arXiv:2304.00593v1 [cs.IT] 2 Apr 2023

面向最低比特率线性二次高斯控制的在线变长信源编码

Travis C. Cuvelier、Takashi Tanaka 和 Robert W. Heath, Jr.

摘要—我们提出了一种自适应编码方法，以通过接近最低比特率的前缀无歧义反馈实现线性二次高斯（LQG）控制。我们的方法将近期关于最低速率线性二次高斯控制量化器设计的分析，与面向可数字母表上信源的通用无损信源编码研究相结合。在上述量化器设计中，已证明量化器输出构成一个渐近平稳的遍历过程。为了以可证明接近最低比特率的方式实现 LQG 控制，必须将量化器输出高效地编码为二进制码字。在已知量化器输出的概率分布或其极限分布的情况下，这是可行的。然而，获取此类知识颇具挑战性；这些分布难以直接得到闭式表达。这促使我们采用通用信源编码。本文的主要理论贡献是证明：经过可逆变换后，量化器输出是属于指数包络类或幂律包络类的随机变量（具体取决于对象维数）。借鉴包络类上的通用编码思想，我们开发了这些算法的一种实用零时延版本，该版本采用定精度算术运行。我们通过数值方法评估了该算法的性能，并展示了其在比特率与 LQG 控制性能之间基本权衡关系方面具有竞争力的结果。

一、引言

本文提出一种算法框架，以近乎最低比特率的变长反馈实现任意可行的离散时间线性二次高斯控制性能。我们的问题表述源于这样一种反馈控制场景：传感器与执行器并未共置，测量值必须通过数字通信从传感器反馈至控制器。在此类场景中，反馈比特率是通信实际成本的有效替代指标。对于各种通信架构，通信链路的比特率与该链路所使用的物理层资源大致直接相关。

尽管文献中已有若干关于采用最低（可变长度）反馈比特率 [1]进行线性二次高斯控制的研究结果[4],，但将这些结果应用于实践仍面临诸多障碍。本研究旨在弥合这一差距。我们提出了实用算法，将 [4] 中最低速率线性二次高斯控制的方法，与[5]–[8]中针对可数无限字母表的通用编码方法相结合。随后，我们采用一种数值精确的实现方案，该方案基于经典的定精度算术编码方法 [9] 以及用于整数编码的 Elias“倒数第二”（omega）编码 [10]。我们在一个倒立摆系统模型 [11]上对所提算法进行了数值评估。结果表明，我们的方法在基本定向信息比特率下界方面表现良好（参见 [12]）。

作者谨此感谢美国空军研究实验室通过 FA8651-22-1-0013 号拨款对本研究的部分资助。T. Cuvelier 和 T. Tanaka 任职于德克萨斯大学奥斯汀分校奥登计算工程与科学研究所，地址为美国得克萨斯州奥斯汀市 78712，电子邮箱：tcuvelier@utexas.edu、ttanaka@utexas.edu。R. Heath 任职于北卡罗来纳州立大学电气与计算机工程系，地址为美国北卡罗来纳州罗利市 27606，电子邮箱：rwheath2@ncsu.edu。

A. 文献综述

文献 [1]–[4]提出了适用于线性二次高斯控制、具有近乎最低比特率变长反馈的数据压缩架构。这些方法采用预先指定的量化器设计对传感器测量值进行量化，并假设量化器的输出经无损编码后形成二进制数据包。如果能够做到这一点，文献[1]–[4] 中的架构便可证明达到接近已有定向信息（DI）下界的比特率（参见 [3], [12]）。然而，在实际中实现这种无损编码相当困难。在文献 [1]–[4] 中，量化器输出具有可数支撑集。量化器输出是一个非平稳随机过程；文献 [1]–[3] 假设无损编码能够精确适配输出分布。尽管文献 [4] 证明，采用适配于量化器输出极限分布的时不变编码便已足够，但如何估计这一极限分布并为其设计编码，仍然是一项具有挑战性的问题。与近期一些关于固定速率反馈线性二次高斯控制的研究（例如参见 [13]）相比，关于实用算法的研究成果寥寥无几，尚无多少算法被证明在比特率与控制性能之间已有的基本权衡关系方面具有竞争力（参见 [3], [12]）。

