arXiv:2304.00587v1 [math.AP] 2 Apr 2023

非齐次流体动力学方程中非保守乘积解的适定性与刻画

Rinaldo M. Colombo[1] Graziano Guerra[2] Yannick Holle[3]

2023年4月4日

摘要

考虑通量显式依赖于空间变量的平衡律。在跳跃间断处，建模考量可能要求某些量存在守恒缺陷，从而导致非保守乘积。下文根据间断处的跳跃条件推导光滑情形下的演化规律。此外，所得框架具有适定性，且解具有唯一刻画。这些结果适用于例如宽度和深度变化的运河中的水流，以及几何形状变化的管道中的无黏欧拉方程。

关键词：运河和管道中的流体流动；平衡律中的非保守乘积；带测度源项的非齐次平衡律。

AMS 学科分类：35Q35；76N10；35L65。

1 引言

宽度平滑变化且河床高程平滑变化的运河中的水流由以下平衡律描述

$$\begin{cases} \partial_t a + \partial_x q = 0 \\ \partial_t q + \partial_x \left(\dfrac{q^2}{a} + \dfrac{1}{2}\, g\, \dfrac{a^2}{\sigma} \right) = \dfrac{1}{2}\, g\, \dfrac{a^2}{\sigma^2}\, \partial_x \sigma - g\, a\, \partial_x b\,, \end{cases} \tag{1.1}$$

参见 [19, 公式 (1.1)]。其中， g 表示重力， t 表示时间， x表示沿运河方向的纵向坐标， $a = a(t, x)$ 表示湿润横截面积， $q = q(t, x)$ 表示水流， $\sigma = \sigma(x)$ 表示运河宽度， $b = b(x)$ 表示河底高度。

[1]意大利国家高等数学研究所布雷西亚分部及布雷西亚大学信息工程系，via Branze, 38, 25123 布雷西亚，意大利。电子邮箱：rinaldo.colombo@unibs.it。ORCID：0000-0003-0459-585X。[2]米兰比可卡大学数学与应用系，via R. Cozzi, 55, 20126 米兰，意大利。电子邮箱：graziano.guerra@unimib.it。ORCID：0000-0003-2615-2750。[3]亚琛工业大学数学研究所，Templergraben 55, 52062 亚琛，德国。电子邮箱：holle@eddy.rwth-aachen.de。ORCID：0000-0002-7841-8525。

河道宽度 σ 或河床高程 b 中的间断，使得无法将标准定理应用于 (1.1)。事实上，间断会导致通量出现间断，并使源项中出现非保守乘积。众所周知，后者缺乏唯一的定义方式。关于非保守乘积，可参见 [12, 18]。

在本文中，我们构建了一个框架，使（1.1）有意义且适定，并且只要求 σ 和 b 具有有界变差。

当 σ 和 b 为分段常数，且跳跃点为 $\bar{x}_1$、.....、$\bar{x}_N$时，该方程属于非齐次守恒律系统 (1.1)

$$\partial_t u + \partial_x f\left(\zeta(x), u\right) = 0 \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N\},$$

并配备适当的条件

$$\Psi\left(\zeta(\bar{x}_i+), u(t, \bar{x}_i+), \zeta(\bar{x}_i-), u(t, \bar{x}_i-)\right) = 0 \quad \text{for a.e. } t > 0 \text{ and } i = 1, \dots, N \tag{1.2}$$

其中 ζ 与（1.9）中的相同。

根据以下假设、 [8, 引理41] 以及对 [8, 引理42], 的直接推广，该连接条件可改写为

$$f\left(\zeta(\bar{x}+), u(t, \bar{x}+)\right) - f\left(\zeta(\bar{x}-), u(t, \bar{x}-)\right) = \Xi\Big(\zeta(\bar{x}+), \zeta(\bar{x}-), u(t, \bar{x}-)\Big) \quad \text{for a.e. } t > 0 \tag{1.3}$$

其中 $\bar{x}$ 是任意一个跳跃点， Ξ 表示 u 在 $\bar{x}$处的守恒缺陷。

我们证明，选择 (1.3) 实际上确定了下文 (1.5) 中的源项，它同时刻画了 ζ 中的光滑变化和跳跃点。对于 (1.1)，这意味着需要证明，谨慎选择 Ξ 后，可以将 (1.1) 推广到 σ 和 b 属于有界变差的情形。

更确切地说，当 $\zeta \in$ 属于 BV($\mathbb{R}; \mathbb{R}^p$)，且给定 ζ 的一个分段常数逼近 ζ^h，其有限个跳跃点位于 $\bar{x} \in \mathcal{I}(\zeta^h)$ 时，我们得到如下带测度值源项的平衡律

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(\zeta^h, u) = \displaystyle\sum_{\bar{x} \in \mathcal{I}(\zeta^h)} \Xi\left(\zeta^h(\bar{x}+), \zeta^h(\bar{x}-), u(\cdot, \bar{x}-)\right) \delta_{\bar{x}} \\ u(0, x) = u_o(x), \end{cases} \tag{1.4}$$

其中， $\delta_{\bar{x}}$ 表示位于 $\bar{x}$ 处的狄拉克测度。

在下文建立的一般非特征情形下，我们证明，当 ζ^h 以适当的强意义收敛到 ζ 时，(1.4) 的解收敛到下式的解

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(\zeta, u) = \displaystyle\sum_{\bar{x} \in \mathcal{I}(\zeta)} \Xi\left(\zeta(\bar{x}+), \zeta(\bar{x}-), u(\cdot, \bar{x}-)\right) \delta_{\bar{x}} + D_v^+ \Xi(\zeta, \zeta, u) \, \|\mu\| \\ u(0, x) = u_o(x)\,. \end{cases} \tag{1.5}$$

上文奇异源项中的各项定义如下。由于 $\zeta \in$ BV($\mathbb{R}; \mathbb{R}^p$)，左右极限 $\zeta(\bar{x}+)$ 和 $\zeta(\bar{x}-)$ 是良定义的，并且分布导数 $D\zeta$ 可以分解为离散部分和非离散部分，后者可能包含康托部分：

$$D\zeta = \sum_{\bar{x} \in \mathcal{I}(\zeta)} \left(\zeta(\bar{x}+) - \zeta(\bar{x}-)\right) \delta_{\bar{x}} + v \, \|\mu\|\,, \tag{1.6}$$

其中，函数 v 是 Borel可测的，范数为 1； μ 是 $D\zeta$ 的非原子部分。在（1.5）中，我们还使用了（单侧）方向导数

$$D_v^+\Xi(z,z,u)=\lim_{t\to 0+}\frac{\Xi(z+t\,v,z,u)-\Xi(z,z,u)}{t}\,. \tag{1.7}$$

在 [8], 中得到了一个初步结果，其中证明了方程 (1.4) 的解序列收敛到方程 (1.5) 的一个解。本文通过考虑空间依赖通量扩展了 [8] 中的框架，证明 (1.4) 生成一个利普希茨半群，记为 S^h，并证明 S^h 收敛到一个半群，其轨道是 (1.5) 的解。此外，我们按照 [4]的思路，通过积分不等式对 (1.5) 的解给出完整刻画。

本文结果涵盖了具有空间依赖通量和如下类型非守恒源项的平衡律情形

$$\partial_t u+\partial_x f(\zeta,u)=D_\zeta G(\zeta,u)\,D\zeta \tag{1.8}$$

参见 [8, § 3.4]。令 $p=2$、 $\mathcal{Z}=]0、\ +\infty[\times\mathbb{R}$ 以及

$$\zeta(x)=\begin{bmatrix}1/\sigma(x)\\ b(x)\end{bmatrix}\quad\text{and}\quad G\big(z,(a,q)\big)=\begin{bmatrix}0\\ -\frac{1}{2}\,g\,a^2\,z_1-g\,a\,z_2\end{bmatrix} \tag{1.9}$$

可知 (1.1) 符合 (1.8):

$$\begin{cases}\partial_t a+\partial_x q=0\\ \partial_t q+\partial_x\left(\dfrac{q^2}{a}+\dfrac{1}{2}\,g\,\zeta_1\,a^2\right)=-\dfrac{1}{2}\,g\,a^2\,\partial_x\zeta_1-g\,a\,\partial_x\zeta_2\end{cases} \tag{1.10}$$

因此，我们的主要结果——定理 2.3——适用，例如取

$$\Xi(z^+,z^-,u^-)=G(z^+,u^-)-G(z^-,u^-)\,.$$

正如 [8, 第 3], 节所指出的， Ξ 的不同选取可能会在 ζ 的间断处产生不同的解，但在 ζ 光滑的区域给出相同的解。

此外， [8, 第 3] 节中讨论的所有应用都属于定理 2.3 的适用范围。它们包括经典的 p-系统，即变截面或带弯道管道中的等熵气体动力学，另见 [17], ；以及管道中的完整欧拉可压缩系统，另见 [15]。

因此，除了在 [8], 中证明了解的存在性外，我们还确保了解对初始数据的 Lipschitz 连续依赖。此外，我们通过定理 2.3 中的积分关系 (i) 和 (ii) 对解进行刻画。这些结果所需的源项假设严格弱于 [1]中的假设。此外，本文的构造还涵盖了显式依赖于空间变量的通量。

2 假设与主定理

这里，对于实数 x， $|x|$ 表示其绝对值；对于向量 v， $\|v\|$ 表示其欧几里得范数；而 $\|\mu\|$ 表示测度 μ的全变差。 $\mathbb{R}^n$ 中以 u为中心、半径为 δ的开球记为 $B(u;\delta)$，其闭包为 $B(u;\delta)$。我们还使用以下记号表示左右极限和点处的差：

$$F(x-) = \lim_{\xi \to x^-} F(\xi)\,, \quad F(x+) = \lim_{\xi \to x^+} F(\xi) \quad \text{and} \quad \Delta F(x) = F(x+) - F(x-)\,.$$

全文中，我们选取有界变差函数的左连续代表。

我们研究的问题由流 f 以及函数 Ξ 和 ζ定义。这里详细说明关键假设，其中 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的开凸子集，而 $\mathcal{Z}$ 是 $\mathbb{R}^p$的凸开子集：

(f.1) $f \in \mathrm{C}^4(\mathcal{Z} \times \Omega; \mathbb{R}^n)$;

(f.2) 对每个 $z \in \mathcal{Z}$和 $u \in \Omega$，雅可比矩阵 $D_u f(z,u)$ 都是严格双曲的；

(f.3) eac 特征场对于所有 $z \in$ 都是真正非线性的或线性退化的 $\mathcal{Z}$.

在后一假设中，我们采用 Lax 的经典定义 [16], 另见 [11, § 7.5]。

根据 (f.1) 和 (f.2)，我们知道，适当缩小 Ω 后， $D_u f(z,u)$ 的特征值 $\lambda_1(z,u), \dots, \lambda_n(z,u)$ 关于 z 光滑依赖，并且可以对它们进行编号，使得对于所有 $u \in \Omega$ 和 $z \in \mathcal{Z}$,

$$\lambda_1(z,u) < \lambda_2(z,u) < \cdots < \lambda_n(z,u)\,.$$

因此，我们要求通常的非共振条件

(f.4) 存在 $i_o \in \{1, \dots, n-1\}$，使得对于所有 $z \in \mathcal{Z}$ 和所有 $u \in \Omega$， $\lambda_{i_o}(z,u) < 0 < \lambda_{i_o+1}(z,u)$。

请注意，特征速度全为正或全为负的两种情形都比较简单。

对于函数 Ξ （见（1.3）），为改写由 Ψ 导出的耦合条件，我们要求：

（Ξ.1） Ξ: $\mathcal{Z} \times \mathcal{Z} \to \overline{\mathrm{C}^1}$（$\Omega$; $\mathbb{R}^n$）是利普希茨连续映射，且 Ξ: $\mathcal{Z} \times \mathcal{Z} \to \mathrm{C}^2$（$\overline{\Omega}$; $\mathbb{R}^n$）；

（Ξ.2）$\sup_{z^+,\ z^- \in \mathcal{Z}} \|\Xi\ (z^+,\ z^-,\ \cdot)\ \|_{\mathrm{C}^2\ (\Omega;\ \mathbb{R})} < +\infty$;

（Ξ.3）对于每个 $z \in \mathcal{Z}$ 和 $u \in \Omega$， $\Xi\ (z,\ z,\ u)\ = 0$；

（Ξ.4）存在一个非减映射 σ: $[0, \bar{t}[\to \mathbb{R}$，满足 $\lim_{t \to 0} \sigma\ (t)\ = 0$，使得对于所有（$z$， v， u）$\in \mathcal{Z} \times B\ (0;\ 1)\ \times \Omega$

$$\left\| \Xi(z + t\,v, z, u) - D_v^+ \Xi(z, z, u)\, t \right\| \leq \sigma(t)\, t$$

并且映射 $(z, v, u) \to D_v^+ \Xi(z, z, u)$ 是利普希茨连续的。

对于后一个条件，请回顾 Dini右导数的定义（1.7）。我们要求如此低的正则性，即仅要求 Dini导数存在，而不要求可微性，这是由带角管道这一例子所启发的，其中 Ξ 取决于 $\left\|z^{+}-z^{-}\right\|$，见 [8,第 3 节1]。

在问题 (1.5) 中，我们要求 $\zeta \in \mathrm{BV}(\mathbb{R};\mathcal{Z})$。全文中，假设映射 ζ 左连续，ζ 中跳跃间断点的集合记为 $\mathcal{I}(\zeta)$，且 $\mathcal{I}(\zeta)\subset\mathbb{R}$。

现在我们精确定义 (1.5) 的解。

定义 2.1. 设 $u_o \in \mathrm{L}^1_{\mathbf{loc}}(\mathbb{R};\,\mathbb{R}^n)$。若映射 $u \in \mathrm{C}^0([0,+\infty[;\,\mathrm{L}^1_{\mathbf{loc}}(\mathbb{R};\,\mathbb{R}^n))$ 满足 $u(t) \in \mathrm{BV}(\mathbb{R};\mathbb{R}^n)$，且对所有 $t\in\mathbb{R}_+$ 均左连续，则称其为 (1.5) 的一个解；若对所有测试函数$\varphi \in \mathrm{C}^1_c(]0,+\infty[\times\mathbb{R};\,\mathbb{R})$,

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}}\Big(u(t,x)\,\partial_t\varphi(t,x)+f\left(\zeta(x),u(t,x)\right)\,\partial_x\varphi(t,x)\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
=\;&\sum_{\bar{x}\in\mathcal{I}(\zeta)}\int_0^{+\infty}\Xi\left(\zeta(\bar{x}+),\zeta(\bar{x}),u(t,\bar{x})\right)\varphi(t,\bar{x})\,\mathrm{d}t\\
&+\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}}D^{+}_{v(x)}\Xi\left(\zeta(x),\zeta(x),u(t,x)\right)\varphi(t,x)\;\mathrm{d}\|\mu\|\,(x)\;\mathrm{d}t
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

其中 v, μ 与 (1.6) 中相同，且此外 $u(0)=u_o$。

在 (2.1) 的最后一个积分中，被积函数关于 (t,x) 是 Borel可测的，因为例如根据上述关于 u 的假设，对于每个 (t,x)，我们有 $\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$

$$
u(t,x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x}u(t,y)\;\mathrm{d}y\;.
$$

此外，在 $\mathbb{R}^2$ 上的 Borel 可测性确保了关于乘积测度的可测性。

注意，(2.1) 第一行中被积函数的值不受其在 $\mathbb{R}^2$ 中 Lebesgue测度为 0 的集合上的变化影响，而后一个被积函数则是关于乘积测度 $\|\mu\|\otimes\mathrm{d}t$ 积分的。然而，(2.1) 仍然是有意义的，因为 u 是逐点规定的，即在每一点都给出规定，而不仅仅是在几乎处处意义下规定。

众所周知，上述定义并不能保证唯一性。然而，下面的定理 2.3 确实保证了唯一性，其依据是将 [4] 中针对齐次守恒律系统最初给出的精确刻画推广到 (1.5) 的情形。

定义 2.2. 广义黎曼问题是指如下的柯西问题 (1.5)，其中ζ，且初始数据 u_o 如下：

$$
\zeta(x)=z^{-}\,\chi_{]-\infty,0[}(x)+z^{+}\,\chi_{]0,+\infty[}(x)\qquad and\qquad u_o(x)=u^{\ell}\,\chi_{]-\infty,0[}(x)+u^{r}\,\chi_{]0,+\infty[}(x)\,. \tag{2.2}
$$

对于 $z\in\mathcal{Z}$和 $u\in\Omega$，将 $\sigma_i\to H_i(z,\sigma_i)(u)$ 称为相对于 $f(z,\cdot)$、从 u 出发的第 i 族 Lax曲线，参见 *[5, §5.2]*或 *[11, §9.3]*。对于 $\boldsymbol{\sigma}\equiv(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$，下文采用以下记号

$$
H(z,\boldsymbol{\sigma})=H_n(z,\sigma_n)\circ H_{n-1}(z,\sigma_{n-1})\circ\cdots\circ H_2(z,\sigma_2)\circ H_1(z,\sigma_1)\,(u)\,. \tag{2.3}
$$

递归地引入状态 $w_0,\dots,w_{n+1}\in\Omega$，其中 $w_0=u^\ell$, $w_{n+1}=u^r$ 以及

$$\begin{cases} w_{i+1}=H_{i+1}(z^+,\sigma_{i+1})(w_i) & \text{if } i=0,\dots,i_o-1,\\ f(z^+,w_{i_o+1})-f(z^-,w_{i_o})=\Xi(z^+,z^-,w_{i_o}) & \\ w_{i+1}=H_i(z^-,\sigma_i)(w_i) & \text{if } i=i_o+1,\dots,n\,. \end{cases} \tag{2.4}$$

因此，我们将沿着 $x=0$ 拼接（标准）黎曼问题的 Lax解，定义为广义黎曼问题 (1.5)–(2.2) 的可容许解

$$\begin{cases} \partial_t u+\partial_x f(z^-,u)=0\\ u(0,x)=u^\ell\chi_{]-\infty,0[}(x)+w_{i_o}\chi_{]0,+\infty[}(x), \end{cases} \qquad \begin{cases} \partial_t u+\partial_x f(z^+,u)=0\\ u(0,x)=w_{i_o+1}\chi_{]-\infty,0[}(x)+u^r\chi_{]0,+\infty[}(x). \end{cases}$$

下文中，我们将由 z 的跳跃引起的定常跳跃间断称为零波。

下文的引理 3.3 保证，按照上述定义，广义黎曼问题 (1.5)–(2.2) 是适定的。

为刻画 (1.5) 的解，我们现在将 [4], 中引入的一般定义推广到当前情形；另见 [5, 第 9] 章。取 $\zeta\in$ BV($\mathbb{R};\mathcal{Z}$)，并设函数 $u=u(t,x)$ 满足对所有 t， $u(t)\in$BV($\mathbb{R};\Omega$)，且取一点 $(\tau,\xi)\in[0,+\infty[\,\times\mathbb{R}$。定义函数 $U^\sharp(u;\tau,\xi)$ 为广义黎曼问题的解

$$\begin{cases} \partial_t U+\partial_x f\left(\zeta(\xi),U\right)=\Xi\left(\zeta(\xi+),\zeta(\xi),u(t,\xi-)\right)\,\delta_\xi\\ U(0,x)=\begin{cases} u(\tau,\xi-) & x<\xi\,;\\ u(\tau,\xi+) & x>\xi\,. \end{cases} \end{cases} \tag{2.5}$$

注意，如果 $\xi\notin\mathcal{I}(\zeta)$，那么由于 (Ξ.2) 以及上述 $U^\sharp(u;\tau,\xi)$ 的定义，(2.5) 中的右端项为零，并且其退化为 [4, 第 9] 章中与齐次流 $u\to f\left(\zeta(\xi)\,u\right)$ 相关的经典定义。

