arXiv:2304.00588v1 [math.CO] 2 Apr 2023

含有牵连着法的非平凡规则集的完整解

Urban Larsson[1]印度孟买印度理工学院**RichardJ. Nowakowski**[2]加拿大达尔豪斯大学数学与统计系**CarlosP. Santos**[3]葡萄牙*FCT NOVA*数学与应用中心（*NovaMath*）

摘要

组合博弈论通常研究具有完美信息、由两名玩家交替着法的序贯规则集。有些规则集包含牵连着法，会打破交替游戏公理，和／或限制析取和分量中另一名玩家的可选着法。尽管经典著作$Winning\ \ Ways$分析过一些例子，但此类规则集通常不属于既有正常玩法数学理论的研究范围。在数学科学研究所（MSRI）举办的首届组合博弈研讨会上，John H. Conway 提议，应努力设计一个含有牵连着法且能够得到完整分析的非平凡规则集。最近，Larsson、Nowakowski 和 Santos 提出了一种更一般的理论——仿射公平博弈，使得对含有牵连着法的公平规则集进行数学分析成为可能。本文运用这一理论，给出一个含有牵连着法的非平凡规则集的完整解。

1 引言

组合博弈析取和理论由 Conway [7]提出，并由 Berlekamp、Conway 和 Guy 在《Winning Ways》[3]中进一步发展。该理论的核心在于，如果一个规则集可以分解为多个组件，那么分析就会变得更容易。每个组件都被赋予一个理论值，这是一个不依附于规则集的抽象概念。一个局面是各个单独组件的和。一个重要事实是，玩家在整个局面中交替行动，但在各个组件中却未必如此。

Winning Ways 探讨了许多本理论未能全面涵盖的规则集。第12章有一半内容涉及带有牵连着法的公平规则集。文中没有给出相关理论。文中讨论了一些规则集，但没有一个得到求解。若存在牵制着法，在某个条件满足时，后手的可选后继局面会

[1]larsson@iitb.ac.in[2]r.nowakowski@dal.ca[3]在 UIDB/00297/2020 和 UIDP/00297/2020 项目资助范围内；cmf.santos@fct.unl.pt

减少——例如，牵制着法可能会迫使对手在某个特定堆上行棋。本文借助符号 8（左方无条件获胜）和 8（无条件的右方获胜）来表示牵连着法的博弈形式。特别值得关注的是月值 $\mathbb{C} = \{\infty \mid \infty\}$，其中每位玩家都有一个终局着法。这属于一般理论 [13], ，后文将进一步阐述。关于术语，特别说明如下：由于月亮是唯一新增的仿射值 [13] （附加于尼姆数之上），我们将广义格伦迪值称为格伦迪值 。

作者指出，牵制着法也出现在 NIMSTRING （ DOTS AND BOXES的无偏版本，见第16章）及其他规则集中。在这些特定情况下，Winning Ways 的作者使用了补偿着法这一名称，指玩家“继续进行”着法，保留行棋权。给定一个游戏 G，此类着法的形式为 $G^L = \{\infty|G^{LR}\}$ 或$G^R = \{G^{RL}|\infty\}$。一旦无穷符号表示出致命威胁，就会自动从 G “跳转”到 G^{LR} 或 G^{RL}。这些着法也可以看作是减少可选后继局面的着法，因为玩家被迫以某种特定方式在局部作出应对，以保护自己免受无限大的威胁。因此，补偿着法是牵制着法的特例。本文将补偿着法称为继续着法。

尽管 NIMSTRING 和 DOTS AND BOXES直到最近才受到 [2, 4, 11, 12],关注，但一般理论方面的进展甚微。只有两篇论文提及牵制着法：一篇是 1996, [16], ，对最多包含600,000个 TOP ENTAILS 堆进行了计算机分析，但未发现任何规律；另一篇是 2002, [8], ，探讨了 CHESS中的兵残局。在后一篇论文中，牵制着法可以避免立即输棋，但无需其他理论。

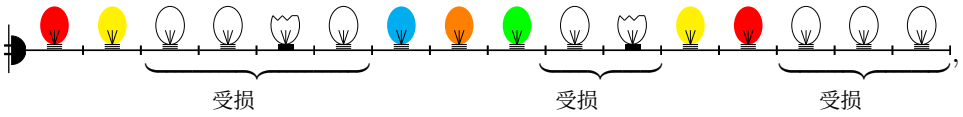
在1996年数学科学研究所（MSRI）举办的首届组合博弈研讨会上，John H. Conway 提议，应努力设计一种带有牵连着法且能够进行完整分析的非平凡规则集。本文介绍了CHRISTMAS LIGHTS’ FIXTURE，其中包含延续着法，并在第3节给出完整分析。

能够进行完整分析的一个原因是，在 [13], 中，我们证明了带有牵连着法（尤其是延续着法）的公平博弈可以纳入一种扩展公平常规玩法结构的统一理论。我们在第2节回顾仿射公平正常玩法理论。

1.1 CHRISTMAS LIGHTS’ FIXTURE

规则集 CHRISTMAS LIGHTS’ FIXTURE的灵感来自圣诞节期间。在一般的家庭住宅中，人们会用我们称为“固定子”的灯串来装饰圣诞树。使用一段时间后，固定子的一些部件往往会受损。

这些受损部件可能是损坏的灯泡插座（损坏的基），必须将其移除；也可能是损坏但可更换的灯泡。请注意，损坏但可更换的灯泡仍有一个形状完好的“带电”插座。例如，在这个固定子中



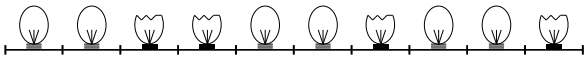
正常灯泡用彩色表示，可更换灯泡用透明表示，而损坏的插口则用损坏的灯泡和黑色插座表示。这个固定子有三个互不相交的受损区域。

圣诞节过后，这家人请来两名电工修理一个固定子。当然，他们想更换所有可更换灯泡，并拆除所有损坏的插座。此时比较清闲，于是两名电工玩起了下面这个轮流着法的游戏。由于他们只处理固定子上的受损部件，因此整个固定子可以看作一个析取和，其中各个不交分量是由正常灯泡隔开的受损部件。前面的例子对应于这个析取和



局面： CHRISTMAS LIGHTS' FIXTURE 局面是指包含若干受损部件的固定子。图1展示了一个可用于说明着法如何进行的受损部件示例。

图1：损坏的部分是析取和的一个组件。



着法：有三种类型的着法：

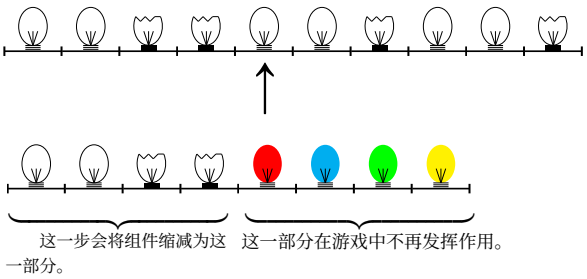
（1）如果电工选择一个组件上的可更换灯泡进行操作，她就会固定该灯泡以及该组件上位于其右侧的所有物品（远离插头的方向）。也就是说，电工会更换可更换灯泡，并移除损坏的