尽管近期关于定长反馈下线性二次高斯控制的研究取得了积极成果，但限制较少的变长反馈设置具有一些优势。众所周知，对于由无界过程噪声驱动的线性被控对象，采用经受时不变无记忆定长量化的反馈，无法在均方意义下实现稳定[14]。虽然有若干关于采用自适应定长量化进行控制的研究能够保证稳定性，例如 [15], [16], ，但它们无法保证在 LQG 问题中接近基本速率—代价权衡关系。在 [13], 中，研究者通过 Lloyd-Max算法设计了能够优化 LQG 控制性能的定长量化器。尽管数值实验表明，该方法在基本权衡关系方面取得了有竞争力的性能，但 [13] 中的方法需要在每个时间步“重新设计”Lloyd-Max量化器，且无法保证稳定性。相比之下，采用变长反馈相对容易保证固定的线性二次高斯控制性能

；那些实际上会使定长量化器饱和的罕见事件，则会被编码为较长的比特串。

在本研究中，我们将 [4]中的量化器设计与分析，与近期关于可数字母表上通用无损信源编码的研究相结合。广义而言，“通用编码”是指为分布未知的信源设计无损码的技术。 [4]中的量化器输出是一个具有可数支撑集的渐近平稳随机过程。其极限分布无法用闭式形式描述。尽管关于有限支撑集字母表上的通用编码已有大量文献，但对于具有可数无限支撑集的字母表，相关成果相对较少 [5]–[8]。特别是， [5]提出了包络类上的通用编码概念。包络类是定义在 $\mathbb{N}_+$ 上的一组概率质量函数（可将其视为潜在的信源分布），这些函数均被一个单调递减的 ℓ^1包络函数所上界。相关包络函数包括幂律函数和指数函数。[5]–[8]介绍了针对边缘分布属于包络类的独立同分布平稳信源的通用分组编码技术。 [5]–[8] 中的编码算法采用删失方法：低于（随时间变化的）截断阈值的符号采用算术编码，而取值较大、超过截断阈值的符号则采用不同方式处理。如果符号值超过截断阈值，则先对转义符号进行算术编码，再通过 Elias 通用前缀码对整数[10]编码观测到的符号值（或符号值与截断阈值之差）。算术编码所用的概率模型会根据观测数据进行调整，以反映信源特性。

虽然 [5]–[8] 中的算法支持顺序编码和解码，但它们本质上仍是分组码。使用算术编码时，可能需要先接收到 n 个已编码符号的比特，才能解码出第一个符号。对于一个包含 n 个待编码符号的分组，可以证明，[5] 和 [6] 中的算法可实现具有 $o(n)$ 特性的冗余（例如，码字长度超出信源熵的部分）。如果不使用算术编码，而是基于经验信源模型，使用 Shannon-Fano-Elias（ SFE）码（ [4, 第 IV.A 节1]）对低于截断阈值的符号进行编码，则可使 [5]–[8] 中的编码方案实现零编码与解码延迟，代价是每个编码符号至多增加 1 比特。下一小节将结合本研究讨论 [5]–[8] 。

B. 我们的贡献

本研究在理论和实践方面各有一项贡献。理论方面，我们证明，经过变换后， [4]源编码架构中的量化器输出的极限分布属于指数包络类或幂律包络类（具体取决于被控对象的维数）。 [5]–[8] 中的方法适用于平稳信源。鉴于量化器输出渐近平稳，且在 [4],中以 Kullback–Leibler（KL）意义收敛于其极限分布，我们推测，使用 [5]或 [6]中的某种算法的“零时延版本”对量化器输出进行编码，将达到 [4,定理 IV.3 (ii)]所预测的相同比特率。

[5]–[8] 中的编码方案严格来说并不实用，因为它们需要在越来越大的字母表上进行算术前缀编码。这要求编码器和解码器执行计算时所用的（算术）精度也随之提高 [9]。我们采用定精度算术，设计了删失码的一种简化零时延版本。我们证明，相较于 [12] 中的下界和 [4]中的上界，该方案具有竞争力的性能。

