具有输入约束的离散时间多维随机线性系统基于学习的自适应控制稳定性界

Seth Siriya、Jingge Zhu、Dragan Ne˘si´c 和 Ye Pu

摘要

我们研究离散时间、多维线性系统的自适应稳定化问题，其中控制输入受有界约束，且系统受到无界随机扰动，真实系统的参数未知。为应对这一挑战，我们提出一种确定性等价控制方案，将在线参数估计与饱和线性控制相结合。在对系统和噪声过程作出额外假设的条件下，我们证明闭环系统存在一个高概率稳定性界。最后，我们通过数值示例说明所得结果。

arXiv:2304.00569v1 [eess.SY] 2 Apr 2023

I. 引言

自适应控制（AC）关注的是为模型参数未知的动力系统设计控制器。在现实世界中部署这些算法时，设计过程中必须考虑执行器饱和，因为忽视此类问题可能导致系统无法实现稳定性。此外，系统往往会受到罕见的大幅扰动，这些扰动通常建模为无界随机噪声，可能降低控制性能，甚至导致系统不稳定。因此，有必要开发可证明能够稳定系统的自适应控制算法，同时处理输入约束以及加性、无界的随机扰动。

近年来，离散时间（DT）随机自适应控制（AC）重新受到关注，主要体现在在线基于模型的强化学习方面，尤其是在线线性二次调节（LQR）任务。该任务旨在针对未知的线性随机系统，使相对于最优线性二次调节控制器的遗憾最小化（见 [1], [2]）。这些结果已扩展到处理状态约束和输入约束 [3], ，但仅适用于扰动有界的情形。离散时间极值寻优（ES）自适应控制的研究结果也展现出稳定不稳定离散时间系统的潜力（[4], [5]），但未考虑输入约束。尽管离散时间随机自适应控制历史悠久，可追溯至 [6], [7], 等经典线性结果，但针对输入受限的非严格稳定系统的控制问题尚未受到关注。此外，研究者还考虑了其他离散时间非线性随机自适应控制问题，例如死区非线性 [8], 和线性参数化非线性系统 [9]。另一方面，已有研究探讨了在有界扰动下稳定未知离散时间输出反馈线性系统的控制约束问题 [10]，[11]，但不支持无界扰动。近期， [12]，通过结合统计学习理论 [13] 与输入受限随机控制 [14] 的研究成果，证明了在高斯扰动和有界控制量作用下，针对至多边缘稳定的标量线性系统，一种基于学习的自适应控制方案具有均方有界性。然而，针对多维系统的结果仍然缺失。

受我们此前的标量结果 [12], 启发，我们着手弥补多维情形下的研究空白。具体而言，我们旨在为未知多维线性系统开发一种自适应稳定化方法，该系统受到加性、独立同分布的次高斯零均值随机扰动，且控制幅值受正的上界约束。我们的主要贡献有两点：

首先，我们提出一种确定性等价（CE）自适应控制方案来解决这一问题。该方案包含一个饱和线性控制器，其参数估计值通过在线普通最小二乘法（OLS）获得；同时，控制器有意加入有界噪声，以促进参数收敛。饱和水平和激励噪声水平可以联合选取，以满足控制输入约束。此外，我们不假设事先知道任何系统参数的界。

其次，我们证明，在系统可控、 $\|A\| \leq 1$、控制器的 CE 分量的饱和水平足以压过扰动和激励噪声过程的统计特性，且状态-输入数据序列满足类似持续激励的条件时，闭环系统的子采样状态存在一个高概率稳定性界。为此，我们首先运用有限样本统计学习理论中的工具，建立一个随时间成立的参数估计误差高概率上界 [13]。随后，在给定估计误差界的基础上，推导子采样状态范数的概率上界。接着，将这两个结果结合起来，推导出子采样状态范数的一族参数化高概率上界。由此即可得到我们的主要结果。

符号说明：对于向量 $x \in \mathbb{R}^n$， $|x|$ 表示其欧几里得范数。给定矩阵 $M \in \mathbb{R}^{n\times m}$， $\|M\|$ 表示其诱导 2-范数， $\sigma_{\max}(M)$ 和 $\sigma_{\min}(M)$ 分别表示其最大和最小奇异值， $\mathcal{B}_r(M)$ 表示以 M 为中心、半径为 $r > 0$ 的 2-范数开球， $\bar{\mathcal{B}}_r(M)$ 表示其闭包， $M^\dagger$ 表示其摩尔－彭若斯广义逆。若 $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为对称矩阵，则 $\lambda_{\min}(M)$ 表示其最小特征值， $\lambda_{\max}(M)$ 表示其最大特征值。对于

所有作者均就职于澳大利亚维多利亚州帕克维尔 3010 的墨尔本大学电气与电子工程系。ssiriya@student.unimelb.edu.au, {jingge.zhu, dnesic, ye.pu}@unimelb.edu.auS. Siriya 获得澳大利亚政府研究培训计划（RTP）奖学金资助。

$r > 0$，定义饱和函数 $\mathrm{sat}_r : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$，其中 $\mathrm{sat}_r(x) := x$，若 $|x| \le r$；$\mathrm{sat}_r(x) := rx/|x|$，若 $|x| > r$。单位矩阵记为 I。将从某个集合映射到 $\mathbb{R}$ 的函数 f 的支撑集记为 $\mathrm{supp}(f)$。给定集合 A 和 B，A^{c} 表示 A 的补集，$A \cap B$ 表示 A 与 B 的交集，$A \cup B$ 表示它们的并集。考虑概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$，以及定义在该空间上的随机向量 $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$、事件 $A \in \mathcal{F}$ 和子 σ 代数 $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$。$X$ 的期望值记为 $\mathbb{E}[X]$。定义指示函数 $\mathbf{1}_A : \Omega \to \{0, 1\}$，使其在事件 A 上为 $\mathbf{1}_A := 1$，在事件 A^{c} 上为 $\mathbf{1}_A := 0$。将嵌入 $\mathbb{R}^d$ 中的单位球面记为 $\mathcal{S}^{d-1}$。对于标量 X，若对所有 $t \in \mathbb{R}$ 都有 $\mathbb{E}[e^{tX}|\mathcal{G}] \le e^{\sigma^2 t^2/2}$，则称 $X|\mathcal{G}$ 是 σ^2-次高斯的。对于向量 X，若 $\mathbb{E}[X] = 0$，则称 $X|\mathcal{G}$ 是 σ^2-次高斯的；对于任意 $u \in \mathcal{S}^{d-1}$，$u^\top X|\mathcal{G}$ 都是 σ^2-次高斯的。

II. Problem Setup

考虑以下随机线性系统：

$$X_{t+1} = AX_t + BU_t + W_t,\ t \in \mathbb{N}_0, \quad X_0 = x_0, \tag{1}$$

其中，随机序列 $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$、$(U_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ 和 $(W_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ 分别为状态、控制量和扰动，其取值分别属于 $\mathbb{R}^n$、$\mathbb{R}^m$ 和 $\mathbb{R}^n$；$x_0 \in \mathbb{R}^n$ 为初始状态，$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 和 $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ 为系统真实但未知的矩阵。为方便起见，我们用 $\theta_* = [A, B]$ 表示真实系统参数。这与 θ_t 不同，后者表示时刻 t 的估计参数，稍后将正式定义。我们对系统 (1) 作出以下假设。

假设1. 扰动 $(W_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ 是一个具有无界支撑、零均值且为次高斯的独立同分布序列。

假设2. 矩阵 A 满足 $\|A\| \le 1$，且 (A, B) 是具有 $\kappa \le n$ 的 κ 步可达的，即 $\mathrm{rank}(\mathcal{R}_\kappa(A, B)) = n$，其中 $\mathcal{R}_\kappa(A, B) := \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{\kappa-1}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times\kappa m}$。为便于记号表示，我们记 $\mathcal{R}_* = \mathcal{R}_\kappa(A, B)$。

注 1. 请注意，假设1足够宽泛，可以处理许多具有无界支撑的不同类型扰动，包括高斯分布。由于假设 W_t 是次高斯的，其协方差矩阵存在，记为 Σ_W。假设2足以保证存在满足有界控制约束的控制策略，使系统均方有界 [14]。这使我们有理由相信，自适应控制策略是可行的。

我们的目标是构造一个自适应控制策略 $(\pi_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$，使得 π_t 是从当前及过去的状态与控制输入数据 $(X_0, \dots, X_t, U_0, \dots, U_{t-1})$ 以及一个随机化项 V_t 到 $\mathbb{R}^n$ 的映射，其中 $t \in \mathbb{N}_0$。这里，$(V_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ 取值于 $\mathbb{R}^m$，是一个独立同分布随机序列，其作用是激励系统，以促进参数估计值收敛。需要设计整体控制策略，使得 $|U_t| \le U_{\max}$ 成立，其中 $U_{\max} > 0$ 是控制幅值约束，同时能够以可证明的方式保证闭环系统状态 $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ 在 $U_t = \pi_t(X_0, \dots, X_t, U_0, \dots, U_{t-1}, V_t)$ 下的随机稳定性。此外，作为设计要求之一，π_t 不依赖于真实系统参数 (A, B)。

III. Method and Main Result

为进行控制设计，我们需要知道某个满足假设2的 κ s。在多输入系统中，许多情况下我们可以得到 $\kappa < n$；但如果只知道 (A, B) 是可控的，那么 $\kappa = n$ 始终是一个有效的选择。我们的控制策略总结于算法1中。

算法1 随机自适应输入约束控制

输入： $U_{\max} > 0$, $C \in (\mathbf{0}, U_{\max})$, $A_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_0 \in \mathbb{R}^{n\times m}\backslash\{0\}$, $\kappa \le n$ **采样** $V_{\kappa\tau}, \dots, V_{\kappa(\tau+1)-1}$ **满足假设** $D \leftarrow U_{\max} - C$ **按照 (2) 计算** $\tau \leftarrow 0$ **测量** X_0 **对于** $\tau = 0, 1, \dots,$ **执行** **对于** $t = \kappa\tau, \dots, \kappa(\tau+1) - 1$ **执行** **按照 (2) 从** U_τ **提取** U_t **将** U_t **应用于 (1)** **从 (1) 测量** X_{t+1} **结束循环** **按照 (3) 计算** $\theta_{\tau+1}$ **结束循环**

现在，我们将更详细地介绍我们的策略。对于所有 $\tau \in \mathbb{N}_0$，我们的子采样控制序列 $(U_\tau)_{\tau\in\mathbb{N}_0}$ 定义为

$$\underbrace{\begin{bmatrix} U_{\kappa(\tau+1)-1} \\ \vdots \\ U_{\kappa\tau} \end{bmatrix}}_{\bar{U}_\tau} = \mathrm{sat}_D(-g(\bar{A}_\tau, \bar{B}_\tau)X_{\kappa\tau}) + \begin{bmatrix} V_{\kappa(\tau+1)-1} \\ \vdots \\ V_{\kappa\tau} \end{bmatrix}, \tag{2}$$

其中 $g(A', B') := \mathcal{R}_\kappa(A', B')^\dagger(A')^\kappa$，且 V_t 是一个加性激励项，其采样方式满足假设3。

注2。当使用真实系统参数进行控制时——即 $\mathrm{sat}_D(-g(A, B)x)$ 是我们的控制律——该控制策略可描述为：对于以周期 κ 对 (1) 采样后得到的动力系统，采用饱和死拍控制器。类似的控制器结构已被证明能够实现均方有界性 [15], , 但不包括饱和 ，且线性增益会切换。我们选择这种顺序，是因为我们的确定性等价控制策略使用的是估计值 (A_τ, B_τ)，而不是 (A, B)；我们的估计值可能无界，从而导致增益无界。之后施加饱和可确保我们的控制量满足 $U_{\max}$。

假设3。随机序列 $(V_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ 取值于 $\mathbb{R}^m$，且为独立同分布。此外，$|V_t| \le C$ 成立，并且对于所有 i，V_i 与 W_j 相互独立。

注 3. 假设3限制了加性噪声 V_t 的幅度，这是满足控制输入约束所必需的。我们用 Σ_V 表示 V_t 的协方差矩阵。

令取值于 $\mathbb{R}^{n\times(n+m)}$ 的序列 $(\hat{\theta}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ 表示通过普通最小二乘估计在时刻获得的真实参数 θ_* 的估计值序列：

$$\hat{\theta}_t \in \arg\min_{\theta\in\mathbb{R}^{n\times(n+m)}} \sum_{s=1}^{t} \|X_s - \theta Z_s\|_2^2, \tag{3}$$

其中，取值于 $\mathbb{R}^{n+m}$ 的序列 $(Z_t)_{t\in\mathbb{N}}$ 是状态-输入数据序列，即 $Z_t = (X_{t-1}, U_{t-1})$。令 $(\bar{\theta}_\tau)_{\tau\in\mathbb{N}}$ 为满足 $\theta_\tau = \theta_{\kappa\tau}$ 的子采样参数估计值序列 ^ ，并令 $(A_\tau)_{\tau\in\mathbb{N}}, (B_\tau)_{\tau\in\mathbb{N}}$ 分别为满足 $[A_\tau, B_\tau] = \theta_\tau$ 的 A 和 B 的子采样估计值。注意，初始参数估计值 (A_0, B_0) 并非通过普通最小二乘法计算，而是由设计者在 $\mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times m}\backslash\{0\}$ 中自由选择。此外，C 是用户指定的激励常数，满足 $0 < C < U_{\max}$，它决定了激励项的大小；$D = U_{\max} - C$ 是控制策略中确定性等价分量的幅度。

在此控制策略下，满足 $X_\tau = X_{\kappa\tau}$ 的子采样状态序列 $(X_\tau)_{\tau\in\mathbb{N}_0}$ 按照以下闭环系统演化：

$$\begin{aligned} \bar{X}_{\tau+1} &= AX_{\kappa(\tau+1)-1} + BU_{\kappa(\tau+1)-1} + W_{\kappa(\tau+1)-1} \\ &= A^\kappa \bar{X}_\tau + \mathcal{R}_\kappa(A, B)\mathrm{sat}_D(-g(\bar{A}_\tau, \bar{B}_\tau)\bar{X}_\tau) + \bar{V}_\tau \\ &\quad + \bar{W}_\tau \end{aligned} \tag{4}$$

对所有 $\tau \in \mathbb{N}_0$，其中 $\bar{V}_\tau = \mathcal{R}_*[V_{\kappa(\tau+1)-1}^\top, \ldots, V_{\kappa\tau}^\top]^\top$，且 $\bar{W}_\tau = \mathcal{R}_*[W_{\kappa(\tau+1)-1}^\top, \ldots, W_\tau^\top]^\top$。接下来，令 $M_{\bar{W}} = \ln(\mathbb{E}[e^{|\bar{W}_\tau|}])$，以及 $M_{\bar{V}} = \ln(\mathbb{E}[e^{|\bar{V}_\tau|}])$，其存在性由假设 1 和 3 保证。我们对它们与 D 和 $\mathcal{R}_*$之间的关系作出如下假设。

假设4. 饱和水平 D、$M_{\bar{V}}$ 和 $M_{\bar{W}}$ 满足 $\frac{D}{\|\mathcal{R}_*^\dagger\|} > M_{\bar{V}} + M_{\bar{W}}$。

注 4. 假设4可以理解为：控制量中确定性等价分量的幅值足够大，能够压过扰动和注入噪声的统计特性。

接下来，我们定义块鞅小球（BMSB）条件，并假设我们的状态-输入数据序列满足该条件。

定义 1.（鞅小球 [13, 定义 2.1]）给定一个取值于 $\mathbb{R}^d$的过程（Z_t）$_{t\ge1}$，若对于任意 $\zeta \in \mathcal{S}^{d-1}$ 和 $j \ge 0$，$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} P\left(|\zeta^\top Z_{j+i}| \ge \sqrt{\zeta^\top \Gamma_{\mathrm{sb}} \zeta} \mid \mathcal{F}_j\right) \ge p$ 成立，则称其满足参数为 $k \in \mathbb{N}$、$\Gamma_{\mathrm{sb}} \succ 0$ 和 $p > 0$ 的（$k, \Gamma_{\mathrm{sb}}, p$）块鞅小球（BMSB）条件。这里，（$\mathcal{F}_t$）$_{t\ge1}$ 是使（$\zeta^\top Z_t$）$_{t\ge1}$ 适应的任意滤过。