右侧的插座——图2。

图2：更换可更换灯泡。

之前

之后

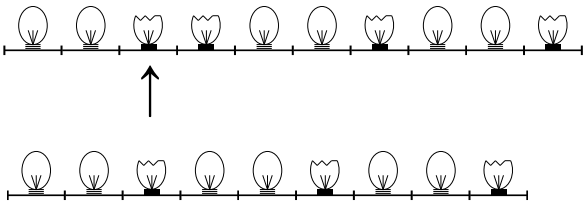


（2）如果电工选择一个损坏的插座进行操作，并且相邻灯泡并非都可更换（且插座通电），那么电工可以将其移除并把两端连接起来，将回合交给对手——图3。

图3：移除损坏的插口而不触电。

之前

之后

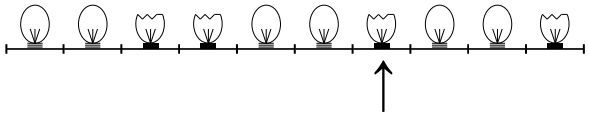


（3）然而，如果电工选择了一个损坏的插口进行操作，并且相邻灯泡都是损坏但可更换的，那么在连接两端时，电工会受到轻微电击。由于受到电击，电工必须再次移动，且可以在任意组件上进行移动。这就是延续移动规则。移除一个仅与一个或零个损坏但可更换灯泡相邻的损坏插口，不会触发电击，也不会触发延续移动——图4。

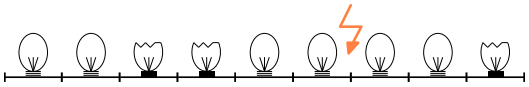
获胜条件：无法再更换损坏但可更换的灯泡，也无法再拆除损坏的灯泡插座的电工输掉游戏（正常玩法约定）。

图4：拆除损坏的插座时，受到轻微电击。

之前



之后（玩家必须再次在任意组件上着法）

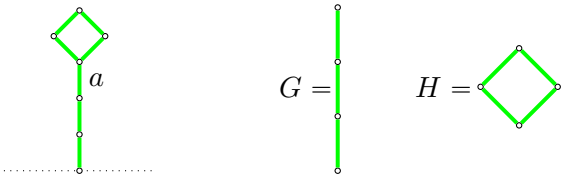


类型（1）的着法与 GREEN HACKENBUSH相似。事实上，两者之间还有更深层的联系。

2 理论回顾、阐述与一些记号

由于正常灯泡不参与游戏，今后我们将用插口 指损坏的插座，用灯泡 指损坏但可更换的灯泡。

本文的证明将重点讨论由灯泡和插座组成、令人联想到序数和的拼接。为引出这一概念，我们来考察经典规则集 GREEN HACKENBUSH，它与 NIM [3] 不同。下方的左方示意图展示了这样一个局面：移除标有a的边后，顶部还会消失另外四条边。在此例中，考虑右侧示意图所示的分解是合理的。



如果玩家在 G中移动，那么 H 就会消失；如果玩家在 H中移动，那么 G不会发生任何变化。直观来说，玩家在 G中移动时， H 就会被消除。由此引出两个游戏的序数和的概念G： H，玩家可以在 G （基）或 H （从属部分）中移动，另有一项限制：在 G 中的任何着法都会彻底消灭组件 H。其递归定义如下

$$G:H=\left\{G^{\mathcal{L}},G:H^{\mathcal{L}}\,|\,G^{\mathcal{R}},G:H^{\mathcal{R}}\right\}.$$

务必牢记冒号原理，即如果 $H = H'$，那么 $G : H = G : H'$；但一般而言， $H : G \neq H' : G$。许多研究都以序数和为关键概念（经典的 [1, 3, 7, 14], 或较新的 [5, 6, 9, 10]）。通常，首先要证明，只要 G和 H 在某种意义上是极小的，就能确定 $G: H$ 的值。接着，给定一个序数和的复合

$$G = G_0 : G_1 : \ldots : G_{n-2} : G_{n-1} : G_n, \text{ that is,}$$

$$G = G_0 : (G_1 : \ldots : (G_{n-2} : (G_{n-1} : G_n))),$$

$G_{n-1} : G_n$、$G_{n-2} : (G_{n-1} : G_n)$、$G_{n-3}\,(G_{n-2} : (G_{n-1} : G_n))$ 等局面的值，通过涉及已知极小情形的等价局面逐步计算得出。这个过程在数学上是正确的，因为从属部分的形式无关紧要，因此可以使用已知的极小形式，而不改变博弈值。最后，我们利用从右到左结合律，确定整个序数和的值。

在接下来的几节中，我们将给出 CHRISTMAS LIGHTS'FIXTURE的完整解，也就是一种快速计算任意组件的格伦迪值的方法。分析的关键在于寻找类似于 HACKENBUSH的序数和，但带有进位着法。第3.1小节中的定理1、3和5使我们能够确定三个重要极小情形的格伦迪值。第3.2小节将介绍冒号原理的一个版本——定理10。最后，第3.3小节通过一个示例展示本文所述理论的实际应用，并由此结束分析。

从现在起，我们将用简写表示插口和灯泡。本文采用的记号如下。

1. 由 n 个连续插座组成的序列记作 $|n|$。2. 由 n 个连续灯泡组成的序列记作n。[4]3. 可以进行串接。例如， $|3|\,4\,|2|$ 表示一个由 3 个连续插座、4 个连续灯泡、再加 2 个连续插座组成的序列。4. 对于 $0 \leqslant n \leqslant \infty$,_ $*n$ 表示任意一个仿射公平博弈值（下文解释）等于 $*n$ 且最左边的棋子是灯泡的组件。有一个例外：在 $n = 0$ 的情况下， $*n$ 完全没有棋子。5. 第 4 项中 $n = \infty$ 这一特例以 ☾ 突出显示。这个组件等于月亮，且最左边的棋子是灯泡。观察4中解释了一个最小示例。