C. 符号

我们使用小写罗马字母表示向量 v，大写罗马字母表示矩阵 V，使用无衬线小写字母 v 表示标量。随机变量使用粗体表示，例如，随机向量记为 $\mathbf{v}$。对于序列 $\{x_0, x_1, \dots\}$，我们用 x^n表示 $\{x_0, \dots, x_n\}$。如果 $x \in \mathbb{R}^m$，对于 $i \in \{0, \dots, m-1\}$，我们用 $[x]_i$ 表示 x 在位置 i 处的元素（我们采用从零开始的索引）。如果 $\mathbf{x}$ 是离散随机变量，我们令 $P_{\mathbf{x}}(x) = P_{\mathbf{x}}[\mathbf{x} = x]$。离散随机变量 $\mathbf{q}$ 的香农熵（以比特为单位）记为 $H(\mathbf{q})$。类似地，P_a 与 P_b之间的 Kullback–Leibler（KL）散度（相对熵，以比特为单位）记为 $D_{\mathrm{KL}}(a\|b)$。如果 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 同分布，我们记作 $\mathbf{x} \mathrel{D}= \mathbf{y}$。矩阵 X 的最大奇异值记为 $\|X\|_2$，谱半径记为 $\rho_{\max}(X)$。我们使用向量范数和信息论度量的标准记号。有限长度二进制字符串的集合记为 $\{0,1\}^*$，而 $a \in \{0,1\}^*$的长度（以比特为单位）为 $\ell(a)$。

II. 系统模型与问题表述

本节定义系统模型，并对定向信息比特率下界和来自 [4]的压缩架构进行高层次描述。

我们考虑图1所示的系统模型，该模型描述了一个离散时间高斯-马尔可夫对象，其控制依赖于经编码为变长二进制字符串（或数据包）的反馈。记状态向量为 $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^m$，控制输入为 $\mathbf{u}_t \in \mathbb{R}^u$，并令 $\mathbf{w}_t \sim \mathcal{N}(0_m, W)$ 表示过程噪声，假设其在时间上独立同分布。我们假设 $W \succ 0_{m\times m}$，即过程噪声协方差满秩。我们假设初始状态满足 $\mathbf{x}_0 \sim \mathcal{N}(0, X_0)$，其中 $X_0 \succeq 0$。对于某些 $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ 和 $B \in \mathbb{R}^{m\times u}$，当 $t \geq 0$ 时，对象动力学为 $\mathbf{x}_{t+1} = A\mathbf{x}_t + B\mathbf{u}_t + \mathbf{w}_t$。为确保能够实现有限控制代价，我们假设 (A, B) 可稳定化。传感器/编码器模块可以完全观测对象。在每个离散时间步 t，传感器/编码器对对象进行测量，并通过任意因果编码策略将测量值编码为码字 $\mathbf{a}_t \in \{0,1\}^*$。随后，编码器通过反馈信道将码字 $\mathbf{a}_t$发送给组合式解码器/控制器。解码器/控制器利用接收到的数据包设计控制输入 $\mathbf{u}_t$，同样采用任意因果策略。我们假设反馈信道可靠，例如解码器能够无差错且无延迟地接收数据包 $\mathbf{a}_t$ 。我们假设传感器/编码器和

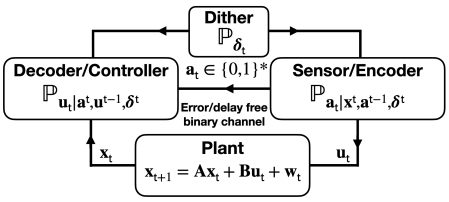


图1。码字 a_t 可根据编码器在时刻 t 已知的信息随机生成。同样，解码器收到 a_t后，可根据 a_t 和其先前掌握的信息随机生成 u_t 。抖动信号 δ_t 独立于所有过去的系统变量生成。在系统动态下，x_0^t 是 x_0、、a_0^{t-1} 、u_0^{t-1} 和 w_0^{t-1} 的确定性函数。对于 t ≥ 0 ，我们假设因子分解为 $P^{a_{t+1}}$、$u_{t+1}|at0$、$\delta t0$、$ut0$、$wt0$、x_0 $= P_{E,t+1}P_{C,t+1}$ 以及 $P^{a_{t+1}}$、δ_{t+1}、u_{t+1}、$w_{t+1}|at0$、$\delta t0$、$ut0$、$wt0$、x_0 $= P_{E,t+1}P_{C,t+1}P_{\delta}P_{w}$，其中 P_w 和 P_δ 分别是过程噪声和抖动信号的边缘分布。我们假设初始时 P_{a_0}、δ_0、$u0$、$w_0|x_0$ $=P_{E,0}P_{C,0}P_{\delta}P_{w}$。这些因子分解体现了系统变量之间所假设的条件独立性假设。 [12] 中的下界由此得出。

