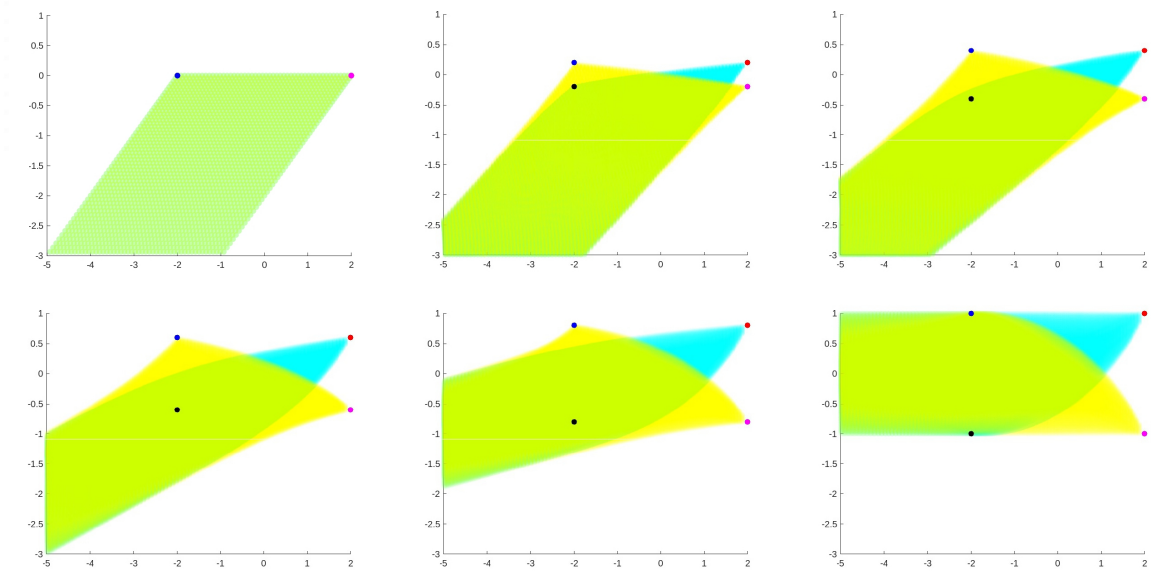


FIGURE 7. 当 t的取值从 0（左上）到 1（右下），间隔为 0.2 时，系统 2 的动量映射像。四个不动点$p_{+,+}$,$p_{+,-}$,$p_{-,+}$,$p_{-,-}$ 的像依次以红色、黑色、洋红色和蓝色表示。子流形 $\mathbb{S}^+ \times \mathbb{S}^2$ 的像以天蓝色表示，子流形 $\mathbb{S}^- \times \mathbb{S}^2$ 的像以黄色表示，两者均通过数值方法获得。

（L, H）在柱坐标中的表达式为

$$\begin{cases} L(z_1,\theta_1,z_2,\theta_2) = R_1 z_1 + R_2 \log|z_2| \\ H(z_1,\theta_1,z_2,\theta_2) = (1-t)z_1 + t\left(\sqrt{(1-z_1^2)(1-z_2^2)}\cos(\theta_1-\theta_2) + z_1 z_2\right) \end{cases},$$

以及在笛卡尔坐标中

$$\begin{cases} L(x_1,y_1,x_2,y_2) = R_1\sqrt{1-x_1^2-y_1^2} + \frac{1}{2}R_2 \log\left|1-x_2^2-y_2^2\right| \\ H(x_1,y_1,x_2,y_2) = (1-t)\sqrt{1-x_1^2-y_1^2} + t\left(x_1x_2 + y_1y_2 + \sqrt{(1-x_1^2-y_1^2)(1-x_2^2-y_2^2)}\right) \end{cases}.$$