假设 5. 常数 $k > 0$、$\Gamma_{sb} \succ 0$ 和 $p > 0$ 使得状态-输入数据序列 $(Z_t)_{t\in\mathbb{N}}$ 满足 (k, Γ_{sb}, p)-*BMSB* 条件。

注 5。定义 1 中的 BMSB 条件可用于证明持续激励成立，而持续激励对于推导估计误差的高概率界十分重要（见 [16]）。假设 $(Z_t)_{t\in\mathbb{N}}$ 满足 BMSB

条件，即假设 5 中所述的：在给定过去的 Z_t 后，未来 Z_t 的平均分布足够分散。我们证明了该条件在标量情形下 [12], 成立，并将向量情形留待未来工作研究。

现在，我们给出本文的主要结果，证明我们的基于学习的自适应控制方案存在一个高概率稳定性界。

定理 1。 假设假设 *1*、*2*、*3*、*4* 和 *5* 成立。存在 $\lambda \in (0,1)$、 N_1、 $N_3 > 0$ 和 $N_2 \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，使得

$$|\bar{X}_\tau| \leq \ln(N_2(x_0)(2/\delta)^{N_1}\lambda^\tau + N_3) + \ln(2/\delta) \tag{5}$$

以至少 $1-\delta$ 的概率成立，对所有 $x_0 \in \mathbb{R}^n$、 $\delta \in (0,1)$ 和 $\tau \in \mathbb{N}_0$ 均成立。

¯定理 1 表明，对于任意初始状态 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 和子采样时间 $\tau \in \mathbb{N}_0$，以至少 $1-\delta$ 的概率， X_τ 将位于原点周围的一个球内，其半径等于式 (5) 右侧的值。特别地，我们可以将该结果解释为一个稳定性界，因为对于所有 $\tau \in \mathbb{N}_0$, 右侧均被 $\ln(N_2(x_0)(2/\delta)^{N_1} + N_3) + \ln(2/\delta)$ 一致有界，并且无论 x_0 如何变化，它都会渐近收敛到 $\ln(N_3) + \ln(2/\delta)$。尽管该界的结构并不常见，但在为以线性速率收敛到某个集合的系统推导界时，也可能出现这种结构。

IV. 主要结果的证明

本节将逐步给出定理 1 的证明。在第 IV-A 节中，我们通过命题 2 建立参数估计误差的高概率上界。在第 IV-B 节中，我们通过命题 4 给出子采样状态范数的概率上界，该上界依赖于给定的估计误差界。随后，我们将这一结果与命题 2 结合，推导出定理 2 中的一系列高概率稳定性界。由此即可得到定理 1。虽然我们概述了证明命题 2、引理 1、引理 2 和引理 3 的关键思路，但正式证明留待补充材料给出。

A. 估计误差界

我们首先给出 [13, 定理 2.4] 中的命题 1。该命题给出了对一般具有线性响应的时间序列应用普通最小二乘法所得参数估计值的估计误差高概率上界；当满足定义 1 中的 BMSB 条件时，该命题可有效应用，并且可以找到 $\sum_{t=1}^{T} Z_t Z_t^\top$ 的高概率上界。

命题 *1*. *[13, 定理 2.4]* 考虑某个矩阵 $\theta_* \in \mathbb{R}^{n\times d}$。固定 $T \in \mathbb{N}$, $\delta \in (0,1)$，以及 $0 \prec \Gamma_{sb} \preceq \Gamma$。假设 $(Z_t, Y_t)_{t=1}^T \in (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n)^T$ 是一个随机序列，满足：*(a)* $Y_t = \theta_* Z_t + \eta_t$ 对于 $t \leq T$ 成立，其中 $\eta_t \mid \mathcal{F}_{t-1}$ 是零均值的，且为 σ^2-次高斯，$\mathcal{F}_t$ 表示由 $\eta_0, \ldots, \eta_t, Z_1, \ldots, Z_t$ 生成的 σ-代数；*(b)* $Z_1, \ldots, Z_T$ 满足 (k, Γ_{sb}, p)- *BMSB* 条件；并且 *(c)* $P(\lambda_{\min}(\sum_{t=1}^{T} Z_t Z_t^\top) \not\geq T\Gamma) \leq \delta$ 成立。于是，如果 $T \geq \frac{10k}{p^2}\left(\ln\left(\frac{1}{\delta}\right) + 2d\ln(10/p) + \ln\det(\Gamma\Gamma_{sb}^{-1})\right)$，则有

$$P\left(\left\|\hat{\theta}_T - \theta_*\right\|_2 > \frac{90\sigma}{p} \times \sqrt{\frac{n + d\ln\frac{10}{p} + \ln\det\Gamma\Gamma_{sb}^{-1} + \ln\left(\frac{1}{\delta}\right)}{T\lambda_{\min}(\Gamma_{sb})}}\right) \leq 3\delta,$$

其中 $\hat{\theta}_T = (Z_i^\top Z_T)^\dagger Z_T^\top Y_T \in \arg\min_{\theta\in\mathbb{R}^2} \sum_{t=1}^{T} \|Y_t - \theta^\top Z_t\|^2$, $Z_T = [Z_1, \ldots, Z_T]^\top$, $Y_T = [Y_1, \ldots, Y_T]^\top$。

在假设1、2、3和5下，我们给出命题 2——关于式（3）中参数估计值的一个高概率误差界。具体而言，该命题指出，以至少为 $1-\delta$ 的概率，函数 $e(T,\delta)$ 将对所有大于 $T_0(\delta, x_0)$ 的 *all* T 上的估计误差 $\hat{}\|\theta_T - \theta_*\|$ 给出界。除专门针对我们问题中的参数估计值外，该结果与命题 1 的关键区别在于，命题 1 中的界以高概率对某个特定的T成立。

ˆ**命题 2**。 设假设*1*、*2*、*3*和*5*成立。考虑来自（3）的参数估计值序列 $(\theta_t)_{t\in\mathbb{N}}$。固定 $\delta \in$（0，1）。则，

$$P(\|\hat{\theta}_T - \theta_*\|_2 \leq e(T,\delta) \textit{ for all } T \geq T_0(\delta, x_0)) \geq 1-\delta,$$

其中

$$e(T,\delta,x_0) := \frac{90\sqrt{\lambda_{\max}(\Sigma_W)}}{p}\left((T\lambda_{\min}(\Gamma_{sb}))^{-1}(n\right.$$

$$
\begin{aligned}
&+(n+m)\ln\frac{10}{p}+\ln\det(\frac{3(-1+\pi^2/6)(T+1)^2}{\delta}\\
&\times(4|x_0|^2+2(D^2+tr\,(\Sigma_V))+4(\|B\|^2(D^2+tr\,(\Sigma_V))\\
&+tr\,(\Sigma_W))T^2+\lambda_{max}(\Gamma_{sb}))\Gamma_{sb}^{-1})\\
&+\ln\big(\frac{3(-1+\pi^2/6)(T+1)^2}{\delta})\big)\big)^{1/2},
\end{aligned}
\tag{6}
$$

$$
\begin{aligned}
&T_0(\delta,x_0)\\
&:=\min\{T_0'\in\mathbb{N}\mid T\geq\frac{10k}{p^2}\Big(2(n+m)\ln(10/p)\\
&+\ln\det(\frac{3(-1+\pi^2/6)(T+1)^2}{\delta}\times(4|x_0|^2+2(D^2\\
&+tr\,(\Sigma_V))+4(\|B\|^2(D^2+tr\,(\Sigma_V))+tr\,(\Sigma_W))T^2+\\
&\lambda_{max}(\Gamma_{sb}))\Gamma_{sb}^{-1})+\ln\Big(\frac{3(-1+\pi^2/6)(T+1)^2}{\delta}\Big)\Big)\\
&for\ all\ T\geq T_0'\}.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

我们将命题 2 的完整证明留在补充材料中，此处仅说明关键思路。首先，将 $Z_t\leftarrow(X_{t-1},\ U_{t-1})$ 视为协变量，并将 $Y_t\leftarrow X_t$ 视为响应变量，从而证明命题 1 的条件成立。根据假设 5，BMSB 条件成立；并且利用 $\Gamma\leftarrow 4|x_0|^2+2(D^2+\mathrm{tr}\,(\Sigma_V))+4(\|B\|^2(D^2+\mathrm{tr}\,(\Sigma_V))+\mathrm{tr}\,(\Sigma_W))T^2+\lambda_{\max}(\Gamma_{\mathrm{sb}})$，可得 $P(\sum_{t=1}^{T}Z_tZ_t^\top\not\succeq T\Gamma)\leq\delta$。对于命题 1 中所选的 δ，我们令 $\delta\leftarrow\delta/(3(-1+\pi^2/6)(T+1)^2)$，其中第二个 δ 来自命题 2 的前提。我们的直觉是，希望得到一个以概率 $1-\delta$ 对所有时刻都成立的界，但命题 1 只针对某个特定时刻成立。通过使用并集界，将特定时刻的结果转化为对所有时刻都成立的结果，并利用 $3\sum_{T\geq1}\delta/(3(-1+\pi^2/6)(T+1)^2)=\delta$，即可得出结论。

B. 稳定性界

我们陈述引理 1，它给出了控制量中 CE 分量的扰动界，该界是参数估计误差和饱和水平 D的函数，并且对状态空间中的所有状态均一致成立。

引理 1. 假　设假设*2*成立。存在 m_q、$M_q>0$，使得对所有 $D>0$ 和 $\epsilon\in[0,m_q\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad]$,

$$
|\,\mathrm{sat}_D(-g(\bar{A},\bar{B})x)-\mathrm{sat}_D(-g(A,B)x)|\leq M_q\cdot D\cdot\epsilon
$$

$\bar{\ }\ \bar{\ }\quad\quad\bar{\ }\ \bar{\ }$对所有 $A\in\mathcal{B}_\epsilon(A)$、$B\in\mathcal{B}_\epsilon(B)$ 以及 $x\in\mathbb{R}^n$

均成立。

引理 1 的证明见补充材料，但我们在此介绍其关键思路。该结果源于我们利用矩阵分析推导出的控制器饱和误差扰动界；该界关于半开区间上的 ϵ 为凸函数。证明中尤其值得注意的是，该扰动界对所有状态均一致成立。这是$\bar{\ }\ \bar{\ }$因为在固定 D 并令 ϵ 足够小时，我们可以找到一个由 x 构成的紧集 S，使得在 S^{c} 上，$\mathrm{sat}_D(-g(A,\ B)x)$ 和 $\mathrm{sat}_D(-g(A,\ B)x)$ 均处于饱和状态，因此 CE 误差不会随 $|x|$ 增大。尽管在 S 内 CE 误差会随 $|x|$ 增大，但我们可以根据最坏的 $|x|$ 得到一个一致界。

接下来，我们给出命题 3，它是对 [17, 命题 1], 几何漂移结果的轻微修改，用于推导马尔可夫过程的李雅普诺夫类函数在期望意义下的随机稳定性结果。

命题 3. 设$(\xi_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ 是一个取值于 $\mathbb{R}^d$的马尔可夫过程，且其 ξ_0 具有某个分布 $\mu(\cdot)$。假设存在 $\beta>0$ 和 $\lambda>0$、一个可测函数 $V\colon\ \mathbb{R}^d\to[0,+\infty)$以及一个紧集 $K\subset\mathbb{R}^d$，使得

$$
\mathbb{E}\left[V(\xi_1)|\xi_0=x\right]\leq\lambda V(x)\ for\ all\ x\in K^{\mathrm{c}}\cap\mathrm{supp}(\mu)
\tag{8}
$$

and

$$
\mathbb{E}\left[V(\xi_1)|\xi_0=x\right]\leq\beta\ for\ all\ x\in K\cap\mathrm{supp}(\mu).
\tag{9}
$$

那么，

$$
\mathbb{E}\left[V(\xi_t)\mid\xi_0=x\right]\leq\lambda^tV(x)+\beta\sum_{k=0}^{t-1}\lambda^{t-1-k}
$$

对所有 $x\in\mathrm{supp}(\mu)$ 和 $t\in\mathbb{N}_0$，均成立。

命题 3 与 [17, 命题 1], 相同，唯一的区别是我们不要求 $\lambda<1$，并且 $\mathbb{E}\left[V(\xi_t)\mid\xi_0=x\right]$ 上界中的最后一个加项没有替换为几何级数的闭式。

我们利用命题 3 推导引理 2，该引理给出了一个指数函数的期望值的界，该函数以一族参数化系统的状态为自变量；这族系统具有相同的被控对象动力学 (4)，但采用确定性参数估计。这些界对于真实参数周围一个足够小的球内的所有估计值均一致成立。

引理 2. 假设 *1*、*2* 和 *3* 成立。设 $m_q, M_q > 0$ 满足引理 *1*。固定 $\epsilon \in [0, m_q]$。考虑由 $\bar{A} \in \bar{\mathcal{B}}_\epsilon(A)$ $\bar{B} \in \bar{\mathcal{B}}_\epsilon(B)$ 参数化的一族随机序列 $(Z^{\bar{A},\bar{B}}_\tau)_{\tau\in\mathbb{N}_0}$，其按照以下闭环系统演化：

$$\begin{aligned} Z^{\bar{A},\bar{B}}_{\tau+1} =& A^\kappa Z^{\bar{A},\bar{B}}_\tau + \mathcal{R}_* sat_D(-\mathcal{R}_\kappa(\bar{A},\bar{B})^\dagger \bar{A}^\kappa Z^{\bar{A},\bar{B}}_\tau) \\ &+ \tilde{V}_\tau + \tilde{W}_\tau, \end{aligned} \tag{10}$$

对于 $\tau \in \mathbb{N}_0$，其中：

1) $(W_\tau)_{\tau\in\mathbb{N}_0}$ 和 $(V_\tau)_{\tau\in\mathbb{N}_0}$ 是独立同分布随机序列，其分布分别与 $(W)_{\tau\in\mathbb{N}_0}$ 和 $(V_\tau)_{\tau\in\mathbb{N}_0}$ 相同；*2)* 对所有 $\bar{A} \in \bar{\mathcal{B}}_\epsilon(A)$ 和 $\bar{B} \in \bar{\mathcal{B}}_\epsilon(B)$，$Z^{\bar{A},\bar{B}}_0 = z \in Z$，其中 Z 是服从分布 $\mu(\cdot)$ 的随机变量；*3)* $(W_\tau)_{\tau\in\mathbb{N}_0}$、$(V_\tau)_{\tau\in\mathbb{N}_0}$ 和 Z 相互独立。

那么，

$$\mathbb{E}[e^{|Z^{\bar{A},\bar{B}}_\tau|} \mid Z^{\bar{A},\bar{B}}_0 = z] \leq \lambda^\tau(\epsilon) e^{|z|} + \beta(\epsilon) \sum_{k=0}^{\tau-1} \lambda^{\tau-1-k}(\epsilon) \tag{11}$$

对所有 $A \in \mathcal{B}_\epsilon(A)$、$B \in \mathcal{B}_\epsilon(B)$、$z \in \mathrm{supp}(\mu)$ 以及 $\tau \in \mathbb{N}_0$，其中

$$\lambda(\epsilon) := e^{\|\mathcal{R}_*\|\cdot M_q \cdot D\cdot\epsilon + \frac{-D}{\|\mathcal{R}_*^\dagger\|} + M_{\bar{V}} + M_{\bar{W}}}, \tag{12}$$

$$\beta(\epsilon) := e^{\|\mathcal{R}_*\|\cdot M_q \cdot D\cdot\epsilon + M_{\bar{V}} + M_{\bar{W}}}. \tag{13}$$