解码器/控制器可以访问公共抖动序列。抖动信号是一系列外生随机向量 $\delta_t \in \mathbb{R}^m$ ，并以因果方式向编码器和解码器双方公开。我们假设 $[\delta_t]_i \sim \mathrm{Uniform}([-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}])$ 在 i 和 t 上独立同分布。抖动信号可用于在相应模块中选择码字/控制输入。在现实系统中，可通过在编码器和解码器处同步伪随机数生成器，近似实现这种共享随机性。图1中的编码器/传感器策略是一系列因果条件化的博雷尔可测核，记为 $P_E[a_0^\infty || \delta_0^\infty, x_0^\infty] = \left\{P_{E,t} = P_{a_t|a_0^{t-1},\delta_0^t,x_0^t}\right\}_t$。相应的解码器/控制器策略表示为 $P_C[u_0^\infty || a_0^\infty, \delta_0^\infty] = \left\{P_{C,t} = P_{u_t|a_0^t,\delta_0^t,u_0^{t-1}}\right\}_t$。系统变量之间的条件独立性假设通过系统转移核的分解来施加；相关讨论见图 1。

我们要求编码器生成的码字满足前缀无歧义，具体而言：对于所有 t 以及任意实现值 $(a_0^{t-1} = a_0^{t-1}, \delta_0^t = \delta_0^t, u_0^{t-1} = u_0^{t-1})$，对于所有互不相同的

$a_1\ a_2 \in \{0,1\}^*$ $_{a_t|\ _0^{t-1}\ \delta_0^t\ _0^{t-1}}[\ _t = a_1|\ _0^{t-1} =,,$ 若 $a_0^{t-1}\ \delta_0^t = \delta_0^t\ _0^{t-1} = u_0^{t-1}] > 0$ $P_{a,,u}aa,,u$ 且 P

$_{a_t|\ _0^{t-1}\ \delta_0^t\ _0^{t-1}}[\ _t = a_{1,,u_0^{t-1}}[$ $a_2|\ _0^{t-1} = a_0^{t-1}\ \delta_0^t = \delta_0^t\ _0^{t-1} = u_0^{t-1}] > 0\ a_1$ $aa,,u$，则前者不是 a_2 的前缀。此假设确保解码器能够在时刻 t 即时解码码字。然而，它允许编码器针对 $(a_0^{t-1}, \delta_0^t, u_0^{t-1})$ 的不同实现值使用不同的前缀无歧义码本（参见 [4, 前缀约束 1] [12, 假设 2]）。

我们关注 LQG 控制性能与通信成本之间的权衡，并以时间平均的期望码字长度来量化通信成本。数学上，这可表示为对满足前缀约束的策略 P_E, P_C 进行优化：

$$\mathcal{L}(\gamma) = \begin{cases} \inf\limits_{P_E, P_C} \limsup\limits_{T\to\infty} \dfrac{1}{T} \sum\limits_{t=0}^{T-1} \mathbb{E}[\ell(a_t)] \\ \text{s.t.} \limsup\limits_{T\to\infty} \dfrac{1}{T} \sum\limits_{t=0}^{T-1} \mathbb{E}\left[\|x_{t+1}\|_Q^2 + \|u_t\|_\Phi^2\right] \le \gamma, \end{cases}$$

其中， $Q \succeq 0$、 $\Phi \succ 0$和 γ 是可容忍的最大 LQG 成本。设 S 是离散代数

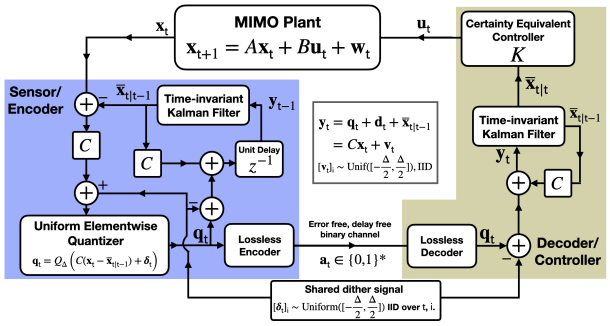


图 2。 [4] 中的量化器和控制器设计。

黎卡提方程（DARE） $A^TSA - S - A^TSB(B^TSB + \Phi)^{-1}B^TSA + Q = 0$、 $K = -(B^TSB + \Phi)^{-1}B^TSA$和$\Theta = K^T(B^TSB + \Phi)K$的稳定解。考虑该优化问题