命题53. 系统 *3* 在双极点 $p_{\pm,\pm} = ((0,0,\pm 1),(0,0,\pm 1)) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$处有4 个不动点。不动点 $p_{+,+}$, $p_{+,-}$ 和 $p_{-,+}$ 对于所有 t的取值均为椭圆-椭圆型非退化不动点，而 $p_{-,-}$ 在 $t < t^-$ 或 $t > t^+$时为椭圆-椭圆型非退化不动点，在 $t^- < t < t^+$ 时为焦点-焦点型不动点，在 $t \in \{t^-, t^+\}$时退化，其中

$$t^\pm = \frac{R_2}{2R_2 + R_1 \mp 2\sqrt{R_1 R_2}}.$$

证明。 该系统仅有四个双极点 $p_{\pm,\pm} = ((0,0,\pm 1),(0,0,\pm 1)) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$。在每个不动点 $p_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ 处，它在坐标 (x_1, y_1, x_2, y_2) 中对应于 (0,0,0,0),

在坐标图 $(\varphi_1, U_1^{\varepsilon_1}) \times (\varphi_2, U_2^{\varepsilon_2})$ 中，我们有：

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon_1 R_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 R_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_2 \\ 0 & 0 & R_2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad d^2L = \begin{pmatrix} -\varepsilon_1 R_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_1 R_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_2 \end{pmatrix},$$

$$d^2H = \begin{pmatrix} \varepsilon_1(-1+t-\varepsilon_2 t) & 0 & t & 0 \\ 0 & \varepsilon_1(-1+t-\varepsilon_2 t) & 0 & t \\ t & 0 & -\varepsilon_1\varepsilon_2 t & 0 \\ 0 & t & 0 & -\varepsilon_1\varepsilon_2 t \end{pmatrix}.$$

对于任意 $t, \varepsilon_1, \varepsilon_2$，矩阵 d^2L 和 d^2H 都是线性无关的，并由此得到 $A_L^3 := \Omega^{-1} d^2L$ 和 $A_H^3 := \Omega^{-1} d^2H$，其表达式为：

$$A_L^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_H^3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-\varepsilon_2 t+t-1}{R_1} & 0 & \frac{t}{\varepsilon_1 R_1} \\ -\frac{-\varepsilon_2 t+t-1}{R_1} & 0 & -\frac{t}{\varepsilon_1 R_1} & 0 \\ 0 & \frac{t}{R_2} & 0 & -\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2 t}{R_2} \\ -\frac{t}{R_2} & 0 & \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2 t}{R_2} & 0 \end{pmatrix}.$$

线性组合 $A^3 := A_L^3 + A_H^3$ 的形式为

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-\varepsilon_2 t+t-1}{R_1} - 1 & 0 & \frac{t}{\varepsilon_1 R_1} \\ -\frac{-\varepsilon_2 t+t-1}{R_1} + 1 & 0 & -\frac{t}{\varepsilon_1 R_1} & 0 \\ 0 & \frac{t}{R_2} & 0 & -\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2 t}{R_2} - 1 \\ -\frac{t}{R_2} & 0 & \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2 t}{R_2} + 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

在四个极点 $p_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ 处，A^3 为：

$$A^3_{p_{+,+}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{R_1} - 1 & 0 & \frac{t}{R_1} \\ \frac{1}{R_1} + 1 & 0 & -\frac{t}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{t}{R_2} & 0 & -\frac{t}{R_2} - 1 \\ -\frac{t}{R_2} & 0 & \frac{t}{R_2} + 1 & 0 \end{pmatrix}, A^3_{p_{+,-}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2t-1}{R_1} - 1 & 0 & \frac{t}{R_1} \\ -\frac{2t-1}{R_1} + 1 & 0 & -\frac{t}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{t}{R_2} & 0 & \frac{t}{R_2} - 1 \\ -\frac{t}{R_2} & 0 & -\frac{t}{R_2} + 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^3_{p_{-,+}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{R_1} - 1 & 0 & -\frac{t}{R_1} \\ \frac{1}{R_1} + 1 & 0 & \frac{t}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{t}{R_2} & 0 & \frac{t}{R_2} - 1 \\ -\frac{t}{R_2} & 0 & -\frac{t}{R_2} + 1 & 0 \end{pmatrix}, A^3_{p_{-,-}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2t-1}{R_1} - 1 & 0 & -\frac{t}{R_1} \\ -\frac{2t-1}{R_1} + 1 & 0 & \frac{t}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{t}{R_2} & 0 & -\frac{t}{R_2} - 1 \\ -\frac{t}{R_2} & 0 & \frac{t}{R_2} + 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