引理 2 的证明推迟到补充材料中给出，但这里先说明关键细节。假设 $A \in \mathcal{B}_\epsilon(A)$ 和 $\bar{B} \in \bar{\mathcal{B}}_\epsilon(B)$，基于名义子采样闭环系统的动态（其中控制器使用真实参数 A，B），以及 CE 误差（它可通过引理 1 得到上界），我们可以为 $|\bar{Z}^{\bar{A}}_{\cdot,\tau}{}^{\bar{B}}|$ 给出上界。这意味着 $\mathbb{E}[e^{|Z_1^{\bar{A},\bar{B}}|} \mid Z_0 = z] \leq \mathbb{E}[e^{|A^\kappa z + \mathcal{R}_* \mathrm{sat}_D(-\mathcal{R}_*^\dagger A^\kappa z)| + M_{\bar{V}} + M_{\bar{W}} + \|\mathcal{R}_*\| M_q D\epsilon} \mid Z_0 = z]$ 成立。令 K 表示满足 $|\mathcal{R}_*^\dagger A^\kappa z)| \leq D$ 的 z 所构成的集合，我们发现，在 $z \in K^\complement$ 上有 $\mathbb{E}[e^{|Z_1^{\bar{A},\bar{B}}|} \mid Z_0 = z] \leq \lambda(\epsilon)$，在 $z \in K$ 上有 $\mathbb{E}[e^{|Z_1^{\bar{A},\bar{B}}|} \mid Z_0 = z] \leq \beta(\epsilon)$。将命题 3 应用于 $V(\cdot) \leftarrow e^{(\cdot)}$，即可得出结论。

注 6。(11) 中的界始终为 $e^{|\bar{Z}^{\bar{A}}_{\cdot,\tau}{}^{\bar{B}}|}$ 的条件期望提供上界，适用于 $\tau > \tau_0$，并且会随估计误差 ϵ 连续变化。然而，如果足够小，使得 $\epsilon > 0$ 成立，那么 $\frac{-D}{\|\mathcal{R}_*^\dagger\|} + \|\mathcal{R}_*\| M_q D\epsilon + M_{\bar{V}} + M_{\bar{W}} < 0$ 将成立（在假设下）。在这种情况下，$\lambda \in (0,1)$ 中的上界将渐近收敛到一个常数，并可定性地解释为稳定性界。

利用引理 2，我们在命题 4 中推导出（4）中闭环系统的子采样状态 X_τ 范数的概率界。请注意，此处的上界取决于函数 h，该函数是在 τ 上任意选取的函数，表示子采样参数估计值 θ_τ 的估计误差上界，并且该上界在时间步 τ_0 之后成立。此界成立的概率取决于子采样估计误差在 τ 与 τ_0 之间受 h 限制的概率。

命题 4. 假设假设 *1*、*2* 和 *3* 成立，且令 $m_q, M_q > 0$ 满足引理 *1*。假设 $x_0 \in \mathbb{R}^n$。考虑任意满足 $\tau_0 \in \mathbb{N}$的函数 h：$\{\tau_0, \tau_0+1, \ldots, \tau\} \to [0, m_q]$。固定 $\tau > \tau_0$和 $\gamma \in (0、1)$。那么，

$$\begin{aligned} |\bar{X}_\tau| <& \ln(\frac{1}{\gamma}) + \ln(\mathbb{E}[e^{|\bar{X}_{\tau_0}|}] \prod_{i=\tau_0}^{\tau-1} \lambda(h(i)) \\ &+ \sum_{i=\tau_0}^{\tau-1} \beta(h(i)) \prod_{j=i+1}^{\tau-1} \lambda(h(j))). \end{aligned}$$

以至少 $1 - \gamma - P\left(\bigcup_{i=\tau_0}^{\tau} \{\bar{\theta}_i \notin \bar{\mathcal{B}}_{h(i)}(\theta_*)\}\right)$ 的概率成立，其中 λ、β 分别定义于（12）和（13）中。

证明。我们将首先通过归纳法证明以下结论：

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\bar{\theta}_{\tau_0}\in\bar{\mathcal{B}}_{h(\tau_0)}(\theta_*),\ldots,\bar{\theta}_{\tau_0+k-1}\in\bar{\mathcal{B}}_{h(\tau_0+k-1)}(\theta_*)} e^{|\bar{X}_{\tau_0+k}|}] \\ &\leq \mathbb{E}[e^{|\bar{X}_{\tau_0}|}] \prod_{i=\tau_0}^{\tau_0+k-1} \lambda(h(i)) + \sum_{i=\tau_0}^{\tau_0+k-1} \beta(h(i)) \prod_{j=i+1}^{\tau_0+k-1} \lambda(h(j)) \end{aligned} \tag{14}$$

从 $k=1$ 的基本情形开始，我们有：

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\bar{\theta}_{\tau_0}\in\bar{\mathcal{B}}_{h(\tau_0)}(\theta_*)}\mathbb{E}[e^{|\bar{X}_{\tau_0+1}|}\mid\bar{\theta}_{\tau_0},\bar{X}_{\tau_0}]]\\&\leq\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\bar{\theta}_{\tau_0}\in\bar{\mathcal{B}}_{h(\tau_0)}(\theta_*)}(\lambda(h(\tau_0))e^{|\bar{X}_{\tau_0}|}+\beta(h(\tau_0)))]\end{aligned}\tag{15}$$

为了证明 (15) 成立，我们定义参数化序列 $(Z^{\bar{A}},\ {}^{\bar{B}})_{i\in\mathbb{N}_0}$，其定义在 $\bar{A}\in\bar{\mathcal{B}}_\delta(A)$、$\bar{B}\in\bar{\mathcal{B}}_\delta(B)$ 上，并使其演化与闭环动力学 (10) 保持一致，但令 $Z_0^{\bar{A},\ \bar{B}}=\bar{X}_{\tau_0}$，且 $(\tilde{W}_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ 和 $(\tilde{V}_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ 满足 $\tilde{W}_i=\bar{W}_{\tau_0+i}$ 和 $\tilde{V}_i=\bar{V}_{\tau_0+i}$，其中 $i\in\mathbb{N}_0$。回忆 $\bar{\theta}_{\tau_0}=[\bar{A}_{\tau_0},\bar{B}_{\tau_0}]$。令 $f(\bar{A},\bar{B},z)=\mathbb{E}[e^{|Z_1^{\bar{A},\bar{B}}|}\mid Z_0=z]$，并注意到 $\mathbb{E}[e^{|\bar{X}_{\tau_0+1}|}\mid\bar{\theta}_{\tau_0},\bar{X}_{\tau_0}]=\mathbb{E}[e^{|\bar{X}_{\tau_0+1}|}\mid\bar{A}_{\tau_0},\bar{B}_{\tau_0},\bar{X}_{\tau_0}]=f(\bar{A}_{\tau_0},\bar{B}_{\tau_0},\bar{X}_{\tau_0})$，由引理 2 可知，在事件 $\{\bar{\theta}_{\tau_0}\in\bar{\mathcal{B}}_{h(\tau_0)}(\theta_*)\}$ 上，$\mathbb{E}[e^{|\bar{X}_{\tau_0+1}|}\mid\bar{\theta}_{\tau_0},\bar{X}_{\tau_0}]\leq\lambda(h(\tau_0))e^{|\bar{X}_{\tau_0}|}+\beta(h(\tau_0))$ 成立。因此，我们验证了基本情形。

现在我们进入归纳步骤。假设 $k\geq1$ 且对于此 k，(14) 成立。那么，我们有：

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\bar{\theta}_{\tau_0}\in\bar{\mathcal{B}}_{h(\tau_0)}(\theta_*),\ldots,\bar{\theta}_{\tau_0+k}\in\bar{\mathcal{B}}_{h(\tau_0+k)}(\theta_*)}e^{|\bar{X}_{\tau_0+k+1}|}]\\&=\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\bar{\theta}_{\tau_0}\in\bar{\mathcal{B}}_{h(\tau_0)}(\theta_*),\ldots,\bar{\theta}_{\tau_0+k}\in\bar{\mathcal{B}}_{h(\tau_0+k)}(\theta_*)}\\&\quad\times\mathbb{E}[e^{|\bar{X}_{\tau_0+k+1}|}\mid\bar{\theta}_{\tau_0},\ldots,\bar{\theta}_{\tau_0+k},\bar{X}_{\tau_0+k}]]&(16)\\&=\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\bar{\theta}_{\tau_0}\in\bar{\mathcal{B}}_{h(\tau_0)}(\theta_*),\ldots,\bar{\theta}_{\tau_0+k}\in\bar{\mathcal{B}}_{h(\tau_0+k)}(\theta_*)}\\&\quad\times\mathbb{E}[e^{|\bar{X}_{\tau_0+k+1}|}\mid\bar{\theta}_{\tau_0+k},\bar{X}_{\tau_0+k}]]&(17)\\&\leq\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\bar{\theta}_{\tau_0}\in\bar{\mathcal{B}}_{h(\tau_0)}(\theta_*),\ldots,\bar{\theta}_{\tau_0+k}\in\bar{\mathcal{B}}_{h(\tau_0+k)}(\theta_*)}\\&\quad\times(\lambda(h(\tau_0+k))e^{|\bar{X}_{\tau_0+k}|}+\beta(h(\tau_0+k)))]&(18)\\&\leq\lambda(h(\tau_0+k))\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\bar{\theta}_{\tau_0}\in\bar{\mathcal{B}}_{h(\tau_0)}(\theta_*),\ldots,\bar{\theta}_{\tau_0+k-1}\in\bar{\mathcal{B}}_{h(\tau_0+k-1)}(\theta_*)}\\&\quad\times e^{|\bar{X}_{\tau_0+k}|}]+\beta(h(\tau_0+k))&(19)\\&\leq\lambda(h(\tau_0+k))\Big[\mathbb{E}[e^{|\bar{X}_{\tau_0}|}]\prod_{i=\tau_0}^{\tau_0+k-1}\lambda(h(i))\\&\quad+\sum_{i=\tau_0}^{\tau_0+k-1}\beta(h(i))\prod_{j=i+1}^{\tau_0+k-1}\lambda(h(j))\Big]+\beta(h(\tau_0+k))&(20)\\&=\mathbb{E}[e^{|\bar{X}_{\tau_0}|}]\prod_{i=\tau_0}^{\tau_0+k}\lambda(h(i))+\sum_{i=\tau_0}^{\tau_0+k}\beta(h(i))\prod_{j=i+1}^{\tau_0+k}\lambda(h(j)),&(21)\end{aligned}$$

其中，(16) 根据塔式性质得出，(17) 根据给定 θ_{τ_0+k} 时 X_{τ_0+k+1} 与 θ_{τ_0} 的条件独立性得出，……，θ_{τ_0+k-1} X_{τ_0+k}，(18) 以与 (15) 类似的方式通过引理 2 得出，(19) 根据 $\mathbf{1}_{\bar{\theta}_{\tau_0+k}\in\bar{\mathcal{B}}_{h(\tau_0+k)}(\theta_*)}\leq1$ 和 $\mathbf{1}_{\bar{\theta}_{\tau_0}\in\bar{\mathcal{B}}_{h(\tau_0)}(\theta_*),\ldots,\ \bar{\theta}_{\tau_0+k-1}\in\bar{\mathcal{B}}_{h(\tau_0+k-1)}(\theta_*)}\leq1$ 得出，而 (20) 根据假设 (14) 成立得出，该假设可化简为 (21)。因此，通过归纳法，我们得出 (14) 对所有 $k\geq1$ 均成立。

令 $k=\tau-\tau_0$ 并利用 (14)，可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\bar{\theta}_{\tau_0}\in\bar{\mathcal{B}}_{h(\tau_0)}(\theta_*),\ldots,\bar{\theta}_{\tau-1}(\theta_*)\in\bar{\mathcal{B}}_{h(\tau-1)}}e^{|\bar{X}_\tau|}]\\&\leq\mathbb{E}[e^{|\bar{X}_{\tau_0}|}]\prod_{i=\tau_0}^{\tau-1}\lambda(h(i))+\sum_{i=\tau_0}^{\tau-1}\beta(h(i))\prod_{j=i+1}^{\tau-1}\lambda(h(j)).\end{aligned}\tag{22}$$

现在，定义事件 $\mathcal{E}^2=\{\bar{\theta}_{\tau_0}\in\bar{\mathcal{B}}_{h(\tau_0}\ \theta_*\ \ldots\ \bar{\theta}_{\tau-1}\in\bar{\mathcal{B}}_{h(\tau-1)}\ \theta_*\}$ $h\ i\ +)(),(),$ $\sum_{i=\tau_0}^{\tau-1}\beta\ h\ i\ \ \prod_{j=i+1}^{\tau-1}\lambda\ h\ j\ \ \}$ 22 $P\ \mathcal{E}_\gamma^1\ \geq1-\gamma$ $\mathcal{E}_\gamma^1\cap\mathcal{E}^2$ 和 $\mathcal{E}_\gamma^1=\{\mathbf{1}_{\mathcal{E}^2}e^{|\bar{X}_\tau|}<\frac{1}{\gamma}(\mathbb{E}[e^{|\bar{X}_{\tau_0}|}]\prod_{i=\tau_0}^{\tau-1}\lambda(\ (\ ))\ (\ (\ ))\ (\ (\ )))$。根据马尔可夫不等式和 ( )，可得 ( )。在事件 上，$\mathbf{1}_{\mathcal{E}^2}e^{|\bar{X}_\tau|}=e^{|\bar{X}_\tau|}$ $e^{|\bar{X}_\tau|}<\frac{1}{\gamma}\ \mathbb{E}[e^{|\bar{X}_{\tau_0}|}]\prod_{i=\tau_0}^{\tau-1}\lambda\ h\ i\ \ +\sum_{i=\tau_0}^{\tau-1}\beta\ h\ i\ \ \prod_{j=i+1}^{\tau-1}\lambda\ h\ j$ 成立，这意味着 $(\ (\ (\ ))\ (\ (\ ))\ (\ (\ )))$，进而等价于 $|\bar{X}_\tau|<\ln(\frac{1}{\gamma})+\ln(\mathbb{E}[e^{|\bar{X}_{\tau_0}|}]\prod_{i=\tau_0}^{\tau-1}\lambda(h(i))+\sum_{i=\tau_0}^{\tau-1}\beta(h(i))\prod_{j=i+1}^{\tau-1}\lambda(h(j)))$.通过对该事件的概率给出下界，即可得出结论：

$$\begin{aligned}&P\big(|\bar{X}_\tau|<\ln(\frac{1}{\gamma})+\ln\big(\big[\mathbb{E}[e^{|\bar{X}_{\tau_0}|}]\prod_{i=\tau_0}^{\tau-1}\lambda(h(i))\\&+\sum_{i=\tau_0}^{\tau-1}\beta(h(i))\prod_{j=i+1}^{\tau-1}\lambda(h(j))\big]\big)\big)\\&\geq P(\mathcal{E}_\gamma^1\cap\mathcal{E}^2)\geq1-P((\mathcal{E}_\gamma^1)^{\mathsf{c}})-P((\mathcal{E}^2)^{\mathsf{c}})\end{aligned}\tag{23}$$

$$\geq 1-\gamma-P(\bigcup_{k=\tau_0}^{\tau-1}\{\bar{\theta}_k \notin \bar{\mathcal{B}}_{h(k)}(\theta_*)\}), \tag{24}$$