我们将函数 $U^\flat_{(u;\tau,\xi)}$ 定义为以下具有常系数和测度值源项的线性双曲问题的解

$$\begin{cases} \partial_t U+A\,\partial_x U=g\\ U(0,x)=u(\tau,x) \end{cases} \tag{2.6}$$

其中 $A=D_uf\left(\zeta(\xi)\,u(\tau,\xi)\right)$，并且对于 $\mathbb{R}$ 的任意博雷尔子集 E，

$$\begin{aligned} g(E) \;=\; & \sum_{\bar x\in\mathcal{I}(\zeta)}\Big(\Xi\left(\zeta(\bar x+),\zeta(\bar x),u(\tau,\xi)\right)-f\left(\zeta(\bar x+),u(\tau,\xi)\right)+f\left(\zeta(\bar x),u(\tau,\xi)\right)\Big)\,\delta_{\bar x}(E)\\ & +\int_E\Big(D^+_{v(x)}\Xi\left(\zeta(x),\zeta(x),u(\tau,\xi)\right)-D_zf\left(\zeta(x),u(\tau,\xi)\right)\,v(x)\Big)\,\mathrm{d}\|\mu\|(x)\,. \end{aligned} \tag{2.7}$$

其中我们采用了与 (1.6) 和 (1.7) 中相同的记号。

现在可以陈述本文的主要结果了。

定理 2.3. 设 f 满足 (f.1)–(f.4)， Ξ 满足 (Ξ.1)–(Ξ.4)。固定 $\bar{z} \in \mathcal{Z}$, $\bar{u} \in$Ω。那么，存在正的 δ L $\zeta \in$ $\mathbb{R}$ $\mathcal{Z}$ $\zeta < \delta$ $\|\zeta\ x\ - \bar{z}\| <$，使得对于任意满足 TV ( ) 且 δ $\mathcal{D}^{\zeta} \subseteq \bar{u} +\ ^1\mathbb{R}$ u $\bar{u} +\ ^1\mathbb{R}$ ( ) 的 BV(;)，都存在一个定义域 L (; Ω)，其中包含 L (; Ω) 中所有满足 TV (u) $< \delta$ 的函数，并存在一个半群 S^{ζ}: $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{D}^{\zeta} \to \mathcal{D}^{\zeta}$，使得

1. 对所有 $u_o \in \mathcal{D}^{\zeta}$，轨道 $t \to S^{\zeta}_t u_o$ 按照定义 2.1 的意义满足方程 (1.5)。

2. S^{ζ} 是 $\mathbf{L}^1$–利普希茨连续的，即对于所有 u_o、u^1_o、$u^2_o \in \mathcal{D}^{\zeta}$ 以及所有 t、t_1、$t_2 \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} \left\| S^{\zeta}_t u^1_o - S^{\zeta}_t u^2_o \right\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^n)} &\leq L \left\| u^1_o - u^2_o \right\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^n)}; \\ \left\| S^{\zeta}_{t_1} u_o - S^{\zeta}_{t_2} u_o \right\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^n)} &\leq L \left| t_1 - t_2 \right|. \end{aligned}$$

3. 如果 $\zeta \in$ PC($\mathbb{R}$; $\mathcal{Z}$) 且 $u_o \in$ PC($\mathbb{R}$; Ω)，那么当 t 充分小时，映射 (t, x) →($S^{\zeta}_t u_o$)(x) 与按照定义 (2.2) 的意义，将可容许解拼接到 u_o 和 ζ 的跳跃点处的结果相一致，从而得到广义黎曼问题的解。

此外，设 λ 是（特征速度的模）的一个上界，并定义 $u(t, x)$ =($S^{\zeta}_t u_o$)(x)。那么，对于每个 (τ, ξ) $\in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$,

(i)

$$\lim_{\vartheta \to 0} \frac{1}{\vartheta} \int_{\xi - \vartheta\hat{\lambda}}^{\xi + \vartheta\hat{\lambda}} \left| u(\tau + \vartheta, x) - U^{\sharp}_{(u;\tau,\xi)}(\vartheta, x) \right| \mathrm{d}x = 0 .$$

(ii) 存在一个常数 C，使得对于每个 a、$b \in \mathbb{R}$ （满足 $a < \xi < b$），以及每个 $\hat{}\vartheta \in]0$，都有 ($b - a$)/(2λ)[,

$$\frac{1}{\vartheta} \int_{a + \vartheta\hat{\lambda}}^{b - \vartheta\hat{\lambda}} \left| u(\tau + \vartheta, x) - U^{\flat}_{(u;\tau,\xi)}(\vartheta, x) \right| \mathrm{d}x \leq C \left[\mathrm{TV}\left(u(\tau),]a, b[\right) + \mathrm{TV}\left(\zeta,]a, b[\right) \right]^2 .$$

如果 u: $[0, T] \to \mathcal{D}^{\zeta}$ 是 $\mathbf{L}^1$–利普希茨连续的，并且对几乎所有时间 τ 以及所有 $\xi \in \mathbb{R}$ 都满足 (i) 和 (ii)，那么 $t \to u(t, \cdot)$ 与半群 S^{ζ} 的一条轨道重合。

注意，每当 ζ 是分段常数时，上述性质 1.、2. 和 3. 唯一刻画了半群 S^{ζ}，参见引理 3.14。

3 证明

下文中， $\mathcal{O}$(1) 表示一个仅依赖于 f、Ξ 及 $\bar{u}$ 的某个邻域的常数。我们用 λ 表示特征速度（模）的一个上界。

3.1 预备结果

首先，我们回顾映射 Ξ 的一个 Lipschitz型估计，这一估计将在全文中发挥作用。

引理 3.1（[8, 引理4.3]）。设 $W \subset \mathbb{R}^m$ 非空、开、有界且凸。设φ: $\mathcal{Z} \times \mathcal{Z} \to \mathbf{C}^1(\overline{W}; \mathbb{R}^n)$为利普希茨连续，并且对任意 $z \in \mathcal{Z}$和 $w \in W$，均有 $\varphi(z, z, w) = 0$。那么，

$$\begin{aligned} \left\| \varphi(z^+, z^-, w) \right\| &\leq \mathcal{O}(1) \left\| z^+ - z^- \right\| \\ \left\| \varphi(z^+, z^-, w_2) - \varphi(z^+, z^-, w_1) \right\| &\leq \mathcal{O}(1) \left\| z^+ - z^- \right\| \left\| w_2 - w_1 \right\|. \end{aligned} \tag{3.1}$$

证明。由于 $\varphi(z^-,z^-,w)=0$，我们有$\left\|\varphi(z^+,z^-,w)\right\|=\left\|\varphi(z^+,z^-,w)-\varphi(z^-,z^-,w)\right\|$，且由 φ 关于z 变量的全局 Lipschitz 连续性可得（3.1）中的第一个不等式。

注意到 $D_w\varphi(z^-,z^-,w)=0$。因此，再次利用 φ 的 Lipschitz 连续性 ，

$$\begin{aligned}
&\left\|\varphi(z^+,z^-,w_2)-\varphi(z^+,z^-,w_1)\right\| \\
=\ &\left\|\int_0^1 D_w\varphi\left(z^+,z^-,w_2+\varsigma(w_1-w_2)\right)(w_1-w_2)\,\mathrm{d}\varsigma\right\| \\
=\ &\left\|\int_0^1\left[D_w\varphi\left(z^+,z^-,w_2+\varsigma(w_1-w_2)\right)-D_w\varphi\left(z^-,z^-,w_2+\varsigma(w_1-w_2)\right)\right](w_1-w_2)\,\mathrm{d}\varsigma\right\| \\
\le\ &\mathcal{O}(1)\left\|z^+-z^-\right\|\|w_2-w_1\|.
\end{aligned}$$

□

注意，(Ξ.1) 和 (Ξ.3) 比引理 3.1 中的假设更强，因此 Ξ 满足 (3.1)。

引入一个与广义黎曼问题相关的映射 T。

引理 3.2。设 f 满足 (f.1)–(f.4)，且 Ξ 满足 (Ξ.1)、(Ξ.3)。那么，对于任意 $\bar{z}\in\mathcal{Z}$ 和 $\bar{u}\in\Omega$，存在 $\delta>0$ 以及一个利普希茨映射 $T\colon B(\bar{z};\delta)^2\to\mathsf{C}^2\left(B(\bar{u};\delta);\Omega\right)$，使得

$$\begin{cases}f(z^+,u^+)-f(z^-,u^-)=\Xi(z^+,z^-,u^-)\\ z^+,z^-\in B(\bar{z};\delta)\\ u^+,u^-\in B(\bar{u};\delta)\end{cases}\iff\quad u^+=T(z^+,z^-)(u^-)\,.\tag{3.2}$$

此外，

1. $T(z,z)(u)=u$，且映射 $(z^+,z^-,u)\to T(z^+,z^-)(u)-u$ 满足引理 3.1 的假设。

2. 以下展开式成立：

$$\begin{aligned}
&f(z^+,u^*)-f(z^-,u^*)-\Xi(z^+,z^-,u^*)+D_uf(z^*,u^*)\left(T(z^+,z^-)(u)-u\right)\\
=\ &\mathcal{O}(1)\left\|z^+-z^-\right\|\left(\left\|z^+-z^*\right\|+\left\|z^+-z^-\right\|+\|u-u^*\|\right)
\end{aligned}$$

证明。（此引理将 [8, 引理44] 扩展到了 f 也依赖于 z的情形。）由于 $\bar{u}\in\Omega$，（f.1）和（f.2）保证函数 $u\to f(z,u)$具有局部 C^2 逆函数φ，也就是说，对于 z 充分接近 $\bar{z}$的情形，$\varphi\left(z,f(z,u)\right)=u$。定义

$$T(z^+,z^-)(u^-)=\varphi\left(z^+,f(z^-,u^-)+\Xi(z^+,z^-,u^-)\right).\tag{3.3}$$

T 具有所需的利普希茨正则性，而且

$$T(z,z)(u)=\varphi\left(z,f(z,u)+\Xi(z,z,u)\right)=\varphi\left(z,f(z,u)\right)=u\,.$$

为证明 2.，改写

$$f(z^+,u^*)-f(z^-,u^*)-\Xi(z^+,z^-,u^*)+D_uf(z^*,u^*)\Big(T(z^+,z^-)(u)-u\Big)=\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2+\mathcal{E}_3 \quad (3.4)$$

其中我们使用了 T 的定义，并令

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_1 &= f(z^+,u^*)-f\Big(z^+,T(z^+,z^-)(u^*)\Big)+D_uf(z^+,u^*)\Big(T(z^+,z^-)(u^*)-u^*\Big)\\
\mathcal{E}_2 &= -D_uf(z^+,u^*)\Big(T(z^+,z^-)(u^*)-u^*\Big)+D_uf(z^*,u^*)\Big(T(z^+,z^-)(u^*)-u^*\Big)\\
\mathcal{E}_3 &= -D_uf(z^*,u^*)\Big(T(z^+,z^-)(u^*)-u^*\Big)+D_uf(z^*,u^*)\Big(T(z^+,z^-)(u)-u\Big)
\end{aligned}$$

根据泰勒展开，我们有：

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{E}_1\| &\le \mathcal{O}(1)\Big\|T(z^+,z^-)(u^*)-u^*\Big\|^2\\
&= \mathcal{O}(1)\Big\|z^+-z^-\Big\|^2.
\end{aligned}$$

关于 $\mathcal{E}_2$,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{E}_2\| &= \Big\|D_uf(z^+,u^*)-D_uf(z^*,u^*)\Big\|\,\Big\|T(z^+,z^-)(u^*)-u^*\Big\|\\
&\le \mathcal{O}(1)\Big\|z^+-z^*\Big\|\,\Big\|z^+-z^-\Big\|.
\end{aligned}$$

最后，根据引理 3.1

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{E}_3\| &= \|D_uf(z^*,u^*)\|\,\Big\|\Big(T(z^+,z^-)(u^*)-u^*\Big)-\Big(T(z^+,z^-)(u)-u\Big)\Big\|\\
&\le \mathcal{O}(1)\Big\|z^+-z^-\Big\|\,\|u-u^*\|,
\end{aligned}$$

从而完成证明。 □

因此，我们还证明了广义黎曼问题 (1.5)–(2.2) 的适定性。

引理 3.3. 设 f 满足 (f.1)–(f.4)，且 Ξ 满足 (Ξ.1)。则存在一个正的 δ，使得如果 u_ℓ、$u_r\in\Omega$ 且 z^+、$z^-\in\mathcal{Z}$ 满足

$$\|u_\ell-u_r\|\le\delta\,,\qquad \Big\|z^+-z^-\Big\|\le\delta\,,$$

则，广义黎曼问题 (1.5)–(2.2) 在定义 2.2 的意义下存在唯一解。此外，(2.4) 中的波的大小 (σ_1, ..., σ_n) 和状态 (w_1, ..., w_n) 存在且定义唯一，并且是 z^+、z^-、u_r、u_ℓ 的利普希茨连续函数。

证明。只需利用 (3.2) 重写 (2.4)，以便使用 [1, 引理 3]。 □

下面将用到以下记号：

$$(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = E(z^+, z^-, u_r, u_\ell)\,. \tag{3.5}$$

我们将传播速度为负（$\boldsymbol{\sigma}'$）或正（$\boldsymbol{\sigma}''$）的波区分如下：

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\sigma}' = (\sigma_1, \dots, \sigma_{i_o}, 0, \dots, 0), \qquad \boldsymbol{\sigma}'' = (0, \dots, 0, \sigma_{i_o+1}, \dots, \sigma_n), \\ \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' + \boldsymbol{\sigma}'' \in \mathbb{R}^n.\end{gathered} \tag{3.6}$$

给定两个由 n 个波组成的元组 $\boldsymbol{\alpha}$ and $\boldsymbol{\beta}$，当 $i > j$ 或 $i = j$，且第 i 个族真正非线性并且 $\min\{\alpha_i, \beta_j\} < 0$ 时，大小为 $\alpha_i \neq 0$ 的波 i 与大小为 $\beta_j \neq 0$ 的波 j 相互接近，参见 [5, § 7.3] 或 [11, § 9.9]。将这些对（i, j）的集合记为 $\mathcal{A}_{\boldsymbol{\alpha},\,\boldsymbol{\beta}}$。

引理 3.4（[21, 定理，第 30] 页）。设 $\varphi \in \mathsf{C}^{2,1}(\overline{B(0,\bar\delta)} \times \overline{B(0,\bar\delta)}; \mathbb{R}^m)$ 满足

$$\varphi(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 0 \quad \textit{for all} \quad \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \quad \textit{with} \quad \mathcal{A}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} = \emptyset\,. \tag{3.7}$$

那么，对于所有 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$

$$\big\|\varphi(\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\beta})\big\| \leq \mathcal{O}(1) \sum_{(i,j)\colon\, i>j} \big|\alpha_i\,\beta_j\big| + \mathcal{O}(1)\,\big(\|\boldsymbol{\alpha}\| + \|\boldsymbol{\beta}\|\big) \sum_{i\colon\, \substack{\min\{\alpha_i,\beta_i\}<0 \\ gen.\ \ nonl.}} |\alpha_i\,\beta_i|\,.$$

证明。注意，对于所有 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$ in $\overline{B(0,\delta)}$，都有 $\mathcal{A}_{\boldsymbol{\alpha},\,0} = \mathcal{A}_{0,\,\boldsymbol{\beta}} = \emptyset$。因此，

$$\varphi(\boldsymbol{\alpha}; 0) = \varphi(0; \boldsymbol{\beta}) = 0 \quad \text{and} \quad \partial_{\alpha_i}\varphi(\boldsymbol{\alpha}; 0) = \partial_{\beta_j}\varphi(0; \boldsymbol{\beta}) = 0$$

对所有的 $i, j = 1, \dots, n$。由 [21], 可得

$$\begin{aligned}
&\big\|\varphi(\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\beta})\big\| \\
=\;& \big\|\varphi(\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\beta}) - \varphi(\boldsymbol{\alpha};0)\big\| \\
\leq\;& \sum_{i=1}^{n} \big\|\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_i, 0, \dots, 0; \boldsymbol{\beta}) - \varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 0, \dots, 0; \boldsymbol{\beta})\big\| \\
\leq\;& \sum_{i=1}^{n} \int_0^{\alpha_i} \big\|\partial_{\alpha_i}\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, a, 0, \dots, 0; \boldsymbol{\beta})\big\|\,\mathrm{d}a \\
=\;& \sum_{i=1}^{n} \int_0^{\alpha_i} \big\|\partial_{\alpha_i}\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, a, 0, \dots, 0; \boldsymbol{\beta}) - \partial_{\alpha_i}\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, a, 0, \dots, 0; 0)\big\|\,\mathrm{d}a \\
\leq\;& \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \int_0^{\alpha_i} \big\|\partial_{\alpha_i}\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, a, 0, \dots, 0; 0, \dots, 0, \beta_j, \dots, \beta_n) \\
&\qquad\qquad -\partial_{\alpha_i}\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, a, 0, \dots, 0; 0, \dots, 0, \beta_{j+1}, \dots, \beta_n)\big\|\,\mathrm{d}a \\
\leq\;& \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \int_0^{\alpha_i}\int_0^{\beta_j} \Big\|\partial_{\alpha_i}\partial_{\beta_j}\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, a, 0, \dots, 0; 0, \dots, 0, b, \beta_{j+1}, \dots, \beta_n)\Big\|\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}a \\
\leq\;& \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}} \int_0^{\alpha_i}\int_0^{\beta_j} \Big\|\partial_{\alpha_i}\partial_{\beta_j}\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, a, 0, \dots, 0; 0, \dots, 0, b, \beta_{j+1}, \dots, \beta_n)\Big\|\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}a
\end{aligned}$$

$$\leq \left\|D^2\varphi\right\|_{\mathbf{C}^0}\sum_{i>j}\left|\alpha_i\,\beta_j\right| + Lip\left(D^2\varphi\right)\left(\|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|\right)\sum_{i:\ \substack{\min\{\alpha_i,\beta_i\}<0\\ \text{gen. nonl.}}}\left|\alpha_i\,\beta_j\right|.$$

上文指出，后一个双重求和中的某些项根据 (3.7) 为零，因为

$$(i,j)\notin\mathcal{A}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} \quad\Longrightarrow\quad \mathcal{A}_{\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1},a,0,\dots,0;0,\dots,0,b,\beta_{j+1},\dots,\beta_n}=\emptyset \quad \text{for all } \begin{array}{l} a \text{ between 0 and } \alpha_i;\\ b \text{ between 0 and } \beta_j.\end{array}$$

对于含有 $i>j$ 的项，我们使用一个标准估计，通过 $\mathbf{C}^0$ 范数来界定积分。剩下的是含有 $i=j$ 的项，其中第 i 个场是真正非线性的，且 $\min\{\alpha_i,\beta_i\}<0$。在这种情况下，(3.7) 保证

$$\varphi(\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1},a,0,\dots,0;0,\dots,0,b,\beta_{i+1},\dots,\beta_n)=0 \quad \text{for all } a\geq 0 \text{ and } b\geq 0\,.$$

因此 $\partial_{\alpha_1}\partial_{\beta_i}\varphi(0;0)=0$ 且 $\left\|\partial_{\alpha_i}\partial_{\beta_i}\varphi(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\right\|\leq Lip(D^2\varphi)\,\left(\|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|\right)$。 □

引理3.5（[1, 引理 4] 和 [8, 引理4.8]）。设 f 满足 (f.1)–(f.4)，Ξ 满足 (Ξ.1) 和 (Ξ.3)。那么，存在一个正的 δ，使得若 $u_\ell,u_r\in\Omega$ 且 $z^+,z^-\in\mathcal{Z}$ 满足

$$\|u_\ell-u_r\|\leq\delta\,,\qquad \left\|z^+-z^-\right\|\leq\delta$$

并且，如果 $\boldsymbol{\sigma}=E(z^+,z^-,u_r,u_\ell)$ 如 (3.5) 所示，我们有

$$\|u_r-u_\ell\|=\mathcal{O}(1)\left(\|\boldsymbol{\sigma}\|+\left\|z^+-z^-\right\|\right)\qquad and\qquad \|\boldsymbol{\sigma}\|=\mathcal{O}(1)\left(\|u_r-u_\ell\|+\left\|z^+-z^-\right\|\right).$$

引理 3.6. 设 f 满足 (f.1)–(f.4)。对于所有 $z\in\mathcal{Z}$, $u\in\in\Omega$，以及所有充分小的 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^n$

$$\left\|H(z,\boldsymbol{\beta})\circ H(z,\boldsymbol{\alpha})(u)-H(z,\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})(u)\right\| \;\leq\; \mathcal{O}(1)\sum_{(\alpha_i,\beta_i)\in\mathcal{A}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}}|\alpha_i\,\beta_i| \tag{3.8}$$

$$\left\|H(z^+,\boldsymbol{\alpha})(u)-H(z^-,\boldsymbol{\alpha})(u)\right\| \;\leq\; \mathcal{O}(1)\left\|z^+-z^-\right\|\sum_{i=1}^n|\alpha_i| \tag{3.9}$$

证明. 经典的 Glimm交互估计 (3.8) 可由引理 3.4 得出，其中 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=H(z,\boldsymbol{\beta})\circ H(z,\boldsymbol{\alpha})(u)-H(z,\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})(u)$.