由于$A^3_{p_{+,+}}$与$A^0_{p_{+,+}}$（第5.1节）相同，$p_{+,+}$ 对所有 t 的取值均为非退化的椭圆-椭圆型。同理，由于 $A^3_{p_{-,+}}$ 与 $A^0_{p_{-,+}}$ 相同，$p_{-,+}$ 对所有 t 的取值也均为非退化的椭圆-椭圆型。

另一方面，通过直接计算可知，$A^3_{p_{+,-}}$ 的特征多项式与第 5.1 节中定义的 $P^0_{+,-}(\lambda)$ 相同。因此，对于所有 t 的取值，$p_{+,-}$ 都是非退化的椭圆-椭圆型不动点。同理，$A^3_{p_{-,-}}$ 的特征多项式与第 5.1 节中的 $P^0_{+,-}(\lambda)$ 相同，因此，当 $t < t^-$ 或 $t > t^+$ 时，$p_{-,-}$ 是非退化的椭圆-椭圆型；当 $t^- < t < t^+$ 时，为焦点-焦点型；当 $t \in \{t^-, t^+\}$ 时，则是退化的，其中

$$t^{\pm} = \frac{R_2}{2R_2 + R_1 \mp 2\sqrt{R_1 R_2}}.$$

□

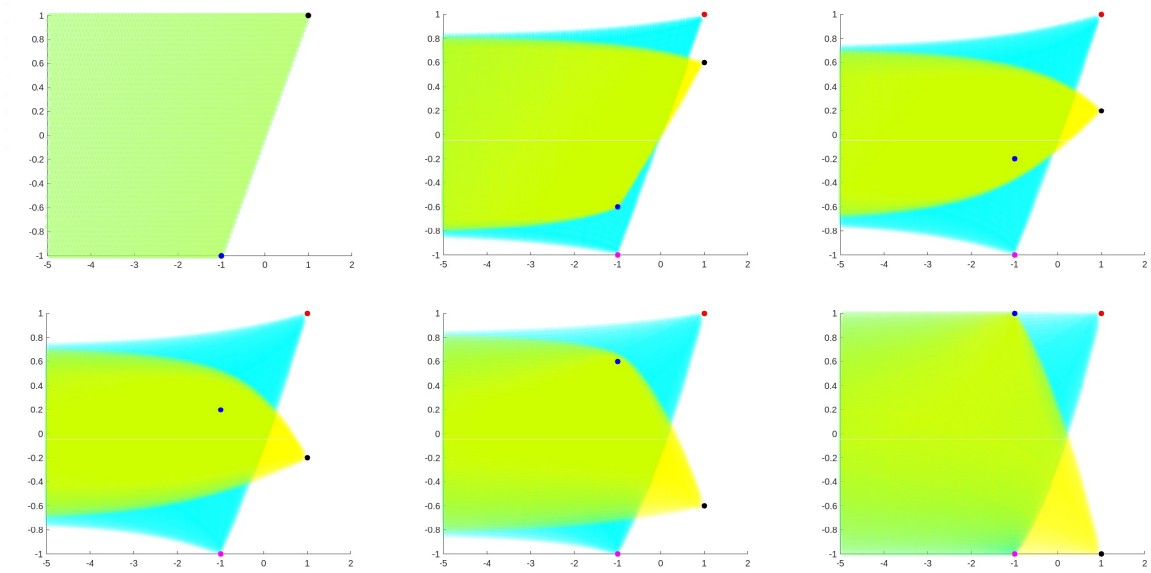


FIGURE 8. 当 t从 0（左上）到 1（右下）以 0.2 为间隔变化时，系统 3 的动量映射图像。四个不动点$p_{+,+}$,$p_{+,-}$,$p_{-,+}$,$p_{-,-}$ 的图像依次以红色、黑色、洋红色和蓝色表示。子流形 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2_+$ 的图像以天蓝色表示，子流形 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2_-$ 的图像以黄色表示，两者均通过数值方法获得。

References

[ADH19] Jaume Alonso、Holger R. Dullin 和 Sonja Hohloch。耦合自旋振子的泰勒级数与扭转指标不变量。 *J. Geom. Phys.*，140:131–151，2019年。[ADH20] Jaume Alonso、Holger R. Dullin 和 Sonja Hohloch。耦合角动量的辛分类。 *Nonlinearity*，33(1):417–468，2020年。[AH19] Jaume Alonso 和 Sonja Hohloch。半托里克系统近期发展的综述。 *Conference Proceedings of RIMS Kokyuroku 2019 (Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University,Japan)*，2137，2019年。