其中，(23) 根据并集界得出，(24) 则由 $P(\mathcal{E}_\gamma^1) \geq 1-\gamma$ 得出。 □

结合命题 2 和命题 4，我们现在可以通过定理 2 给出主要的稳定性界结果。该定理指出，给定失败概率 δ 和估计误差参数 ϵ，当 ϵ 足够小时，我们可以得到子采样状态的相应高概率上界。请注意，根据注 6，当 $\epsilon \in (0,\ \min(m_q,\ (\|\mathcal{R}_*\|M_qD)^{-1}(\frac{D}{\|\mathcal{R}_*^\dagger\|}$ ——— $M_{\bar{V}}-M_{\bar{W}}$ $\lambda\ \epsilon\ \in\ 0,1$ 25 $2/\delta\ +$))) 成立时，( ) ( ) 成立，因此 ( ) 右侧在所有时刻 $K\ \epsilon\ \delta/2\ x_0\ +$ $\beta\ \epsilon$ $2/\delta\ +$ $\tau\ \to\ \infty$ 均以上界 ln( ) (, ,) ln($\overline{()1-\lambda(\epsilon))}$ 并且渐近收敛于 ln( ) ln($()1-\lambda(\epsilon)$)，因为这种收敛行为，它可以被视为提供了一族以 ϵ 为参数的高概率稳定性界。

定理 2。 假设 *1*、*2*、*3*、*4* 和 *5* 成立，并令 m_q、$M_q > 0$ 满足引理 *1*。假设 $x_0 \in \mathbb{R}^n$。固定$\delta \in (0,\ 1)$ 以及 $\epsilon \in (0,\ \min(m_q,\ (\|\mathcal{R}_*\|M_qD)^{-1}(\frac{D}{\|\mathcal{R}_*^\dagger\|} - M_{\bar{V}} - M_{\overline{\bar{W}}})))$。则，

$$|\bar{X}_\tau| < \ln(2/\delta) + \ln(K(\epsilon,\delta/2,x_0)\lambda^\tau(\epsilon) + \frac{\beta(\epsilon)}{1-\lambda(\epsilon)}) \tag{25}$$

对所有 $\tau \geq 0$，以至少 $1-\delta$ 的概率成立，其中

$$\begin{aligned} K(\epsilon,\delta,x_0) &:= e^{|x_0|}(e^{\|\mathcal{R}_*\|D+M_{\bar{V}}+M_{\bar{W}}}\lambda^{-1})^{\tau_0'(\epsilon,\delta,x_0)}, \\ \tau_0'(\epsilon,\delta,x_0) &:= \min\{\tau \in \mathbb{N} \mid \kappa\tau \geq T_0(\delta,x_0), \\ &\qquad e(\kappa i,\delta,x_0) \leq \epsilon \textit{ for all } i \geq \tau\}, \end{aligned} \tag{26}$$

其中 T_0、e、λ、β 分别定义于(7)、(6)、(12)和(13) 中。

证明。 我们首先推导状态的最坏情况高概率界。对于所有 $\tau \geq 0$，有

$$\begin{aligned} |\bar{X}_\tau| &= |A^{\kappa\tau}\bar{X}_0 + \sum_{i=0}^{\tau-1} A^{\kappa(\tau-1-i)}(\mathcal{R}_*\,\mathrm{sat}_D(-\mathcal{R}_\kappa(\bar{A}_i,\bar{B}_i)\bar{X}_i) \\ &\quad + \bar{V}_i + \bar{W}_i)| \qquad (27) \\ &\leq |x_0| + \sum_{i=0}^{\tau-1}(\|\mathcal{R}_*\|D + |\bar{V}_i| + |\bar{W}_i|), \qquad (28) \end{aligned}$$

其中，(27)由迭代应用(4)得到，而(28)则由假设2和 $\mathrm{sat}_D(\cdot) \leq D$成立。根据期望的单调性和指数函数，可得

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[e^{|\bar{X}_\tau|}] \\ &\leq e^{|x_0|}\prod_{i=0}^{\tau-1}(e^{\|\mathcal{R}_*\|D}\mathbb{E}[e^{|\bar{V}_i|}]\mathbb{E}[e^{|\bar{W}_i|}]) \qquad (29) \\ &\leq e^{|x_0|}\prod_{i=0}^{\tau-1}(e^{\|\mathcal{R}_*\|D+M_{\bar{V}}+M_{\bar{W}}}) \\ &= e^{\|A\|^{\kappa\tau}|x_0|}(e^{\|\mathcal{R}_*\|D+M_{\bar{V}}+M_{\bar{W}}})^{\sum_{i=0}^{\tau-1}\|A\|^{\kappa i}} \\ &\leq e^{|x_0|}(e^{\|\mathcal{R}_*\|D+M_{\bar{V}}+M_{\bar{W}}})^{\tau} \qquad (30) \end{aligned}$$

对所有 $\tau \geq 0$ 均成立，其中 (29) 是由假设3得出的。根据马尔可夫不等式，由 (30) 可知，对所有 $\gamma \in (0,\ 1)$，

$$e^{|\bar{X}_\tau|} < \frac{1}{\gamma}(e^{|x_0|}(e^{\|\mathcal{R}_*\|D+M_{\bar{V}}+M_{\bar{W}}})^{\tau})$$

对所有 $\tau \geq 0$，以至少 $1-\gamma$ 的概率成立。等价地，对所有 $\gamma \in (0,\ 1)$，

$$|\bar{X}_\tau| < \ln(\frac{1}{\gamma}e^{|x_0|}(e^{\|\mathcal{R}_*\|D+M_{\bar{V}}+M_{\bar{W}}})^{\tau}) \tag{31}$$

对所有 $\tau \geq 0$，以至少 $1-\gamma$ 的概率成立。

现在，我们分别考虑 τ 满足 $0 \leq \tau \leq \tau_0'(\epsilon,\ \delta/2,\ x_0)$ 和 $\tau > \tau_0'(\epsilon,\ \delta/2,\ x_0)$ 的情形。

情形 *1*：假设 $\tau > \tau_0'(\epsilon,\ \delta/2,\ x_0)$。那么，

$$
\begin{aligned}
&P(\bigcup_{i=\tau_0'(\epsilon,\delta/2,x_0)}^{\tau}\{\bar{\theta}_i \notin \bar{\mathcal{B}}_{e(\kappa i,\delta/2,x_0)}(\theta_*)\})\\
&\le 1 - P(\bigcap_{i\ge\tau_0'(\epsilon,\delta/2,x_0)}\{\bar{\theta}_i \in \bar{\mathcal{B}}_{e(\kappa i,\delta/2,x_0)}(\theta_*)\})\\
&\le 1 - P(\|\bar{\theta}_i - \theta_*\|_2 \le e(\kappa i,\delta/2,x_0)\\
&\qquad \text{for all } i \ge \frac{1}{\kappa}T_0(\delta/2,x_0)) \qquad (32)\\
&\le 1 - P(\|\hat{\theta}_T - \theta_*\|_2 \le e(T,\delta/2,x_0)\\
&\qquad \text{for all } T \ge T_0(\delta/2,x_0)) \qquad (33)\\
&\le \delta/2 \qquad (34)
\end{aligned}
$$

-^ ^ 其中，(32 τ_0' 26 33 $\theta_i = \theta_{\kappa i}$ $P\ \|\theta_T - \theta_*\|_2 \le e\ \kappa T\ \delta\ x_0$ $T \ge$) 是由 ( ) 中的定义得出的，而 ( ) 成立是因为，并且对于所有 (,) 和 (,) 均有 ((,) 对所有 (,) 成立)。此外，( ) 根据命题 4 成立。结合 (34) 与命题 4，并令 $h(i) \leftarrow e(\kappa i,\delta/2,x_0)$、$\tau_0 \leftarrow \tau_0'(\epsilon,\delta/2,x_0)$ 和 $\gamma \leftarrow \delta/2$，可得

$$
\begin{aligned}
&|\bar{X}_\tau| < \ln(2/\delta) + \ln(\mathbb{E}[e^{|\bar{X}_{\tau_0}|}] \prod_{i=\tau_0'(\epsilon,\delta/2,x_0)}^{\tau-1}\lambda(e(\kappa i,\delta/2,x_0))\\
&+ \sum_{i=\tau_0'(\epsilon,\delta/2,x_0)}^{\tau-1}\beta(e(\kappa i,\delta/2,x_0))\prod_{j=i+1}^{\tau-1}\lambda(e(\kappa j,\delta/2,x_0)))\\
&\le \ln(2/\delta) + \ln(e^{|x_0|}(e^{\|\mathcal{R}_*\|D+M_{\bar{V}}+M_{\bar{W}}})^{\tau_0'(\epsilon,\delta/2,x_0)}\lambda^\tau(\epsilon)\\
&+ \beta(\epsilon)\frac{1-\lambda^{\tau-\tau_0'(\epsilon,\delta/2,x_0)}(\epsilon)}{1-\lambda(\epsilon)}) \qquad (35)\\
&\le \ln(2/\delta) + \ln(K(\epsilon,\delta/2)\lambda^\tau(\epsilon) + \frac{\beta(\epsilon)}{1-\lambda(\epsilon)}) \qquad (36)
\end{aligned}
$$

对于所有 $\tau > \tau_0'(\epsilon,\delta/2,x_0)$，以至少 $1-\delta$ 的概率成立，其中 (35) 由 (26) 中 τ_0' 的定义得出，并通过将 $\gamma \leftarrow \delta/2$ 代入 $\tau \leftarrow \tau_0'(\epsilon,\delta/2,x_0)$ 应用 (31) 得到；(36) 则经过化简后得出。

情形 *2*：假设 $\tau \le \tau_0'(\epsilon,\ \delta/2,\ x_0)$。然后，将 $\gamma \leftarrow \delta/2$ 代入 (31)，可得对所有 $\tau \ge 0$，

$$
|\bar{X}_\tau| < \ln(2/\delta) + \ln(e^{|x_0|}(e^{\|\mathcal{R}_*\|D+M_{\bar{V}}+M_{\bar{W}}})^\tau) \qquad (37)
$$

以至少 $1-\delta/2$ 的概率成立，这也意味着它以至少 $1-\delta$ 的概率成立。接下来，注意到

$$
\begin{aligned}
&e^{|x_0|}(e^{\|\mathcal{R}_*\|D+M_{\bar{V}}+M_{\bar{W}}})^\tau\\
&\le e^{|x_0|}(e^{\|\mathcal{R}_*\|D+M_{\bar{V}}+M_{\bar{W}}}\lambda^{-1})^{\tau_0'(\epsilon,\delta/2,x_0)}\\
&= K(\epsilon,\delta/2)\lambda^\tau(\epsilon) + \frac{\beta(\epsilon)}{1-\lambda(\epsilon)} \qquad (38)
\end{aligned}
$$

成立。将 (38) 代入 (37)，可得对于满足 $0 \le \tau \le \tau_0'(\epsilon,\ \delta/2,\ x_0)$ 的 τ，(25) 已得到验证。 □

在证明定理 1 之前，我们先给出引理 3，以简化给定 ϵ 时 (26) 中的 τ_0'。

引理 3. 假设假设*1*、*2*、*3*和*5*成立。对于所有 $\epsilon > 0$，存在 $L_1 > 0$ 和函数 L_2：$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{>0}$，使得对于所有 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 和 $\delta \in (0,\ 1)$，$\tau_0'(\epsilon,\delta) \le L_2(x_0) + L_1\ln(1/\delta)$。

我们将该结果的证明留至补充材料中，但在此说明关键细节。该结果首先利用 $\log(T+1)$ 为凹函数这一事实，因而可由其切线线性上界，从而对 $T_0(\delta)$ 求上界；然后通过简单但繁琐的代数运算，找到一个与 T 相互独立的充分上界，使得当 T 大于该上界时，可以推出 $T \ge T_0(\delta)$。对于求使得 $e(t,\delta,x_0) \le \epsilon$ 对所有 $t \ge T'$ 均成立的最小时间 T' 的上界，重复上述过程。最后，通过简化这两个上界的最大值，并除以 κ 以转换为子采样时间，得到 $\tau_0'(\delta)$ 的上界。

我们的主要结果——定理 1——可直接由定理 2 和引理 3 得出。

定理 *1* m_q $M_q > 0$ 1 ϵ $\epsilon \in 0,$ m_q $\|\mathcal{R}_*\|M_q D^{-1}$ $\frac{D}{\|\mathcal{R}_*^\dagger\|} - M_{\bar{V}} -$ 的证明。令,满足引理 。令满足 $M_{\bar{W}}$ $N_3 = \beta\ \epsilon\ /\ 1-\lambda\ \epsilon$ $\lambda_\circ = \lambda\ \epsilon$ $L_1 > 0$ L_2 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ 3 ϵ (min(,( ) ( ))), ( ) (( )), 和 ( )。令 , : 满足引理，其中所选的 ,

使得 $\tau_0'(e^{|x_0|}\ e^{(\|\mathcal{R}_*\|D+M_{\bar{V}}+M_{\bar{W}}+}\ \ \lambda^{-1}\ \epsilon\ \ L_2\ x_0$ $\epsilon\ \ x_0\ =$ $,\delta,)\ \le L_2$ $() + L_1\ln(1/\delta)$ 成立。令 $N_1 = (\|\mathcal{R}_*\|D + M_{\bar{V}} + M_{\bar{W}} + \ln(\lambda^{-1}())) L_1$，且 $N_2() (\ln(()))()$。于是，我们有

$$K(\epsilon, \frac{\delta}{2}, x_0) = e^{|x_0|}(e^{\|\mathcal{R}_*\|D+M_{\bar{V}}+M_{\bar{W}}+\ln(\lambda^{-1}(\epsilon))})\tau_0'\left(\epsilon, \tfrac{\delta}{2}, x_0\right)$$
$$\le N_2(x_0)(2/\delta)^{N_1}$$

通过应用定理 2 即可得到该结果。 □

V. Numerical Examples

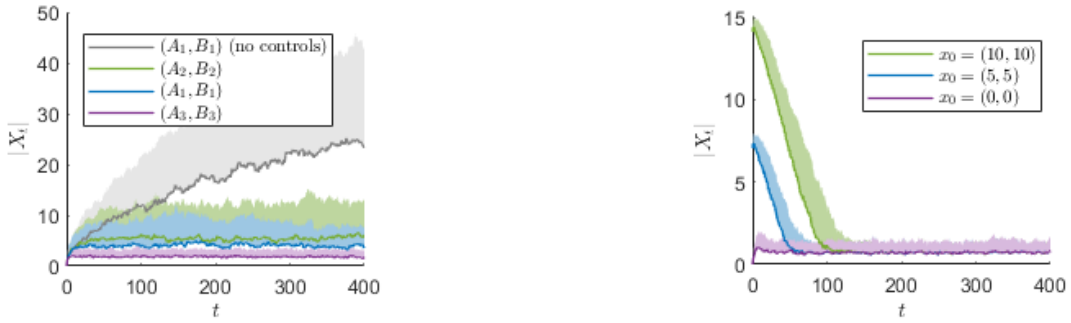
为展示算法1中自适应控制策略的有效性，我们首先在三个不同的被控对象上进行了测试，其中 $W_t \overset{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}\ 0\ \mathbf{I}$：

$(\ ,\ )$

1) $A_1 = \begin{bmatrix} \cos(\pi/4) & \sin(\pi/4) \\ -\sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$;
2) $A_2 = \begin{bmatrix} \cos(-\pi/2) & \sin(-\pi/2) \\ -\sin(-\pi/2) & \cos(-\pi/2) \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} 0.3 \\ -0.5 \end{bmatrix}$;
3) $A_3 = \begin{bmatrix} 0.8\cos(\pi/4) & 0.8\sin(\pi/4) \\ -0.8\sin(\pi/4) & 0.8\cos(\pi/4) \end{bmatrix}$, $B_3 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$.