—

—

[4]这里的记号略有重叠，因为我们沿用了用 8 表示无条件的右方获胜的记号。不过，两者的语境差异足够明显。

如前所述， [13] 中介绍的仿射公平常规玩法理论足以研究带有牵制着法的规则集。以下各节将使用这一一般理论，其内容可概括为以下列表。

- 尼姆数与月亮的无处不在：给定一个仿射公平博弈形式 G，存在一个非负整数 n 使得 $G =_{\mathbb{lm}^\infty} *n$ ，或者存在 $G =_{\mathbb{lm}^\infty} \mathbb{C}$（“$=_{\mathbb{lm}^\infty}$”表示模仿射公平博弈的游戏相等，月亮是博弈形式 $\{\infty \,|\, \infty\}$；为简便起见，从现在起我们用“$=$”代替“$=_{\mathbb{lm}^\infty}$”）。在第一种情况下，我们称 G 的格伦迪值 为 $\mathcal{G}(G) = n$；在第二种情况下，我们称 G 的格伦迪值 为 $\mathcal{G}(G) = \infty$。[5]

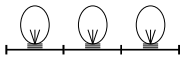
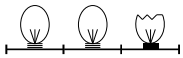
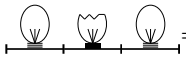
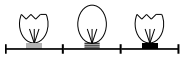
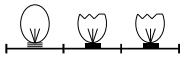
- 由可选后继局面确定 G 的格伦迪值：设 G 为一个仿射公平博弈形式，并设尼姆为尼姆数的类。G-直接尼姆数的集合记为 S_G，它是 $S_G = G^{\mathcal{L}} \cap$尼姆的集合。这些是 G 中属于尼姆数的可选后继局面。 G-受保护尼姆数的集合记为 P_G，它是满足以下条件的尼姆数 $*n$ ： 先手左方可通过走到某个 $\{\infty \,|\, G^{L\mathcal{R}}\} + *n$ 或 $\infty + *n$，在 $G + *n$ 中获胜；尽管左方可能无法走到$*n + *n$，但仍可将军或将死。 G的格伦迪值由 $\mathcal{G}(G) =$ 最小排除数$(\mathcal{G}(S_G \cup P_G))$确定，其中“最小排除数”是一个集合函数，其输出为该集合中未包含的最小非负整数。[6] 当然，如果 $S_G \cup P_G =$ 尼姆，那么 $\mathcal{G}(G) = \infty$。带有可选后继局面$G^L = \{\infty \,|\, *n\}$ 的游戏 G 很常见，并且可以立即保证尼姆$\backslash\{*n\} \subseteq P_G$。随着这些着法不断延续到 $*n$，我们将使用记号 $\circlearrowleft^{*n}$ 代替$\{\infty \,|\, *n\}$。如果我们明确写出格伦迪值而非博弈值，则使用记号 $\circlearrowleft^{n}$。

- 已知各分量的格伦迪值，确定析取和的格伦迪值：若 G 和 H 是仿射公平博弈形式，则 $\mathcal{G}(G + H) = \mathcal{G}(G) \oplus \mathcal{G}(H)$，其中 $\oplus$ 是各加数二进制表示的异或（XOR），当 $\mathcal{G}(G) < \infty$ 且 $\mathcal{G}(H) < \infty$时；若 $\mathcal{G}(G) = \infty$ 或 $\mathcal{G}(H) = \infty$，则$\mathcal{G}(G) \oplus \mathcal{G}(H)$ 的结果为 8（此运算是 NIM-和的自然推广）。

- 格伦迪值与 G 其结果之间的关系：给定仿射公平博弈形式 G， G 的结果为 $\mathcal{P}$，当且仅当 $\mathcal{G}(G) = 0$。

[5]不要将此符号的含义与 Fraenkel–Smith广义Sprague-Grundy理论 [15]中同一符号的含义混淆。这里，我们关注的是具有牵连着法的结构；Fraenkel-Smith理论研究的是有环无偏博弈。[6]本文中，mex$(\mathcal{G}(S_G \cup P_G))$ 表示 mex$\{\mathcal{G}(g) : \ g \in S_G \cup P_G\}$。

接下来，我们给出所有由三个棋子组成的 CHRISTMAS LIGHTS' FIXTURE 分量的值。下一节将提供闭式公式，用于确定这些情况及其他重要特例的格伦迪值。

 $= \overline{3} = \{0, *, *2 \mid 0, *, *2\} = *3$
 $= \overline{2}\,\vert 1\vert = \{0, *, *2 \mid 0, *, *2\} = *3$
 $= \overline{1}\,\vert 1\vert\,\overline{1} = \{0, \circlearrowleft^{*2}, *2 \mid 0, \circlearrowleft^{*2}, *2\} = \leftmoon$
 $= \vert 1\vert\,\overline{2} = \{*2, *, 0 \mid *2, *, 0\} = *3$
 $= \vert 2\vert\,\overline{1} = \{0, 0, 0 \mid 0, 0, 0\} = *$
 $= \vert 1\vert\,\overline{1}\,\vert 1\vert = \{*2, *, 0 \mid *2, *, 0\} = *3$
 $= \overline{1}\,\vert 2\vert = \{0, *2, *2 \mid 0, *2, *2\} = *$
 $= \vert 3\vert = \{0, 0, 0 \mid 0, 0, 0\} = *$

3 CHRISTMAS LIGHTS' FIXTURE的分析

只有灯泡的组件与一个 GREEN HACKENBUSH STRING同构。只有插座的组件属于平凡的 SHE LOVES ME SHE LOVES ME NOT局面，因为每一步恰好固定一个棋子。因此，我们从包含两种类型棋子的基本局面开始分析。

首先，我们给出并证明一些闭式公式，它们可用于确定重要特殊情形的格伦迪值。其次，我们证明一种冒号

原理，即 $k\,|m|\,{*i}$ 的格伦迪值仅取决于格伦迪值 $\overline{i}$，而不取决于 $*i$ （k, $m \geqslant 0$ 和 $\infty \geqslant i \geqslant 0$）的形状。最后，我们举例说明如何利用从右到左结合律计算任意组件的格伦迪值。

以下证明采用归纳法。通常，我们确定 S_G 和 P_G，以便计算 $\mathcal{G}(G) =$ 最小排除数$(\mathcal{G}(S_G \cup P_G))$。当然， $\mathcal{G}(S_G \cup P_G)$的值是通过归纳步骤得到的。

3.1 $|m|\,n$、 $n\,|m|$和 $k\,|m|\,n$的格伦迪值

在 $|m|\,n$或 $n\,|m|$类型的组件中进行游戏时，插口绝不会出现在两个灯泡之间。因此，在任何时刻，可选后继局面都是安静选项，[7]，这使得分析相对简单，如下述定理所示。

定理 1. 如果 $m > 0$、 $n \geqslant 0$、 $G = |m|\,\bar{n}$和 $H = n\,|\overline{m}|$，那么

$$\mathcal{G}(G) = \begin{cases} n & \text{if } m \text{ is even} \\ n + (-1)^n & \text{if } m \text{ is odd} \end{cases}$$

and

$$\mathcal{G}(H) = \begin{cases} n & \text{if } m \text{ is even} \\ n + 1 & \text{if } m \text{ is odd.} \end{cases}$$