[AH21] Jaume Alonso 和 Sonja Hohloch。具有两个焦点-焦点奇点的四参数半托里克系统的高度不变量。 *J. Nonlinear Sci.*，31(3):论文第51号，32，2021年。[Arn76] V. Arnold。 *Les méthodes mathématiques de la mécanique classique*。´莫斯科 Mir 出版社，1976年。由 Djilali Embarek 从俄文翻译。[Ati82] M. F. Atiyah。凸性与对易哈密顿量。 *Bull. London Math. Soc.*，14(1):1–15，1982年。[BCD09] O. Babelon、L. Cantini 和 B. Dou.cot。Jaynes-Cummings 模型的半经典研究。 *J. Stat.Mech. Theory Exp.*，第 P07011 页，共45页，2009年。[BF04] A. V. Bolsinov 和 A. T. Fomenko。 *Integrable Hamiltonian systems*。Chapman & Hall/CRC，佛罗里达州博卡拉顿，2004年。几何、拓扑与分类，译自1999年俄文原著。[BGK18] Alexey Bolsinov、Lorenzo Guglielmi 和 Elena Kudryavtseva。可积系统中抛物轨道和尖点奇点的辛不变量。 *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathe-matical, Physical and Engineering Sciences*，376(2131):20170424，2018年。[BDM+19] Roisin Braddell、Amadeu Delshams、Eva Miranda、C´edric Oms 和 Arnau Planas。奇异辛几何导论。 *Journal of Geometric Methods in Modern Physics*，16(supp01):1940008，2019年。[BKM23] Roisin Braddell、Anna Kiesenhofer 和 Eva Miranda。A b-辛切片定理。 *Bull. Lond. Math.Soc.*，55(1):90–112，2023年。[CM22] Robert Cardona 和 Eva Miranda。奇异辛流形上的可积系统：从局部到整体。 *Int. Math. Res. Not. IMRN*，2022(24):19565–19616，2022年。[Cav17] Gil Cavalcanti。对数辛流形的例子与反例。 *Journal of Topology*，10(1):1–21，2017年。[Cha13] Marc Chaperon。