$$\mathcal{R}(\gamma) = \begin{cases} \inf\limits_{P,\Pi,\in\mathbb{R}^{m\times m}} \dfrac{1}{2}(-\log_2\det\Pi + \log_2\det W) \\ P,\Pi\succeq 0 \\ \text{s.t. } \mathrm{Tr}(\Theta P) + \mathrm{Tr}(WS) \le \gamma, \\ P \preceq APA^T + W, \\ \begin{bmatrix} P-\Pi & PA^T \\ AP & APA^T + W \end{bmatrix} \succeq 0 \end{cases} \tag{1}$$

$\mathcal{R}(\gamma)$ 是任何能够实现不超过 γ 的 LQG 代价的策略所必须承担的最小定向信息（DI）。该 DI 是比特率 $\mathcal{L}(\gamma)$ 的基本下界；根据 $\mathcal{R}(\gamma) \le \mathcal{L}(\gamma)$ [12, 定理 1] [17]，有 P。由 ˆ(1) 得到的最优解记为 P，可用于构造编码器和解码器策略，使其以 [4] 近似达到下界 $\mathcal{R}(\gamma)$。图 2 展示了这一方法，下面将对此作简要概述。

给定 ˆP，定义 ˆ $P_+ = A\hat{P}A^T + W$。假设 $\Delta = 1$，且选择 C，使得 1 12 (ˆP^{-1} _ ˆP_+^{-1}) $= C^TC$。编码器和解码器运行同步的时不变卡尔曼滤波器（KF），并使用由编码码字构造的测量值对其进行更新。令 $x_{t|t-1}$ 表示这些滤波器的先验估计，$x_{t|t}$ 表示其后验估计。假设初始时 $x_{1|0} = 0$。根据构造，在时间步 t 开始时，编码器和解码器都已计算出相同的先验估计 $x_{t|t-1}$ 。通过 $e_t = x_t - x_{t|t-1}$定义卡尔曼滤波器的先验误差。令 $Q_\Delta : \mathbb{R}^m \Rightarrow \mathbb{Z}^m$ 为一个将输入逐元素舍入到最接近整数的函数，例如，当 $[x]_i \in [k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}$ 时， $[Q_\Delta(x)]_i = k$。在每个时刻 t，编码器对卡尔曼创新进行抖动量化，得到 $q_t = Q_\Delta(Ce_t + \delta_t)$。量化结果 q_t 是一个在 $\mathbb{Z}^m$上具有可数无限支撑集的离散随机变量。量化结果 q_t 被无损地编码为码字 a_t 。由于解码器无误地接收到 a_t，因此可以精确重构 q_t 。随后，解码器计算居中的重构测量值 $y_{t|t} \equiv q_t - \delta_t + Cx$ $C\ _t + \ _t$ $[\ _t]_i \sim$ $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ $_t =$ 。 [4, 式（19）]中证明了 y x v，其中 v 均匀分布于( )，并且对 i 独立同分布，且 $v_t \perp\!\!\!\perp x_0^t$。由于编码器已知抖动信号，因此也能计算 y_t。编码器和解码器都使用时不变增益 $J = \hat{P}_+C^T(C\hat{P}_+C^T + I_m)^{-1}$更新其卡尔曼滤波器，计算 $x_{t|t} = x_{t|t-1} + J(y_t - Cx_{t|t-1})$。

随后，解码器采用确定性等价控制，选择$\mathbf{u}_t = K\mathbf{x}^{t|t}$。编码器同样可以计算$\mathbf{u}_t$，而编码器和解码器的卡尔曼滤波器则通过$\mathbf{x}_{t+1|t} = A\mathbf{x}_{t|t} + B\mathbf{u}_t$执行预测更新。下一个命题概述了 [4] 中的一些相关结果，这些结果将在后文用到。