为得到第二个结论，应用引理 3.1，其中 $w_2=\boldsymbol{\alpha}$, $w_1=0$ 以及 $\varphi(z^+,z^-,\boldsymbol{\alpha})=H(z^+,\boldsymbol{\alpha})(u)-H(z^-,\boldsymbol{\alpha})(u)$. □

下面的引理给出了下文所需的交互估计。

引理 3.7. 设 f 满足 (f.1)–(f.4)，且 Ξ 满足 (Ξ.1)、(Ξ.3)。那么，存在一个正的 δ，使得若 u_ℓ、$u_r\in\Omega$；z^+、$z^-\in\mathcal{Z}$，且 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^n$ 满足

$$\|u_\ell-u_r\|\leq\delta\,,\qquad \left\|z^+-z^-\right\|\leq\delta\,,\qquad \|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|\leq\delta$$

参见图 1，以下一般相互作用估计成立：

$$\|u_*-u_r\|\leq\mathcal{O}(1)\left(\sum_{(i,j)\in\mathcal{A}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}}|\alpha_i\,\beta_j|+\left\|z^+-z^-\right\|\sum_{i>i_o}|\alpha_i|\right). \tag{3.10}$$

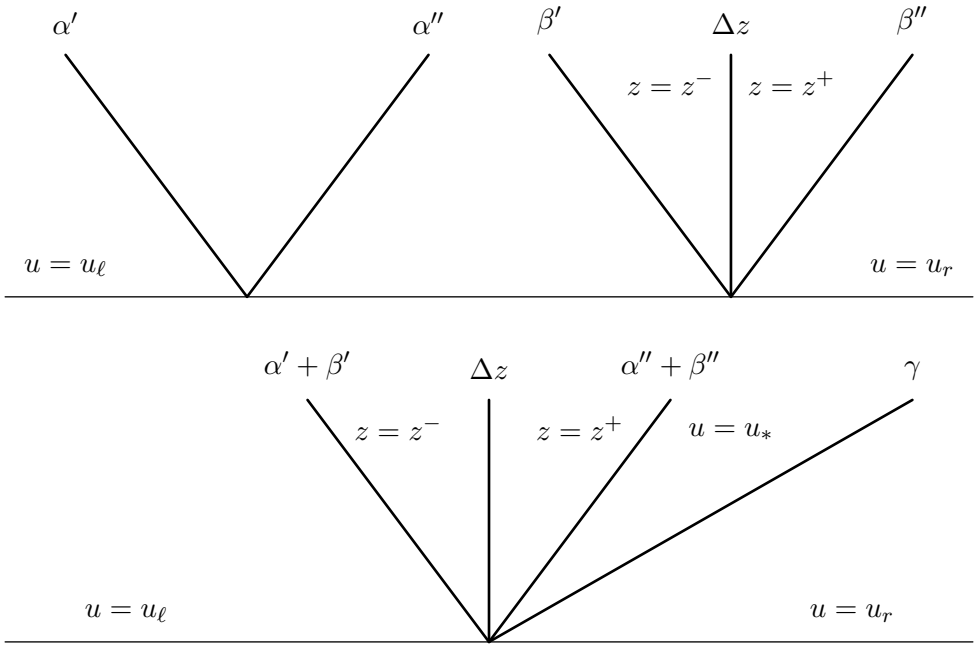


图 1：引理 3.7 中使用的记号。 γ 表示分隔状态 u_*和 u_r的虚拟波，如式 (3.11) 所定义。 Δz 表示 z^- 和 z^+之间的零波。

证明。参见图 1，我们有：

$$\begin{aligned} u_r &= H(z^+, \boldsymbol{\beta''}) \circ T(z^+, z^-) \circ H(z^-, \boldsymbol{\beta'}) \circ H(z^-, \boldsymbol{\alpha''}) \circ H(z^-, \boldsymbol{\alpha'})(u_\ell) \\ u_* &= H(z^+, \boldsymbol{\alpha''} + \boldsymbol{\beta''}) \circ T(z^+, z^-) \circ H(z^-, \boldsymbol{\alpha'} + \boldsymbol{\beta'})(u_\ell)\,. \end{aligned} \tag{3.11}$$

引入

$$\begin{aligned} \check{u} &= H(z^+, \boldsymbol{\beta''}) \circ T(z^+, z^-) \circ H(z^-, \boldsymbol{\alpha''}) \circ H(z^-, \boldsymbol{\beta'}) \circ H(z^-, \boldsymbol{\alpha'})(u_\ell) \\ \hat{u} &= H(z^+, \boldsymbol{\beta''}) \circ H(z^+, \boldsymbol{\alpha''}) \circ T(z^+, z^-) \circ H(z^-, \boldsymbol{\beta'}) \circ H(z^-, \boldsymbol{\alpha'})(u_\ell) \end{aligned}$$

使得

$$\|u_r - u_*\| \le \|u_r - \check{u}\| + \|\check{u} - \hat{u}\| + \|\hat{u} - u_*\|$$

并由引理 3.7，令 $\tilde{u} = H(z^-, \boldsymbol{\alpha'})(u_\ell)$,

$$\begin{aligned} \|u_r - \check{u}\| &\le \mathcal{O}(1) \Big\| H(z^-, \beta') \circ H(z^-, \alpha'')(u) - H(z^-, \alpha'') \circ H(z^-, \beta')(u) \Big\| \\ &= \mathcal{O}(1) \Big\| H(z^-, \beta') \circ H(z^-, \alpha'')(u) - H(z^-, \alpha'' + \beta')(u) \Big\| \\ &\le \mathcal{O}(1) \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}_{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}}} \big| \alpha_i \, \beta_j \big| \,. \end{aligned}$$

类似地，现在令 $\tilde{u} = H(z^-, \beta') \circ H(z^-, \boldsymbol{\alpha'})(u_\ell)$,

$$\|\check{u} - \hat{u}\| \le \mathcal{O}(1) \Big\| T(z^+, z^-) \circ H(z^-, \alpha'')(\tilde{u}) - H(z^-, \alpha'') \circ T(z^+, z^-)(\tilde{u}) \Big\|$$

应用引理 3.1，其中 $w_2 = \alpha''$、 $w_1 = 0$ 和 $\varphi(z^+, z^-, \alpha'') = T(z^+, z^-) \circ H(z^-, \alpha'')(\tilde{u}) - H(z^-, \alpha'') \circ T(z^+, z^-)(\tilde{u})$，可得

$$\|\check{u} - \hat{u}\| \leq \mathcal{O}(1) \left\|z^+ - z^-\right\| \sum_{i>i_o} |\alpha_i| \,. \tag{3.12}$$

最后，在引理 3.6 中使用 (3.8),

$$\|\hat{u} - u_*\| \leq \mathcal{O}(1) \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}} \left|\alpha_i \, \beta_j\right| ,$$

证明完成。 □

注意，当 $\boldsymbol{\alpha}$ 波位于零波右侧时，即在 z 取值为 z^+的区域内，完全类似的估计同样成立。

引理 3.8. 设 f 满足 (f.1)–(f.4)，且 Ξ 满足 (Ξ.1)、(Ξ.3)。那么，存在一个正的 δ，使得若 u_ℓ, $u_r \in \Omega$； $z^+, z^- \in \mathcal{Z}$ 且 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^n$ 满足

$$\|u_\ell - u_r\| \leq \delta \,, \qquad \left\|z^+ - z^-\right\| \leq \delta \,, \qquad \|\boldsymbol{\alpha}\| + \|\boldsymbol{\beta}\| \leq \delta$$

参见图 2，可得以下一般相互作用估计：

$$\left\|\boldsymbol{\sigma} - (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta})\right\| \leq \mathcal{O}(1) \left(\sum_{(i,j)\in\mathcal{A}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}} \left|\alpha_i \, \beta_j\right| + \left\|z^+ - z^-\right\| \sum_{i>i_o} |\alpha_i| \right)$$

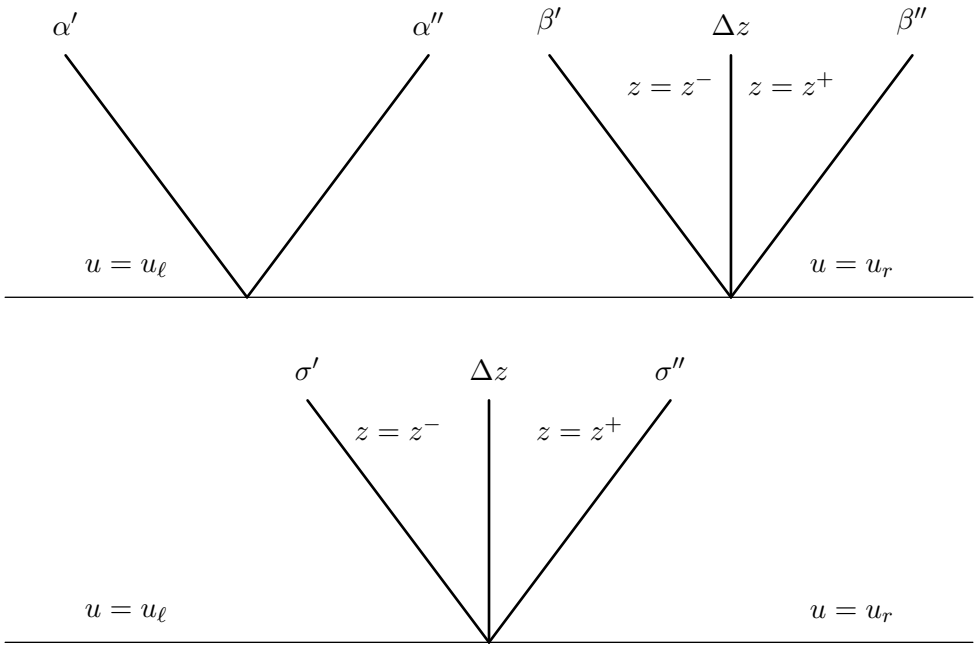


图 2：引理 3.8 中使用的记号

证明。令 u_* 如 (3.11) 中所定义，并使用记号 (3.5)，得到：

$$\left\|\boldsymbol{\sigma}-(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})\right\| \leq \left\|E(z^+,z^-,u_r,u_\ell)-E(z^+,z^-,u_*,u_\ell)\right\| \leq \mathcal{O}(1)\left\|u_r-u_*\right\|.$$

应用引理 3.7 即可完成证明。 □

引理 3.7 和引理 3.8 表明，量 $\left\|z^+-z^-\right\|$ 是衡量与耦合条件相关的零波强度的一种便捷方式。更确切地说，我们将具有参数 z^+、$z^-\in\mathcal{Z}$ 的交汇点处零波的强度定义为 $\sigma=\left\|z^+-z^-\right\|$。

引理 3.9. 设 f 满足 (f.1)–(f.4)，且 Ξ 满足 (Ξ.1)、(Ξ.3)。那么，存在一个正的 δ，使得如果 u_ℓ、$u_r\in$ 属于 Ω；z^+、$z^-\in\mathcal{Z}$ 以及 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^n$ 满足

$$\|u_\ell-u_r\|\leq\delta\,,\qquad \left\|z^+-z^-\right\|\leq\delta\,,\qquad \|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|\leq\delta$$

参见图 3，有如下的一般相互作用估计成立：

$$\left|\|u_r-u_*\|-\|\hat{u}-u_\ell\|\right|\leq\mathcal{O}(1)\left(\sum_{j=1}^{n}|\beta_j|+\left\|z^+-z^-\right\|\right)\|\hat{u}-u_\ell\|$$

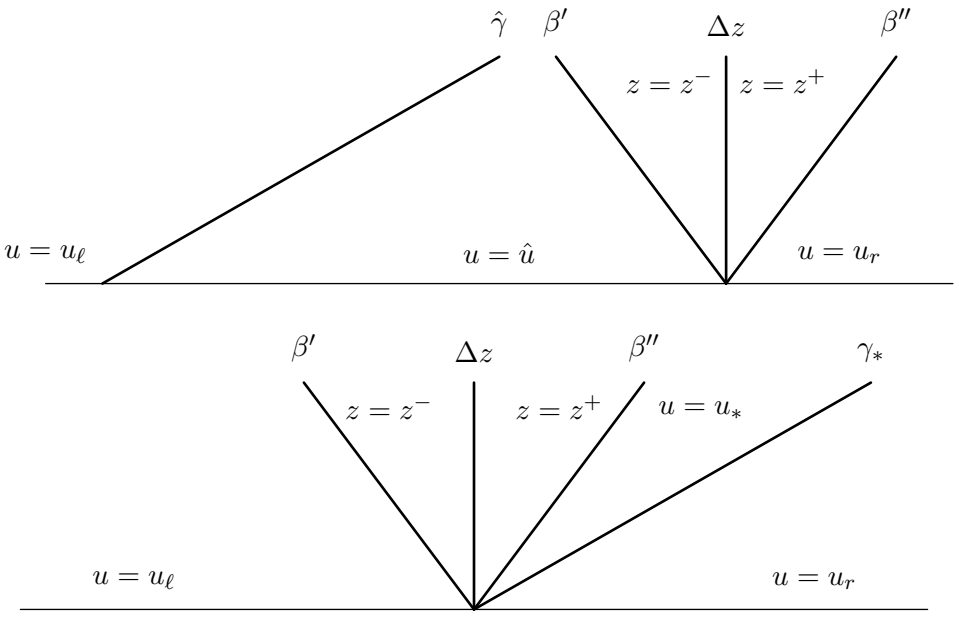


图 3：引理 3.9 中使用的记号。

证明。参见图 3，直接计算可得：

$$\begin{aligned}
&\left|\|u_r-u_*\|-\|u_\ell-\hat{u}\|\right|\\
\leq\;&\left\|(u_r-u_*)-(u_\ell-\hat{u})\right\|\\
=\;&\left\|\Big(H(z^+,\beta'')\circ T(z^+,z^-)\circ H(z^-,\beta')(u_\ell)-u_\ell\Big)\right.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad - \Big(H(z^+,\beta'')\circ T(z^+,z^-)\circ H(z^-,\beta')(\hat{u})-\hat{u}\Big)\Big\| \\
&\leq \Big\|\Big(H(z^+,\beta'')\circ T(z^+,z^-)\circ H(z^-,\beta')(u_\ell)-T(z^+,z^-)(u_\ell)\Big) && (3.13)\\
&\quad - \Big(H(z^+,\beta'')\circ T(z^+,z^-)\circ H(z^-,\beta')(\hat{u})-T(z^+,z^-)(\hat{u})\Big)\Big\| && (3.14)\\
&\quad + \Big\|\Big(T(z^+,z^-)(u_\ell)-u_\ell\Big)-\Big(T(z^+,z^-)(\hat{u})-\hat{u}\Big)\Big\| && (3.15)\\
&\leq \mathcal{O}(1)\left(\|u_\ell-\hat{u}\|\sum_{j=1}^{n}\big|\beta_j\big|+\|u_\ell-\hat{u}\|\left\|z^+-z^-\right\|\right)
\end{aligned}
$$

从而完成证明。上文利用了范数 (3.13)–(3.14) 中的项是一个光滑函数这一事实；该函数在 $u_\ell=\hat{u}$ 以及 $\beta=0$ 处均为零，见 [5, § 2.9]。此外，引理 3.1 可应用于项 (3.15)，其中 $\varphi(z^+,z^-,u)=T(z^+,z^-)(u)-u$。□

引理 3.10. 设 f 满足 (f.1)–(f.4)，Ξ 满足 (Ξ.1)–(Ξ.3)。那么，存在一个 $\delta>0$，使得若 $\hat{u}^l$、$\hat{u}^r$、$\check{u}^l$、$\check{u}^r\in\Omega$、$\hat{z}^-$、$\hat{z}^-$、$\check{z}^+$、$\check{z}^+\in\mathcal{Z}$，并且

$$
\left\|\hat{z}^+-\hat{z}^-\right\|+\left\|\hat{u}^l-\hat{u}^r\right\|<\delta\,,\qquad\qquad \left\|\check{z}^+-\check{z}^-\right\|+\left\|\check{u}^l-\check{u}^r\right\|<\delta
$$

相应广义黎曼问题 (1.5) 的解 $\hat{u}$ 和 $\check{u}$，其初始数据为

$$
\begin{aligned}
\hat{u}_o(x)&=\begin{cases}\hat{u}^l & x<\xi\\ \hat{u}^r & x\geq\xi\end{cases} \qquad & \hat{\zeta}(x)&=\begin{cases}\hat{z}^- & x<\xi\\ \hat{z}^+ & x\geq\xi\end{cases}\\
\check{u}_o(x)&=\begin{cases}\check{u}^l & x<\xi\\ \check{u}^r & x\geq\xi\end{cases} \qquad & \check{\zeta}(x)&=\begin{cases}\check{z}^- & x<\xi\\ \check{z}^+ & x\geq\xi\end{cases}
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

满足估计

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{h}\int_{\xi-\hat{\lambda}h}^{\xi+\hat{\lambda}h}\big\|\hat{u}(h,x)-\check{u}(h,x)\big\|\,\mathrm{d}x\\
\leq\ &\mathcal{O}(1)\left(\left\|\hat{u}^l-\check{u}^l\right\|+\|\hat{u}^r-\check{u}^r\|+\left\|\hat{u}^r-\hat{u}^l\right\|\left(\left\|\hat{z}^--\check{z}^-\right\|+\left\|\hat{z}^+-\check{z}^+\right\|\right)\right.\\
&\qquad\left.+\min\left\{\left\|\hat{z}^+-\hat{z}^+\right\|+\left\|\check{z}^+-\check{z}^-\right\|,\ \left\|\hat{z}^--\check{z}^-\right\|+\left\|\hat{z}^+-\check{z}^+\right\|\right\}\right).
\end{aligned}
$$

证明。黎曼问题的解具有自相似性，因此

$$
\frac{1}{h}\int_{\xi-\hat{\lambda}h}^{\xi+\hat{\lambda}h}\big\|\hat{u}(h,x)-\check{u}(h,x)\big\|\,\mathrm{d}x=\int_{\xi-\hat{\lambda}}^{\xi+\hat{\lambda}}\big\|\hat{u}(1,\xi+\lambda)-\check{u}(1,\xi+\lambda)\big\|\,\mathrm{d}\lambda\,.
$$