证明. 设 G 是形如 $|m|\,n$的一个组件。由于两个灯泡之间没有插口，所有可选后继局面都是静默选项。因此， $P_G = \varnothing$，所有可选后继局面都属于 S_G，且 $|m|\,n$ 是一个尼姆数。

如果 $m = 1$和 $n = 0$，那么我们有$|1|\,0 = \{0\,|\,0\} = *$，这与公式一致。这是基础情形。

否则，$|m|\,n$的可选后继局面为 $(|m-1|\,n, |\overline{m}|\,0, |\overline{m}|\,1, \ldots, |m|\,n-1$。

如果 m是偶数，根据归纳法，可选后继局面的格伦迪值为 $n-1$或 $n+1$, , 1,. . 0. , $n-1$。在这两种情况下，最小排斥值都是 n。

If m 是奇数且 n 是奇数，根据归纳法，可选后继局面的格伦迪值为 n, 1, 0, 3, 2,. . . , $n-4$, $n-5$, $n-2$, $n-3$, n。最小排斥值是 $n-1$。

如果 m 是奇数且 n 是偶数，根据归纳法，可选后继局面的格伦迪值为 n、1、0、3、2、.....、 $n-3$、 $n-4$、 $n-1$、 $n-2$。最小排斥值为 $n+1$，证明至此完成。

[7]静默选项不涉及终结威胁、延续着法等。

设 H 是形如 $n\,|m|$的组件。由于两个灯泡之间没有插口，所有可选后继局面都是静默选项。因此， $P_H = \varnothing$，所有可选后继局面都属于 S_H，而 $n\,|m|$ 是一个尼姆数。

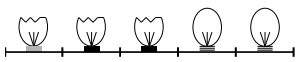
如果 $m = 1$和 $n = 0$，我们得到 $0\,|1| = \{0\,|\,0\} = *$，这与公式一致。这是基础情形。

否则， $n\,|m|$ 的可选后继局面为 $0, \ldots, n-1,$ 以及 $n\,|m-1|$。

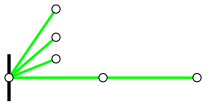
如果 m 是偶数，根据归纳法，可选后继局面的格伦迪值为 0、1、. . . 、 $n-1$，以及 $n+1$。最小排斥值为 n。

如果 m 是奇数，根据归纳法，可选后继局面的格伦迪值为 0、1、. . . 、 $n-1$，以及 n。最小排斥值为 $n+1$，证明至此完成。 □

观察 2. 考虑

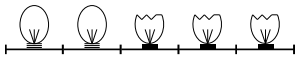

$= |3|\,\overline{2} = *3$ ($m = 3$ is odd and $n = 2$ is even)

这个组件显然与 GREEN HACKENBUSH 局面[8]同构



事实上，所有形式为 $|m|\,n$ 的分量都表现出与 GREENHACKENBUSH 局面类似的行为，其中 m 单边并排排列，并带有一条长度为 n 的边串。这解释了前一定理的第一种情况。

现在考虑


$= \overline{2}\,|3| = *3$ ($n = 2$ is even and $m = 3$ is odd)

这个组件显然与 GREEN HACKENBUSH 局面同构



[8]水平表示。

事实上，形如 $n\,|m|$ 的组件表现得类似于 GREENHACKENBUSH 局面，其中长度为 n 的边串在最右顶点上有 m 条单边。这解释了前一定理的第二种情况。

下面的定理基于一个最简"月球情形"，已经允许存在延续移动的可能性。

定理 3. 若 $k>0$、 $m>0$ 和 $G=k\,|m|\,\overline{1}$，则

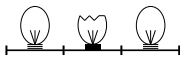
$$\mathcal{G}(G)=\begin{cases}\infty & \text{if } m=1\\ k & \text{if } m>1 \text{ is odd}\\ k+1 & \text{if } m \text{ is even.}\end{cases}$$

证明。若 $m=1$，则插口夹在两个灯泡之间，且 G 有一个延续选项。G 的可选后继局面为 0、...、 $k-1$、一次到 $k+1$ 的延续移动，以及 $k\,|1|$。因此，$S_G=\{0,*,\ldots,*(k-2),*(k-1),*(k+1)\}$；又由于延续移动是 $\circlearrowright^{*(k+1)}$，我们有 $P_G=$ 尼姆$\backslash\{*(k+1)\}$。因此， $\mathcal{G}(G)=$ 最小排除数$(\mathcal{G}(S_G\cup P_G))=$最小排除数$(\mathcal{G}($尼姆$))=\infty$。

关于第二种情况， G的可选后继局面为 0、1、.....、 $k-2$、 $k-1$、 $k\,|m-1|\,1$和 $k\,|m|$。因此， G的可选后继局面的格伦迪值为 0、1、.....、 $k-2$、 $k-1$、$k+1$和 $k+1$。倒数第二项由归纳法得出。最后一项是结合定理 1 得出的。最小排斥值为 k。

关于第三种情况， G的可选后继局面为 0、1、.....、 $k-2$、 $k-1$、 $k\,|m-1|\,1$和$k\,|m|$。因此， G的可选后继局面的格伦迪值为 0、1、.....、 $k-2$、 $k-1$、8或 k，以及 k。若 $m-1=1$，则倒数第二项结合本证明的第一种情况得出；若 $m-1$是一个大于 1 的奇整数，则倒数第二项由归纳法得出。最后一项由定理 1 得出。最小排斥值为 $k+1$，证明至此完成。 □

观察4。如果 $k=1$ 和 $m=1$，那么我们得到如下情况

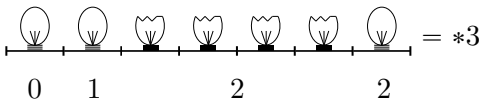


$$=\{0,\{\infty\mid *2\},*2\,|\,0,\{*2\,|\,\overline{\infty}\},*2\}=\mathbb{C}$$

在这种情况下，由于插口夹在两个灯泡之间，因此存在一个延续选项。事实上，有一个通向 $*2$ 的静默选项，也有一个通向 $*2$的延续选项。考虑析取和 $G+*2$；在这个和中，走到 $*2+*2$ 是先手玩家的制胜步。现在考虑析取和 $G+*j$，其中 $j\neq 2$；在这种情况下，延续移动 $G+*j\to\circlearrowright^{*2}+*j$ 是制胜步，因为先手玩家可以继续在 $\mathcal{N}$-局面 $*2+*j$上行动。在 [3], 中，作者将这种情况称为"某种策略窃取"（第 406 页）。局面 $1\,|1|\,1$ 是