算法参数也固定为 $U_{\max} \leftarrow 1$, $C \leftarrow 0.4$, $\kappa \leftarrow 2$，其中 V_t 独立同分布$\sim$ Uniform$(-C, C)$，且 $(\bar{A}_0, \bar{B}_0)$ 随机选取（但在所有试验中保持不变）。此外，我们还对系统 (A_1, B_1) 在未受控状态下进行了仿真（即 $U_t = 0$）。图 1a 展示了 $|X_t|$ 在 100 次试验中的中位数和第 90 百分位数曲线。可以看出，在所有应用算法1的测试中，无论是中位数还是第 90 百分位数，$|X_t|$ 都表现出有界意义下的稳定行为，这与定理 1 一致。相比之下，在没有控制量的情况下，中位数和第 90 百分位数曲线均呈现无界增长。

其次，我们在 $(A_1,\ B_1)$ 上再次使用相同的算法参数测试算法1，但令 $\Sigma_W = 0.1\mathbf{I}$ 并改变 x_0。结果如图 1b 所示。我们看到，无论初始状态如何，中位数和 $90th$ 百分位数都会收敛。具体而言，若分别考察中位数或第 90 百分位数图，并改变 x_0，则可以看出它们似乎都收敛到相同的稳态。此外，这种收敛似乎是线性的。这与定理 1 中上界的变化趋势一致。



(a) 在 $(A,\ B)$ 变化且无控制量时的仿真。 (b) x_0 变化时的仿真。

图 1：经过 100 次试验后，$|X_t|$ 的中位数和第 90 百分位数图。

VI. 结论

我们提出了一种激励式 CE 控制方案，用于对受加性、独立同分布、无界随机扰动影响且控制幅值具有正上界约束的多维随机线性系统进行自适应控制。此外，我们针对闭环系统的 κ 子采样状态建立了一个高概率稳定性界。数值示例验证了我们控制策略的稳定性。

这项工作可从多个方向拓展。我们的方法有望拓展至满足 $(A,\ B)$ 可稳定化、$\lambda_{\max}(A) = 1$，且 A 在单位圆上的特征值代数重数与几何重数相等的线性系统，因为已有研究证明均方稳定控制器的存在性 [15]。然而，基于[15]的控制器设计涉及相似变换 $T(A)$，该变换将 A 变为实约当标准形。算法1 可以修改以支持此类控制器，但稳定性分析需要考察 $T(A)$ 的连续性性质。另一个值得探讨的方向是输出反馈问题，因为我们仅讨论了全状态反馈情形。克服假设4也很有意义，因为已知在非自适应情形下，任意小的控制量就足以保证随机稳定性 [14]。这留待未来工作解决。

参考文献

[1] T. Kargin、S. Lale、K. Azizzadenesheli、A. Anandkumar 和 B. Hassibi，《汤普森采样在线性二次控制中实现 $\tilde{O}(\sqrt{T})$ 遗憾》，载于学习理论会议，页码 3235–3284，PMLR，2022年。[2] M. Simchowitz 和 D. Foster，《在线线性二次调节器中朴素探索是最优的》，载于国际机器学习会议，页码 8937–8948，PMLR，2020年。[3] Y. Li、S. Das、J. Shamma 和 N. Li，《具有遗憾保证的受约束线性二次调节器安全自适应学习控制》，arXiv 预印本 arXiv:2111.00411，2021年。[4] M. S. Radenkovic 和 T. Altman，《未知控制方向下通过极值寻优实现随机自适应稳定化》，IEEE 自动控制汇刊，第61卷，第11期，页码 3681–3686，2016年。[5] M. S. Radenkovi´c 和 M. Krsti´c，《基于极值寻优的完美自适应跟踪：即使扰动方差不消失，也能跟踪非持续激励参考信号》，Automatica，第93卷，页码 189–196，2018年。[6] G. C. Goodwin、P. J. Ramadge 和 P. E. Caines，《离散时间随机自适应控制》，SIAM 控制与优化杂志，第19卷，1981年，第6期，页码 829–853。[7] L. Guo，《加权最小二乘法的自收敛及其在随机自适应控制中的应用》，IEEE 自动控制汇刊，第41卷，第1期，页码 79–89，1996年。[8] Y. Xiong、S. LeQuoc 和 R. Cheng，《具有死区非线性的多变量系统随机自适应控制》，载于1993年美国控制会议，页码 489–493，IEEE，1993年。[9] Z. Liu 和 C. Li，《离散时间非线性不确定系统的全局可稳定性定理》，IEEE 自动控制汇刊，2022年。[10] F. Chaoui、F. Giri 和 M. M’Saad，《输入受约束1型被控对象的自适应控制：稳定化与跟踪》，Automatica，第37卷，第2期，页码 197–203，2001年。[11] C. Zhang，《具有输入饱和约束的自适应控制》，载于《非光滑动力系统的自适应控制》，页码 361–381，施普林格，2001年。[12] S. Siriya、J. Zhu、D. Ne˘si´c 和 Y. Pu，《具有输入约束的随机线性系统基于学习的自适应控制》，IEEE 控制系统快报，2022年。[13] M. Simchowitz、H. Mania、S. Tu、M. I. Jordan 和 B. Recht，《无需混合：迈向对线性系统辨识的精确分析》，载于学习理论会议，页码 439–473，PMLR，2018年。[14] D. Chatterjee、F. Ramponi、P. Hokayem 和 J. Lygeros，《有界控制下随机线性系统的均方有界性》，系统与控制快报，第61卷，第2期，页码 375–380，2012年。[15] F. Ramponi、D. Chatterjee、A. Milias-Argeitis、P. Hokayem 和 J. Lygeros，《通过有界控制输入实现临界稳定随机线性系统的均方有界性》，IEEE 自动控制汇刊，第55卷，第10期，页码 2414–2418，2010年。[16] A. Tsiamis、I. Ziemann、N. Matni 和 G. J. Pappas，《控制的统计学习理论：有限样本视角》，arXiv 预印本 arXiv:2209.05423，2022年。[17] D. Chatterjee 和 J. Lygeros，《随机预测控制技术的稳定性与性能》，IEEE 自动控制汇刊，第60卷，第2期，页码 509–514，2014年。[18] D. P. Bertsekas，《非线性规划》，运筹学会杂志，第48卷，第3期，页码 334–334，1997年。

A. 确定性等价控制分量的扰动界 引理 *1* 的证明。令

$$m_q = q_1(\kappa, A, B)/2,$$
$$M_q = \frac{4q_5(q_1(\kappa, A, B)/2, \kappa, A, B)}{q_1(\kappa, A, B)(\sigma_{\min}(g(A, B)) - q_5(q_1(\kappa, A, B)/2, \kappa, A, B))}, \tag{39}$$

其中 q_1、q_5 分别定义于 (43) 和 (44) 中。假设 $A \in \mathcal{B}_\epsilon(A)$、$B \in \mathcal{B}_\epsilon(B)$ 和 $x \in \mathbb{R}^n$。则，

$$\begin{aligned}
&|\operatorname{sat}_D(-g(A_2, B_2)x) - \operatorname{sat}_D(-g(A, B)x)| \\
&\le q_2(q_1(\kappa, A, B)/2, D, \kappa, A, B) &(40)\\
&\le \frac{2q_2(q_1(\kappa, A, B)/2, D, \kappa, A, B)}{q_1(\kappa, A, B)}\epsilon &(41)\\
&= M_q\ (\kappa, A, B)\ D\epsilon, &(42)
\end{aligned}$$

成立，其中 (40) 由引理4得出，q_2 在 4 中定义；(41) 由 $q_2(\epsilon,\ D,\ \kappa,\ A,\ B)$ 在区间 $[0, q_1(\kappa,\ A,\ B)/2]$ 上关于 ϵ 的凸性得出；(42) 则由 (39) 得出。q_2 在 ϵ 上的凸性成立，因为它是通过以下方式构造的：1）凸函数的复合，其中最内层函数关于 ϵ 是凸函数；2）在该区间内，对关于 ϵ 的凸函数进行乘法和加法运算。 □

我们陈述引理4，它给出了确定性等价分量的控制量扰动界，该界是参数估计误差的函数，并且对状态空间中的所有状态均一致成立。

引理4。考虑$(A_1, B_1) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times m}$，其为 κ步可达，且 $r > 0$。固定 $\epsilon \in [0, q_1(\kappa, A_1, B_1))$。那么，

$$\begin{aligned}
&|\operatorname{sat}_r(-g(A_2, B_2)x) - \operatorname{sat}_r(-g(A_1, B_1)x)| \\
&\le q_2(\epsilon, r, \kappa, A_1, B_1)
\end{aligned}$$

对所有 $A_2 \in \mathcal{B}_\epsilon(A_1)$、$B_2 \in \mathcal{B}_\epsilon(B_1)$以及 $x \in \mathbb{R}^n$均成立。函数 q_1 和 q_2 定义如下：

$$q_1(\kappa, A, B) := \min\{q_3(\kappa, A, B), q_4(\kappa, A, B)\}, \tag{43}$$
$$q_2(\epsilon, r, \kappa, A, B) := \frac{2rq_5(\epsilon, \kappa, A, B)}{\sigma_{min}(g(A, B)) - q_5(\epsilon, \kappa, A, B)}.$$

它们由 q_3、q_4、q_5、q_6、q_7 和 q_8 支撑，这些量定义如下

$$\begin{aligned}
&q_3(\kappa, A, B) := \sup\{a > 0 \mid q_6(\epsilon, \kappa, A, B) < \\
&\quad \sigma_{min}(\mathcal{R}_\kappa(A, B)\mathcal{R}_\kappa^\top(A, B)) \textit{ for all } \epsilon \in [0, a]\}, \\
&q_4(\kappa, A, B) := \sup\{a > 0 \mid q_5(\epsilon, \kappa, A, B) < \\
&\quad \sigma_{min}(g(A, B)) \textit{ for all } \epsilon \in [0, a]\}, \\
&q_5(\epsilon, \kappa, A, B) := q_7(\epsilon, \kappa, A, B)q_{10}(\epsilon, \kappa, A) \qquad (44)\\
&\quad + \|R_\kappa^\dagger(A, B)\|q_{10}(\epsilon, \kappa, A) + \|A^\kappa\|q_7(\epsilon, \kappa, A, B), \\
&q_6(\epsilon, \kappa, A, B) := (\sum_{i=0}^{\kappa-1} q_9(\epsilon, i, A, B))^2 + \\
&\quad 2\|\mathcal{R}_\kappa(A, B)\|(\sum_{i=0}^{\kappa-1} q_9(\epsilon, i, A, B)) \qquad (45)\\
&q_7(\epsilon, \kappa, A, B) := (\sum_{i=0}^{\kappa-1} q_9(\epsilon, i, A, B))q_8(\epsilon, \kappa, A, B) \\
&\quad + \|\mathcal{R}_\kappa(A, B)\|q_8(\epsilon, \kappa, A, B) \\
&\quad + \|(R_\kappa^\top(A, B)R_\kappa(A, B))^{-1}\|(\sum_{i=0}^{\kappa-1} q_9(\epsilon, i, A, B)) \qquad (46)\\
&q_8(\epsilon, \kappa, A, B) := \\
&\quad \frac{\|(\mathcal{R}_\kappa(A, B)\mathcal{R}_\kappa^\top(A, B))^{-1}\|^2 q_6(\kappa, \epsilon, A, B)}{1 - \|(\mathcal{R}_\kappa(A, B)\mathcal{R}_\kappa^\top(A, B))^{-1}\|q_6(\kappa, \epsilon, A, B)}, \qquad (47)
\end{aligned}$$

其中， q_9、q_{10} 分别定义于（68）和（66）中。

¯证明。为便于记号，令 $\mathcal{R}_1' = \mathcal{R}_\kappa(A_1,\ B_1)$ 和 $\mathcal{R}_2' = \mathcal{R}_\kappa(A_2,\ B_2)$。假设 $\epsilon \in [0, q_1(\kappa,\ A_1,\ B_1))$、$A_2 \in \mathcal{B}_\epsilon(A_1)$、$B_2 \in \mathcal{B}_\epsilon(B_1)$ 且 $x \in \mathbb{R}^n$。那么，

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{R}_2' - \mathcal{R}_1'\| \\
&= \| \begin{bmatrix} B_2 - B_1 & A_2B_2 - A_1B_1 & \dots & A_2^{\kappa-1}B_2 - A_1^{\kappa-1}B_1 \end{bmatrix} \| && (48)\\
&\le \sum_{i=0}^{\kappa-1} \|A_2^iB_2 - A_1^iB_1\| \\
&\le \sum_{i=0}^{\kappa-1} q_9(\epsilon, i, A_1, B_1), && (49)
\end{aligned}$$

其中，（48）由假设2中 $\mathcal{R}_\kappa$ 的定义得出，（49）由引理8得出，其中 q_9 定义于（68）中。接下来，我们有：

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{R}_2'(\mathcal{R}_2')^\top - \mathcal{R}_1'(\mathcal{R}_1')^\top\| \\
&\le \|\mathcal{R}_2' - \mathcal{R}_1'\|^2 + 2\|\mathcal{R}_1'\|\|\mathcal{R}_2' - \mathcal{R}_1'\| && (50)\\
&\le q_6(\epsilon, \kappa, A_1, B_1), && (51)
\end{aligned}$$

其中，（50）由引理5得出，（51）由（49）及（45）中 q_6 的定义得出。于是，

$$\begin{aligned}
&\|(\mathcal{R}_2'(\mathcal{R}_2')^\top)^{-1} - (\mathcal{R}_1'(\mathcal{R}_1')^\top)^{-1}\| \\
&\le \frac{\|(\mathcal{R}_1'(\mathcal{R}_1')^\top)^{-1}\|^2\|\mathcal{R}_2'(\mathcal{R}_2')^\top - \mathcal{R}_1'(\mathcal{R}_1')^\top\|}{1 - \|(\mathcal{R}_1'(\mathcal{R}_1')^\top)^{-1}\|\|\mathcal{R}_2'(\mathcal{R}_2')^\top - \mathcal{R}_1'(\mathcal{R}_1')^\top\|} && (52)\\
&\le q_8(\epsilon, \kappa, A_1, B_1), && (53)
\end{aligned}$$

其中，（52）由引理6得出；并且，由于 $\epsilon < q_1(\kappa, A_1, B_1)$，因此满足 $\|\mathcal{R}_2'(\mathcal{R}_2')^\top - \mathcal{R}_1'(\mathcal{R}_1')^\top\| < \sigma_{\min}(\mathcal{R}_1'(\mathcal{R}_1')^\top)$，此外还有（43）中 q_1 的定义。此外，（53）由（51）及（47）中 q_8 的定义得出。接下来，注意到 $\mathcal{R}_2'$ 是满秩的，并且 $\|\mathcal{R}_2'(\mathcal{R}_2')^\top - \mathcal{R}_1'(\mathcal{R}_1')^\top\| < \sigma_{\min}(\mathcal{R}_1'(\mathcal{R}_1')^\top)$意味着 $\mathcal{R}_1'(\mathcal{R}_1')^\top$ 是满秩的，因此 $\mathcal{R}_1'$ 也是满秩的，因为它是一个宽矩阵。由于 $\mathcal{R}_1'$、$\mathcal{R}_2'$ 均为满秩宽矩阵，可知$(\mathcal{R}_2')^\dagger = (\mathcal{R}_2')^\top(\mathcal{R}_2'(\mathcal{R}_2')^\top)^{-1}$ 以及$(\mathcal{R}_1')^\dagger = (\mathcal{R}_1')^\top(\mathcal{R}_1'(\mathcal{R}_1')^\top)^{-1}$。因此，我们有

$$\begin{aligned}
&\|(\mathcal{R}_2')^\dagger - (\mathcal{R}_1')^\dagger\| \\
&= \|(\mathcal{R}_2')^\top(\mathcal{R}_2'(\mathcal{R}_2')^\top)^{-1} - (\mathcal{R}_1')^\top(\mathcal{R}_1'(\mathcal{R}_1')^\top)^{-1}\| \\
&\le \|\mathcal{R}_2' - \mathcal{R}_1'\|\|(\mathcal{R}_2'(\mathcal{R}_2')^\top)^{-1} - (\mathcal{R}_1'(\mathcal{R}_1')^\top)^{-1}\| \\
&\quad + \|\mathcal{R}_1'\|\|(\mathcal{R}_2'(\mathcal{R}_2')^\top)^{-1} - (\mathcal{R}_1'(\mathcal{R}_1')^\top)^{-1}\| \\
&\quad + \|(\mathcal{R}_1'(\mathcal{R}_1')^\top)^{-1}\|\|\mathcal{R}_2' - \mathcal{R}_1'\| && (54)\\
&\le q_7(\epsilon, \kappa, A_1, B_1) && (55)
\end{aligned}$$