回想一下，$\lambda\mapsto\hat{u}(1,\xi+\lambda)$ 和 $\lambda\mapsto\check{u}(1,\xi+\lambda)$ 均由一系列常状态、跳跃间断和利普希茨连续稀疏波剖面组成。将 $\hat{p}_1$、$\hat{p}_2$、……、$\hat{p}_{2n+2}$ 称为

$\hat{}u$ 中波的位置，意即当激波、接触间断或零波在 $\hat{}u$ 中以该位置为支撑时，$\hat{}p_{2l-1} = \hat{}p_{2l}$；而当（非平凡）稀疏波在 $[\hat{}p_{2l-1}$、$p_l]$ 上以该位置为支撑时，$\hat{}p_{2l-1} < \hat{}p_l$。参照 $\check{}u$，类似地定义 $\check{}p_1$、$\check{}p_2$、……、$\check{}p_{2n+2}$。映射 $(z^-, z^+, u^l, u^r) \mapsto p$ 关于 $\hat{}z$ 变量是利普希茨连续的，关于 u 变量是光滑的。

集合 $\hat{}p_0 = \check{}p_0 = \xi - \hat{\lambda}$ 和 $\hat{}p_{2n+3} = \check{}p_{2n+3} = \xi + \hat{\lambda}$。于是，

$$
\begin{aligned}
& \int_{\xi-\hat{\lambda}}^{\xi+\hat{\lambda}} \left\| \hat{u}(1,\xi+\lambda) - \check{u}(1,\xi+\lambda) \right\| \mathrm{d}\lambda \\
\leq\ & \mathcal{O}(1) \left(\sum_{i=1}^{2n+2} |\hat{p}_i - \check{p}_i| + \sum_{j=0}^{n+1} \left\| \hat{u}\left(1, \frac{\hat{p}_{2j}+\hat{p}_{2j+1}}{2}\right) - \check{u}\left(1, \frac{\check{p}_{2j}+\check{p}_{2j+1}}{2}\right) \right\| \right. \\
& \left. + \sum_{j=1}^{n+1} \int_{[\hat{p}_{2j-1},\hat{p}_{2j}]\cap[\check{p}_{2j-1},\check{p}_{2j}]} \left\| \hat{u}(1,x) - \check{u}(1,x) \right\| \mathrm{d}x \right) .
\end{aligned}
$$

上面，量 $\hat{}p_i - \check{}p_i$、$\hat{}u\left(1, \frac{\hat{}p_{2j}+\hat{}p_{2j+1}}{2}\right) - \check{}u\left(1, \frac{\check{}p_{2j}+\check{}p_{2j+1}}{2}\right)$ 以及 $\hat{}u(1,x) - \check{}u(1,x)$ 中的每一个都可以写成差值 $G(\hat{}z^-, \hat{}z^+, \hat{}u^l, \hat{}u^r) - G(\check{}z^-, \check{}z^+, \check{}u^l, \check{}u^r)$，其中函数 G 关于 z 是利普希茨连续的，并且关于 u光滑。因此，

$$
\begin{aligned}
& \left\| G(\hat{z}^-, \hat{z}^+, \hat{u}^l, \hat{u}^r) - G(\check{z}^-, \check{z}^+, \check{u}^l, \check{u}^r) \right\| \\
\leq\ & \left\| G(\hat{z}^-, \hat{z}^+, \hat{u}^l, \hat{u}^r) - G(\check{z}^-, \check{z}^+, \hat{u}^l, \hat{u}^r) \right\| + \left\| G(\check{z}^-, \check{z}^+, \hat{u}^l, \hat{u}^r) - G(\check{z}^-, \check{z}^+, \check{u}^l, \check{u}^r) \right\| \\
\leq\ & \left\| G(\hat{z}^-, \hat{z}^+, \hat{u}^l, \hat{u}^r) - G(\check{z}^-, \check{z}^+, \hat{u}^l, \hat{u}^r) \right\| + \mathcal{O}(1) \left(\left\| \check{u}^l - \hat{u}^l \right\| + \left\| \check{u}^r - \hat{u}^r \right\| \right) .
\end{aligned}
$$

此外，

$$
\begin{aligned}
& \left\| G(\hat{z}^-, \hat{z}^+, \hat{u}^l, \hat{u}^r) - G(\check{z}^-, \check{z}^+, \hat{u}^l, \hat{u}^r) \right\| \\
\leq\ & \left\| \left(G(\hat{z}^-, \hat{z}^+, \hat{u}^l, \hat{u}^r) - G(\check{z}^-, \check{z}^+, \hat{u}^l, \hat{u}^r) \right) - \left(G(\hat{z}^-, \hat{z}^+, \hat{u}^l, \hat{u}^l) - G(\check{z}^-, \check{z}^+, \hat{u}^l, \hat{u}^l) \right) \right\| \\
& + \left\| \left(G(\hat{z}^-, \hat{z}^+, \hat{u}^l, \hat{u}^l) - G(\check{z}^-, \check{z}^+, \hat{u}^l, \hat{u}^l) \right) - \underbrace{\left(G(\hat{z}^-, \hat{z}^-, \hat{u}^l, \hat{u}^l) - G(\check{z}^-, \check{z}^-, \hat{u}^l, \hat{u}^l) \right)}_{=0} \right\| \\
\leq\ & \left| \int_{\hat{u}^l}^{\hat{u}^r} \left\| D_4 G(\hat{z}^-, \hat{z}^+, \hat{u}^l, w) - D_4 G(\check{z}^-, \check{z}^+, \hat{u}^l, w) \right\| \mathrm{d}w \right| \\
& + \mathcal{O}(1) \min \left\{ \left\| \hat{z}^+ - \hat{z}^+ \right\| + \left\| \check{z}^+ - \check{z}^- \right\|, \left\| \hat{z}^- - \check{z}^- \right\| + \left\| \hat{z}^+ - \check{z}^+ \right\| \right\} \\
\leq\ & \mathcal{O}(1) \left\| \hat{u}^r - \hat{u}^l \right\| \left(\left\| \hat{z}^- - \check{z}^- \right\| + \left\| \hat{z}^+ - \check{z}^+ \right\| \right) \\
& + \mathcal{O}(1) \min \left\{ \left\| \hat{z}^+ - \hat{z}^+ \right\| + \left\| \check{z}^+ - \check{z}^- \right\|, \left\| \hat{z}^- - \check{z}^- \right\| + \left\| \hat{z}^+ - \check{z}^+ \right\| \right\} ,
\end{aligned}
$$

完成证明。 □

3.2 情形 $\zeta \in \mathrm{PC}(\mathbb{R};\mathbb{R}^p)$

3.2.1 波前追踪

固定一个 $\zeta \in$(PC $\cap$有界变差)$(\mathbb{R};\ \mathbb{R}^p)$，其中 $\mathcal{I}(z)$ 是 z 中的跳跃点集合。令 $u \in \mathrm{PC}(\mathbb{R};\ \Omega)$，并将 $\mathcal{I}(u)$ 称为 u 中的跳跃点集合。令 $\sigma_{x,i}$ 表示由数据 $u(x-)$ 和 $u(x+)$ 构成的 (1.5) 的黎曼问题的解中第 i 个波的（带符号）强度，即 $(\sigma_{x,1},\ldots,\sigma_{x,n}) = E\left(\zeta(x+)\ \zeta(x-)\ u(x+)\ u(x-)\right)$ 如 (3.5) 所示。定义

$$\mathcal{A}^{\zeta}(u) = \left\{ \begin{array}{l} \big((x,i),(y,j)\big) \in \Big(\big(\mathcal{I}(u)\cup\mathcal{I}(\zeta)\big)\times\{1,\ldots,n\}\Big)^2 : \\ x<y \text{ and either } i>j \text{ or } i=j, \text{ the } i\text{–th field is} \\ \text{genuinely non linear and } \min\{\sigma_{x,i},\sigma_{y,i}\}<0 \end{array} \right\} \tag{3.17}$$

将 [7], 中引入的内容推广后，线性项和相互作用势定义为

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^{\zeta}(u) &= \sum_{x\in\mathcal{I}(u)\cup\mathcal{I}(\zeta)} \sum_{i=1}^{n} \big|\sigma_{x,i}\big| + \sum_{x\in\mathcal{I}(\zeta)} \big\|\Delta\zeta(x)\big\| \\ \mathbf{Q}^{\zeta}(u) &= \sum_{\big((x,i),(y,j)\big)\in\mathcal{A}^{\zeta}(u)} \big|\sigma_{x,i}\sigma_{y,j}\big| \\ &\quad + \sum_{x\in\mathcal{I}(\zeta)} \big\|\Delta\zeta(x)\big\| \left(\sum_{y\in\mathcal{I}(u)\,,\,y<x} \sum_{j>i_0} \big|\sigma_{y,j}\big| + \sum_{y\in\mathcal{I}(u)\,,\,y>x} \sum_{j\le i_0} \big|\sigma_{y,j}\big| \right) \\ \mathbf{\Upsilon}^{\zeta}(u) &= \mathbf{V}^{\zeta}(u) + C_0\cdot\mathbf{Q}^{\zeta}(u) \end{aligned} \tag{3.18}$$

其中 C_0 是一个适当的正数。当 $\delta>0$ 足够小时，我们定义

$$\mathcal{D}_{\delta}^{\zeta} = \mathrm{cl}\left\{ u\in\bar{u}+\mathbf{L}^1(\mathbb{R},\Omega) : u \text{ is piecewise constant and } \mathbf{\Upsilon}^{\zeta}(u)<\delta \right\} \tag{3.19}$$

其中闭包取强 $\mathbf{L}^1$ 拓扑。

我们调整 [1, 5, 8, 9, 13] 中的波前追踪技术，构造柯西问题 (1.5) 的一列近似解，并证明空间上的一致有界变差估计。这些近似解收敛到一个具有有限个连接点的柯西问题的解。首先，我们定义这些近似。

Defi义 3.11. 设 $\zeta\in$ 有界变差$(\mathbb{R};\mathcal{Z})$ 为分段常数。对于 $\varepsilon>0$，一个连续映射

$$u^{\varepsilon}:\ [0,+\infty[\ \to \mathbf{L}^1_{\mathbf{loc}}(\mathbb{R};\mathbb{R}^n)$$

若满足以下条件，则它是 (1.5) 的 ε-近似解：

- u^{ε}作为（t,x）的函数，在（t,x）平面上沿有限条直线分段常数，其间断仅有有限次波前相互作用，且每次至多有两个波彼此相互作用。间断有四种类型：激波（或接触间断）、稀疏波、非物理波和零波。我们用集合 $\mathcal{J}=\mathcal{S}\cup\mathcal{R}\cup\mathcal{NP}\cup\mathcal{ZW}$区分这些波的指标，其中 $\mathcal{J}$ 中的一般指标为 α。

• 在激波（或接触间断） $x_\alpha = x_\alpha(t)$ 处， $\alpha \in \mathcal{S}$，迹 $u^+ = u^\varepsilon(t, x_\alpha+)$ 和 $u^- = u^\varepsilon(t, x_\alpha-)$ 满足关系 $u^+ = H_{i_\alpha}(\zeta(x_\alpha)\ \sigma_\alpha)(u^-)$，其中 $1 \le i_\alpha \le n$，见（2.3）。若第 i_α 族是真正非线性的，则可容许性条件 $\sigma_\alpha < 0$ 成立，并且

$$\left|\dot{x}_\alpha - \lambda_{i_\alpha}(\zeta(x_\alpha), u^+, u^-)\right| \le \varepsilon, \tag{3.20}$$

其中，$\lambda_{i_\alpha}(\zeta(x_\alpha)\ u^+, u^-)$ 是根据 Rankine-Hugoniot 条件相对于 $u \mapsto f(\zeta(x_\alpha)\ u)$ 描述的波速。

• 在真正非线性族中，稀疏波 $x_\alpha = x_\alpha(t)\ \alpha \in \mathcal{R}$ 两侧的迹由 $u^+ = H_{i_\alpha}(\zeta(x_\alpha)\ \sigma_\alpha)(u^-)$ 关联，其中 $1 \le i_\alpha \le n$ 且 $0 < \sigma_\alpha \le \varepsilon$。此外，

$$\left|\dot{x}_\alpha - \lambda_{i_\alpha}(\zeta(x_\alpha), u^+)\right| \le \varepsilon.$$

• 所有非物理波前 $x = x_\alpha(t)\ \alpha \in \mathcal{NP}$ 都以相同的波速 $\dot{x}_\alpha = \hat{}\lambda$ 传播，其中 $\hat{}\lambda > \sup_{z,\ u,\ i} |\lambda_i(z, u)|$。所有非物理波前的总强度一致有界，且

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{NP}} \left\| u^\varepsilon(t, x_\alpha+) - u^\varepsilon(t, x_\alpha-) \right\| \le \varepsilon \quad \textit{for all } t > 0\,.$$

• 零波位于间断 $x_\alpha \in \mathcal{I}(\zeta)$ 处。在零波 x_α 处， $\alpha \in \mathcal{ZW}$迹满足耦合条件 $u^+ = T\left(\zeta(x_\alpha+)\ \zeta(x_\alpha)\right)(u^-)$，对所有 $t > 0$ 均成立，参见 (3.2)；相互作用时刻除外。

• 在时间 $t = 0$， u^ε 满足 $\left\| u^\varepsilon(0, \cdot) - u_o \right\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^n)} \le \varepsilon$。

命题 3.12（[8,定理 4.11]）。设 f 满足 (f.1)–(f.4)，且 Ξ 满足 (Ξ.1)–(Ξ.3)。固定 $\bar{z} \in \mathcal{Z}$ 和 $\bar{u} \in \Omega$。则存在 δ、$K > 0$，使得对于所有满足以下条件的分段常数$\zeta \in$ 有界变差$(\mathbb{R}; \mathcal{Z})$:

$$\zeta(\mathbb{R}) \subseteq B(\bar{z}; \delta) \quad \textit{and} \quad \mathrm{TV}\,(\zeta) < \delta \tag{3.21}$$

并且，对于所有初始数据 $u_o \in \mathcal{D}^\zeta_\delta$，每个充分小的 ε 都存在一个 ε–近似解，它是按定义 3.11 的意义对 (1.5) 的近似解。此外，空间中的总变差 TV $(u^\varepsilon(t, \cdot))$ 和时间中的总变差 TV $(u^\varepsilon(\cdot, x))$ 对充分小的 ε 一致有界，即，对于所有 $t > 0$ 以及所有 $x \in \mathbb{R}$

$$\boldsymbol{\Upsilon}^\zeta(u^\varepsilon(t, \cdot)) \le \delta + K\,\varepsilon \quad \textit{and} \quad \mathrm{TV}\,(u^\varepsilon(\cdot, x)) \le K\,.$$

命题 3.12 的证明。这里我们采用众所周知的波前追踪算法，该算法最初由 [10] 引入，并在 [1], 中针对当前情形进行了调整；另见 [2, 5, 6, 11, 14]。事实上，从 [2], 中所发展的波前追踪算法的角度来看，支撑于 ζ 的跳跃点上的波，即 $\mathcal{ZW}$ 中所标记的零波，其行为类似于线性退化波；有关术语也请参阅该文献。注意，引理 3.7、引理 3.8 和引理 3.9 使得能够将与标准波前追踪过程中通常使用的估计具有相同形式的估计，扩展到涉及零波的相互作用。

更多细节请参见 [8, 定理 4.11] 。 □

3.2.2 一个扩展的近似递减泛函

为了证明解对初始数据的 Lipschitz连续依赖，我们引入一个与 $\mathbf{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ 距离 [6] 一致等价的泛函。我们遵循 [1,第 4 节2]中的讨论。

令 u 和 v 分别为命题 3.12 中所述的 ε–近似解和 ε'–近似解，它们具有与 (3.41) 中相同的分段常数 $\zeta \in \mathrm{BV}(\mathbb{R};\mathcal{Z})$。函数$u(0,\cdot)$ 和 $v(0,\cdot)$ 不一定相同。引入激波曲线的拼接

$$S(z,\boldsymbol{q})(u) = S_n(z,q_n)\circ\cdots\circ S_1(z,q_1)(u) \tag{3.22}$$

其中，$q_i \mapsto S_i(z,q_i)$ 是相对于通量函数 $u \mapsto f(z,u)$ 的激波曲线，且可能违反可容许性条件。我们通过下式隐式定义 $\mathbf{q}(z,u,v) \equiv (\mathbf{q}_1,\ldots,\mathbf{q}_n)(z,u,v)$:

$$v = S\left(z,\mathbf{q}(z,u,v)\right)(u) \tag{3.23}$$

并且，第 i 个激波速度（采用与 (3.20) 中相同的记号）为

$$\begin{aligned}\Lambda_i(z,u,v) \;=\; \lambda_i\Big(&z, S_i\left(z,\mathrm{q}_i(z,u,v)\right)\circ\cdots\circ S_1\left(z,\mathrm{q}_1(z,u,v)\right)(u),\\ &S_{i-1}\left(z,\mathrm{q}_{i-1}(z,u,v)\right)\circ\cdots\circ S_1\left(z,\mathrm{q}_1(z,u,v)\right)(u)\Big)\,.\end{aligned} \tag{3.24}$$

当 $\mathbf{q}(z,u,v)$ 足够小时，且 z处于 $\bar z$ 的一个小邻域内时，有

$$\frac{1}{C}\,|u-v| \le \sum_{i=1}^{n}\left|\mathrm{q}_i(z,u,v)\right| \le C\,|u-v|$$

对于一个共同常数 $C>1$。我们定义以下泛函，它等价于 $\mathbf{L}^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^n)$ 距离：

$$\begin{aligned} q_i(t,x) &= \mathrm{q}_i\left(\zeta(x),u(t,x),v(t,x)\right) \qquad i=1,\ldots,n\,,\\ \Phi(u,v)(t) &= \sum_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}}\left|q_i(t,x)\right|W_i(t,x)\,\mathrm{d}x\;, \qquad (3.25)\\ W_i(t,x) &= 1+\kappa_1\,B_i(t,x)+\kappa_2\left(Q(u,t)+Q(v,t)\right), \qquad (3.26)\\ B_i(t,x) &= A_i(t,x)+\begin{cases}\sum_{x_\alpha<x,\alpha\in\mathcal{Z}_\mathcal{W}}|\sigma_\alpha| & \text{if } i\le i_o\,,\\ \sum_{x_\alpha>x,\alpha\in\mathcal{Z}_\mathcal{W}}|\sigma_\alpha| & \text{if } i> i_o\,,\end{cases} \qquad (3.27)\end{aligned}$$

其中 κ_1、κ_2 为正数，稍后选定； A_i 的定义同 [1, 公式 (4.9)], [5, 公式 (8.8)–(8.9)] 或 [6, 公式 (2.17)–(2.18)] ，而 Q 是分段常数近似解通常使用的 Glimm 相互作用势，见 [5, 公式 (7.54)], ，其中也包括所有零波。我们沿用 [5, 6] 的做法，并确保无论常数 κ_1、κ_2 取何值，都可以减小 (3.21) 中的参数 $\delta>0$ ，使得 $1\le W_i(t,x)\le 2$。

我们用与证明 [1, 引理 9] 相同的步骤得到以下结果。注意，根据 (f.1) 以及 TV (ζ) 的小量性，所有论证对 $f(\zeta(x),\cdot)$ 同样成立，而不只是对 f 成立。