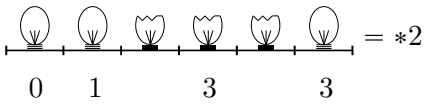
其值等于 ℭ的最简单组件。

如果 $k = 2$ 和 $m = 4$，我们会得到这种局面



可选后继局面上的标签表示它们的格伦迪值。在这个例子中，固定最右边的灯泡后，会剩下一个可忽略的偶数个插座。因此，实际上，处理这类情况最简单的方法就是忽略这些插座。

如果 $k = 2$ 和 $m = 3$，我们会得到这种局面



在最后这个例子中，移除插座和替换灯泡都是可逆的可选后继局面。因此，实际上，处理这类情况的最佳方法是将该局面视为只有插座左侧灯泡的局面。

定理1和定理3允许分析满足 $n > 1$ 条件的组件 $k\,|\overline{m}|\,n$。正如我们将看到的，这些情况也可以看作是 GREENHACKENBUSH 局面的特定局面。

定理 5. 如果 $k > 0$、$m > 0$、$n > 1$ 和 $G = k\,|\overline{m}|\,n$，那么

$$\mathcal{G}(G) = \begin{cases} k + n & \text{if } m \text{ is odd} \\ k + n + (-1)^n & \text{if } m \text{ is even.} \end{cases}$$

证明。 G 的可选后继局面为 0、1、……、$k-1$、$k\,|m-1|\pi$（如果 $m > 1$）或 $\circlearrowleft^{*(k+n)}$（如果$m = 1$）、$k\,|m|$、$k\,|m|\,1$、$k\,|\overline{m}|\,2$、……、$k\,|m|\,n-1$。在下面几行中，可选后继局面 $k\,|m|$ 的格伦迪值由定理 1 得出，而所有其他可选后继局面的格伦迪值则由归纳法得出（包括插座的静默移除）。

令 m 为奇数且 n 为奇数。若 $m > 1$，则基本集合为$S_G = \{0, \ldots, *(k-1), *(k+n-1), *(k+1), *k, *(k+2), \ldots, *(k+n-1)\}$和 $P_G = \varnothing$。若 $m = 1$，则由于存在一次延续移动，基本集合为$S_G = \{0, \ldots, *(k-1), *(k+1), *(k+2), \ldots, *(k+n-1)\}$，且 $P_G =$尼姆$\{*(k+n)\}$。在这两种情况下，$\mathcal{G}(G) =$最小排除数$(\mathcal{G}(S_G \cup P_G)) = k + n$。

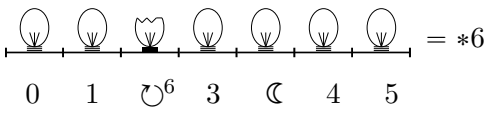
令 m 为奇数且 n 为偶数。若 $m > 1$，则基本集合为$S_G = \{0, \ldots, *(k-1), *(k+n+1), *(k+1), *k, *(k+2), \ldots, *(k+n-1)\}$和 $P_G = \varnothing$。若 $m = 1$，则由于存在一次延续移动，基本集合为$S_G = \{0, \ldots, *(k-1), *(k+1), *(k+2), \ldots, *(k+n-1)\}$，且 $P_G =$尼姆$\backslash\{*(k+n)\}$。在这两种情况下，$\mathcal{G}(G) =$最小排除数$(\mathcal{G}(S_G \cup P_G)) = k+n$。

设 m 为偶数，n 为奇数。在这种情况下，G 的可选后继局面的格伦迪值为 0、1、...、$k-2$、$k-1$、$k+n$（移除一个插口）、k、$k+1$、$k+3$、$k+2$、.....、$k+n-2$、$k+n-3$ 和 $k+n$。最小排斥值为 $k+n-1$。

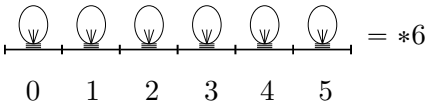
设 m 为偶数，n 为偶数。在这种情况下，G 的可选后继局面的格伦迪值为 0、1、.....、$k-2$、$k-1$、$k+n$（移除一个插口）、k、$k+1$、$k+3$、$k+2$、.....、$k+n$ 和 $k+n-1$。最小排斥值为 $k+n+1$，证明完毕。

□

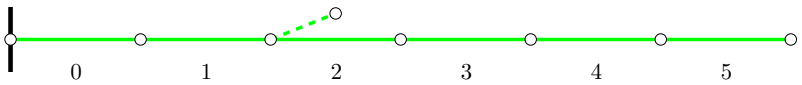
观察6。考虑包含 $k = 2$、$m = 1$ 和 $n = 4$ 的组件，即



在这种情况下，该组件的格伦迪值恰好等于灯泡的总数。当 $m = 1$ 且 $n > 1$ 时，就会出现这种情况。因此，从游戏策略的角度来看，最简单的方法是进行延续移动，并在适当时再次在同一组件中行棋。

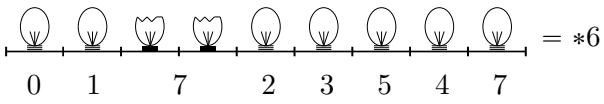


这可以看作是一个带有“幽灵边”的 GREEN HACKENBUSH边串。

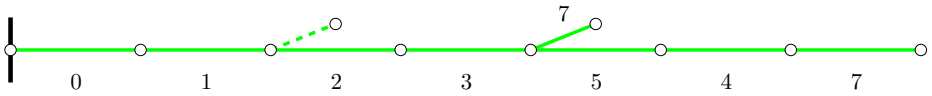


实际上，幽灵边并不存在，[9] 因为它对应的是一种延续移动，会让执行该移动的玩家继续拥有行动权。现在考虑这样的局面：$k = 2$、$m = 2$和 $n = 5$，也就是说，

[9]幽灵并不存在。

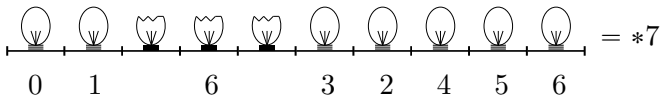


这个例子分析起来更困难。应用前面的定理，鉴于 n 为奇数，我们得到格伦迪值 $2+5-1=6$。然而，根据定理 3，插座后面的两个灯泡会带来一种“扰动”，因此要直观判断各可选后继局面的格伦迪值就不那么容易了。为了解决这个问题，我们建议使用助记法双跳，其做法是再次与一个 GREEN HACKENBUSH 局面建立联系，但将第二条边放在比预期位置向右多两个顶点处。