命题 *2.1*：设 $L = AJ$ 和 $R = A - LC$。令$\{\boldsymbol{\nu}_t\}$ 表示取值均匀分布于 $[-1/2, 1/2]^m$上的随机变量独立同分布序列，令 $\{\boldsymbol{\omega}_t\}$ 为满足 $\boldsymbol{\omega}_t \sim \mathcal{N}(0_m, W)$ 的独立同分布序列，并令 $\boldsymbol{\chi} \sim \mathcal{N}(0_m, X_0)$。令 $\{\boldsymbol{\omega}_t\}$、$\{\boldsymbol{\nu}_t\}$和 $\boldsymbol{\chi}$相互独立。我们有 R（离散时间）全局渐近稳定，例如 $\rho_{\max}(R) < 1$，且

$$\mathbf{e}_t \overset{D}{=} R^t\boldsymbol{\chi} + \sum_{i=0}^{t-1} R^i(\boldsymbol{\omega}_i - L\boldsymbol{\nu}_i), \tag{2}$$

并且存在随机变量 $\mathbf{e} \sim P_{\mathbf{e}}$，使得 $(\mathbf{e}_t, \boldsymbol{\delta}_t)$ 在全变差意义下（因此也弱）收敛至 $(\mathbf{e}, \boldsymbol{\delta})$，其中 $\boldsymbol{\delta} \perp\!\!\!\perp \mathbf{e}$且 $\boldsymbol{\delta} \sim$ 均匀分布$([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^m)$。此外$\mathbf{e} \in \mathbb{R}^m$ 具有严格正的概率密度函数，并且过程 $(\mathbf{e}_t, \boldsymbol{\delta}_t)$ 是遍历的，意即若$f: \mathbb{R}^m \times [-1/2, 1/2]^m \to \mathbb{R}$ 满足 $\mathbb{E}[|f(\mathbf{e}, \boldsymbol{\delta})|] < \infty$，则

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{T-1} f(\mathbf{e}_i, \boldsymbol{\delta}_i) = \mathbb{E}[f(\mathbf{e}, \boldsymbol{\delta})], \text{ almost surely.} \tag{3}$$

定义 $\mathbf{q} = Q_\Delta(C\mathbf{e} + \boldsymbol{\delta})$，我们有，$\mathbf{q}_t$ 在全变差意义下（因而也在弱意义下）收敛到$\mathbf{q}$，并且 $\lim_{t\to\infty} D_{\mathrm{KL}}(\mathbf{q}_t \| \mathbf{q}) = 0$。最后，我们有 $\limsup_{t\to\infty} H(\mathbf{q}_t) \le R(\gamma) + b$，以及 $H(\mathbf{q}) \le R(\gamma) + \underline{b}$，其中$\underline{b} = m\left(1 + \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{2\pi e}{12}\right)\right)$。只要$\mathbf{q}_t$ 被无损地传送给解码器，线性二次高斯控制代价满足

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \mathbb{E}[\|\mathbf{x}_{t+1}\|_Q^2 + \|\mathbf{u}_t\|_\Phi^2] \le \gamma. \tag{4}$$

证明：$\rho_{\max}(R) < 1$ 的问题在 [4, Section IV.C]，中讨论；(2) 的问题则在 [4,Lemma 4.8] 的证明第二段中讨论。极限测度 $P_{\mathbf{e},\boldsymbol{\delta}}$ 和 $P_{\mathbf{q}}$ 的存在性及遍历性质是 [4] 的主要结果。这些结果在 [4,Theorem IV.3 and Section IV.C5] 中讨论，尤其是 Lemma IV. KL 意义下$\mathbf{q}_t$ 到$\mathbf{q}$ 的收敛见 [4, Lemma IV.8]。熵界依据 [4,Lemma IV.7]，而 (4) 则依据 [4, Theorem IV.3 (iii)]。 ∎