引理 3.13. 设 f 满足 (f.1)–(f.4)，且 Ξ 满足 (Ξ.1)–(Ξ.3)。固定 $\bar z\in\mathcal{Z}$ 和 $\bar u\in\Omega$。存在适当的正数 κ_1、κ_2、δ，使得如果 ζ 为分段常数并满足 (3.21)，u 是一个 ε–近似解，且 v 是一个 ε'–近似解，如定理3.12中所述，二者均对应于 ζ，并且 $u(0,\cdot)$ 和 $v(0,\cdot)$ 属于 $\mathcal{D}_\delta^\zeta$（如 (3.19) 中所定义），那么泛函 Φ 对所有 $0\le s\le t$ 均满足

$$\Phi(u,v)(t)-\Phi(u,v)(s) \le \mathcal{O}(1)\;\max\{\varepsilon,\varepsilon'\}\,(t-s)\,.$$

证明。在任意相互作用时刻 t，与 [1, 5, 6] 中相同的计算表明，得益于 (3.26) 中的项 $\kappa_2\left(Q(u,t)+Q(v,t)\right)$，$\Phi$ 严格递减。

在任意两个相互作用时刻之间的时间 t，用集合 $\mathcal{J}$ 对 $u(t,\cdot)$、$v(t,\cdot)$ 以及时间 t 的 ζ 中的间断进行编号。采用 [1, 5, 6]，中所用的相同步骤（下文所用的标准记号也参照该文），可以计算 Φ 对时间的导数，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(u,v)(t)=\sum_{\nu\in\mathcal{J}}\sum_{i=1}^{n}\left(\left|q_i^{\nu+}\right|W_i^{\nu+}(\lambda_i^{\nu+}-\dot{x}_\nu)-\left|q_i^{\nu-}\right|W_i^{\nu-}(\lambda_i^{\nu-}-\dot{x}_\nu)\right).$$

[1, 5, 6] 中的标准步骤保证，将上述求和限制在物理波或非物理波上时，有界如下：

$$\sum_{\nu\in\mathcal{J}\setminus\mathcal{ZW}}\sum_{i=1}^{n}\left(\left|q_i^{\nu+}\right|W_i^{\nu+}(\lambda_i^{\nu+}-\dot{x}_\nu)-\left|q_i^{\nu-}\right|W_i^{\nu-}(\lambda_i^{\nu-}-\dot{x}_\nu)\right)\le\mathcal{O}(1)\,\varepsilon\,,$$

其中，与定义 3.11 中一样，$\mathcal{ZW}$ 汇总了对应于零波的指标。

现在考虑零波：$\nu\in\mathcal{ZW}$。于是，$\dot{x}_\nu=0$ 并且

$$\begin{aligned}&\left|q_i^{\nu+}\right|W_i^{\nu+}(\lambda_i^{\nu+}-\dot{x}_\nu)-\left|q_i^{\nu-}\right|W_i^{\nu-}(\lambda_i^{\nu-}-\dot{x}_\nu)\\ =\;&W_i^{\nu+}\left(\left|q_i^{\nu+}\right|-\left|q_i^{\nu-}\right|\right)\lambda_i^{\nu+}+W_i^{\nu+}\left|q_i^{\nu-}\right|\left(\lambda_i^{\nu+}-\lambda_i^{\nu-}\right)+\left(W_i^{\nu+}-W_i^{\nu-}\right)\left|q_i^{\nu-}\right|\lambda_i^{\nu-}.\end{aligned}\tag{3.28}$$

现在分别对后面三个加项进行估计。首先，我们对 $w\equiv(q_1^{\nu-},\dots,q_n^{\nu-})$ 和 $\varphi(z^+,z^-,w)=q_i^{\nu+}-q_i^{\nu-}$ 使用引理 3.1，得到

$$\left|\left|q_i^{\nu+}\right|-\left|q_i^{\nu-}\right|\right|\le\left|q_i^{\nu+}-q_i^{\nu-}\right|=\left|\varphi(z^+,z^-,w)-\varphi(z^+,z^-,0)\right|\le\mathcal{O}(1)\,\|\Delta z\|\sum_{i=1}^{n}\left|q_i^{\nu-}\right|.$$

其次，根据 λ_i 的 Lipschitz 连续性，

$$\left|q_i^{\nu-}\right|\left|\lambda_i^{\nu+}-\lambda_i^{\nu-}\right|\le\mathcal{O}(1)\|\Delta z\|\sum_{i=1}^{n}\left|q_i^{\nu-}\right|.$$

为估计第三项，引入集合 $\hat{I}=\left\{i\in\{1,\dots,n\}\colon\ q_i^{\nu+}\,q_i^{\nu-}>0\right\}$ 和 $\check{I}=\left\{i\in\{1,\dots,n\}\colon\ q_i^{\nu+}\,q_i^{\nu-}\le 0\right\}$。对于 $i\in\hat{I}$，我们有 $A_i^+=A_i^-$。如果 $i\le i_o$，则 $\lambda_i<0$，并且根据（3.27）有 $\Delta B_i=\|\Delta z\|$；而如果 $i\ge i_o+1$，则 $\lambda_i>0$ 和 $\Delta B_i=-\|\Delta z\|$。在这两种情况下，（3.28）中的第三个加项满足

$$(W_i^{\nu+}-W_i^{\nu-})\left|q_i^{\nu-}\right|\left|\lambda_i^{\nu-}\right|<-c\,\kappa_1\,\|\Delta z\|\left|q_i^{\nu-}\right|.$$

另一方面，如果 $i\in\check{I}$、A_i^+ 和 A_i^- 并无直接关联，但是

$$\left|q_i^{\nu+}\right|+\left|q_i^{\nu-}\right|=\left|q_i^{\nu+}-q_i^{\nu-}\right|\le\mathcal{O}(1)\,\|\Delta z\|\sum_{i=1}^{n}\left|q_i^{\nu-}\right|\tag{3.29}$$

使得

$$(W_i^{\nu+} - W_i^{\nu-})\Big|q_i^{\nu-}\Big|\lambda_i^{\nu-} \leq \mathcal{O}(1)\,\|\Delta z\| \sum_{i=1}^{n}\Big|q_i^{\nu-}\Big|\,. \tag{3.30}$$

至此完成了对 (3.28) 中三个项的估计。此外，由 (3.29),

$$\sum_{i=1}^{n}\Big|q_i^{\nu-}\Big| = \sum_{i\in\hat{I}}\Big|q_i^{\nu-}\Big| + \sum_{i\in\check{I}}\Big|q_i^{\nu-}\Big| \leq \sum_{i\in\hat{I}}\Big|q_i^{\nu-}\Big| + \mathcal{O}(1)\,\|\Delta z\| \sum_{i=1}^{n}\Big|q_i^{\nu-}\Big|\,.$$

因此，当 Δz 充分小时,

$$\sum_{i=1}^{n}\Big|q_i^{\nu-}\Big| \leq 2\sum_{i\in\hat{I}}\Big|q_i^{\nu-}\Big|\,.$$

将所得的各项估计相加，可将 (3.28) 中的项估计为

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\left(\Big|q_i^{\nu+}\Big|W_i^{\nu+}(\lambda_i^{\nu+} - \dot{x}_\nu) - \Big|q_i^{\nu-}\Big|W_i^{\nu-}(\lambda_i^{\nu-} - \dot{x}_\nu)\right) \qquad (3.31)\\
\leq\ & -c\,\kappa_1\,\|\Delta z\| \sum_{i\in\hat{I}}\Big|q_i^{\nu-}\Big| + \mathcal{O}(1)\,\|\Delta z\| \sum_{i=1}^{n}\Big|q_i^{\nu-}\Big|\\
\leq\ & (\mathcal{O}(1) - c\,\kappa_1)\|\Delta z\| \sum_{i\in\hat{I}}\Big|q_i^{\nu-}\Big|\\
<\ & 0\,,
\end{aligned}$$

其中假设 κ_1 充分大。

借助标准论证即可完成证明，参见 [1, 5, 6]。 □

3.2.3 $\zeta \in$ 定理 2.3 在 $\zeta \in$ 分段连续($\mathbb{R}$; $\mathbb{R}^p$) 情形下的证明

设 f 满足 (f.1)–(f.4)， Ξ 满足 (Ξ.1)–(Ξ.4)。固定 $\bar{z} \in \mathcal{Z}$, $\bar{u} \in \Omega$ 和 δ ，如引理 3.13 中所定义。取 $\zeta \in$ 分段连续($\mathbb{R}$; $\mathcal{Z}$)，使得总变差 (ζ) $< \delta$, $\|\zeta - \bar{z}\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R};\ \mathbb{R}^p)} < \delta$ ，并令 $\mathcal{D}^\zeta = \mathcal{D}_\delta^\zeta$ 如 (3.19) 中所述。注意，$\mathrm{L}^1(\mathbb{R}; \Omega)$ 包含 $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}; \Omega)$ 中所有满足总变差 (u) $< \delta$ 的函数 u 。

引理 3.14。存在一个正的 L 和唯一的半群 S^ζ: $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{D}^\zeta \to \mathcal{D}^\zeta$，其由波前追踪 ε近似解的极限得到，且定理 2.3 中的第 1、2 和 3 点成立。

证明。由于 $\mathcal{D}_\delta^\zeta$ 是可分的，按照标准论证，通过取定义 3.11 中波前追踪 ε–近似的（子序列）极限，即可得到满足性质 1.、2. 和 3. 的利普希茨连续半群 S^ζ ，例如参见 [1] 或 [5, 6, 7, 8]。

为证明唯一性，任取满足 1.、2. 和 3. 的利普希茨连续半群 Σ^ζ。固定一个初始数据 $u_o \in \mathcal{D}_\delta^\zeta$。称 u^ε为一个波前追踪 ε–近似解，它趋近于轨道 $t \mapsto S^\zeta u_o$，当 $\varepsilon \to 0$趋于.....时。那么，由 Σ^ζ的 Lipschitz 连续性以及引理 3.13 可得,

$$\Big\|\Sigma_t^\zeta u_o - S_t^\zeta u_o\Big\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^n)} \leq \Big\|\Sigma_t^\zeta u^\varepsilon(0) - u^\varepsilon(t)\Big\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^n)} + \mathcal{O}(1)\,\varepsilon\,(1+t)\,. \tag{3.32}$$

现在我们使用 [5, 定理 2.9] 来对上式右侧的第一项进行估计：

$$\left\|\Sigma_t^\zeta u^\varepsilon(0) - u^\varepsilon(t)\right\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^n)} \leq \mathcal{O}(1)\int_0^t \liminf_{h\to 0} \frac{\left\|\Sigma_h^\zeta u^\varepsilon(t) - u^\varepsilon(t+h)\right\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^n)}}{h}\,\mathrm{d}\tau\ . \tag{3.33}$$

采用定义 3.11 中的记号，并利用引理9.1], 中关于物理波和非物理波的经典估计，对于 h 足够小的情形，相邻黎曼问题的解不会重叠，因此有：

$$\begin{aligned}
&\left\|\Sigma_h^\zeta u^\varepsilon(t) - u^\varepsilon(t+h)\right\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^n)}\\
\leq\ & \sum_{\alpha\in\mathcal{J}} \int_{x_\alpha-\hat\lambda h}^{x_\alpha+\hat\lambda h} \left\|\left(\Sigma_h^\zeta u^\varepsilon(t)\right)(x) - u^\varepsilon(t+h,x)\right\|\mathrm{d}x\\
\leq\ & \mathcal{O}(1)\,\varepsilon\,h + \sum_{\alpha\in\mathcal{Z}\mathcal{W}} \int_{x_\alpha-\hat\lambda h}^{x_\alpha+\hat\lambda h} \left\|\left(\Sigma_h^\zeta u^\varepsilon(t)\right)(x) - u^\varepsilon(t+h,x)\right\|\mathrm{d}x\\
=\ & \mathcal{O}(1)\,\varepsilon\,h
\end{aligned}$$

因为对于几乎处处的 t，所有零波 $\left(\Sigma_h^\zeta u^\varepsilon(t)\right)(x) = u^\varepsilon(t+h,x)$，且波前追踪 ε– 近似在零波处精确求解黎曼问题。

将后一个界代入 (3.33)，于是取极限 $\varepsilon\to 0$ 后，由 (3.32) 及 u_o 的任意性可得 S^ζ 与 Σ^ζ 相等。□

引理 3.15。固定 $\xi\in\mathbb{R}$ 并定义

$$\tilde\zeta(x) = \begin{cases} \zeta(\xi) & x\leq\xi,\\ \zeta(\xi+) & x>\xi. \end{cases} \tag{3.34}$$

取 $u\in\mathcal{D}^\zeta\cap\mathcal{D}^{\tilde\zeta}$。则对于所有 $\vartheta>0$,

$$\frac{1}{\vartheta}\int_{\xi-\hat\lambda\vartheta}^{\xi+\hat\lambda\vartheta} \left\|S_\vartheta^\zeta u(x) - S_\vartheta^{\tilde\zeta} u(x)\right\|\mathrm{d}x \leq \mathcal{O}(1)\ \mathrm{TV}\Big(\zeta;]\xi-2\hat\lambda\vartheta,\xi[\cup]\xi,\xi+2\hat\lambda\vartheta[\Big)\ .$$

证明。设 $\hat{}u^\varepsilon$ 为 $S^\zeta u$ 的一个 ε-波前追踪近似，使得

$$\int_{\xi-\hat\lambda\vartheta}^{\xi+\hat\lambda\vartheta} \left\|S_\vartheta^\zeta u(x) - S_\vartheta^{\tilde\zeta} u(x)\right\|\mathrm{d}x \leq \mathcal{O}(1)\,\varepsilon + \int_{\xi-\hat\lambda\vartheta}^{\xi+\hat\lambda\vartheta} \left\|u^\varepsilon(\vartheta,x) - \left(S_\vartheta^{\tilde\zeta} u^\varepsilon(0)\right)(x)\right\|\mathrm{d}x\ .$$

根据 [5, 定理 2.9],

$$\begin{aligned}
&\int_{\xi-\hat\lambda\vartheta}^{\xi+\hat\lambda\vartheta} \left\|u^\varepsilon(\vartheta,x) - \left(S_\vartheta^{\tilde\zeta} u^\varepsilon(0)\right)(x)\right\|\mathrm{d}x\\
\leq\ & \mathcal{O}(1)\int_0^\vartheta \liminf_{h\to 0+}\frac{1}{h}\int_{\xi-2\hat\lambda\vartheta+\hat\lambda(t+h)}^{\xi+2\hat\lambda\vartheta-\hat\lambda(t+h)} \left\|u^\varepsilon(t+h,x) - \left(S_h^{\tilde\zeta} u^\varepsilon(t)\right)(x)\right\|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$\leq \mathcal{O}(1)\int_0^{\vartheta}\liminf_{h\to 0+}\frac{1}{h}\int_{\xi-2\hat{\lambda}\vartheta+\hat{\lambda}(t+h)}^{\xi+2\hat{\lambda}\vartheta-\hat{\lambda}(t+h)}\left\|u^\varepsilon(t+h,x)-\left(S_h^\zeta u^\varepsilon(t)\right)(x)\right\|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \tag{3.35}$$

$$+\mathcal{O}(1)\int_0^{\vartheta}\liminf_{h\to 0+}\frac{1}{h}\int_{\xi-2\hat{\lambda}\vartheta+\hat{\lambda}(t+h)}^{\xi+2\hat{\lambda}\vartheta-\hat{\lambda}(t+h)}\left\|\left(S_h^\zeta u^\varepsilon(t)\right)(x)-\left(S_h^{\tilde{\zeta}} u^\varepsilon(t)\right)(x)\right\|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\ . \tag{3.36}$$

由于 u^ε 是轨迹 $t\mapsto S_t^\zeta\left(u^\varepsilon(0)\right)$的分段常数 ε近似，因此式 (3.35) 中的积分由 $\mathcal{O}(1)\,\varepsilon$ 控制。映射 $x\mapsto u^\varepsilon(t,x)$是分段常数的，因此可以通过估计由 $u^\varepsilon(t)$中的间断所产生的黎曼问题的局部解之差，计算式 (3.36) 中的积分；这里在 $\check{}u_o=\hat{}u_o$ 的情形下使用引理 3.10。因此，式 (3.36) 中的项估计为

$$\begin{aligned}
&\liminf_{h\to 0+}\frac{1}{h}\int_{\xi-2\hat{\lambda}\vartheta+\hat{\lambda}(t+h)}^{\xi+2\hat{\lambda}\vartheta-\hat{\lambda}(t+h)}\left\|\left(S_h^\zeta u^\varepsilon(t)\right)(x)-\left(S_h^{\tilde{\zeta}} u^\varepsilon(t)\right)(x)\right\|\mathrm{d}x\\
\leq\ &\sum_{\substack{x_\alpha\in\mathcal{I}(u^\varepsilon(t))\\ x_\alpha\in]\xi-2\hat{\lambda}\vartheta+\hat{\lambda}t,\xi+2\hat{\lambda}\vartheta-\hat{\lambda}t[\\ x_\alpha\neq\xi\,,\,x_\alpha\notin\mathcal{I}(\zeta)}}\liminf_{h\to 0+}\frac{1}{h}\int_{x_\alpha-\hat{\lambda}h}^{x_\alpha+\hat{\lambda}h}\left\|\left(S_h^\zeta u^\varepsilon(t)\right)(x)-\left(S_h^{\tilde{\zeta}} u^\varepsilon(t)\right)(x)\right\|\mathrm{d}x\\
&+\sum_{\substack{x_\alpha\in\mathcal{I}(\zeta)\\ x_\alpha\in]\xi-2\hat{\lambda}\vartheta+\hat{\lambda}t,\xi+2\hat{\lambda}\vartheta-\hat{\lambda}t[\\ x_\alpha\neq\xi}}\liminf_{h\to 0+}\frac{1}{h}\int_{x_\alpha-\hat{\lambda}h}^{x_\alpha+\hat{\lambda}h}\left\|\left(S_h^\zeta u^\varepsilon(t)\right)(x)-\left(S_h^{\tilde{\zeta}} u^\varepsilon(t)\right)(x)\right\|\mathrm{d}x\\
&+\liminf_{h\to 0+}\frac{1}{h}\int_{\xi-\hat{\lambda}h}^{\xi+\hat{\lambda}h}\underbrace{\left\|\left(S_h^\zeta u^\varepsilon(t)\right)(x)-\left(S_h^{\tilde{\zeta}} u^\varepsilon(t)\right)(x)\right\|}_{=0}\mathrm{d}x\\
\leq\ &\mathcal{O}(1)\sum_{\substack{x_\alpha\in\mathcal{I}(u^\varepsilon(t))\\ x_\alpha\in]\xi-2\hat{\lambda}\vartheta+\hat{\lambda}t,\xi+2\hat{\lambda}\vartheta-\hat{\lambda}t[\\ x_\alpha\neq\xi\,,\,x_\alpha\notin\mathcal{I}(\zeta)}}\left\|\Delta u^\varepsilon(t,x_\alpha)\right\|\left\|\zeta(x_\alpha)-\tilde{\zeta}(x_\alpha)\right\|\\
&+\mathcal{O}(1)\sum_{\substack{x_\alpha\in\mathcal{I}(\zeta)\\ x_\alpha\in]\xi-2\hat{\lambda}\vartheta+\hat{\lambda}t,\xi+2\hat{\lambda}\vartheta-\hat{\lambda}t[\\ x_\alpha\neq\xi}}\left(\left\|\Delta u^\varepsilon(t,x_\alpha)\right\|\left\|\zeta(x_\alpha)-\tilde{\zeta}(x_\alpha)\right\|+\left\|\Delta\zeta(x_\alpha)\right\|\right)\\
\leq\ &\mathcal{O}(1)\ \mathrm{TV}\left(\zeta;]\xi-2\hat{\lambda}\vartheta,\xi[\cup]\xi,\xi+2\hat{\lambda}\vartheta[\right)\ ,
\end{aligned}$$