其中，(54) 由引理5成立，而(55)由(49)、(53)以及(46)中 q_7 的定义得到。回顾(2)中 g 的定义，我们有

$$\begin{aligned}
&\|g(A_2, B_2) - g(A_1, B_1)\| \\
&= \|(\mathcal{R}_2')^\dagger A_2^\kappa - (\mathcal{R}_1')^\dagger A_1^\kappa\| \\
&\le \|(\mathcal{R}_2')^\dagger - (\mathcal{R}_1')^\dagger\|\|A_2^\kappa - A_1^\kappa\| \\
&\quad + \|(\mathcal{R}_1')^\dagger\|\|A_2^\kappa - A_1^\kappa\| + \|A_1^\kappa\|\|(\mathcal{R}_2')^\dagger - (\mathcal{R}_1')^\dagger\| && (56)\\
&\le q_5(\epsilon, \kappa, A_1, B_1) && (57)
\end{aligned}$$

其中，(56)由引理5推出，而(57)源于以下事实：根据引理7并结合(55)以及(44)中 q_5 的定义，$\|A_2^\kappa - A_1^\kappa\| \le q_{10}(\epsilon,\ \kappa,\ A_1)$成立，其中 q_{10}定义于(66)中。

现在，令$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \le \frac{r}{\sigma_{\min}\ g\ A_1\ B_1\quad ((\cdot,\ \cdot))=q_5(\epsilon,\ \kappa,\ A_1,\ B_1)}\}$. 我们的证明将分别考虑 $x \in S$ 和 $x \notin S$ 的情形。

情况 *1*：假设 $x \in S$。那么，

$$\begin{aligned}
&|\operatorname{sat}_r(-g(A_2, B_2)x) - \operatorname{sat}_r(-g(A_1, B_1)x)| \\
&\le \|g(A_2, B_2) - g(A_1, B_1)\|
\end{aligned}$$

$$\times \frac{r}{\sigma_{\min}(g(A_1,B_1)) - q_5(\epsilon,\kappa,A_1,B_1)} \tag{58}$$

$$\leq \frac{rq_5(\epsilon,\kappa,A_1,B_1)}{\sigma_{\min}(g(A_1,B_1)) - q_5(\epsilon,\kappa,A_1,B_1)}, \tag{59}$$

其中，(58)由引理 9和 $x \in S$ 得出，(59)由(57)得出。

情形 2：假设 $x \notin S$。那么， $|g(A_1,B_1)x| \geq \sigma_{\min}(g(A_1,B_1))|x| \geq (\sigma_{\min}(g(A_1,B_1)) - q_5(\epsilon,\kappa,A_1,B_1))|x| \geq r$ 以及$|g(A_2,B_2)x| \geq \sigma_{\min}(g(A_2,B_2))|x| \geq (\sigma_{\min}(g(A_1,B_1)) - q_5(\epsilon,\kappa,A_1,B_1))|x| \geq r$，因此，

$$\begin{aligned}
&|\operatorname{sat}_r(-g(A_2,B_2)x) - \operatorname{sat}_r(-g(A_1,B_1)x)| \\
&\leq r\left|\frac{g(A_2,B_2)x}{|g(A_2,B_2)x|} - \frac{g(A_1,B_1)x}{|g(A_1,B_1)x|}\right| &(60)\\
&\leq r\frac{2\|g(A_2,B_2) - g(A_1,B_1)\|}{\sigma_{\min}(g(A_1,B_1)) - \|g(A_2,B_2) - g(A_1,B_1)\|} &(61)\\
&\leq \frac{2rq_5(\epsilon,\kappa,A_1,B_1)}{\sigma_{\min}(g(A_1,B_1)) - q_5(\epsilon,\kappa,A_1,B_1)}, &(62)
\end{aligned}$$

其中，(60) 由引理 9 得出，(61) 根据引理 10 以及以下事实得出： $\epsilon < q_1(\kappa,\ A_1,\ B_1)$ 蕴含 $\|g(A_2,\ B_2) - g(A_1,\ B_1)\| < \sigma_{\min}(g(A_1,\ B_1))$，这是由 (43) 中 q_1 的定义得到的；而 (62) 则由 (59) 成立。

结论由此得出。 □

引理5. 考虑矩阵 $M_1, M_2 \in \mathbb{R}^{d_1\times d_2}$ 和 $N_1, N_2 \in \mathbb{R}^{d_2\times d_3}$。以下结果成立：

$$\begin{aligned}
\|M_2N_2 - M_1N_1\| &\leq \|M_2 - M_1\|\|N_2 - N_1\| \\
&\quad + \|M_1\|\|N_2 - N_1\| + \|N_1\|\|M_2 - M_1\|.
\end{aligned}$$

证明. 根据基本矩阵代数以及 $\|\cdot\|$ 的性质，可得：

$$\begin{aligned}
&\|M_2N_2 - M_1N_1\| \\
&= \|M_2N_2 - M_2N_1 + M_2N_1 - M_1N_1\| \\
&= \|M_2(N_2 - N_1) + (M_2 - M_1)N_1\| \\
&= \|(M_2 - M_1 + M_1)(N_2 - N_1) + (M_2 - M_1)N_1\| \\
&= \|(M_2 - M_1)(N_2 - N_1) + M_1(N_2 - N_1) \\
&\quad + (M_2 - M_1)N_1\| \\
&\leq \|M_2 - M_1\|\|N_2 - N_1\| + \|M_1\|\|N_2 - N_1\| \\
&\quad + \|M_2 - M_1\|\|N_1\|.
\end{aligned}$$

□

引理6. 考虑非奇异矩阵 $M_1 \in \mathbb{R}^{d_1\times d_1}$。固定 $\delta \in [0, \sigma_{min}(M_1))$。有

$$\|M_2^{-1} - M_1^{-1}\| \leq \frac{\|M_1^{-1}\|^2\delta}{1 - \|M_1^{-1}\|\delta}$$

¯对所有 $M_2 \in \mathcal{B}_\delta(M_1)$。

¯证明. 假设 $M_2 \in \mathcal{B}_\delta(M_1)$，且 M_2 是非奇异的。于是，根据基本矩阵代数以及 $\|\cdot\|$ 的性质，可得：

$$\begin{aligned}
&\|M_2^{-1} - M_1^{-1}\| \\
&= \|M_2^{-1}(M_1 - M_2)M_1^{-1}\| \\
&= \|(M_2^{-1} - M_1^{-1} + M_1^{-1})(M_1 - M_2)M_1^{-1}\| \\
&\leq \|M_2^{-1} - M_1^{-1} + M_1^{-1}\|\|M_1 - M_2\|\|M_1^{-1}\| \\
&\leq \|M_2^{-1} - M_1^{-1}\|\|M_1^{-1}\|\|M_1 - M_2\| \\
&\quad + \|M_1^{-1}\|^2\|M_1 - M_2\| \\
&\leq \|M_2^{-1} - M_1^{-1}\|\|M_1^{-1}\|\delta + \|M_1^{-1}\|^2\delta. &(63)
\end{aligned}$$

重新整理式 (63)，可得

$$\|M_2^{-1} - M_1^{-1}\| - \|M_2^{-1} - M_1^{-1}\|\|M_1^{-1}\|\delta \leq \|M_1^{-1}\|^2\delta$$

$$\|M_2^{-1} - M_1^{-1}\|(1 - \|M_1^{-1}\|\delta) \le \|M_1^{-1}\|^2\delta$$
$$\|M_2^{-1} - M_1^{-1}\| \le \frac{\|M_1^{-1}\|^2\delta}{1 - \|M_1^{-1}\|\delta}, \tag{64}$$

其中，式 (64) 成立，因为 $\delta \in [0, \sigma_{\min}(M_1))$. □

引理7. 考虑 $M_1 \in \mathbb{R}^{d\times d}$。我们有

$$\|M_2^i - M_1^i\| \le q_{10}(\delta, i, M_1) \tag{65}$$

对所有 $\delta > 0$、$i \in \mathbb{N}$ 和 $M_2 \in \mathcal{B}_\delta(M_1)$，其中

$$q_{10}(\delta, i, M_1) := \begin{cases} \delta, & i = 1 \\ q_{10}(\delta, i-1, M_1)\delta + \|M_1^{i-1}\|\delta \\ \quad +\|M_1\|q_{10}(\delta, i-1, M_1), & i \ge 2. \end{cases} \tag{66}$$

证明. 假设 δ，且 $M_2 \in \bar{\mathcal{B}}_\delta(M_1)$。我们采用数学归纳法证明。当 $i = 1$ 时，由于 $M_2 \in \mathcal{B}_\delta(M_1)$，我们有 $\|M_2^i - M_1^i\| \le \delta$。现在，假设命题 (65) 对 $i = n \in \mathbb{N}$ 成立。我们有

$$\begin{aligned} &\|M_2^{n+1} - M_1^{n+1}\| \\ &\le \|M_2^n - M_1^n\|\|M_2 - M_1\| + \|M_1^n\|\|M_2 - M_1\| \\ &\quad + \|M_1\|\|M_2^n - M_1^n\| \\ &\le \|M_2^n - M_1^n\|\delta + \|M_1^n\|\delta + \|M_1\|\|M_2^n - M_1^n\| \\ &\le q_{10}(\delta, n, M_1)\delta + \|M_1^n\|\delta + \|M_1\|q_{10}(\delta, n, M_1), \end{aligned} \tag{67}$$

其中，(67) 是由 (65) 成立这一假设推出的。结论得证。 □

引理8. 考虑 $M_1 \in \mathbb{R}^{d_1\times d_1}$，且 $N_1 \in \mathbb{R}^{d_1\times d_2}$。我们有

$$\|M_2^i N_2 - M_1^i N_1\| \le q_9(\delta, i, M_1, N_1)$$

对所有 $\delta > 0$、$i \in \mathbb{N}_0$、$M_2 \in \mathcal{B}_\delta(M_1)$，以及 $N_2 \in \mathcal{B}_\delta(N_1)$，

其中

$$q_9(\delta, i, M_1, N_1) := \begin{cases} \delta, & i = 0 \\ q_{10}(\delta, i, M_1)\delta + \|M_1^i\|\delta \\ \quad +\|N_1\|q_{10}(\delta, i, M_1), & i \ge 1 \end{cases} \tag{68}$$

证明。 假设 $\delta > 0$, $M_2 \in \mathcal{B}_\delta(M_1)$ 且 $N_2 \in \mathcal{B}_\delta(N_1)$。我们分别考虑 $i = 0$ 和 $i \in \mathbb{N}$的情形。

情形 *1*: 假设 $i = 0$。则 $\|M_2^i N_2 - M_1^i N_1\| = \|N_2 - N_1\| \le \delta$成立。

情形 *2*: 假设 $i \in \mathbb{N}$。则,

$$\begin{aligned} &\|M_2^i N_2 - M_1^i N_1\| \\ &\le \|M_2^i - M_1^i\|\|N_2 - N_1\| + \|M_1^i\|\|N_2 - N_1\| \\ &\quad + \|N_1\|\|M_2^i - M_1^i\| \qquad (69) \\ &\le \|M_2^i - M_1^i\|\delta + \|M_1^i\|\delta + \|N_1\|\|M_2^i - M_1^i\| \\ &\le q_{10}(\delta, i, M_1)\delta + \|M_1^i\|\delta + \|N_1\|q_{10}(\delta, i, M_1), \qquad (70) \end{aligned}$$

其中，(69) 根据引理5成立，(70) 根据引理7成立。结论得证。 □

引理 9。 考虑 $r > 0$。则,

$$\begin{aligned} &|\operatorname{sat}_r(x_2) - \operatorname{sat}_r(x_1)| \\ &\le \begin{cases} r|\frac{x_2}{|x_2|} - \frac{x_1}{|x_1|}|, & |x_1| > r,\ |x_2| > r \\ |x_2 - x_1|, & x_1 \in \mathbb{R}^d,\ x_2 \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \end{aligned}$$

对所有 $x_1 \in \mathbb{R}^d$ 和 $x_2 \in \mathbb{R}^2$ 均成立。

证明。 考虑 $x_1 \in \mathbb{R}^d$ 且 $x_2 \in \mathbb{R}^d$ 的情况。于是,

$$\begin{aligned} &|\operatorname{sat}_r(x_2) - \operatorname{sat}_r(x_1)| \\ &= |\operatorname{proj}_{\bar{\mathcal{B}}_r(0)}(x_2) - \operatorname{proj}_{\bar{\mathcal{B}}_r(0)}(x_1)| \end{aligned} \tag{71}$$

$$\leq |x_2 - x_1|, \tag{72}$$

其中，(71) 根据以下事实成立：对于所有 $x \in \mathbb{R}^d$，$\mathrm{sat}_r(x) = \mathrm{proj}_{\bar{\mathcal{B}}_r(0)}(x)$；(72) 则根据投影到闭凸集上的非扩张性质成立（参见 [18,命题 B.11]）。

现在，考虑 $|x_1| > r$ 和 $|x_2| > r$ 的情形。我们有

$$\begin{aligned} |\operatorname{sat}_r(x_2) - \operatorname{sat}_r(x_1)| &= |r\frac{x_2}{|x_2|} - r\frac{x_1}{|x_1|}| \\ &= r|\frac{x_2}{|x_2|} - \frac{x_1}{|x_1|}|. \end{aligned}$$

结论由此得出。 □

引理 10. 考虑 $M_1 \in \mathbb{R}^{d_1 \times d_2}$，其中 $\sigma_{min}(M_1) > 0$。那么，

$$\Big|\frac{M_2 x}{|M_2 x|} - \frac{M_1 x}{|M_1 x|}\Big| \leq \frac{2\delta}{\sigma_{min}(M_1) - \delta}$$

对所有 $\delta \in [0, \sigma_{min}(M_1))$、$M_2 \in \bar{\mathcal{B}}_\delta(M_1)$ 和 $x \in \mathbb{R}^{d_2}$，均成立。

证明。假设 $\delta \in [0, \sigma_{\min}(M_1))$、$M_2 \in \bar{\mathcal{B}}_\delta(M_1)$ 和 $x \in \mathbb{R}^{d_2}$。利用基本矩阵代数以及 $\|\cdot\|$ 的性质，我们有 ve

$$\begin{aligned} &\Big|\frac{M_2 x}{|M_2 x|} - \frac{M_1 x}{|M_1 x|}\Big| \\ &= \Big|\frac{(M_1 + M_2 - M_1)x}{|(M_1 + M_2 - M_1)x|} - \frac{M_1 x}{|M_1 x|}\Big| \\ &= \Big|\frac{M_1 x}{|(M_1 + M_2 - M_1)x|} \\ &\quad + \frac{(M_2 - M_1)x}{|(M_1 + M_2 - M_1)x|} - \frac{M_1 x}{|M_1 x|}\Big| \\ &\leq \Big|\frac{(M_2 - M_1)x}{|(M_1 + M_2 - M_1)x|}\Big| \\ &\quad + \Big|\frac{M_1 x}{|(M_1 + M_2 - M_1)x|} - \frac{M_1 x}{|M_1 x|}\Big| \end{aligned} \tag{73}$$