在图 2 的编码器/解码器中，在时刻 t，量化结果 $\mathbf{q}_t$ 被编码为前缀无歧义码字 $\mathbf{a}_t \in \{0,1\}^*$。该编码是无损的，解码器在接收到 $\mathbf{a}_t$ 后即可恢复 $\mathbf{q}_t$。本文其余部分将重点讨论这种无损编码。令 $C_t : \mathbb{Z}^m \to \{0,1\}^*$ 表示时刻 t 所使用的编码函数，例如设 $\mathbf{a}_t = C_t(\mathbf{q}_t)$。如果每个 t 时刻的概率质量函数 $P_{\mathbf{q}_t}$ 已知，则C_t 可以选择为适配分布 $P_{\mathbf{q}_t}$ 的 SFE 编码，并实现码字长度 $\mathbb{E}[\ell(\mathbf{a}_t)] \le H(\mathbf{q}_t) + 1$（参见例如 [4, 第 IV.A 节1]）。在 [4], 中，我们证明了：如果已知极限分布 $P_{\mathbf{q}}$，并且 C_t 选择为适配分布 $P_{\mathbf{q}}$的固定（时不变）SFE 编码，则 $\limsup_{t\to\infty} \mathbb{E}[\ell(\mathbf{a}_t)] \le \limsup_{t\to\infty} H(\mathbf{q}_t) + 1$。因此，如果已知边缘概率质量函数 $P_{\mathbf{q}_t}$ 或极限概率质量函数 $P_{\mathbf{q}}$，我们就可以对 $\{\mathbf{q}_t\}$ 进行无损编码，从而满足前缀约束，并且

$$\limsup_{T\to\infty} \sum_{i=0}^{T-1} \mathbb{E}[\ell(\mathbf{a}_i)] \le \mathcal{R}(\gamma) + b + 1, \tag{5}$$

例如，系统实现的时间平均码字长度至多比式 (1) 中的基本率失真下界多 b 比特。虽然只要已知 $P_{\mathbf{q}_t}$ 或 $P_{\mathbf{q}}$，就能达到式 (5) 中的界，但在实践中很难做到这一点。它们是否存在闭式刻画尚令人怀疑。因此，我们受到启发，通过通用编码为C_t 寻求设计。在当前语境下，通用编码函数将根据对信源过程的过去观测构造。为明确这一点，当 C_t 是“过去实现值”$\mathbf{q}^{t-1}$的函数时，我们将记作 $C_t = C_{t,\,\mathbf{q}^{t-1}}$。下一节将讨论通用编码。

III. 面向量化器输出的通用编码

我们先给出一些定义。若概率质量函数 $P_{\mathbf{z}} : \mathbb{N}_+ \to [0,1]$ 属于参数为 $(\alpha\ \beta\quad \alpha > 1\ \beta >,)$ 的幂 $2^{\alpha}/\left(\sum_{=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha}\right)\ \mathbf{z} \le \left(\frac{\beta}{\alpha}\ 1\right) \in +$ [5] 律包络类，则对于 ,ii, P (x) min ×, 对于 x N 。类似地，若概率质量函数 $P_{\mathbf{z}}: \mathbb{N}_+ \to [0,1]$ 属于参数为 $(\alpha,\ \beta)$ 的指数包络类，则对于 $\alpha > 0$, $\beta > e^{2\alpha}$，满足 $P_{\mathbf{z}}(\mathbf{x}) \le \min(\beta e^{-\alpha x},\ 1)$，对于 $\mathbf{x} \in \mathbb{N}_+$。最后，若（标量）随机变量$\mathbf{x}$ 满足 $\mathbb{E}[\mathbf{x}] = 0$ 且对所有 $\lambda \in \mathbb{R}$ 均有 $\mathbb{E}[e^{\lambda \mathbf{x}}] \le e^{\lambda^2\sigma^2/2}$，则称其为 σ-次高斯随机变量。若随机向量$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ 满足对每个$c \in \mathbb{R}^m$，只要 $\|c\|_2 = 1$, $c^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ 就为 σ-次高斯，则称其为 σ-次高斯随机向量。

令$\mathbf{x}_t$ 为取值于 $\mathbb{N}_+$ 上的平稳独立同分布信源。假设对于所有 t，$\mathbf{x}_t \sim P_{\mathbf{x}}$。令$\mathbf{x} \sim P_{\mathbf{x}}$。假设 $P_{\mathbf{x}}$ 属于幂律包络类或指数包络类。由[5]和 [6] 可知，可以构造一列函数$C_{t,\mathbf{x}^{t-1}} : \mathbb{N}_+ \to \{0,1\}^*$，使得

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{T-1} \mathbb{E}\left[\ell\left(C_{t,\mathbf{x}^{t-1}}(\mathbf{x}_t)\right)\right] \le H(\mathbf{x}) + 1. \tag{6}$$