并且，在极限 $\varepsilon\to 0$ 下，引理 3.15 的证明即得。 □

引理 3.16. 固定 $u_o\in\mathcal{D}^\zeta$。对于一个 $\xi\in\mathbb{R}$，定义

$$\tilde{u}(x)=\begin{cases}u_o(\xi-) & x\in]\xi-\delta,\xi[\\ u_o(\xi+) & x\in]\xi,\xi+\delta[\\ u_o(x) & x\in]-\infty,\xi-\delta[\cup]\xi+\delta,+\infty[\end{cases} \tag{3.37}$$

并假设 $\tilde{u} \in \mathcal{D}^{\zeta}$。那么，对于 $\vartheta \in]0,\ \delta/(2\hat{}\lambda)[$,

$$\frac{1}{\vartheta}\int_{\xi-\hat{\lambda}\vartheta}^{\xi+\hat{\lambda}\vartheta}\left\|S_{\vartheta}^{\zeta}u_o(x)-S_{\vartheta}^{\zeta}\tilde{u}(x)\right\|\mathrm{d}x \leq \mathcal{O}(1)\ \mathrm{TV}\left(u_o;]\xi-2\hat{\lambda}\vartheta,\xi[\cup]\xi,\xi+2\hat{\lambda}\vartheta[\right).$$

Pro的。利用 S^{ζ} 的 Lipschitz 连续性，见引理 3.14，在依赖域上,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\vartheta}\int_{\xi-\hat{\lambda}\vartheta}^{\xi+\hat{\lambda}\vartheta}\left\|S_{\vartheta}^{\zeta}u_o(x)-S_{\vartheta}^{\zeta}\tilde{u}(x)\right\|\mathrm{d}x &\leq \frac{L}{\vartheta}\int_{\xi-2\hat{\lambda}\vartheta}^{\xi+2\hat{\lambda}\vartheta}\left\|u_o(x)-\tilde{u}(x)\right\|\mathrm{d}x\\ &\leq \frac{L}{\vartheta}\int_{\xi-2\hat{\lambda}\vartheta}^{\xi+2\hat{\lambda}\vartheta}\mathrm{TV}\left(u_o;]\xi-2\hat{\lambda}\vartheta,\xi[\cup]\xi,\xi+2\hat{\lambda}\vartheta[\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

证明随即得出。 □

现在我们可以完成定理 2.3 中 (i) 的证明，考虑分段常数 ζ。取 (3.37) 中定义的 $\tilde{u}$，其中 $u_o = u(\tau)$，并令 $\tilde{\zeta}$ 如 (3.34) 所示，从而对于 ϑ 在 0 的某个右邻域内且 x 在 ξ 附近，有 $U^{\sharp}_{(u,\ \tau,\ \xi)}(\vartheta,x) = (S_{\vartheta}^{\zeta}\tilde{u})(x)$:

$$\begin{aligned}&\int_{\xi-\hat{\lambda}\vartheta}^{\xi+\hat{\lambda}\vartheta}\left\|u(\tau+\vartheta,x)-U^{\sharp}_{(u,\tau,\xi)}(\vartheta,x)\right\|\mathrm{d}x\\ =\ &\int_{\xi-\hat{\lambda}\vartheta}^{\xi+\hat{\lambda}\vartheta}\left\|(S_{\vartheta}^{\zeta}u(\tau))(x)-(S_{\vartheta}^{\tilde{\zeta}}\tilde{u}(\tau))(x)\right\|\mathrm{d}x\\ \leq\ &\int_{\xi-\hat{\lambda}\vartheta}^{\xi+\hat{\lambda}\vartheta}\left\|(S_{\vartheta}^{\zeta}u(\tau))(x)-(S_{\vartheta}^{\zeta}\tilde{u}(\tau))(x)\right\|\mathrm{d}x+\int_{\xi-\hat{\lambda}\vartheta}^{\xi+\hat{\lambda}\vartheta}\left\|(S_{\vartheta}^{\zeta}\tilde{u}(\tau))(x)-(S_{\vartheta}^{\tilde{\zeta}}\tilde{u}(\tau))(x)\right\|\mathrm{d}x\end{aligned}$$

而这 后两项通过引理 3.16 和引理 3.15 进行估计，得到 g

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\vartheta}\int_{\xi-\hat{\lambda}\vartheta}^{\xi+\hat{\lambda}\vartheta}\left\|u(\tau+\vartheta,x)-U^{\sharp}_{(u,\tau,\xi)}(\vartheta,x)\right\|\mathrm{d}x\\ \leq\ &\mathcal{O}(1)\left(\mathrm{TV}\left(u,]\xi-2\hat{\lambda}\vartheta,\xi[\cup]\xi,\xi+2\hat{\lambda}\vartheta[\right)+\mathrm{TV}\left(\zeta,]\xi-2\hat{\lambda}\vartheta,\xi[\cup]\xi,\xi+2\hat{\lambda}\vartheta[\right)\right)\end{aligned}\tag{3.38}$$

令 $\vartheta \to 0$ 趋于极限，即得结论。

We 现在开始证明定理 2.3 的 (ii)。需要先介绍以下结果 t.

引理 3.17. 设 A 是一个具有 n 个实特征值 λ_1、……、λ_n，以及 r_1、……、r_n 个线性无关的右特征向量和 l_1、……、l_n 个线性无关的左特征向量的 $n \times n$ 非奇异矩阵，并设 m 是一个有限向量测度。那么，方程

$$\partial_t u + A\,\partial_x u = m$$

生成 $\mathbf{L}^1$–利普希茨半群

$$\begin{aligned}L_t : \mathbf{L}^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^n) &\to \mathbf{L}^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^n)\\ u &\to \sum_{i=1}^{n} l_i \cdot \left(u(x-\lambda_i\,t)+\frac{1}{\lambda_i}\int_{x-\lambda_i t}^{x}\mathrm{d}m\right)r_i\,.\end{aligned}$$

证明依赖于直接计算，故略去。注意，供后续使用，

$$L_t u = \sum_{i=1}^{n} l_i \cdot u(x - \lambda_i\, t)\; r_i + A^{-1} \sum_{i=1}^{n} l_i \cdot \int_{x-\lambda_i t}^{x} \mathrm{d}m\;\; r_i$$

The 下一个引理证明了当 $x \mapsto u(\tau, x)$ 为分段常数时定理 2.3 中的 (ii)。 .

引理 3.18. 在定理 2.3 的相同假设下，进一步假设 $x \to u(\tau, x)$ 为分段常数。则定理 2.3 中的 (ii) 成立。

证明。采用引理 3.17 中的记号，回顾分段常数 ζ 情形下 $U^\flat$ 的定义 (2.6),

$$U^\flat_{(u;\tau,\xi)}(\vartheta, \cdot) = L_\vartheta u(\tau) \text{ if } \begin{cases} A = D_u f\left(\zeta(\xi), u(\tau,\xi)\right) \\ k(\bar{x}) = \Xi\left(\zeta(\bar{x}+), \zeta(\bar{x}), u(\tau,\xi)\right) \\ \qquad\qquad -f\left(\zeta(\bar{x}+), u(\tau,\xi)\right) + f\left(\zeta(\bar{x}), u(\tau,\xi)\right) \\ m = \sum\limits_{\bar{x}\in\mathcal{I}(\zeta)} k(\bar{x})\, \delta_{\bar{x}}\,. \end{cases} \tag{3.39}$$

下文为简便起见，置 $u_o = u(\tau)$，并假设 $\tau = 0$。使用定理 2.9] ，并采用定理 2.3 陈述中的记号，注意到 $x \mapsto L_t u_o(x)$ 为分段常数，因为 u_o 也是分段常数，而 L 是线性的。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\vartheta} \int_{a+\hat{\lambda}\vartheta}^{b-\hat{\lambda}\vartheta} \left\| S_\vartheta u_o - U^\flat_{(u_o;0,\xi)} \right\| \mathrm{d}x \\ = \;& \frac{1}{\vartheta} \int_{a+\hat{\lambda}\vartheta}^{b-\hat{\lambda}\vartheta} \| S_\vartheta u_o - L_\vartheta u_o \| \, \mathrm{d}x \\ \leq \;& \mathcal{O}(1)\, \frac{1}{\vartheta} \int_0^\vartheta \liminf_{h\to 0+} \frac{1}{h} \int_{a+\hat{\lambda}(t+h)}^{b-\hat{\lambda}(t+h)} \| S_h L_t u_o - L_h L_t u_o \| \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\ \leq \;& \mathcal{O}(1)\, \frac{1}{\vartheta} \int_0^\vartheta \sum_{\bar{x}\in\mathcal{I}(L_t u_o)\cup\mathcal{I}(\zeta)} \liminf_{h\to 0+} \frac{1}{h} \int_{\bar{x}-\hat{\lambda}h}^{\bar{x}+\hat{\lambda}h} \| S_h L_t u_o - L_h L_t u_o \| \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \;. \end{aligned}$$

为计算后一个和，我们区分 $\bar{x} \notin \mathcal{I}(\zeta)$ 或 $\bar{x} \in \mathcal{I}(\zeta)$ 这两种情形。

在前一种情况下，在 $\bar{x}$ 的邻域内，半群 L 局部与齐次方程 $\partial_t u + A\,\partial_x u = 0$ 生成的半群一致。因此，由 [3,公式 (3.8)], 引理 3.18 和 (3.39)，可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \int_{\bar{x}-\hat{\lambda}h}^{\bar{x}+\hat{\lambda}h} \| S_h L_t u_o - L_h L_t u_o \| \, \mathrm{d}x \\ \leq \;& \mathcal{O}(1) \sup_{x\in]a,b[} \left\| A - D_u f\left(\zeta(x), (L_t u_o)(x)\right) \right\| \left\| \Delta(L_t\, u_o)(\bar{x}) \right\| \\ \leq \;& \mathcal{O}(1) \sup_{x\in]a,b[} \left\| D_u f\left(\zeta(\xi), u_o(\xi)\right) - D_u f\left(\zeta(x), (L_t u_o)(x)\right) \right\| \left\| \Delta(L_t\, u_o)(\bar{x}) \right\| \\ \leq \;& \mathcal{O}(1) \sup_{x\in]a,b[} \Big(\left\| \zeta(x) - \zeta(\xi) \right\| + \left\| u_o(\xi) - (L_t u_o)(x) \right\| \Big) \left\| \Delta(L_t\, u_o)(\bar{x}) \right\| \end{aligned}$$

$$\leq \mathcal{O}(1)\left\|\Delta(L_t u_o)(\bar{x})\right\|\left(\mathrm{TV}\left(u_o,]a,b[\right)+\mathrm{TV}\left(\zeta,]a,b[\right)\right).$$

因此,

$$\begin{aligned}
&\sum_{\bar{x}\in\mathcal{I}(L_t u_o),\bar{x}\notin\mathcal{I}(\zeta)}\frac{1}{h}\int_{\bar{x}-\hat{\lambda}h}^{\bar{x}+\hat{\lambda}h}\|S_h L_t u_o - L_h L_t u_o\|\,\mathrm{d}x\\
\leq\ & \mathcal{O}(1)\sum_{\bar{x}\in\mathcal{I}(L_t u_o),\bar{x}\notin\mathcal{I}(\zeta)}\left\|\Delta(L_t u_o)(\bar{x})\right\|\left(\mathrm{TV}\left(u_o,]a,b[\right)+\mathrm{TV}\left(\zeta,]a,b[\right)\right)\\
\leq\ & \mathcal{O}(1)\left(\mathrm{TV}\left(u_o,]a,b[\right)+\mathrm{TV}\left(\zeta,]a,b[\right)\right)^2.
\end{aligned}$$

现在假设 $\bar{x}\in\mathcal{I}(\zeta)$。利用引理 3.2 中定义的映射 T，定义

$$\begin{aligned}
\tilde{u} &= (L_t u_o)(\bar{x}-)\\
w(x) &= \begin{cases}\tilde{u} & x<\bar{x}\\ T\left(\zeta(\bar{x}+),\zeta(\bar{x}-)\right)(\tilde{u}) & x>\bar{x}\end{cases}
\end{aligned}$$

并注意到 $(L_t u_o)(\bar{x}+)=\tilde{u}+A^{-1}k(\bar{x})$。于是，在 $\bar{x}$ 的一个邻域内，$S_h w=w$ 和 $L_h L_t u_o = L_t u_o$。此外，回顾一下 S_h 在依赖域上的 Lipschitz 连续性:

$$\int_{\bar{x}-\bar{\lambda}h}^{\bar{x}+\bar{\lambda}h}\|S_h L_t u_o - S_h w\|\,\mathrm{d}x \leq \int_{\bar{x}-2\bar{\lambda}h}^{\bar{x}+2\bar{\lambda}h}\|L_t u_o - w\|\,\mathrm{d}x\,,$$

并使用 (3.39) 中的记号，继续

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h}\int_{\bar{x}-\hat{\lambda}h}^{\bar{x}+\hat{\lambda}h}\|S_h L_t u_o - L_h L_t u_o\|\,\mathrm{d}x\\
\leq\ & \frac{1}{h}\int_{\bar{x}-\hat{\lambda}h}^{\bar{x}+\hat{\lambda}h}\|S_h L_t u_o - S_h w\|\,\mathrm{d}x+\frac{1}{h}\int_{\bar{x}-\hat{\lambda}h}^{\bar{x}+\hat{\lambda}h}\|S_h w - L_h L_t u_o\|\,\mathrm{d}x\\
\leq\ & \mathcal{O}(1)\left\|T\left(\zeta(\bar{x}+),\zeta(\bar{x})\right)(\tilde{u})-\left(\tilde{u}+A^{-1}k(\bar{x})\right)\right\|\\
\leq\ & \mathcal{O}(1)\left\|AT\left(\zeta(\bar{x}+),\zeta(\bar{x})\right)(\tilde{u})-\left(A\tilde{u}+k(\bar{x})\right)\right\|\\
=\ & \mathcal{O}(1)\left\|D_u f\left(\zeta(\xi),u_o(\xi)\right)\left(T\left(\zeta(\bar{x}+),\zeta(\bar{x})\right)(\tilde{u})-\tilde{u}\right)\right.\\
&\qquad\left.-\Xi\left(\zeta(\bar{x}+),\zeta(\bar{x}),u_o(\xi)\right)+f\left(\zeta(\bar{x}+),u_o(\xi)\right)-f\left(\zeta(\bar{x}),u_o(\xi)\right)\right\|\\
\leq\ & \mathcal{O}(1)\left\|\Delta\zeta(\bar{x})\right\|\left(\left\|\zeta(\bar{x}+)-\zeta(\xi)\right\|+\left\|\Delta\zeta(\bar{x})\right\|+\left\|u_o(\xi)-\tilde{u}\right\|\right)\\
\leq\ & \mathcal{O}(1)\left\|\Delta\zeta(\bar{x})\right\|\left(\mathrm{TV}\left(u_o,]a,b[\right)+\mathrm{TV}\left(\zeta,]a,b[\right)\right),
\end{aligned}$$

这里我们用到了引理 3.2 中的 2.。现在，对 $\bar{x}\in\mathcal{I}(\zeta)$ 求和:

$$\sum_{x\in\mathcal{I}(\zeta)}\frac{1}{h}\int_{\bar{x}-\hat{\lambda}h}^{\bar{x}+\hat{\lambda}h}\|S_h L_t u_o - L_h L_t u_o\|\,\mathrm{d}x \leq \mathcal{O}(1)\left(\mathrm{TV}\left(u_o,]a,b[\right)+\mathrm{TV}\left(\zeta,]a,b[\right)\right)^2,$$

完成引理 3.18 的证明。 □

为完成定理 2.3 中 (ii) 的证明，考虑 $x \to u(\tau, x)$ 不一定是分段常数的情形。我们继续使用等式 $u(\tau+\vartheta) = S_\vartheta\big(u(\tau)\big)$ 和$U^\flat_{(u;\tau,\xi)} = L_\vartheta\big(u(\tau)\big)$，其中线性算子 L 在引理 3.17 中定义，A和 k如 (3.39) 所示。于是，对 $\varepsilon > 0$，取 u^ε 为 $u(\tau)$ 的一个分段常数逼近，且 TV $(u^\varepsilon) \leq$TV $\big(u(\tau)\big)$。由 S_ϑ和 L_t的 Lipschitz 连续性可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\vartheta}\int_{a-\hat\lambda\vartheta}^{b+\hat\lambda\vartheta} \Big\| u(\tau+\vartheta,x) - U^\flat_{(u;\tau,\xi)}(\vartheta,x)\Big\|\,\mathrm{d}x\\
\leq\;& \mathcal{O}(1)\frac{\varepsilon}{\vartheta} + \frac{1}{\vartheta}\int_{a-\hat\lambda\vartheta}^{b+\hat\lambda\vartheta} \big\|(S_\vartheta u^\varepsilon)(x) - (L_\vartheta u^\varepsilon)(x)\big\|\,\mathrm{d}x\\
\leq\;& \mathcal{O}(1)\frac{\varepsilon}{\vartheta} + \mathcal{O}(1)\Big(\mathrm{TV}\left(u(\tau),]a,b[\right) + \mathrm{TV}\left(\zeta,]a,b[\right)\Big)^2 .
\end{aligned}$$

先令 $\varepsilon \to 0$ 趋于极限，再令 $\vartheta \to 0$趋于极限，我们便完成了证明。

3.3 一般情形

现在考虑 $\zeta \in$ BV$(\mathbb{R};\mathbb{R}^p)$ 的情形。

引理 3.19. 假设 f 满足 (f.1)–(f.4)，且 Ξ 满足 (Ξ.1)–(Ξ.4)。那么，对于所有 $z \in \mathcal{Z}$、 $v \in \mathbb{R}^p$，若 $\omega \in \Omega$，且 $\delta > 0$ 足够小，

$$\Xi(z+\delta\, v, z, \omega) - f(z+\delta\, v, \omega) + f(z,\omega) = \delta\left(D_v^+\Xi(z,z,\omega) - D_z f(z,\omega)\, v\right) + \mathcal{O}(1)\,\sigma(\delta)\,\delta\,.$$

证明可直接由–(Ξ.4)以及 f 的泰勒展开得到。

定理 2.3 的证明。设 $\zeta \in$ BV$(\mathbb{R};\mathcal{Z})$。记 $\mathcal{I}(\zeta)$ 为 ζ 中至多可数个跳跃点的集合。回顾一下，$D\zeta$ 是有限向量测度。令 μ 和 v 如 (1.6) 中所述。由卢津定理 [20,，定理 2.24], 对任意 $h > 0$，存在一个 $\tilde v^h \in \mathrm{C}_c^0(\mathbb{R};\,\mathbb{R}^p)$，使得

$$\Big\|\tilde v^h(x)\Big\| \leq 1 \quad \text{and} \quad \|D\zeta\|\left(\Big\{x\in\mathbb{R}\colon \tilde v^h(x) \neq v(x)\Big\}\right) < h\,. \tag{3.40}$$

按照 [8, 步骤 1，§ 4.3], 引入点 $\{x_1,\dots,x_{N_h-1}\} \in \mathbb{R}$，使得:

(i) $x_0 = -\infty$, $x_1 < -1/h$, $x_{i-1} < x_i$ for $i = 2,\dots,N_h-1$, $x_{N_h-1} > 1/h$ and $x_{N_h} = +\infty$.
(ii) $\sum_{x\in\mathcal{I}(\zeta)\setminus\mathcal{I}^h} \big\|\Delta\zeta(x)\big\| < h$ 对于包含在 $\{x_1,x_2,\dots,x_{N_h-1}\}$中的一组合适的点 $\mathcal{I}^h$。

(iii) 每当[1] $x_i \in \mathcal{I}^h$时，总变差 $\big(\zeta,[x_{i-1},x_i[\big) < h\Big/(1+\sharp\mathcal{I}^h)$。