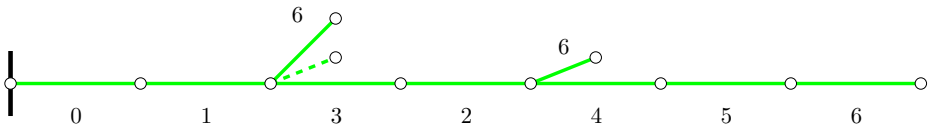


从代数角度来看，这一操作使扰动正则化。随后，只需确定该 GREEN HACKENBUSH 局面的可选后继局面的格伦迪值，同时始终牢记幽灵并不存在。

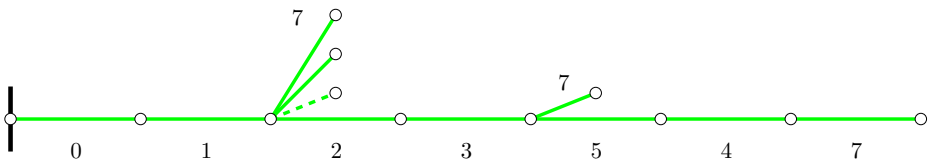
对于较大的 m值，这个助记方法仍然适用。不过，从第二个开始，“非幽灵”边会放置在预期的顶点上。例如，考虑 $k=2$、 $m=3$和 $n=5$，也就是说，



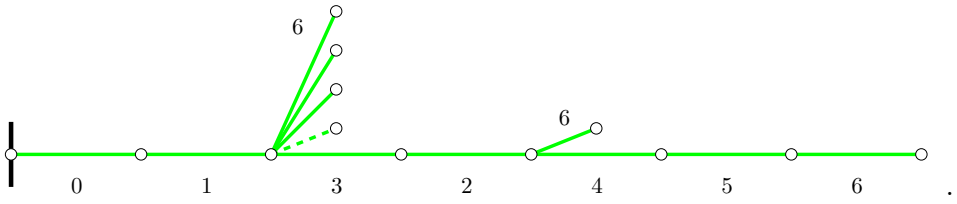
在这种情况下，相关的 GREEN HACKENBUSH 局面为



而对于 $\overline{2}|4|\overline{5}$和 $2\overline{|}5|5,^{-}$ 相关的 GREEN HACKENBUSH 局面为



and



3.2 月光定理和冒号原理

本节的初步结果与冒号原理有关，但只适用于格伦迪值有限的组件。尽管如此，一旦我们确立了月光定理，就能证明冒号原理适用于所有情况。

引理 7. 若 $i < s$ 是两个整数，则有以下结论：

1. $*i$ 上的所有延续着法都是 $\circlearrowleft^{*i'}$，其中 $*\vec{i}'$ 在各方面都与固定子 $*i$ 完全相同，只是缺少随延续移动而移除的插口；*2.* 在游戏 $*i + *s$ 中，先手玩家可以通过在第二个分量上执行所有可能的延续着法，然后在同一分量中走到 $*i + *i'$ 来获胜。

证明。从第一项开始，注意，在 $*i$ 上的延续移动不可能是 $\circlearrowleft$，否则 $*i$ 的格伦迪值将是 8，而不是 i。另一方面，在 $*i$ 上的延续移动也不可能是带有 $j \neq i$ 的 $\circlearrowleft^{*j}$，否则我们会得到尼姆$\{*j\} \subseteq P_{*i}$，且最小排除数$(\mathcal{G}(S_{*i} \cup P_{*i}))$ 可能是 j 或 8，但不可能是 i。因此，在 $*i$ 上的延续移动只能是 $\circlearrowleft^{*i'}$。

第二项是第一项的推论。也就是说，在第二个分量上执行所有可能的延续着法后，会得到一个局面 $*i+*s'$，此时第二个分量不再有任何延续着法。由于其格伦迪值仍为s，此时第二个分量必定有一步安静移动可以到达 $*i'$。显然，走到 $*i + *i'$ 是制胜步，因为其格伦迪值为 $i \oplus i = 0$。 □

引理 8。 设 $k \geqslant 0$、$m \geqslant 0$ 和 $i < \infty$。若 $k\,|m|\,*i$ 不是月亮，则 $k\,|m|\,*i$ 的格伦迪值不取决于 $*i$ 的形状。

证明。设 $*\vec{i}$ 和 $*\vec{i}'$ 是两个形状不同但格伦迪值相同的分量 $i < \infty$。首先，假设 $m = 0$。在这种情况下，$k*i + k*i' \in \mathcal{P}$

因为后手可以在最右侧部分落子，就像他们在玩$\mathcal{P}$-局面 $*i+*i'$一样。因此，$k*i=k*i'$。

现在，让我们证明 $k>0$和 $m=i=1$不可能同时成立。在 $k\,|1|*$中，根据定理 1，玩家可以移动到$k\,|1|=*(k+1)$。另一方面，在 $k\,|1|*$中，玩家也可以进行延续移动，到达 $k*$。然而，我们已在上一段证明了 $k*=k1$。由于 $k1=*(k+1)$，该延续移动会导致 $k*=*(k+1)$。因此，我们有 $*(k+1)\in S_{k\,|1|*}$，但同时，尼姆$\{*(k+1)\}\subseteq P_{k\,|1|*}$。这两个事实合起来意味着$\mathcal{G}(k\,|1|*)=$最小排除数$(\mathcal{G}(S_{k\,|1|*}\cup P_{k\,|1|*}))=$最小排除数$(\mathcal{G}($尼姆$))=\infty$，因此可得$k\,|1|*=\mathfrak{C}$，这与我们的假设矛盾。

对于一般情形，我们来证明 $k\,|m|*i+k\,|m|*i'\in\mathcal{P}$。本质上，后手的策略是在最右侧部分上行棋，仿佛他们正在 $\mathcal{P}$-局面$*i+*i'$中行棋。

如果先手在最右侧部分之一 $*i$ 或 $*i'$ 上进行安静移动，那么后手也会在最右侧部分上以其必胜策略$*i+*i'$应对。因此，得到类似 $k\,|m|*j+k\,|m|*j'$的局面。根据棋子数量作归纳法可知，该局面是一个 $\mathcal{P}$-局面，后手获胜。

如果先手在最右侧部分之一上进行延续移动，比如 $*i$，那么根据引理 7，该移动会延续到某个 $*i''$。因此，在局面 $k\,|m|*i''+k\,|m|*i'$ 中，轮到先手再次行动。由于根据棋子数量作归纳法可知，该局面是一个 $\mathcal{P}$-局面，因此后手获胜。

如果先手玩家从其中一个组件最左侧的部分取下一只灯泡k，后手就在另一个组件上模仿这一着法，得到局面$k-j+k-j=*(k-j)+*(k-j)\in\mathcal{P}$。