光滑焦点-焦点型的标准化：一个简单证明。 *Acta Math. Vietnam.*，38(1):3–9，2013年。[CdVV79] Y. Colin de Verdi`ère 和 J. Vey。等周 Morse 引理。 *Topology*，18(4):283–293，1979年。[DMH21] Annelies De Meulenaere 和 Sonja Hohloch。具有四个焦点-焦点奇点和两个双重捏缩环面的半托里克系统族。 *J. Nonlinear Sci.*，31(4):论文第66号，共56页，2021年。[DKM17] Amadeu Delshams、Anna Kiesenhofer 和 Eva Miranda。奇异辛流形上可积与不可积系统的例子。 *Journal of Geometry and Physics*，115:89–97，2017年。[Del88] Thomas Delzant。周期哈密顿量与动量映射的凸像。´ *Bull. Soc. Math.France*，116(3):315–339，1988年。[DM88] J.-P. Dufour 和 P. Molino。带奇点的 R^n é 变量作用-角坐标作用的紧化。´。载于 *Travaux du Séminaire Sud-Rhodanien de Géométrie, I*，第88卷，*Publ. Dép. Math. Nouvelle Sér.B*，第161–183页。里昂克洛德·贝尔纳大学，1988年。[Dui80] J. J. Duistermaat。关于全局作用-角坐标。 *Comm. Pure Appl. Math.*，33(6):687–706，1980年。[EG12] Konstantinos Efstathiou 和 Andrea Giacobbe。与尖点奇异点相关的拓扑。 *Non-linearity*，25(12):3409，2012年。[Eli90a] L. H. Eliasson。具有泊松对易积分的哈密顿系统。 *Stockholm University*，博士论文，1990年。[Eli90b] L. H. Eliasson。具有泊松对易积分的哈密顿系统的标准形——椭圆情形。*Comment. Math. Helv.*，65(1):4–35，1990年。[GL14] Marco Gualtieri 和 Songhao Li。对数辛流形的辛群胚。 *International Math-ematics Research Notices*，2014(11):3022–3074，2014年。[GLPR17] Marco Gualtieri、Songhao Li、´Alvaro Pelayo 和 Tudor Ratiu。热带动量映射：托里对数辛流形的分类。 *Mathematische Annalen*，367:1217–1258，2017年。