(iv) 对所有 $i = 1$，…，N_h，总变差 $\big(\zeta,]x_{i-1},x_i[\big) < h$。

(v) 对于 x', $x'' \in\,]x_{i-1},x_i[$, $i = 1,\dots,N_h$，$\Big\|\tilde v^h\left(x'\right) - \tilde v^h\left(x''\right)\Big\| < h$。

(vi) 对所有 $i = 2$，...，N_h-1，$x_i - x_{i-1} \in\,]0,\ h[$。

[1]处处，$\sharp A$ 表示集合 A 的（有限）基数。

满足 (i) 的点很容易构造。然后，通过添加更多的点，还可以满足 (ii)，而这一条件完全确定了 $\mathcal{I}^h$，因此也确定了 $\sharp\mathcal{I}^h$。继续迭代添加点，从而增大 N_h，我们便依次满足 (iii)、(iv)、(v) 和 (vi)。定义分段常值映射

$$\zeta^h = \zeta(-\infty)\,\chi_{]-\infty,x_1]} + \sum_{i=2}^{N_h-1} \zeta(x_{i-1}+)\;\chi_{]x_{i-1},x_i]} + \zeta\left(x_{N_h-1}+\right)\chi_{]x_{N_h-1},+\infty[} \tag{3.41}$$

并注意到

$$\zeta^h(x_i) = \zeta(x_{i-1}+) \quad \text{and} \quad \zeta^h(x_i+) = \zeta(x_i+)\,. \tag{3.42}$$

近似 ζ^h 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛于 ζ，当 $h \to 0$时。事实上，固定 h，对于任意$x \in \mathbb{R}$，由 (i) 可得 $x \in]x_{i-1}, x_i]$（显然排除 $+\infty$），而对于 $i \in \{1,\dots,N_h\}$，由 (iv) 可得

$$\left\|\zeta^h(x) - \zeta(x)\right\| \le \mathrm{TV}\left(\zeta,]x_{i-1}, x_i[\right) \le h\,.$$

记 $S^{\zeta^h}\colon\ [0,+\infty[\times \mathcal{D}_\delta^{\zeta^h} \to \mathcal{D}_\delta^{\zeta^h}$ 为分段常值情形下在第 3.2.3 节中证明其存在性的半群，条件是 δ 足够小。我们证明，当 $h \to 0$ 时，半群 S^{ζ^h} 在 $\mathbf{L}^1$中收敛于半群 S^ζ。

使用记号 (3.19)，引入集合：

$$\check{\mathcal{D}}_\delta^\zeta = \bigcap_{h>0} \mathcal{D}_\delta^{\zeta^h} \qquad\qquad \hat{\mathcal{D}}_\delta^\zeta = \overline{\bigcup_{h>0} \mathcal{D}_\delta^{\zeta^h}} \tag{3.43}$$

后一个闭包是在强 $\mathbf{L}^1$ 拓扑下理解的。如果 ζ 具有足够小的全变差，则适当地选取正的 δ 和 δ'

$$\check{\mathcal{D}}_\delta^\zeta \subseteq \hat{\mathcal{D}}_\delta^\zeta \subseteq \check{\mathcal{D}}_{\delta'}^\zeta$$

并且所有这些集合都非空，因为它们包含所有全变差足够小的 u。

由于$\check{\mathcal{D}}_{\delta'}^\zeta$ 关于强 $\mathbf{L}^1$ 拓扑是可分的，根据对角化过程，存在一个序列 h_i，使得对于所有 $u \in \check{\mathcal{D}}_{\delta'}^\zeta$ 以及所有 $t \in [0,+\infty[$，序列 $S_t^{\zeta^{h_i}}u$在 $\mathbf{L}^1_{\mathbf{loc}}(\mathbb{R};\mathbb{R}^n)$ 中收敛于一个极限，我们将其定义为 $S_t^\zeta u$。显然，$S_t^\zeta u \in \hat{\mathcal{D}}_{\delta'}^\zeta$。此外，只要 $S_t^\zeta u \in \check{\mathcal{D}}_{\delta'}^\zeta$，得益于 $u \mapsto S_t^{\zeta_{h_i}}u$ 的 Lipschitz 连续性，半群性质在极限 $h_i \to 0$ 中成立，即对于所有 $s \ge 0$，$S_s^\zeta S_t^\zeta u = S_{s+t}^\zeta u$。

现在定义

$$\mathcal{D}_\delta^\zeta = \left\{u \in \hat{\mathcal{D}}_\delta^\zeta \colon \exists\, t \in \mathbb{R}_+ \text{ and } \exists w \in \check{\mathcal{D}}_\delta^\zeta \text{ such that } S_t^\zeta w = u\right\}. \tag{3.44}$$

注意到

$$\check{\mathcal{D}}_\delta^\zeta \subseteq \mathcal{D}_\delta^\zeta \subseteq \hat{\mathcal{D}}_\delta^\zeta\,.$$

对于所有 $t \in \mathbb{R}_+$，定义域 $\mathcal{D}_\delta^\zeta$ 关于 S_t^ζ 是不变的，即 $(S_t^\zeta \mathcal{D}_\delta^\zeta) \subseteq \mathcal{D}_\delta^\zeta$。

沿着 [8, 定理 2.2], 的思路，上述构造证明了定理 2.3 中的结论 1。定理 2.3 中的条件 2 也随之成立，因为半群 $S^{\zeta^{h_i}}$ 的利普希茨常数与 h_i无关。定理 2.3 中的结论 3 则由第 3.2.3 节的结果得出，因为当 h 充分小时，ζ^h 与 ζ重合。

为证明定理 2.3 中的 4.，我们先考虑 (i)。

(i) 的证明。为简化记号，我们用 h_i 表示 h。用 $U^{\sharp h}{}_{(u;\tau,\xi)}$ 表示将 ζ 替换为 ζ^h后的黎曼问题 (2.5) 的解。显然,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\vartheta}\int_{\xi-\hat\lambda\vartheta}^{\xi+\hat\lambda\vartheta}\left\|\left(S^{\zeta}_{\vartheta}u(\tau)\right)(x)-U^{\sharp}_{(u;\tau,\xi)}(\vartheta,x)\right\|\mathrm{d}x && (3.45)\\
\leq\ & \frac{1}{\vartheta}\int_{\xi-\hat\lambda\vartheta}^{\xi+\hat\lambda\vartheta}\left\|\left(S^{\zeta}_{\vartheta}u(\tau)\right)(x)-\left(S^{\zeta^h}_{\vartheta}u(\tau)\right)(x)\right\|\mathrm{d}x\\
& +\frac{1}{\vartheta}\int_{\xi-\hat\lambda\vartheta}^{\xi+\hat\lambda\vartheta}\left\|\left(S^{\zeta^h}_{\vartheta}u(\tau)\right)(x)-U^{\sharp h}_{(u;\tau,\xi)}(\vartheta,x)\right\|\mathrm{d}x\\
& +\frac{1}{\vartheta}\int_{\xi-\hat\lambda\vartheta}^{\xi+\hat\lambda\vartheta}\left\|U^{\sharp h}_{(u;\tau,\xi)}(\vartheta,x)-U^{\sharp}_{(u;\tau,\xi)}(\vartheta,x)\right\|\mathrm{d}x\,. && (3.46)
\end{aligned}$$

上文右端的第一个积分在极限 $h\to 0$ 下趋于零。为了估计第二个积分，使用 (3.38) 和 [8, 公式（4.29）]，得到

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\vartheta}\int_{\xi-\hat\lambda\vartheta}^{\xi+\hat\lambda\vartheta}\left\|\left(S^{\zeta^h}_{\vartheta}u(\tau)\right)(x)-U^{\sharp h}_{(u;\tau,\xi)}(\vartheta,x)\right\|\mathrm{d}x\\
\leq\ & \mathcal{O}(1)\left(\mathrm{TV}\left(u(\tau),]\xi-2\hat\lambda\vartheta,\xi[\cup]\xi,\xi+2\hat\lambda\vartheta[\right)+\mathrm{TV}\left(\zeta^h,]\xi-2\hat\lambda\vartheta,\xi[\cup]\xi,\xi+2\hat\lambda\vartheta[\right)\right)\\
\leq\ & \mathcal{O}(1)\left(\mathrm{TV}\left(u(\tau),]\xi-2\hat\lambda\vartheta,\xi[\cup]\xi,\xi+2\hat\lambda\vartheta[\right)+\mathrm{TV}\left(\zeta,]\xi-2\hat\lambda\vartheta,\xi[\cup]\xi,\xi+2\hat\lambda\vartheta[\right)+h\right).
\end{aligned}$$

在极限过程中，先令 $h\to 0$，再令 $\vartheta\to 0$，上面的后一项趋于零 .

关于第三项 (3.46)，使用引理 3.10，得到

$$\frac{1}{\vartheta}\int_{\xi-\hat\lambda\vartheta}^{\xi+\hat\lambda\vartheta}\left\|U^{\sharp h}_{(u;\tau,\xi)}(\vartheta,x)-U^{\sharp}_{(u;\tau,\xi)}(\vartheta,x)\right\|\mathrm{d}x\leq\mathcal{O}(1)\left(\left\|\zeta^h(\xi)-\zeta(\xi)\right\|+\left\|\zeta^h(\xi+)-\zeta(\xi+)\right\|\right)$$

它 v 随着 $h\to 0$ 趋于零，因为 ζ^h 到 ζ 一致收敛，从而完成 (i) 的证明 .

(ii) 的证明。现在我们来证明定理 2.3 第 4 项中的 (ii)。以下定义和预备结果将在下文中用到。

回顾（1.6）中的记号。对于 $i=1$，.....，N_h，设

$$\begin{aligned}
\delta_i &= \|\mu\|\left(]x_{i-1},x_i[\right); && (3.47)\\
v_i &= \begin{cases}\frac{1}{\delta_i}\,\mu\left(]x_{i-1},x_i[\right) & \delta_i\neq 0;\\ 0 & \delta_i=0;\end{cases} && (3.48)\\
v^h &= \sum_{i=1}^{N_h-1} v_i\,\chi_{]x_{i-1},x_i]}+v_{N_h}\,\chi_{]x_{N_h-1},+\infty[}\,. && (3.49)
\end{aligned}$$

还要注意，对于 $\delta_i\neq 0$, $v_i=\frac{1}{\delta_i}\int_{]x_{i-1},\ x_i[}v\,\mathrm{d}\|\mu\|$。

命题：我们有收敛

$$\lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}}\left\|v^h-v\right\|\mathrm{d}\|\mu\|=0\,. \tag{3.50}$$

事实上，回顾（3.40），

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}}\left\|v^h(x)-v(x)\right\|\mathrm{d}\|\mu\|(x)\\
=\;&\sum_{i=1}^{N_h}\int_{]x_{i-1},x_i[}\left\|v(x)-v_i\right\|\mathrm{d}\|\mu\|(x)\\
=\;&\sum_{\substack{i=1,N_h\\ \delta_i\neq 0}}\frac{1}{\delta_i}\int_{(]x_{i-1},x_i[)^2}\left\|v(x)-v(y)\right\|\mathrm{d}(\|\mu\|\otimes\|\mu\|)\,(x,y)\\
=&\sum_{\substack{i=1,N_h\\ \delta_i\neq 0}}\frac{1}{\delta_i}\int_{(]x_{i-1},x_i[)^2}\left[\left\|v(x)-\tilde v^h(x)\right\|+\left\|\tilde v^h(y)-v(y)\right\|\right]\mathrm{d}(\|\mu\|\otimes\|\mu\|)\,(x,y) \qquad (3.51)\\
&+\sum_{\substack{i=1,N_h\\ \delta_i\neq 0}}\frac{1}{\delta_i}\int_{(]x_{i-1},x_i[)^2}\left\|\tilde v^h(x)-\tilde v^h(y)\right\|\mathrm{d}(\|\mu\|\otimes\|\mu\|)\,(x,y)\,. \qquad (3.52)
\end{aligned}$$

T（3.51）中积分里的两项可用同样的方法进行估计，利用（3.40），　　s

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{i=1,N_h\\ \delta_i\neq 0}}\int_{(]x_{i-1},x_i[)^2}\frac{1}{\delta_i}\left\|v(x)-\tilde v^h(x)\right\|\mathrm{d}(\|\mu\|\otimes\|\mu\|)(x,y)\\
=\;&\sum_{\substack{i=1,N_h\\ \delta_i\neq 0}}\int_{]x_{i-1},x_i[}\left\|v(x)-\tilde v^h(x)\right\|\mathrm{d}\|\mu\|(x)\\
=\;&\int_{\mathbb{R}}\left\|v(x)-\tilde v^h(x)\right\|\mathrm{d}\|\mu\|(x)\\
\le\;&\int_{\{x\in\mathbb{R}:\,v(x)\neq\tilde v^h(x)\}}\left(\|v(x)\|+\left\|\tilde v^h(x)\right\|\right)\mathrm{d}\|\mu\|(x)\\
\le\;&2\,h\\
\to\;&0\quad\text{ as } h\to 0\,.
\end{aligned}$$

现在我们利用 (v) 对项 (3.52) 进行估计：

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{i=1,N_h\\ \delta_i\neq 0}}\frac{1}{\delta_i}\int_{(]x_{i-1},x_i[)^2}\left\|\tilde v^h(x)-\tilde v^h(y)\right\|\mathrm{d}(\|\mu\|\otimes\|\mu\|)(x,y)\\
\le\;&h\sum_{\substack{i=1,N_h\\ \delta_i\neq 0}}\frac{1}{\delta_i}\int_{(]x_{i-1},x_i[)^2}\mathrm{d}(\|\mu\|\otimes\|\mu\|)(x,y)\\
\le\;&h\sum_{i=1}^{N_h}\delta_i\\
\le\;&h\,\|\mu\|(\mathbb{R})
\end{aligned}$$

$$\to \quad 0 \quad \text{as } h \to 0\,,$$

从而完成该命题的证明。

对所有实数集 $\mathbb{R}$ 的博雷尔子集 E，先令 $m = g$ 如 (2.7) 中的定义，再令 $m = g^h$，其中 g^h 已定义，将引理 3.17 应用于 $A = Df\left(\zeta(\xi)\ u(\tau,\xi)\right)$，可得

$$g^h(E) = \sum_{y\in\mathcal{I}(\zeta^h)} \left(\Xi\left(\zeta^h(y+), \zeta^h(y), u(\tau,\xi)\right) - f\left(\zeta^h(y+), u(\tau,\xi)\right) + f\left(\zeta^h(y), u(\tau,\xi)\right)\right) \delta_y(E)$$

并写作

$$\begin{aligned} U^{\flat}_{(u;\tau,\xi)}(\vartheta, x) &= \sum_{i=1}^{n} l_i \cdot \left(u(\tau, x-\lambda_i\,\vartheta) + \frac{1}{\lambda_i}\int_{x-\lambda_i\vartheta}^{x} \mathrm{d}g \right) r_i, \\ U^{\flat h}_{(u;\tau,\xi)}(\vartheta, x) &= \sum_{i=1}^{n} l_i \cdot \left(u(\tau, x-\lambda_i\,\vartheta) + \frac{1}{\lambda_i}\int_{x-\lambda_i\vartheta}^{x} \mathrm{d}g^h \right) r_i. \end{aligned} \tag{3.53}$$

ˆ 与 (3.45) 类似，取 $\mathbb{R}$ 中满足 $a < \xi < b$ 的 a、b、ξ，令 $\vartheta \in]0, (b-a)/\lambda[$，并计算

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\vartheta}\int_{a+\hat{\lambda}\vartheta}^{b-\hat{\lambda}\vartheta} \left\| \left(S^{\zeta}_{\vartheta} u(\tau)\right)(x) - U^{\flat}_{(u;\tau,\xi)}(\vartheta, x) \right\| \mathrm{d}x \\ \le\ & \frac{1}{\vartheta}\int_{a+\hat{\lambda}\vartheta}^{b-\hat{\lambda}\vartheta} \left\| \left(S^{\zeta}_{\vartheta} u(\tau)\right)(x) - \left(S^{\zeta^h}_{\vartheta} u(\tau)\right)(x) \right\| \mathrm{d}x && (3.54) \\ & + \frac{1}{\vartheta}\int_{a+\hat{\lambda}\vartheta}^{b-\hat{\lambda}\vartheta} \left\| \left(S^{\zeta^h}_{\vartheta} u(\tau)\right)(x) - U^{\flat h}_{(u;\tau,\xi)}(\vartheta, x) \right\| \mathrm{d}x && (3.55) \\ & + \frac{1}{\vartheta}\int_{a+\hat{\lambda}\vartheta}^{b-\hat{\lambda}\vartheta} \left\| U^{\flat h}_{(u;\tau,\xi)}(\vartheta, x) - U^{\flat}_{(u;\tau,\xi)}(\vartheta, x) \right\| \mathrm{d}x\,. && (3.56) \end{aligned}$$

根据上述对 S 的构造，第一项 (3.54) 在 $h \to 0$ 时趋于零。

由于 ζ^h 是分段常数，要对 (3.55) 进行估计，我们可以使用定理 2.3 的 (ii)，其在分段常值情形下已于第 3.2.3 节证明：

$$\begin{aligned} [(3.55)] &\le C\left[\mathrm{TV}\left(u(\tau),]a,b[\right) + \mathrm{TV}\left(\zeta^h,]a,b[\right)\right]^2 \\ &\le C\left[\mathrm{TV}\left(u(\tau),]a,b[\right) + h + \mathrm{TV}\left(\zeta,]a,b[\right)\right]^2 \end{aligned}$$

w这里我们使用了 [8, 公式（4.29）]。取极限 $h \to 0$，即可得到所需的估计。

利用 (3.53) 计算 (3.56)，得

$$\begin{aligned} [(3.56)] &= \int_{a+\hat{\lambda}\vartheta}^{b-\hat{\lambda}\vartheta} \left\| \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} l_i \cdot \int_{x-\lambda_i\vartheta}^{x} \left(\mathrm{d}g - \mathrm{d}g^h\right) \right\| \mathrm{d}x \\ &\le \mathcal{O}(1) \sum_{i=1}^{n} \int_{a+\hat{\lambda}\vartheta}^{b-\hat{\lambda}\vartheta} \left\| \int_{x-\lambda_i\vartheta}^{x} \left(\mathrm{d}g - \mathrm{d}g^h\right) \right\| \mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

现在我们估计后面的积分，假设 x 和 $x - \lambda_i\vartheta$ 都不是 ζ 或 ζ^h 的间断点。固定 i，并将端点为 x 和 $x - \lambda_i\vartheta$ 的实区间称为 J。

$$\left\| \int_J \left(\mathrm{d}g - \mathrm{d}g^h\right) \right\|$$

$$
\begin{aligned}
&= \Bigg\| \sum_{\bar{x}\in\mathcal{I}(\zeta)\cap J} \Big(\Xi\left(\zeta(\bar{x}+),\zeta(\bar{x}),u(\tau,\xi)\right) - f\left(\zeta(\bar{x}+),u(\tau,\xi)\right) + f\left(\zeta(\bar{x}),u(\tau,\xi)\right)\Big) \\
&\quad + \int_J \Big(D^+_{v(x)}\Xi\left(\zeta(x),\zeta(x),u(\tau,\xi)\right) - D_z f\left(\zeta(x),u(\tau,\xi)\right)v(x)\Big)\,\mathrm{d}\|\mu\|(x) \\
&\quad - \sum_{\bar{x}\in\mathcal{I}(\zeta^h)\cap J} \Big(\Xi\left(\zeta^h(\bar{x}+),\zeta^h(\bar{x}),u(\tau,\xi)\right) - f\left(\zeta^h(\bar{x}+),u(\tau,\xi)\right) + f\left(\zeta^h(\bar{x}),u(\tau,\xi)\right)\Big)\Bigg\| \\
&\leq \mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2+\mathcal{E}_3+\mathcal{E}_4+\mathcal{E}_5+\mathcal{E}_6\,.
\end{aligned}
$$