接下来，注意以下结论成立：

$$\begin{aligned} \sigma_{\min}(M_1 + M_2 - M_1) &\geq \min_{|x|=1} ||M_1 x| - |(M_2 - M_1)x|| \\ &\geq \sigma_{\min}(M_1) - \|M_2 - M_1\|. \end{aligned} \tag{74}$$

式 (73) 的左端可按如下方式取上界：

$$\begin{aligned} \Big|\frac{(M_2 - M_1)x}{|(M_1 + M_2 - M_1)x|}\Big| &\leq \frac{\|M_2 - M_1\||x|}{\sigma_{\min}(M_1 + M_2 - M_1)|x|} \\ &= \frac{\|M_2 - M_1\|}{\sigma_{\min}(M_1 + M_2 - M_1)} \\ &\leq \frac{\|M_2 - M_1\|}{\sigma_{\min}(M_1) - \|M_2 - M_1\|} \qquad (75) \\ &\leq \frac{\delta}{\sigma_{\min}(M_1) - \delta}, \qquad (76) \end{aligned}$$

其中，式 (75) 由式 (74) 得出。

(73) 的右端有如下上界：

$$\begin{aligned} &\Big|\frac{M_1 x}{|(M_1 + M_2 - M_1)x|} - \frac{M_1 x}{|M_1 x|}\Big| \\ &= \Big|M_1 x\Big(\frac{1}{|(M_1 + M_2 - M_1)x|} - \frac{1}{|M_1 x|}\Big)\Big| \\ &\leq |M_1 x|\Big|\frac{1}{|(M_1 + M_2 - M_1)x|} - \frac{1}{|M_1 x|}\Big| \\ &= |M_1 x|\Big|\frac{|M_1 x| - |(M_1 + M_2 - M_1)x|}{|M_1 x||(M_1 + M_2 - M_1)x|}\Big| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big| \frac{|M_1 x| - |(M_1 + M_2 - M_1)x|}{|(M_1 + M_2 - M_1)x|} \Big| \\
&\leq \frac{||M_1 x| - |(M_1 + M_2 - M_1)x||}{\sigma_{\min}(M_1 + M_2 - M_1)|x|} \\
&\leq \frac{|M_1 x - (M_1 + M_2 - M_1)x|}{\sigma_{\min}(M_1 + M_2 - M_1)|x|} \\
&= \frac{|(M_1 - M_2)x|}{\sigma_{\min}(M_1 + M_2 - M_1)|x|} \\
&\leq \frac{\delta}{\sigma_{\min}(M_1) - \delta}
\end{aligned} \tag{77}
$$

其中，(77) 由 (76) 得出。

将 (73) 与 (76) 和 (77) 结合，即可得出结论。 □

B. 估计误差界辅助结果的证明

命题 *2* 的证明。 根据式 (2) 中控制策略的定义，我们有

$$
\mathbb{E}[|U_t|^2] \leq \mathbb{E}[(D + |V_t|)^2] = 2(D^2 + \operatorname{tr}(\Sigma_V)) \tag{78}
$$

对所有 $t \in \mathbb{N}_0$，其中式 (78) 由算术平均-均方根不等式得出。

此外，对所有 $t \in \mathbb{N}_0$，我们有

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}[|X_t|^2] \\
&= \mathbb{E}[|A^t x_0 + \sum_{s=0}^{t-1} A^s B U_{t-1-s} + \sum_{s=0}^{t-1} A^s W_{t-1-s}|^2] && (79) \\
&\leq \mathbb{E}[(\|A\|^t |x_0| + \sum_{s=0}^{t-1} \|A\|^s \|B\| |U_{t-1-s}| \\
&\quad + \sum_{s=0}^{t-1} \|A\|^s |W_{t-1-s}|)^2] \\
&\leq \mathbb{E}[(|x_0| + t\|B\|D + \|B\| \sum_{s=0}^{t-1} |V_{t-1-s}| \\
&\quad + \sum_{s=0}^{t-1} |W_{t-1-s}|)^2] && (80) \\
&\leq \mathbb{E}[4(|x_0|^2 + t^2 \|B\|^2 D^2 \\
&\quad + t\|B\|^2 \sum_{s=0}^{t-1} |V_{t-1-s}|^2 + t \sum_{s=0}^{t-1} |W_{t-1-s}|^2)] && (81) \\
&= 4(|x_0|^2 + t^2(\|B\|^2(D^2 + \operatorname{tr}(\Sigma_V)) + \operatorname{tr}(\Sigma_W))), && (82)
\end{aligned}
$$

其中，(79) 由反复应用 (1) 得出，(80) 由 (78) 和假设2 得出，(81) 由算术平均-均方根不等式得出，(82) 则由期望的线性性以及对所有 $s \in \mathbb{N}_0$ 的 $\mathbb{E}[|V_s|^2] = \operatorname{tr}(\Sigma_V)$、 $\mathbb{E}[|W_s|^2] = \operatorname{tr}(\Sigma_W)$ 得出。接下来，对于所有 $T \in \mathbb{N}$，我们有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{t=1}^{T} \operatorname{tr}\left(\mathbb{E}[Z_t Z_t^\top]\right) = \sum_{t=1}^{T} \mathbb{E}[|X_{t-1}|^2] + \sum_{t=1}^{T} \mathbb{E}[|U_{t-1}|^2] \\
&\leq 4 \sum_{t=1}^{T} (|x_0|^2 + (t-1)^2(\|B\|^2(D^2 + \operatorname{tr}(\Sigma_V)) + \operatorname{tr}(\Sigma_W))) \\
&\quad + 2 \sum_{t=1}^{T} (D^2 + \operatorname{tr}(\Sigma_V)) && (83) \\
&\leq 4T(|x_0|^2 + T^2(\|B\|^2(D^2 + \operatorname{tr}(\Sigma_V)) + \operatorname{tr}(\Sigma_W))) \\
&\quad + 2T(D^2 + \operatorname{tr}(\Sigma_V)) \\
&= T(4|x_0|^2 + 2(D^2 + \operatorname{tr}(\Sigma_V))
\end{aligned}
$$

$$+ 4(\|B\|^2(D^2 + \mathrm{tr}\,(\Sigma_V)) + \mathrm{tr}\,(\Sigma_W))T^2), \tag{84}$$

wher其中，(83) 由 (78) 和 (82) 得出，(84) 则由对所有 $t \in \{1, \ldots, T\}$ 的 $t - 1 \leq T$ 得出。

现在，我们推导出关于 $\sum_{t=1}^{T} Z_t Z_t^\top$ 的高概率半正定上界。为方便起见，令 $C_1(T,\ x_0) = (4|x_0|^2 + 2(D^2 + \mathrm{tr}\,(\Sigma_V)) + 4(\|B\|^2(D^2 + \mathrm{tr}\,(\Sigma_V)) + \mathrm{tr}\,(\Sigma_W))T^2 + \lambda_{\max}(\Gamma_{\mathrm{sb}}))$。对于所有 $T \in \mathbb{N}$ 和 $\delta' \in (0,\ 1)$，

$$\begin{aligned}
&P(\sum_{t=1}^{T} Z_t Z_t^\top \not\preceq \frac{T}{\delta'} C_1(T, x_0) I) \\
&= P((TC_1(T, x_0))^{-1} \lambda_{\max}(\sum_{t=1}^{T} Z_t Z_t^\top) \geq \frac{1}{\delta'}) && (85) \\
&\leq \delta' \mathbb{E}[(TC_1(T, x_0))^{-1} \lambda_{\max}(\sum_{t=1}^{T} Z_t Z_t^\top)] && (86) \\
&\leq \delta' (TC_1(T, x_0))^{-1} \mathbb{E}[\mathrm{tr}(\sum_{t=1}^{T} Z_t Z_t^\top]) && (87) \\
&= \delta' (TC_1(T, x_0))^{-1} \sum_{t=1}^{T} \mathrm{tr}(\mathbb{E}[Z_t Z_t^\top]) \leq \delta', && (88)
\end{aligned}$$

其中，(85) 根据 $\preceq$ 的定义得出，(86) 根据马尔可夫不等式得出，(87) 成立是因为 $\lambda_{\max}(\cdot) \leq \mathrm{tr}(\cdot)$，而 (88) 根据 (84) 得出。

为简化证明余下部分的记号，令 $p(T, \delta', x_0) = 90\sqrt{\lambda_{\min}(\Sigma_W)}\, p((T\lambda_{\min}(\Gamma_{\mathrm{sb}}))^{-1}(\overline{n+(n+m)}) \ln(10/p) + \ln \det((1/\delta')C_1(T, x_0)\Gamma^{-1}\mathrm{sb}) + \ln(1/\delta')))^{1/2}$。现在，我们通过满足命题 1 的前提，推导由 (3) 得到的最小二乘参数估计的有限样本估计误差界。具体而言，设 $\delta' \in (0, 1)$ 且 $T \in \mathbb{N}$，并考虑协变量 - 响应序列 $(Z_t, X_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$。那么，对于 $t \leq T$，(a) $X_t = \theta_* Z_t + W_{t-1}$ 成立，其中 $W_{t-1} \mid \mathcal{F}_{t-1}$ 是零均值的，且 $\lambda_{\max}(\Sigma_W)$-次高斯，其中 $\mathcal{F}_t$ 表示由 $W_0, \ldots, W_{t-1}, Z_1, \ldots, Z_t$ 生成的 σ-代数。此外，(b) ($Z_1 \ \ldots \ Z_T$ k Γ_{sb} p 5 P $\sum_{t=1}^{T} Z_t Z_t^\top \not\preceq$, ,) 满足假设 $\frac{T}{\delta'} C_1\ T\ x_0\ I \leq \delta'$ 88 1 $\delta' \in 0, 1$ $T \in \mathbb{N}$ 中的 (, ,)-BMSB 条件。最后，(c) ((,)) 根据 ( ) 成立。因此，由命题 可知，对于所有 ( ) 和 ，若 $T \geq \frac{10k}{p^2}(\ln(1/\delta') + 2(n+m)\ln(10/p) + \ln \det(\frac{1}{\delta'} C_1(T, x_0)\Gamma^{-1}\mathrm{sb}))$，则有 $-$

$$P(\|\hat{\theta}_T - \theta_*\|_2 > p(T, \delta', x_0)) \leq 3\delta'. \tag{89}$$

设 $C_2 = 1/(-1 + \pi^2/6)$。我们得出

$$\begin{aligned}
&P(\|\hat{\theta}_T - \theta_*\|_2 \leq e(T, \delta, x_0) \text{ for all } T \geq T_0(\delta, x_0)) \\
&= P(\bigcap_{T \geq T_0(\delta, x_0)} \{\|\hat{\theta}_T - \theta_*\|_2 \leq e(T, \delta, x_0)\}) \\
&= 1 - P(\bigcup_{T \geq T_0(\delta, x_0)} \{\|\hat{\theta}_T - \theta_*\|_2 > p(T, \frac{C_2\delta}{3(T+1)^2}, x_0)\}) && (90) \\
&\geq 1 - \sum_{T \geq T_0(\delta, x_0)} P(\{\|\hat{\theta}_T - \theta_*\|_2 > p(T, \frac{C_2\delta}{3(T+1)^2}, x_0)\}) && (91) \\
&\geq 1 - C_2 \sum_{T \geq T_0(\delta, x_0)} \frac{\delta}{(T+1)^2} && (92) \\
&\geq 1 - C_2 \sum_{T \geq 1} \frac{\delta}{(T+1)^2} = 1 - \delta, && (93)
\end{aligned}$$

其中，(90) 成立是因为 $e(T,\ \delta,\ x_0) = p(T,\ C_2\delta/(3(T+1)^2)$，(91) 由并集界推出，(92) 由 (89) 推出，而 (93) 成立是因为 $T_0(\delta,\ x_0) \geq 1$，且 $\sum_{T \geq 1} 1/(T+1)^2 = -1 + \pi^2/6 = 1/C_2$。 □

C. 稳定性界相关结果的证明

$\bar{\ }\ \bar{\ }\ \bar{\ }$引理 2 的证明。设 $\mathcal{R} = \mathcal{R}_\kappa(A,\ B)$，且 $K = \{z \in \mathbb{R}^n \mid |g(A,\ B)z| \leq D\}$。假设 $A \in \mathcal{B}_\epsilon(A)$ 和 $B \in \mathcal{B}_\epsilon(B)$，并考虑相应的随机序列 $(Z^{\bar{A},\ \bar{B}})_{\tau \in \mathbb{N}_0}$。由于 $(Z^{\bar{A},\ \bar{B}})_{\tau \in \mathbb{N}_0}$ 是一个马尔可夫过程，我们的证明将通过满足命题 3 中的条件来进行，其中 $V(\cdot) \leftarrow e^{|\cdot|}$, K, $\lambda \leftarrow \lambda(\epsilon)$ 和 $\beta \leftarrow \beta(\epsilon)$。

首先，注意以下结论成立：

$$\mathbb{E}[e^{|Z_1^{\bar{A},\bar{B}}|} \mid Z_0 = z]$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}[e^{|A^\kappa Z_0^{\bar{A},\bar{B}} + \mathcal{R}_* \mathrm{sat}_D(-\bar{\mathcal{R}}^\dagger \bar{A}^\kappa Z_0^{\bar{A},\bar{B}}) + \tilde{V}_0 + \tilde{W}_0|} \mid Z_0^{\bar{A},\bar{B}} = z] \\
&= \mathbb{E}[e^{|A^\kappa z + \mathcal{R}_* \mathrm{sat}_D(-\bar{\mathcal{R}}^\dagger \bar{A}^\kappa z) + \tilde{V}_0 + \tilde{W}_0|}] \\
&\le e^{|A^\kappa z + \mathcal{R}_* \mathrm{sat}_D(-\bar{\mathcal{R}}^\dagger \bar{A}^\kappa z)| + M_{\bar{V}} + M_{\bar{W}}} \\
&\le e^{|\mathcal{R}_* \mathrm{sat}_D(-\bar{\mathcal{R}}^\dagger \bar{A}^\kappa z) - \mathcal{R}_* \mathrm{sat}_D(-\mathcal{R}_*^\dagger A^\kappa z)| + M_{\bar{V}} + M_{\bar{W}}} \\
&\quad \times e^{|A^\kappa z + \mathcal{R}_* \mathrm{sat}_D(-\mathcal{R}_*^\dagger A^\kappa z)|}.
\end{aligned} \tag{94}
$$

下面证明　　命题 3 中的 (8) 得到满足。假设 $z \notin K$。由于满足 $|\mathcal{R}_*^\dagger A^\kappa z| > D$，我们有　　e

$$
\begin{aligned}
&|A^\kappa z + \mathcal{R}_* \mathrm{sat}_D(-\mathcal{R}_*^\dagger A^\kappa z)| - |z| \\
&= |A^\kappa z - \frac{\mathcal{R}_* \mathcal{R}_*^\dagger A^\kappa z D}{|\mathcal{R}_*^\dagger A^\kappa z|}| - |z| \qquad (95) \\
&= |\frac{A^\kappa z}{|A^\kappa z|}(|A^\kappa z| - \frac{D|A^\kappa z|}{|\mathcal{R}_*^\dagger A^\kappa z|})| - |z| \\
&= |A^\kappa z| - \frac{D|A^\kappa z|}{|R^\dagger A^\kappa z|} - |z| \\
&\le \|A^\kappa\||z| - \frac{D|A^\kappa z|}{|R^\dagger A^\kappa z|} - |z| \\
&\le -\frac{D|A^\kappa z|}{|\mathcal{R}_*^\dagger A^\kappa z|} \le -\frac{D}{\|\mathcal{R}_*^\dagger\|} \qquad (96)
\end{aligned}
$$