[GS82] V. Guillemin 和 S. Sternberg。动量映射的凸性性质。 *Invent. Math.*，67(3):491–513，1982年。[GMP11] Victor Guillemin、Eva Miranda 和 Ana Rita Pires。余维一辛叶状结构与正则泊松结构。 *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*，42(4):607–623，2011年。[GMP14] Victor Guillemin、Eva Miranda 和 Ana Rita Pires。b-流形上的辛几何与泊松几何。*Advances in Mathematics*，264:864–896，2014年。[GMPS15] Victor Guillemin、Eva Miranda、Ana Rita Pires 和 Geoffrey Scott。在 b-辛流形上的托里作用。 *International Mathematics Research Notices*，2015(14):5818–5848，2015年。[GMPS17] Victor Guillemin、Eva Miranda、Ana Rita Pires 和 Geoffrey Scott。 b-辛流形上哈密顿环面作用的凸性。 *Mathematical Research Letters*，24(2):363–377，2017年。[GMW18a] Victor Guillemin、Eva Miranda 和 Jonathan Weitsman。 b^m-辛流形上环面作用的动量映射像的凸性。 *Philos. Trans. Roy. Soc. A*，376(2131):20170420，2018年。[GMW18b] Victor Guillemin、Eva Miranda 和 Jonathan Weitsman。b-辛流形上的几何量子化。 *Advances in Mathematics*，331:941–951，2018年。[GMW19] Victor Guillemin、Eva Miranda 和 Jonathan Weitsman。 b^m-辛结构的去奇异化。 *Int.Math. Res. Not.*，2019(10):2981–2998，2019年。[GH22] Yannick Gullentops 和 Sonja Hohloch。在存在$\mathbb{S}^1$-对称性的情况下构造双曲-正则奇点。 *arXiv preprint arXiv:2209.15631*，2022年。[HP18] Sonja Hohloch 和 Joseph Palmer。具有两个焦点-焦点奇点的紧半托里系统族。 *J. Geom. Mech.*，10(3):331–357，2018年。[HP21] Sonja Hohloch 和 Joseph Palmer。将紧致哈密顿 $\mathbb{S}^1$-空间扩展为四维中具有温和退化的可积系统，2021年。[HSS15] Sonja Hohloch、Silvia Sabatini 和 Daniele Sepe。从紧半托里克系统到哈密顿S^1-空间。 *Discrete Contin. Dyn. Syst.*，35(1):247–281，2015年。[JC63] E. T. Jaynes 和 F. W. Cummings。量子与半经典辐射理论的比较及其在束射微波激射器中的应用。 *IEEE Proc.*，51:89–109，1963年。[Kar99] Yael Karshon。四维流形上的周期哈密顿流。 *Mem. Amer. Math. Soc.*，672，1999年。[KM17] Anna Kiesenhofer 和 Eva Miranda。可积系统的余切模型。 *Comm. Math. Phys.*，350(3):1123–1145，2017年。[KMS16] Anna Kiesenhofer、Eva Miranda 和 Geoffrey Scott。b-泊松流形上的作用-角变量与 KAM 定理。 *J. Math. Pures Appl.*，105(1):66–85，2016年。[KM21a] Elena Kudryavtseva 和 Nikolay Martynchuk。 C^∞ 可积哈密顿系统中抛物轨道和襟翼的辛不变量。 *arXiv preprint arXiv:2110.13758*，2021年。[KM21b] Elena Kudryavtseva 和 Nikolay Martynchuk。抛物轨道附近光滑哈密顿圆周作用及尖点环面的存在性。 *Regular and Chaotic Dynamics*，26(6):732–741，2021年。[LGMV11] Camille Laurent-Gengoux、Eva Miranda 和 Pol Vanhaecke。泊松流形上可积系统的作用-角坐标。 *Int. Math. Res. Not. IMRN*，2011(8):1839–1869，2011年。[LFP18] Yohann Le Floch 和 Joseph Palmer。半托里族。 *arXiv preprint arXiv:1810.06915*，2018年。即将由《美国数学学会回忆录》出版。[LFP19] Yohann Le Floch 和 ´Alvaro Pelayo。经典与量子耦合角动量的辛几何与谱性质。 *J. Nonlinear Sci.*，29(2):655–708，2019年。[MOT14a] Ioan Marcut 和 Boris Osorno-Torres。对数辛结构的变形。 *Journal of the LondonMathematical Society*，90(2):863–866，2014年。[MOT14b] Ioan Marcut 和 Boris Osorno-Torres。关于对数辛结构存在性的上同调障碍。 *Journal of Symplectic Geometry*，12(4):863–866，2014年。[Mat22] Anastasia Matveeva。 *Poisson structures on moduli spaces and group actions*。博士论文，巴塞罗那加泰罗尼亚理工大学，2022年。` MM[Anastasia Matveeva 和 Eva Miranda。奇异辛流形的约化理论与模空间上的奇异形式，2022年。22] Mir[Eva Miranda。03] 。博士论文，巴塞罗那大学，2003年6月。

