arXiv:2304.00586v1 [math.CO] 2 Apr 2023

一个等价于计算带标号顶点上的有向无环图数量的问题

´ ´Zsofia
Juhasz

Abstract. 我们提出一种带标号顶点上的有向无环图（DAG）的编码。如果为树的边引入某种定向，该编码便是带标号树的Pr¨ufer编码的推广。因此，我们证明，满足以下性质的子集序列S_1， S_2，...，S_{n-1}，其中 $\{1,2,\ldots,n\}$，且对每个 $1 \leq k \leq n-1$都有 $|\bigcup_{i=1}^{k} S_i| \leq k$，其数量等于 n 个带标号顶点上的有向无环图数量。

1. Introduction引言

有向图 $G = （V， E）$是一个有序对，其中 V是顶点集合， $E \subseteq V \times V$是（有向）边集合。若一个有向图不含有向环，则称其为有向无环图（DAG）。如果图中的每个顶点都被赋予集合 $\{1,\ldots,|V|\}$ 中的一个不同元素，并将其称为该顶点的标签，则称该图的顶点带有标号。

在 [3] R. W. Robinson 证明了以下关于 a_n 带标号顶点为 n的有向无环图数量的递推公式:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} 2^{k(n-k)} a_{n-k}. \tag{1}$$

E. W. Weisstein 猜想 [4]， B. D. McKay 证明 [1]： 所有特征值均为正实数的 n 阶 n (0,1) 矩阵的数量，等于 n 个带标号顶点的有向无环图数量。

我们提出另一个自然问题，即计算某类集合序列的数量，并证明这等价于枚举带标号顶点集 n 上的有向无环图。我们提出一种有向无环图的编码方法：按照某种顺序排列各顶点的出邻集，构成一个

序列。我们证明，这建立了带标号顶点集 n 上所有有向无环图的集合与满足以下性质的 $\{1,2,\ldots,n\}$ 子集序列集合之间的一一对应：$|\bigcup_{i=1}^{k} S_i| \leq k$ 对每个 $1 \leq k \leq n-1$ 都成立。因此，后者序列的数量等于带标号顶点集 n 上有向无环图的数量。

2. Encoding DAGs by sequences of out-neighbor sets

对于有向图 $G=(V,E)$ 中的任意顶点 u 和 v，如果 $(u,v) \in E$，则称 v 为 u 的出邻居。

定义 2.1。设 $G=(V,E)$ 是顶点集 $V=\{1,2,\ldots,n\}$ 上的一个有向无环图。递归地定义 G 的最小源序列 u_1、u_2、……、u_n 如下：令 u_1 为 G 中标签最小的源点。对于每个 $2 \leq i \leq n$：令 u_i 为从 G 中删除顶点 u_1、……、u_{i-1} 后所得图中标签最小的源点。对于每个 $1 \leq i \leq n$，以 S_{n-i} 表示 u_i 在 G 中的出邻居集合。我们称 S_1、S_2、……、S_{n-1} 为 G 的编码。

注意，由于 $S_0=\emptyset$ 始终成立，因此无需将 S_0 包含在编码中。

引理 2.1. 设 $G=(V,E)$ 是顶点集为 $V=\{1,2,\ldots,n\}$ 的有向无环图，其最小源序列为 $u_1,u_2,\ldots,u_n$，编码为 $S_1,S_2,\ldots,S_{n-1}$。设 $S_0=\emptyset$。那么 u_1 是 $V\setminus(\bigcup_{i=0}^{n-1} S_i)$ 中标签最小的顶点，并且对于每个 $2 \leq j \leq n$：u_j 是 $V\setminus(\{u_1,\ldots,u_{j-1}\}\cup(\bigcup_{i=0}^{n-j} S_i))$ 中标签最小的顶点。

证明. 根据最小源序列和编码的定义，$V\setminus(\bigcup_{i=0}^{n-1} S_i)$ 是 G 中源点的集合；对于每个 $2 \leq j \leq n$，$V\setminus(\{u_1,\ldots,u_{j-1}\}\cup(\bigcup_{i=0}^{n-j} S_i))$ 恰好是从 G 中删除顶点 $u_1,\ldots,u_{j-1}$ 后所得图中的源点集合。因此结论成立。□

定理 2.1. S_1，...，S_{n-1} 是 $V=\{1,2,\ldots,n\}$ 的子集序列，当且仅当它满足以下性质时，才是一个定义在 n 个带标号顶点上的有向无环图的编码：

$$|\bigcup_{i=1}^{k} S_i| \leq k \text{ for every } 1 \leq k \leq n-1. \tag{2}$$

证明. $\Rightarrow$ 注意，根据最小源序列的定义，对于每个 $1 \leq i \leq n-1$: $S_i \subseteq \{u_{n-i+1}, \ldots, u_n\}$。因此，对于任意 $1 \leq k \leq n-1$: $|\bigcup_{i=1}^{k} S_i| \leq k$。