其中，(95) 根据 $\mathrm{sat}_D(\cdot)$ 的定义得到，(96) 根据假设2 以及 $\|\mathcal{R}_*^\dagger\| \ge \frac{|\mathcal{R}_*^\dagger A^\kappa z|}{|A^\kappa z|}$ 这一事实得到。接下来，我们有

$$
\begin{aligned}
&|\mathcal{R}_*(\mathrm{sat}_D(-\bar{\mathcal{R}}^\dagger \bar{A}^\kappa z) - \mathrm{sat}_D(-\mathcal{R}_*^\dagger A^\kappa z))| \\
&\le \|\mathcal{R}_*\||\mathrm{sat}_D(-\bar{\mathcal{R}}^\dagger \bar{A}^\kappa z) - \mathrm{sat}_D(-\mathcal{R}_*^\dagger A^\kappa z)| \\
&\le \|\mathcal{R}_*\| M_q D \epsilon \qquad (97)
\end{aligned}
$$

其中，(97) 根据引理 1 得到。结合 (96)、(97) 和 (94)，可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathbb{E}[e^{|Z_1^{\bar{A},\bar{B}}|} \mid Z_0 = z]}{e^{|z|}} \\
&\le e^{|A^\kappa z + \mathcal{R}_* \mathrm{sat}_D(-\mathcal{R}_*^\dagger A^\kappa z)| - |z|} \\
&\quad \times e^{|\mathcal{R}_*(\mathrm{sat}_D(-\bar{\mathcal{R}}^\dagger \bar{A}^\kappa z) - \mathrm{sat}_D(-\mathcal{R}_*^\dagger A^\kappa z))| + M_{\bar{V}} + M_{\bar{W}}} \\
&\le e^{-\frac{D}{\|\mathcal{R}_*^\dagger\|} + \|\mathcal{R}_*\| M_q D \epsilon + M_{\bar{V}} + M_{\bar{W}}} = \lambda(\epsilon),
\end{aligned}
$$

从而对所有 $z \notin K$ 均满足 (8)。

Ne接下来，我们在命题 3 中证明 (9) 得到满足。对于所有 $z \in K$, $|g(A,B)z| \le D$ 均成立，因此

$$
\begin{aligned}
&|A^\kappa z + \mathcal{R}_* \mathrm{sat}_D(-\mathcal{R}_*^\dagger A^\kappa z)| \\
&= |A^\kappa z - \mathcal{R}_* \mathcal{R}_*^\dagger A^\kappa z| = 0. \qquad (98)
\end{aligned}
$$

结合 (98)、(97) 和 (94)，可得

$$
\mathbb{E}[e^{|Z_1^{\bar{A},\bar{B}}|} \mid Z_0 = z] \le e^{\|R\| M_q D \epsilon + M_{\bar{V}} + M_{\bar{W}}} = \beta(\epsilon),
$$

对所有 $z \in K$ 均成立，因此满足 (9)。

由命题 3 即可得出结论。 □

引理 *3* 的证明。我们首先推导 $T_0(\delta, x_0)$ 的上界。令 $K_1 = 10k/p^2$, $f_1(\delta) = 3(-1 + \pi^2/6)/\delta$,$K_2 = 2(n+m)\ln(10/p)$, $f_2(x_0, T) = 4|x_0|^2 + 2(D^2 + \mathrm{tr}(\Sigma_V)) + 4(\|B\|^2(D^2 + \mathrm{tr}(\Sigma_V)) + \mathrm{tr}(\Sigma_W))T^2 + \lambda_{\max}(\Gamma_{\mathrm{sb}})$，使得

$$
T_0(\delta, x_0) = \min\{T_0' \in \mathbb{N} \mid T \ge K_1(\ln(f_1(\delta)(T+1)^2) + K_2 + \ln(\det(f_1(\delta)(T+1)^2 f_2(x_0, T)\Gamma^{-1}{}_{\mathrm{sb}}))) \text{ 对所有 } T \ge T_0'\} \text{ 均成立}
$$

根据 (7) 中 T_0 的定义成立。接下来，令 $f_3(x_0) = 4|x_0|^2 + 2(D^2 + \mathrm{tr}(\Sigma_V)) + 4(\|B\|^2(D^2 + \mathrm{tr}(\Sigma_V)) + \mathrm{tr}(\Sigma_W)) + \lambda_{\max}(\Gamma_{\mathrm{sb}})$。那么，

$$
\ln(\det(f_1(\delta)(T+1)^2 f_2(x_0, T)\Gamma_{\mathrm{sb}}^{-1}))
$$

$$\leq \ln((f_1(\delta)(T+1)^2 f_2(x_0,T))^{n+m}\det(\Gamma_{\text{sb}}^{-1}))$$
$$\leq \ln((f_1(\delta)(T+1)^4 f_3(x_0))^{n+m}\det(\Gamma_{\text{sb}}^{-1})) \tag{99}$$
$$= (n+m)\ln(f_1(\delta)f_3(x_0)) + 4(n+m)\ln(T+1) + \ln(\det(\Gamma_{\text{sb}}^{-1})) \tag{100}$$

成立，其中 (99) 由 $f_2(x_0,T) \leq f_3(x_0)(T+1)^2$ 得出。现在我们对其进行界定

$$K_1(\ln(f_1(\delta)(T+1)^2) + K_2 + \ln(\det(f_1(\delta)(T+1)^2 f_2(x_0,T)\Gamma_{\text{sb}}^{-1})))$$
$$\leq K_1(\ln(f_1(\delta)(T+1)^2) + K_2 + (n+m)\ln(f_1(\delta)f_3(x_0)) + 4(n+m)\ln(T+1) + \ln(\det(\Gamma_{\text{sb}}^{-1}))) \tag{101}$$
$$= K_1(4(n+m)+2)\ln(T+1) + K_1((n+m+1)\ln(f_1(\delta)) + K_2 + (n+m)\ln(f_3(x_0)) + \ln(\det(\Gamma_{\text{sb}}^{-1})))$$
$$= K_3\ln(T+1) + f_4(\delta,x_0) \tag{102}$$

其中，(101) 由 (100) 得出，而 (102) 通过令 $K_3 = K_1(4(n+m)+2)$，以及 $f_4(\delta, x_0) = K_1((n+m+1)\ln(f_1(\delta)) + K_2 + (n+m)\ln(f_3(x_0)) + \ln(\det(\Gamma^{-1}{}_{\text{sb}})))$ 得到。接下来，注意到

$$K_3\ln(T+1) \leq (1/2)T + K_3\ln(2K_3) - K_3 + 1/2 \tag{103}$$

成立，其中右侧是 $K_3\ln(T+1)$ 的切线，其梯度为 $1/2$。由此可知，若

$$T \geq 2K_3\ln(2K_3) - 2K_3 + 1 + 2f_4(\delta,x_0) \tag{104}$$

then

$$T \geq (1/2)T + K_3\ln(2K_3) - K_3 + 1/2 + f_4(\delta,x_0) \tag{105}$$
$$\geq K_1(\ln(f_1(\delta)(T+1)^2) + K_2 + \ln(\det(f_1(\delta)(T+1)^2 f_2(x_0,T)\Gamma_{\text{sb}}^{-1}))) \tag{106}$$

其中，(105) 通过重新整理 (104) 得出，而 (106) 由 (103) 和 (102) 得出。因此，我们得出

$$T_0(\delta,x_0) \leq 2K_3\ln(2K_3) - 2K_3 + 1 + f_4(\delta,x_0). \tag{107}$$

接下来，我们推导满足对所有 $t \geq T$ 均有 $e(t, \delta, x_0) \leq \epsilon$ 成立的时间 T 的上界。令 $K_4 = 90\sqrt{\lambda_{\max}(\Sigma_W)/p}$，并令 $K_5 = n + (n+m)\ln(10/p)$，使得

$$e(T,\delta,x_0) = K_4\sqrt{\frac{K_5 + \ln(\det(f_1(\delta)(T+1)^2 f_2(x_0,T)\Gamma_{\text{sb}}^{-1})) + \ln(f_1(\delta)(T+1)^2)}{T\lambda_{\min}(\Gamma_{\text{sb}})}}$$

成立。随后，不等式 $e(T, \delta, x_0) \leq \epsilon$ 可重新整理如下：

$$\epsilon \geq e(T,\delta,x_0)$$
$$\epsilon \geq K_4\sqrt{\frac{K_5 + \ln(\det(f_1(\delta)(T+1)^2 f_2(x_0,T)\Gamma_{\text{sb}}^{-1})) + \ln(f_1(\delta)(T+1)^2)}{T\lambda_{\min}(\Gamma_{\text{sb}})}}$$
$$\frac{\epsilon^2\lambda_{\min}(\Gamma_{\text{sb}})}{K_4^2}T \geq K_5 + \ln(\det(f_1(\delta)(T+1)^2 f_2(x_0,T)\Gamma_{\text{sb}}^{-1})) + \ln(f_1(\delta)(T+1)^2)$$
$$T \geq \frac{K_4^2}{\epsilon^2\lambda_{\min}(\Gamma_{\text{sb}})}(K_5 + \ln(\det(f_1(\delta)(T+1)^2 f_2(x_0,T)\Gamma_{\text{sb}}^{-1})) + \ln(f_1(\delta)(T+1)^2)).$$

聚焦于该不等式的右端，并对（102）应用类似步骤，可得

$$\frac{K_4^2}{\epsilon^2\lambda_{\min}(\Gamma_{\text{sb}})}(K_5 + \ln(\det(f_1(\delta)(T+1)^2 f_2(x_0,T)\Gamma_{\text{sb}}^{-1})) + \ln(f_1(\delta)(T+1)^2))$$
$$\leq \frac{K_4^2}{\epsilon^2\lambda_{\min}(\Gamma_{\text{sb}})}(K_5 + \ln(f_1(\delta)) + 2\ln(T+1) + (n+m)\ln(f_1(\delta)f_3(x_0)) + 4(n+m)\ln(T+1) + \ln(\det(\Gamma_{\text{sb}}^{-1})))$$
$$= \frac{K_4^2}{\epsilon^2\lambda_{\min}(\Gamma_{\text{sb}})}(K_5 + (n+m+1)\ln(f_1(\delta)) + (n+m)\ln(f_3(x_0)) + (4(n+m)+2)\ln(T+1) + \ln(\det(\Gamma_{\text{sb}}^{-1})))$$
$$= K_6\ln(T+1) + f_5(x_0,\delta), \tag{108}$$

其中 $f_5(x_0, \delta) \underline{\quad}_{\Gamma_{\text{sb}}} K_5 + (n+m+1) f_1(\delta) + (n+m) f_3(x_0) + \Gamma_{\text{sb}} 4(n+m)\ln(T+1) = \frac{K_4^2}{\epsilon^2\lambda_{\min}}$ $(m+2)(\ln(\ln(\det(\Gamma^{-1}{}_{\text{sb}})))$，以及 $K_6 = \frac{K_4^2}{\epsilon^2\lambda_{\min}}$。接下来，注意到

$$K_6\ln(T+1) \leq (1/2)T + K_6\ln(2K_6) - K_6 + 1/2 \tag{109}$$

成立，其中右侧是 $K_6\ln(T+1)$ 的切线，其梯度为 $1/2$。由此可知，如果

$$T \geq 2K_6\ln(2K_6) - 2K_6 + 1 + 2f_5(x_0,\delta) \tag{110}$$

then

$$T \geq (1/2)T + K_6\ln(2K_6) - K_6 + 1/2 + f_5(x_0,\delta) \tag{111}$$

$$\geq \frac{K_4^2}{\epsilon^2\lambda_{\min}(\Gamma_{\text{sb}})}(K_5 + \ln(\det(f_1(\delta)(T+1)^2 f_2(x_0,T)\Gamma_{\text{sb}}^{-1})) + \ln(f_1(\delta)(T+1)^2)) \tag{112}$$

其中，(111) 是由 (110) 重排得到的，(112) 则由 (109) 和 (108) 得出，这等价于 $e(T,\ \delta,\ x_0) \leq \epsilon$。因此，

$$\min\{T\in\mathbb{N} \mid e(t,\delta,x_0)\leq\epsilon \text{ for all } t\geq T\} \leq 2K_6\ln(2K_6) - 2K_6 + 1 + f_5(x_0,\delta) \tag{113}$$

成立。

结合 (107) 和 (113)：

$$\begin{aligned}
\tau_0'(\epsilon,\delta,x_0) &= \min\{\tau\in\mathbb{N} \mid \kappa\tau \geq T_0(\delta,x_0), e(\kappa i,\delta,x_0)\leq\epsilon \text{ for all } i\geq\tau\} \\
&\leq (1/\kappa)\max(2K_3\ln(2K_3) - 2K_3 + 1 + f_4(\delta,x_0), 2K_6\ln(2K_6) - 2K_6 + 1 + f_5(x_0,\delta)) \\
&\leq (1/\kappa)[\max(2K_3\ln(2K_3) - 2K_3 + 1, 2K_6\ln(2K_6) - 2K_6 + 1) + \max(f_4(x_0,\delta), f_5(x_0,\delta))] \qquad (114)\\
&= (1/\kappa)[L_3 + \max(f_4(x_0,\delta), f_5(x_0,\delta))], \qquad (115)
\end{aligned}$$

其中，(114) 成立是因为 $\max(a+b,\ c+d) \leq \max(a,\ c)+\max(b,\ d)$，而 (115) 是令 $L_3 = \max(2K_3\ln(2K_3) - 2K_3 + 1,\ 2K_6\ln(2K_6) - 2K_6 + 1)$ 后得到的。接下来，我们对 $\max(f_4(x_0,\ \delta),\ f_5(x_0,\ \delta)$ 进行如下界定：

$$\begin{aligned}
&\max(f_4(\delta,x_0), f_5(\delta,x_0)) \\
&= \max(K_1[(n+m+1)[\ln(3(-1+\pi^2/6)) + \ln(1/\delta)] + K_2 + (n+m)\ln(f_3(x_0)) + \ln(\det(\Gamma_{\text{sb}}^{-1}))], \\
&\quad \frac{K_4^2}{\epsilon^2\lambda_{\min}(\Gamma_{\text{sb}})}[K_5 + (n+m+1)(\ln(3(-1+\pi^2/6)) + \ln(1/\delta)) + (n+m)\ln(f_3(x_0)) + \ln(\det(\Gamma_{\text{sb}}^{-1}))]) \\
&\leq \max(K_1, \frac{K_4^2}{\epsilon^2\lambda_{\min}(\Gamma_{\text{sb}})})\big[(n+m+1)\ln(1/\delta) + (n+m+1)\ln(3(-1+\pi^2/6)) + (n+m)\ln(f_3(x_0)) + \max(K_5,K_2)\big] \\
&= L_4(x_0) + L_5\ln(1/\delta), \qquad (116)
\end{aligned}$$

其中，$L_4(x_0) = \max(K_1, \frac{K_4^2}{\epsilon^2\lambda_{\min}(\Gamma_{\text{sb}})}\big[(n+m+1)\ln(3(-1+\pi^2/6)) + (n+m)\ln(f_3(x_0)) + \max(K_5,\ K_2)\big]$，且 $L_5 = \max(K_1, \frac{K_4^2}{\epsilon^2\lambda_{\min}(\Gamma_{\text{sb}})})(n+m+1)$。结合 (115) 和 (116)，我们得出

$$\begin{aligned}
\tau_0'(\epsilon,\delta,x_0) &\leq (1/\kappa)[L_3 + L_4(x_0) + L_5\ln(1/\delta)] \\
&= L_2(x_0) + L_1\ln(1/\delta)
\end{aligned}$$

其中 $L_2(x_0) = (1/\kappa)(L_3 + L_4(x_0))$，且 $L_1 = (1/\kappa)L_5$。 □