如果 $m>1$ 先手玩家从其中一个组件中移除一个插座 m，后手就在另一个组件上模仿这一着法，得到局面$k\,|m-1|*i+k\,|m-1|*i'$。再次根据棋子数量进行归纳，$k\,|m-1|*i+k\,|m-1|*i'$是一个 $\mathcal{P}$-局面，后手获胜。

如果 $k>0$、 $m=1$，且先手玩家通过移除该单个插口进行延续移动，随后经过一系列着法，使后手能够获得类似于 $k*j+k*j'$ 的局面或类似于 $k-j+k-j$ 的局面，那么后手也会获胜。第一种情况是 $\mathcal{P}$-局面，正如本证明第一段所述。在第二种情况下，我们有$k=j+k=j=*(k-j)+*(k-j)\in\mathcal{P}$。后手无法到达这类局面的唯一情形是：当 $k>0$、 $m=1$，且先手玩家在一个组件上进行延续移动至$k*i+k\,|1|*i'$，随后在第二个分量上移动至 $k*i+k\,|1|$。这是后手无法使用 $*i+*i'$ 的制胜策略的唯一情况

（从 $*i+0$ 移至 $0+0$），因为在此之前，他们无法再使用第二个分量上的预备续行步。然而，即使在这种情况下，由于我们已经知道 $i \neq 1$，后手仍然可以通过在最右侧部分行棋，选择与 $*i+|1|$ 的制胜步相对应的着法来获胜。

□

下面的定理指出，当月亮作为组件的一部分出现时，整个组件的值也等于月亮。换言之，对于这类连接，月亮是一个吸收元。

定理 9（月光定理）。若 $k \geqslant 0$ 且 $m \geqslant 0$ 则 $k\,|m|\,\mathcal{C} = \mathcal{C}$。[10]

证明。假设存在一个组件 $\mathcal{C}$，使得 $\mathcal{G}(k\,|m|\,\mathcal{C}) < \infty$。此外，假设 $\mathcal{C}$ 由尽可能少的棋子组成。组件 $\mathcal{C}$ 必定包含延续着法，否则其博弈值就不会是月亮。

$\mathcal{C}$ 的一步延续着法不可能是 $\{\infty \,|\, \mathcal{C}'\}$，其中 $\mathcal{C}'$ 在各方面都与 $\mathcal{C}$ 相同，唯一的区别是缺少了随该延续着法移除的插口。如果确实如此，那么根据最小性假设，$k\,|m|\,\mathcal{C}'$ 就会是月亮。因此，$k\,|m|\,\mathcal{C}$ 就会有一步延续着法通向月亮，这与 $\mathcal{G}(k\,|m|\,\mathcal{C}) < \infty$ 的假设相矛盾。

现在假设 $\mathcal{C}$ 的所有延续着法都具有 $\{\infty \,|\, *i\}$ 的形式，其中 $i < \infty$。由于 $\mathcal{C}$ 的博弈值是月亮，玩家还必须有一步着法到达 $*i'$。因此，在 $k\,|m|\,\mathcal{C}$ 中，玩家有一步着法到达 $k\,|m|\,*i'$，并有一步延续着法到达 $k\,|m|\,*i$。如果 $k\,|m|\,*i = \mathcal{C}$，那么 $k\,|m|\,\mathcal{C}$ 就是月亮，这与 $\mathcal{G}(k\,|m|\,\mathcal{C}) < \infty$ 矛盾。另一方面，如果 $k\,|m|\,*i = *w$ 且 $w < \infty$，根据引理 8，该事实不取决于 $*i$ 的形状，并且 $k\,|m|\,*i'$ 也等于 $*w$。这样，我们得到 $*w \in S_{k\,|m|\,\mathcal{C}}$、尼姆 $\{*w\} \subseteq P_{k\,|m|\,\mathcal{C}}$ 和最小排除数 $(\mathcal{G}(S_{k\,|m|\,\mathcal{C}} \cup P_{k\,|m|\,\mathcal{C}})) = \infty$。因此，$k\,|m|\,\mathcal{C}$ 是月亮，再次与假设 $\mathcal{G}(k\,|m|\,\mathcal{C}) < \infty$ 矛盾。

最后，假设在 $\mathcal{C}$ 中至少有两个延续着法 $\{\infty \,|\, *i\}$ 和 $\{\infty \,|\, *s\}$，且满足 $i < s < \infty$。若如此，在 $k\,|m|\,\mathcal{C}$ 中，玩家可以通过一个延续着法到达 $k\,|m|\,*i$，也可以通过另一个延续着法到达 $k\,|m|\,*s$。$k\,|m|\,*i$ 和 $k\,|m|\,*s$ 都不是月亮，否则 $k\,|m|\,\mathcal{C}$ 就会是月亮。此外，注意到 $k\,|m|\,*i$ 不等于 $k\,|m|\,*s$，因为先手玩家会赢得 $k\,|m|\,*i + k\,|m|\,*s$。由于 $i < s < \infty$，先手玩家可以利用引理 7 给出的 $*i + *s$ 的制胜策略，迫使 $k\,|m|\,*i + k\,|m|\,*i'$，从而赢得游戏，因为根据引理 8，$k\,|m|\,*i + k\,|m|\,*i'$ 是一个 $\mathcal{P}$-局面。因此，玩家有着法分别到达两个不同的尼姆数。这一事实意味着 $P_{k\,|m|\,\mathcal{C}}$ 是尼姆，且 $k\,|m|\,\mathcal{C}$ 是月亮，从而彻底与假设 $\mathcal{G}(k\,|m|\,\mathcal{C}) < \infty$ 矛盾。 □

[10] 当我们沐浴在月光下时，无论月亮有多远，都无法忽视它的存在。

现在，我们准备好以一般形式确立冒号原理。

定理10 (冒号原理)。设 $k \geqslant 0$、$m \geqslant 0$ 和 $\infty \geqslant i \geqslant 0$。那么，$k\,|m|\,{*i}$ 的格伦迪值不取决于 ${*i}$ 的形状。

证明。首先假设 i 是有限的。如果 $k\,|m|\,{*i}$ 不等于月亮，那么引理 8 保证 ${*i}$ 的形状无关紧要。另一方面，如果 $k\,|m|\,{*i}$ 等于月亮，并且存在另一个组件 ${*i'}$，使得 $k\,|m|\,{*i'}$ 的格伦迪值有限，那么这就与引理 8 矛盾。因此，这样的 ${*i'}$ 不可能存在,一而 ${*i}$ 的形状再次无关紧要。现在假设 i 是无限的，即 ${*i}$ 等于月亮。在这种情况下，根据定理 9，$k\,|m|\,{*i}$ 等于月亮，并且 ${*i}$ 的形状再次无关紧要。