$\Leftarrow$ 设 $S_1, \ldots, S_{n-1}$ 是满足性质 2 的子集序列，且令 $S_0 = \emptyset$。用 w_1 表示$V \setminus \bigcup_{i=0}^{n-1} S_i$中标签最小的顶点。对于每个 $2 \leq j \leq n$，令 w_j 为$V \setminus (\{w_1, \ldots, w_{j-1}\} \cup (\bigcup_{i=0}^{n-j} S_i))$中标签最小的顶点。由性质 2 $V \setminus (\{w_1, \ldots, w_{j-1}\} \cup (\bigcup_{i=0}^{n-j} S_i)) \neq \emptyset$，因此序列 $w_1, \ldots, w_n$ 定义良好，且恰好包含 V 中的每个元素一次。令 $G = (V, E)$表示有向图，其中对于每个 $1 \leq i \leq n$， w_i 的出邻居集合恰为 S_{n-i}。我们证明 G 是有向无环图，且 $S_1, \ldots, S_{n-1}$ 是 G的编码。注意，对于 E中的任意边 (w_p, w_q)， $p < q$。事实上，若 $(w_p, w_q) \in E$，则根据 G的定义， $w_q \in S_{n-p}$；并且由于按定义， w_1 是 $V \setminus (\bigcup_{i=0}^{n-1} S_i)$中标签最小的顶点，而对于 $1 < q \leq n$ w_q，$V \setminus (\{w_1, \ldots, w_{q-1}\} \cup (\bigcup_{i=0}^{n-q} S_i))$中标签最小的顶点是 $1 < q \leq n$ w_q，故 $w_q \notin \bigcup_{i=0}^{n-q} S_i$，因此$n-p > n-q$，所以 $q > p$。因此， G 是有向无环图。令 $u_1, \ldots, u_n$ 为 G中各顶点的编码顺序。我们通过归纳证明，对于每个 $1 \leq i \leq n$: $u_i = w_i$。根据 G的构造， $V \setminus (\bigcup_{i=0}^{n-1} S_i)$中标签最小的顶点恰好是 G 中标签最小的源点，因此 $v_1 = w_1$。现在假设对于某个 $1 \leq j \leq n-1$, $u_i = w_i$ 对每个 $1 \leq i \leq j$ 都成立。那么， w_{j+1} 是 $V \setminus (\{u_1, \ldots, u_j\} \cup (\bigcup_{i=0}^{n-j-1} S_i))$中标签最小的顶点，其中 $\bigcup_{i=0}^{n-j-1} S_i$ 恰好是 G中至少有一个 $u_{j+1}, \ldots, u_n$作为其出邻居的那些顶点的集合。因此， w_{j+1}是从 G中删除顶点 $u_1, \ldots, u_j$后所得图中标签最小的源点，所以 $u_{j+1} = w_{j+1}$。因此 $u_i = w_i$，于是对于每个 $1 \leq i \leq n$， S_i 就是 u_{n-i} 的出邻居集合。□

定理 2.2. 满足性质 2 的子集序列 $S_1, \ldots, S_{n-1}$（其中各子集取自 $\{1, 2, \ldots, n\}$）是顶点集 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 上唯一一个有向无环图的编码。

证明. 根据定理 2.1，若 $S_1, \ldots, S_{n-1}$ 是满足性质 2 的 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 的子集序列，则它是某个有向无环图 $G = (V, E)$ 的编码，其中 $V = \{1, 2, \ldots, n\}$。假设它同时也是有向无环图 $G' = (V, E')$ 的编码。那么根据引理 2.1， G 和 G' 的最小源序列相同。因此，根据编码的定义，V 中每个顶点的出邻居集合在 G 和 G' 中都相同。因此 $G = G'$。□

推论 2.2。由 n 个带标号顶点构成的有向无环图数量，等于满足性质 2 的 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 子集序列 S_1、 $\ldots S_{n-1}$ 的数量。

根据推论 2.2 和 Robinson 递归公式 1：

推论 2.3. 对于满足以下性质的子集序列 a_n、 S_1、……、 S_{n-1} 的数量：对于每个 $1 \leq k \leq n-1$， $|\bigcup_{i=1}^{k} S_i| \leq k$：

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} 2^{k(n-k)} a_{n-k}.$$

备注. 定义 2.1 中引入的带标号顶点上的有向无环图编码，是对带标号顶点上的树的 Pr¨ufer 编码的一种推广，具体来说：给定一棵以 n 个顶点标号的树 $T =$ （V， E），记 a_1、……、 a_{n-2} 为 T 的 Pr¨ufer 序列；对于每个$1 \leq i \leq n-2$，令 v_i 表示在创建 Pr¨ufer 编码的第 i 步中从 T 移除的顶点。记 v_{n-1} 和 v_n 为树中第 $n-2$ 步之后剩下的最后两个顶点，其中 v_{n-1} 是标签较小的顶点。记 T' 为通过对 T 的边作如下定向而得到的有向无环图：对于每个 $1 \leq i < j \leq n$，若v_i 和 v_j 在 T 中由边 e 相连，则分别令 v_i 为该边的起点， v_j 为其终点。于是，根据定义 2.1， T' 的编码为序列 $\{a_1\}$、……、 $\{a_{n-2}\}$、 $\{v_n\}$。

References

1. McKay, B. D., Royle, G. F., Wanless, I. M., Oggier, F. E., Sloane, N. J. A., Wilf, H.（2004），有向无环图与 (0,1) 矩阵的特征值，《整数序列杂志》7：33 2. Pr¨ufer, H.（1918）。置换定理的新证明。《数学与物理档案》27：742–744。3. Robinson, R. W.（1973），带标签有向无环图的计数，载于 Harary, F.（编），《图论新方向》，学术出版社，第239–273页。4. Weisstein, Eric W.，Weisstein 猜想，MathWorld