项 $\mathcal{E}_1$、.....、 $\mathcal{E}_6$ 将在下文定义。

在第一项中，利用 (ii) 中 $\mathcal{I}^h$ 的定义，我们证明 $\mathcal{I}^h$ 中不属于 ζ 的所有跳跃之和为 $\mathcal{O}(1)\,h$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_1 &= \Bigg\| \sum_{\bar{x}\in(\mathcal{I}(\zeta)\setminus\mathcal{I}^h)\cap J} \Big(\Xi\left(\zeta(\bar{x}+),\zeta(\bar{x}),u(\tau,\xi)\right) - f\left(\zeta(\bar{x}+),u(\tau,\xi)\right) + f\left(\zeta(\bar{x}),u(\tau,\xi)\right)\Big)\Bigg\| \\
&\leq \mathcal{O}(1) \sum_{\bar{x}\in\mathcal{I}(\zeta)\setminus\mathcal{I}^h} \left\|\Delta\zeta(\bar{x})\right\| && \text{[By } \textbf{(f.1)}\text{, } \textbf{(}\boldsymbol{\Xi}\textbf{.1)} \text{ and } \textbf{(}\boldsymbol{\Xi}\textbf{.3)}\text{]} \\
&\leq \mathcal{O}(1)\,h && \text{[By } \textbf{(ii)}\text{]} \\
&\to 0 \quad \text{as } h\to 0\,.
\end{aligned}
$$

现在，我们估计在 $\mathcal{I}^h$ 中的跳跃 $\bar{x}$ 里，从 $\zeta^h(\bar{x})$ 变为 $\zeta(\bar{x})$ 所产生的影响，记 $\bar{\bar{x}}$ 为 $\mathcal{I}(\zeta^h)$ 中位于 $\bar{x}$ 之前的点，并利用 (3.42):

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_2 &= \Bigg\| \sum_{\bar{x}\in\mathcal{I}(\zeta)\cap\mathcal{I}^h\cap J} \Big[\Xi\left(\zeta^h(\bar{x}+),\zeta(\bar{x}),u(\tau,\xi)\right) - f\left(\zeta^h(\bar{x}+),u(\tau,\xi)\right) + f\left(\zeta(\bar{x}),u(\tau,\xi)\right) \\
&\qquad -\Xi\left(\zeta^h(\bar{x}+),\zeta^h(\bar{x}),u(\tau,\xi)\right) + f\left(\zeta^h(\bar{x}+),u(\tau,\xi)\right) - f\left(\zeta^h(\bar{x}),u(\tau,\xi)\right)\Big]\Bigg\| \\
&\leq \mathcal{O}(1) \sum_{\bar{x}\in\mathcal{I}(\zeta)\cap\mathcal{I}^h\cap J} \left\|\zeta(\bar{x})-\zeta^h(\bar{x})\right\| && \text{[By } \textbf{(f.1)} \text{ and } \textbf{(}\boldsymbol{\Xi}\textbf{.1)}\text{]} \\
&\leq \mathcal{O}(1) \sum_{\bar{x}\in\mathcal{I}(\zeta)\cap\mathcal{I}^h\cap J} \left\|\zeta(\bar{x})-\zeta(\bar{\bar{x}}+)\right\| && \text{[By (3.42)]} \\
&\leq \mathcal{O}(1) \sum_{\bar{x}\in\mathcal{I}(\zeta)\cap\mathcal{I}^h\cap J} \mathrm{TV}\left(\zeta;]\bar{\bar{x}},\bar{x}[\right) && \text{[By 3.41]} \\
&\leq \mathcal{O}(1) \sum_{\bar{x}\in\mathcal{I}(\zeta)\cap\mathcal{I}^h\cap J} \frac{h}{1+\sharp\mathcal{I}^h} && \text{[By } \textbf{(iii)}\text{]} \\
&\leq \mathcal{O}(1)\,h \\
&\to 0 \quad \text{as } h\to 0\,.
\end{aligned}
$$

Call $\bar{\bar{x}}$ $\mathcal{I}(\zeta^h)$中位于 $\bar{x}$之前的点。在 $\mathcal{I}^h$之外，测度 μ 逼近 th e

测度 $D\zeta$，使得 $\zeta^h(\bar{x}) + \bar{\delta}\,\bar{v}$ 逼近 $\zeta^h(\bar{x}+)$，如(3.48)–(3.49)所示：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_3 &= \Bigg\| \sum_{\bar{x}\in\mathcal{I}(\zeta^h)\cap J\setminus\mathcal{I}^h} \Bigg[\Xi\left(\zeta^h(\bar{x}+), \zeta^h(\bar{x}), u(\tau,\xi)\right) - f\left(\zeta^h(\bar{x}+), u(\tau,\xi)\right) + f\left(\zeta^h(\bar{x}), u(\tau,\xi)\right) \\
&\qquad - \Xi\left(\zeta^h(\bar{x}) + \bar{\delta}\bar{v}, \zeta^h(\bar{x}), u(\tau,\xi)\right) + f\left(\zeta^h(\bar{x}) + \bar{\delta}\bar{v}, u(\tau,\xi)\right) - f\left(\zeta^h(\bar{x}), u(\tau,\xi)\right) \Bigg] \Bigg\| \\
&\le \mathcal{O}(1) \sum_{\bar{x}\in\mathcal{I}(\zeta^h)\cap J\setminus\mathcal{I}^h} \left\| \zeta^h(\bar{x}+) - \zeta^h(\bar{x}) - \mu\left(]\bar{\bar{x}}, \bar{x}[\right) \right\| \\
&= \mathcal{O}(1) \sum_{\bar{x}\in\mathcal{I}(\zeta^h)\cap J\setminus\mathcal{I}^h} \left\| \zeta^h(\bar{x}+) - \zeta^h(\bar{\bar{x}}+) - \mu\left(]\bar{\bar{x}}, \bar{x}[\right) \right\| \\
&= \mathcal{O}(1) \sum_{\bar{x}\in\mathcal{I}(\zeta^h)\cap J\setminus\mathcal{I}^h} \left\| D\zeta\left(]\bar{\bar{x}}, \bar{x}]\right) - \mu\left([\bar{\bar{x}}, \bar{x}]\right) \right\| \\
&\le \mathcal{O}(1) \sum_{\bar{x}\notin\mathcal{I}^h} \left\| \Delta\zeta(\bar{x}) \right\| \\
&\le \mathcal{O}(1)\, h \\
&\to 0 \quad \text{as } h \to 0\,.
\end{aligned}
$$

利用引理 3.19，ζ^h 中的跳跃处与 $\mathcal{I}^h$ 中的跳跃处之差可通过导数近似表示：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_4 &= \Bigg\| \sum_{\bar{x}\in\mathcal{I}(\zeta^h)\cap J\setminus\mathcal{I}^h} \Bigg[\Xi\left(\zeta^h(\bar{x}) + \bar{\delta}\bar{v}, \zeta^h(\bar{x}), u(\tau,\xi)\right) - f\left(\zeta^h(\bar{x}) + \bar{\delta}\bar{v}, u(\tau,\xi)\right) + f\left(\zeta^h(\bar{x}), u(\tau,\xi)\right) \\
&\qquad - \bar{\delta}\left(D^+_{\bar{v}}\Xi\left(\zeta^h(\bar{x}), \zeta^h(\bar{x}), u(\tau,\xi)\right) - D_z f\left(\zeta^h(\bar{x}), u(\tau,\xi)\right)\bar{v} \right) \Bigg] \Bigg\| \\
&\le \mathcal{O}(1) \sum_{\bar{x}\in\mathcal{I}(\zeta^h)\cap J\setminus\mathcal{I}^h} \sigma(\bar{\delta})\,\bar{\delta} \\
&\le \mathcal{O}(1)\,\sigma(h)\ \mathrm{TV}\left(\zeta\right) \\
&\to 0 \quad \text{as } h \to 0\,.
\end{aligned}
$$

若 $\bar{x} \in \mathcal{I}^h$, $\|\mu\|\left(]\bar{\bar{x}}, \bar{x}[\right) = \bar{\delta}$ 可忽略，则由 (iii)、(3.47)、(3.48) 和 (3.49) 可得，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_5 &= \Bigg\| \sum_{\bar{x}\in\mathcal{I}(\zeta^h)\cap J\setminus\mathcal{I}^h} \Bigg[\bar{\delta}\left(D_{\bar{v}}\Xi\left(\zeta^h(\bar{x}), \zeta^h(\bar{x}), u(\tau,\xi)\right) - D_z f\left(\zeta^h(\bar{x}), u(\tau,\xi)\right)\bar{v} \right) \\
&\qquad - \int_J \left(D^+_{v^h(x)}\Xi\left(\zeta^h(x), \zeta^h(x), u(\tau,\xi)\right) - D_z f\left(\zeta^h(x), u(\tau,\xi)\right) v^h(x) \right) \mathrm{d}\|\mu\|(x) \Bigg] \Bigg\| \\
&\le \mathcal{O}(1) \sum_{\bar{x}\in\mathcal{I}^h} \bar{\delta} + \mathcal{O}(1)\, h
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \mathcal{O}(1) \sum_{\bar{x}\in\mathcal{I}^h} \frac{h}{1+\sharp\mathcal{I}^h} + \mathcal{O}(1)\, h \\
&\to 0 \quad \text{as } h \to 0\,.
\end{aligned}
$$

现在我们利用 $D_v\Xi$ 的 Lipschitz 连续性（见 **(Ξ.4)**）和 $D_z f$ 的 Lipschitz 连续性（见 **(f.1)**），以及 $\zeta^h \to \zeta$ 的一致收敛和由 **(3.50)** 得到的 $v^h \to v$ 收敛：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_6 &= \left\| \int_J \left(D^+_{v^h(x)} \Xi \left(\zeta^h(x), \zeta^h(x), u(\tau,\xi) \right) - D_z f \left(\zeta^h(x), u(\tau,\xi) \right) v^h(x) \right) \mathrm{d}\|\mu\|(x) \right. \\
&\quad \left. - \int_J \left(D^+_{v(x)} \Xi \left(\zeta(x), \zeta(x), u(\tau,\xi) \right) - D_z f \left(\zeta(x), u(\tau,\xi) \right) v(x) \right) \mathrm{d}\|\mu\|(x) \right\| \\
&\leq \mathcal{O}(1) \int_J \left(\left\| \zeta(x) - \zeta^h(x) \right\| + \left\| v(x) - v^h(x) \right\| \right) \mathrm{d}\|\mu\|(x) \\
&\to 0 \quad \text{as } h \to 0\,.
\end{aligned}
$$

(ii) 的证明完成。

现在证明，对于几乎处处的 t，满足 **(i)** 和 **(ii)** 的 $\mathbf{L}^1$–Lipschitz 连续映射 u 实际上是 S^ζ 的一条轨道。按照 $[5, \S\, 9.2]$, 中使用 $[5, \text{定理 } 2.9]$ 的方式，对于任意 a、$b \in \mathbb{R}$，其中 $a < b$

$$
\begin{aligned}
&\left\| u(t) - S^\zeta_t u(0) \right\|_{\mathbf{L}^1([a+\hat{\lambda}\, t, b-\hat{\lambda} t];\mathbb{R}^n)} \\
&\leq L \int_0^t \liminf_{h\to 0+} \frac{1}{h} \left\| u(\tau+h) - S^\zeta_h u(\tau) \right\|_{\mathbf{L}^1([a+\hat{\lambda}\,(\tau+h), b-\hat{\lambda}(\tau+h)];\mathbb{R}^n)} \mathrm{d}\tau\,.
\end{aligned}
$$

˄设 τ 使得 **(i)** 和 **(ii)** 成立。固定 $\varepsilon > 0$，并选择 $x_0 = a + \lambda\tau$、$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots <$˄ $x_{N-1} < x_N$、$x_N = b - \lambda\tau$，使得对于 $i = 1$、.....、N,

$$
\mathrm{TV}\left(u(\tau);]x_{i-1}, x_i[\right) + \mathrm{TV}\left(\zeta;]x_{i-1}, x_i[\right) < \varepsilon\,.
$$

那么，当 $h > 0$ 充分小时，且对于 $\xi_i \in]x_{i-1}$、$x_i[$

$$
\begin{aligned}
&\left\| u(\tau+h) - S^\zeta_h u(\tau) \right\|_{\mathbf{L}^1([a+\hat{\lambda}\,(\tau+h), b-\hat{\lambda}(\tau+h)];\mathbb{R}^n)} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}+\hat{\lambda}\, h}^{x_i - \hat{\lambda}\, h} \left\| u(\tau+h, x) - \left(S^\zeta_h u(\tau) \right)(x) \right\| \mathrm{d}x \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N-1} \int_{x_i-\hat{\lambda}\, h}^{x_i+\hat{\lambda}\, h} \left\| u(\tau+h, x) - \left(S^\zeta_h u(\tau) \right)(x) \right\| \mathrm{d}x \\
&= \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}+\hat{\lambda}\, h}^{x_i - \hat{\lambda}\, h} \left\| u(\tau+h, x) - U^\flat_{(u;\tau,\xi_i)}(h, x) \right\| \mathrm{d}x \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}+\hat{\lambda}\, h}^{x_i - \hat{\lambda}\, h} \left\| U^\flat_{(u;\tau,\xi_i)}(h, x) - \left(S^\zeta_h u(\tau) \right)(x) \right\| \mathrm{d}x \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N-1} \int_{x_i-\hat{\lambda}\, h}^{x_i+\hat{\lambda}\, h} \left\| u(\tau+h, x) - U^\sharp_{(u;\tau,x_i)}(h, x) \right\| \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$+\sum_{i=1}^{N-1}\int_{x_i-\hat\lambda\, h}^{x_i+\hat\lambda\, h}\left\|U^\sharp_{(u;\tau,x_i)}(h,x)-\left(S_h^\zeta u(\tau)\right)(x)\right\|\mathrm{d}x\ .$$

由于 u 和 S^ζ 均满足 (ii)，因此可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h}\left\|u(\tau+h)-S_h^\zeta u(\tau)\right\|_{\mathbf{L}^1([a+\hat\lambda\, t,b-\hat\lambda t];\mathbb{R}^n)}\\
\leq\ & \mathcal{O}(1)\sum_{i=1}^{N}\Big(\mathrm{TV}\left(u(\tau);]x_{i-1},x_i[\right)+\mathrm{TV}\left(\zeta;]x_{i-1},x_i[\right)\Big)^2\\
&+\sum_{i=1}^{N-1}\frac{1}{h}\int_{x_i+\hat\lambda\, h}^{x_i-\hat\lambda\, h}\left\|u(\tau+h,x)-U^\sharp_{(u;\tau,x_i)}(h,x)\right\|\mathrm{d}x\\
&+\sum_{i=1}^{N-1}\frac{1}{h}\int_{x_i+\hat\lambda\, h}^{x_i-\hat\lambda\, h}\left\|U^\sharp_{(u;\tau,x_i)}(h,x)-\left(S_h u(\tau)\right)(x)\right\|\mathrm{d}x\ .
\end{aligned}$$

u 和 S^ζ 均满足 (i)，因此在 $\liminf_{h\to 0}$ 中，后两项为零。于是，

$$\begin{aligned}
&\liminf_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\|u(\tau+h)-S_h^\zeta u(\tau)\right\|_{\mathbf{L}^1([a+\hat\lambda\, t,b-\hat\lambda t];\mathbb{R}^n)}\\
\leq\ & \mathcal{O}(1)\sum_{i=1}^{N}\Big(\mathrm{TV}\left(u(\tau);]x_{i-1},x_i[\right)+\mathrm{TV}\left(\zeta;]x_{i-1},x_i[\right)\Big)^2\\
\leq\ & \mathcal{O}(1)\,\varepsilon\,\Big(\mathrm{TV}\left(u(\tau)\right)+\mathrm{TV}\left(\zeta\right)\Big)\ .
\end{aligned}$$

由于 ε 是任意的，上述左端的项为零。利用 a 和 b 的任意性即可完成证明。□

致谢。第一作者和第二作者的部分工作得到 GNAMPA 2022 项目“演化方程：适定性、控制与应用”的资助。第三作者的工作由德国研究联合会（DFG）项目编号 320021702/GRK2326“能量、熵与耗散动力学”（EDDy）资助。

参考文献

[1] D. Amadori、L. Gosse 和 G. Guerra. 双曲平衡律系统的全局 BV 熵解与唯一性. Arch. Ration. Mech. Anal., 162(4):327–366, 2002年.[2] P. Baiti 和 H. K. Jenssen. 关于前沿追踪算法. J. Math. Anal. Appl., 217(2):395–404, 1998.[3] S. Bianchini 和 R. M. Colombo. 关于标准黎曼半群的稳定性. 《美国数学会会刊》 , 130(7):1961–1973, 2002 年 .[4] A. Bressan. 格利姆方法的唯一极限 . Arch. Rational Mech. Anal., 130(3):205–230, 1995年.[5] A. Bressan. 双曲守恒律，牛津数学及其应用讲座系列第20卷. 牛津大学出版社，牛津，2000年. 一维柯西问题。

[6] A. Bressan、T.-P. Liu 和 T. Yang. L^1 守恒律的 $n \times n$ 稳定性估计. Arch. Ration. Mech. Anal., 149(1):1–22, 1999年.[7] R. M. Colombo 和 G. Guerra. 关于守恒律的稳定性泛函. Nonlinear Anal., 69(5-6):1581–1598, 2008年.[8] R. M. Colombo、G. Guerra 和 Y. Holle. 流体力学中的非保守乘积. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2022年.[9] R. M. Colombo 和 F. Marcellini. p-系统中的光滑与不连续连接点. J. Math. Anal. Appl., 361(2):440–456, 2010年.[10] C. M. Dafermos. 守恒律初值问题解的多边形近似. J. Math. Anal. Appl., 38:33–41, 1972年.[11]C. M. Dafermos. 连续介质物理学中的双曲守恒律，第325卷，Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften /数学科学基础原理/. Springer-Verlag，柏林，第四版，2016年.[12] G. Dal Maso、P. G. Lefloch 和 F. Murat. 非保守乘积的定义与弱稳定性. J. Math. Pures Appl. (9), 74(6):483–548, 1995年.[13] G. Guerra、F. Marcellini 和 V. Schleper. 带可积无界源项的平衡律. SIAM J. Math. Anal., 41(3):1164–1189, 2009年.[14] H. Holden 和 N. H. Risebro. 双曲守恒律的前沿追踪，第152卷，应用数学科学. Springer-Verlag，纽约，2002年.[15] D. Kr¨oner 和 M. D. Thanh. 变截面喷管中可压缩流的数值解. SIAM J. Numer. Anal., 43(2):796–824, 2005年.[16] P. D. Lax. 双曲守恒律系统 II. Comm. Pure Appl. Math., 10:537–566, 1957年.[17] P. G. Lefloch 和 M. D. Thanh. 不连续截面喷管中流体流动的黎曼问题. Commun. Math. Sci., 1(4):763–797, 2003年.[18] P. G. Lefloch 和 A. E. Tzavaras. 弱极限的表示与非保守乘积的定义. SIAM J. Math. Anal., 30(6):1309–1342, 1999年.[19] X. Liu. 用于渠道中带干湿界面的浅水流的良平衡且保正性数值模型. J. Sci. Comput., 85(3):第60号论文，22页，2020年.[20] W. Rudin. 实分析与复分析. McGraw-Hill Book Co.，纽约，第三版，1987年.[21] W.-A. Yong. 一种简明的 Glimm 相互作用估计方法. Appl. Math. Lett., 12(2):29–34, 1999年。