□

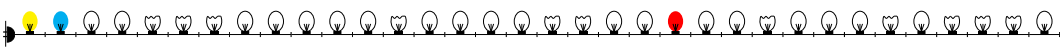
3.3 从右到左结合律的应用

设 $C_0, \ldots, C_n$ 是满足 $C_i = k$ 或 $\boldsymbol{C_i} = |k|$ 的棋子。要确定组件 $C_0\,\boldsymbol{C_1}\,\ldots\,\boldsymbol{C_{n-1}}\,C_n$ 的 Grundy 值，我们可以使用从右到左结合律:

$$C_0\,\boldsymbol{C_1}\,(C_2\,\ldots\,(C_{n-4}\,\boldsymbol{C_{n-3}}\,(C_{n-2}\,\boldsymbol{C_{n-1}}\,C_n)))\,.$$

我们先对 $C_{n-2}\,\boldsymbol{C_{n-1}}\,C_n$ 应用定理 1、定理 3 或定理 5，开始计算。如果它是月亮，那么整个组件就是月亮（月光定理）。如果 $C_{n-2}\,\boldsymbol{C_{n-1}}\,C_n = {*j}$ 与 $j < \infty$，冒号原理允许我们将 $C_{n-2}\,\boldsymbol{C_{n-1}}\,C_n$ 替换为 j。替换后，可以再次应用这些定理，计算 $C_{n-4}\,\boldsymbol{C_{n-3}}\,(C_{n-2}\,\boldsymbol{C_{n-1}}\,C_n)$，就像它是 $C_{n-4}\,\boldsymbol{C_{n-3}}\,j$ 一样。如此继续，直到到达组件中最左边的棋子。例如，考虑下面这个涉及析取和 $\underline{2}\,|3|\,\underline{5}\,|1|\,\underline{4}\,|2|\,\underline{2} + \underline{2}\,|1|\,\underline{3}\,|1|\,\underline{1}\,|3|\,\underline{1}$ 的练习。

图 5：电工们正在修理一个状况糟糕的固定子，因此这场游戏会很有意思！谁会获胜，是 $\mathcal{P}$一位玩家还是 $\mathcal{N}$一位玩家？如果是 $\mathcal{N}$一位玩家，如何获胜？



一方面，左方的不交分量是 $2\,|3|\,5\,|1|\,4\,|2|\,2$。因此，利用从右到左结合律，并应用定理 3、定理 5 和冒号原理，我们得到

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{(\overline{2}\,|3|\,(\overline{5}\,|1|\,\underbrace{(\overline{4}\,|2|\,\overline{2})}_{*7})}_{*12}}_{*14}}$$

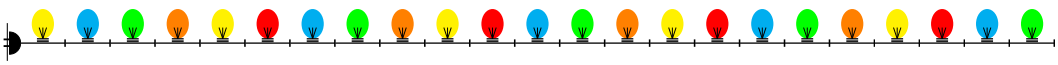
另一方面，右方的不交分量是 $2\,|1|\,3\,|1|\,1\,|3|\,1$。因此，利用从右到左结合律，并应用定理 3、定理 5、冒号原理和月光定理，我们得到

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{(\overline{2}\,|1|\,(\overline{3}\,|1|\,\underbrace{(\overline{1}\,|3|\,\overline{1})}_{*})}_{\mathrm{C}}}_{\mathrm{C}}}$$

请注意，由于 $\overline{3}\,|1|\overline{1}\,|3|\overline{1} = \mathrm{C}$，我们可以立即得知整个组件等于 C。

因此，析取和是一个 $\mathcal{N}$-局面，其博弈值等于$*14 + \mathrm{C} = \mathrm{C}$。先手玩家可以通过一系列延续着法获胜。她可以先在右侧组件上走两步延续着法，移至 $2\,|3|\,5\,|1|\,4\,|2|\,2 + 6\,|3|\,1$，这等于 $*14 + *6$。之后，她可以在左侧组件上继续走到 $2\,|3|\,9\,|2|\,2 + 6\,|3|\,1$，使总和保持为 $*14 + *6$。最后，她可以在左侧组件上走出静默制胜着法，移至$2\,|3|\,4 + 6\,|3|\,1 = *6 + *6 = 0$。

游戏结束后，电工们可以欣赏自己完成的作品在 23 盏闪亮的灯泡照耀下熠熠生辉！



参考文献

[1] Albert, M., Nowakowski, R., Wolfe《博弈中的经验：组合博弈论导论》，A. K. Peters，纽约，2007。

[2] Berlekamp, E《点与方格游戏：高深的儿童游戏》，A. K. Peter's Ltd.，马萨诸塞州纳蒂克，2000。[3] Berlekamp, E., Conway, J., Guy, R. *Winning Ways*，Academic Press，伦敦，1982。[4] Bremner, D., Demaine, E., Hurtado, F., Kranakis, E., Krasser, H., Ramaswami, S. Sethia, S., Urrutia, J. "三角剖分博弈"，理论计算机科学，343，42–71，2005。[5]Carvalho, A., Neto, J. P., Santos, C. "公平组合游戏的序数和"，离散应用数学，243，39–45，2018。[6] Carvalho, A., Huggan, M. A., Nowakowski, R. J., Santos, C. "序数和，CLOCKWISE HACKENBUSH，以及 DOMINO SHAVE"，*Integers*，21B，John Conway、Richard Guy 和 Elwyn Berlekamp 纪念文集，A5，24，2021。[7] Conway, J. 数与博弈，Academic Press，伦敦、纽约、旧金山，1976。[8] Elkies, N. "大型棋盘兵残局中的高阶尼姆数"，更多无胜算博弈，MSRI 出版物，42，61–78，剑桥大学出版社，马萨诸塞州，2002。[9] Fink, A., Nowakowski, R. J., Siegel, A. N., Wolfe. "推倒猜想"，无机会博弈，MSRI 出版物，4，65–76，剑桥大学出版社，马萨诸塞州，2015。[10] Fisher, M., Nowakowski, R. J., Santos, C. "斯特林数博弈"，国际博弈论杂志，47(2)，557–576，2018。[11] Ishihara, T. " $2 \times n$ 矩形阵列 I 的尼姆线值"，数学杂志、德岛大学，44，47–52，2010。[12] Ishihara, T. " $2 \times n$ 矩形阵列 II 的尼姆线值"，数学杂志、德岛大学，45，9–18，2011。[13]Larsson, U., Nowakowski, R., Santos, C. "含强制着法的公平组合游戏"，*Integers*：组合数论电子期刊，21B，2021。[14]Siegel, A. 组合博弈论，美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，2013。

[15] Smith, C.《图与复合博弈》，组合理论杂志，1，51–81，1966年。[16] West, J.《顶级蕴含的新值》，无机会博弈，MSRI 出版物，29，345–350，剑桥大学出版社，马萨诸塞州，1996年。