[Mir14] Eva Miranda. 可积系统与群作用。 *Central European Journal of Mathematics*, 12(2):240– 270, 2014.[MP18] Eva Miranda 和 Arnau Planas。 b^m辛曲面的等变分类。 *Regul. Chaotic Dyn.*, 23(4):355–371, 2018.[MP23] Eva Miranda 和 Arnau Planas。奇异辛流形上的作用-角坐标与KAM理论。 *arXiv preprint arXiv:2301.00266*, 2023.[MVuN05] Eva Miranda 和 San V˜u Ngo.c。一条奇异的庞加莱引理。 *International Mathematics Research Notices*, 2005(1):27–45, 01 2005.[MZ04] Eva Miranda 和 Nguyen Tien Zung。可积哈密顿系统非退化奇异轨道的等变标准形。 *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 37(6):819–839, 2004.[PPT19] Joseph Palmer、Alvaro Pelayo 和 Xiudi Tang。非简单型半托里克系统。 *arXiv preprintarXiv:1909.03501*, 2019.[PVuN12] ´Alvaro Pelayo 和 San V˜u Ngo. c. 自旋振子的哈密顿动力学与谱理论。 *Comm.Math. Phys.*, 309(1):123–154, 2012.[PVN09] Alvaro Pelayo 和 San V˜u Ngo. c. 辛四维流形上的半托里克可积系统。 *Inventionesmathematicae*, 177(3):571–597, 2009.[PVN11] ´Alvaro Pelayo 和 San V˜u Ngo. c. 构造半托里克型可积系统。 *Acta Mathematica*, 206(1):93–125, 2011.[R¨us64] Helmut R¨ ussmann。 ¨关于解析哈密顿微分方程在平衡解附近的行为。 *Math. Ann.*, 154:285–300, 1964.[SZ99] D. A. Sadovski´ı 和 B. I. Zhilinski´ı。单值化、二重简并点与角动量耦合。 *Phys.Lett. A*, 256(4):235–244, 1999.[SZM96] D. A. Sadovski´ı、B. I. Zhilinski´ı 和 L. Michel。外电场中氢原子塞曼结构的崩塌。 *Phys. Rev. A*, 53:4064–4067, Jun 1996.[TN96] Boris Tsygan 和 Ryszard Nest。带边界的辛流形的形式变形。 *J. ReineAngew. Math*, 481:27–54, 1996.[VuN03] San V˜u Ngo. c. 关于焦点-焦点奇点的半全局不变量。 *Topology*, 42(2):365–380, 2003.[VuNW13] San V˜u Ngo.c 和 Christophe Wacheux。焦点-焦点奇点附近可积哈密顿系统的光滑标准形。 *Acta Math. Vietnam.*, 38(1):107–122, 2013.[Vey78] J. Vey。关于某些可分离动力系统。 *Amer. J. Math.*, 100(3):591–614, 1978.[VN03] San V˜u Ngo. c. 关于焦点–焦点奇点的半全局不变量。 *Topology*, 42(2):365–380, 2003.[VN07] San V˜u Ngo. c. 带单值化的辛流形的动量多面体。 *Advances in Mathematics*, 208(2):909–934, 2007.[Wil36] John Williamson。关于线性动力系统标准形的代数问题。*Amer. J. Math.*, 58(1):141–163, 1936.[Zun03] Nguyen Tien Zung。可积哈密顿系统的辛拓扑。II. 拓扑分类。*Compositio Math.*, 138(2):125–156, 2003.

Joaquim Brugués, Campus Middelheim, Gebouw G, M.G.215 Middelheimlaan 1 2020 Antwerp, Bel-gium, Laboratory of Geometry and Dynamical Systems, Universitat Politècnica de Catalunya, Avinguda del Doctor Marañon 44-50, 08028, Barcelona

Email address: joaquim.brugues@upc.edu, jbruguesmora@uantwerpen.be

Sonja Hohloch, Campus Middelheim, Gebouw G, M.G.211 Middelheimlaan 1 2020 Antwerp, Belgium

Email address: sonja.hohloch@uantwerpen.be

Pau Mir, Laboratory of Geometry and Dynamical Systems,
Universitat Politècnica de Catalunya,Avinguda del Doctor Marañon 44-50, 08028, Barcelona

Email address: pau.mir.garcia@upc.edu

Eva Miranda, Laboratory of Geometry and Dynamical Systems and Institut de Matemàtiques de la UPC-BarcelonaTech (IMTech), Universitat Politècnica de Catalunya, Avinguda del Doctor Marañon44-50, 08028, Barcelona, CRM Centre de Recerca Matemàtica, Campus de Bellaterra Edifici C, 08193Bellaterra, Barcelona

Email address: eva.miranda@upc.edu