此外，若 $P_{\mathbf{x}}[\mathbf{x}_t = x_1], P_{\mathbf{x}}[\mathbf{x}_t = x_2] > 0$，则 $C_t(x_1)$ 不是 $C_t(x_2)$ 的前缀，反之亦然。这可由在幂律算法（参见 [5]）或指数算法（参见 [6]）中用 SFE 编码替代算术编码（基于相同的概率模型）得出。序列 C_t 是在线构造的，无需显式知道概率质量函数 $P_{\mathbf{x}}$。

第[5]–[8] 节中的包络类和自适应编码方案适用于定义在 $\mathbb{N}_+$ 上的信源；然而，第 II 节讨论的量化器输出满足 $\mathbf{q}_t \in \mathbb{Z}^m$。我们将构造一个双射 $g : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{N}_+$，使得 $g(\mathbf{q}_t)$ 的极限分布属于某个包络类。特别地，假设 g 满足：若 $\|a\|_\infty > \|b\|_\infty$，则 $g(a) > g(b)$。换言之，假设 g 是一个保持由 $\mathbb{Z}^m$ 上的无穷范数所诱导的偏序的函数。显然，这样的映射存在。对于 $i \in \mathbb{N}$，定义 $\mathcal{B}_i = \{z \in \mathbb{Z}^m : \|z\|_\infty \le i\}$，它是 $\mathbb{Z}^m$ 中位于以原点为中心、边长为 $2i$ 的超立方体内的点集。注意，$\mathcal{B}_i$ 的基数为 $|\mathcal{B}_i| = (2i+1)^m$。为定义 g，选择 $g(0_m) = 1$，

然后将 $\mathcal{B}_1$ 中剩余的点任意映射到 2 到 3^m，依此类推。我们有以下定理。

定理 3.1：设 $g:\mathbb{Z}^m\to\mathbb{N}_+$ 是任意一个双射，满足若 $\|a\|_\infty>\|b\|_\infty$ 则 $g(a)\geq g(b)$。令 $\mathbf{q}$ 如命题 2.1 所述，并定义 $\mathbf{q}=g(\mathbf{q})$。若 $m=1$ 或 $m=2$，$\mathbf{q}$ 属于指数包络类。若 $m>2$，则 $\mathbf{q}$属于幂律包络类。

证明：令 $\{\boldsymbol{\omega}_t\}$、$\{\boldsymbol{\nu}_t\}$和 $\boldsymbol{\chi}$ 如命题 2.1 中所述，并令 $\boldsymbol{\delta}_t\perp\!\!\!\perp(\boldsymbol{\chi},\ \{\boldsymbol{\omega}_t\},\ \{\boldsymbol{\nu}_t\})$。定义 $\mathbf{z}_t=C\mathbf{e}_t+\boldsymbol{\delta}_t$。由式 (2),

$$\mathbf{z}_t\overset{D}{=}C\left(R^t\boldsymbol{\chi}+\sum_{i=0}^{t-1}R^i(\boldsymbol{\omega}_i-L\boldsymbol{\nu}_i)\right)+\boldsymbol{\delta}_t. \tag{7}$$

取满足 $\|c\|_2=1$ 的 $c\in\mathbb{R}^m$。令 $\kappa_1=\lim_{t\to\infty}\sum_{i=0}^{t-1}\|R^i\|_2$、$\kappa_2=$ $\kappa_3=$ $\sup_t\|R^t\|_2^2$ 和 $\lim_{t\to\infty}\sum_{i=0}^{t-1}\|R^i\|_2^2$。注意，由于 $\rho_{\max}(R)<1$，根据格尔范德定理（例如参见 [4] 中的命题 A.4），κ_1、κ_2、κ_3 均有限。定义 $z-C\sum_{=0}^{t-1}R^iL\nu_i+\delta_t$ $-_t=C\ R^t\chi+\sum_{=0}^{t-1}R^i\omega_i$ i，并令 z (i) 使得 $z_t\overline{D}=z_t+z_t$，其中 $E[z_t]=E[z_t]=0$。对所有 t，c^Tz_t的支撑有界，即

$$|c^T\underline{z}_t|\leq(\kappa_1\|C\|_2\|L\|_2+1)\frac{\sqrt{m}}{2} \tag{8}$$

这可由三角不等式、柯西-施瓦茨不等式、矩阵范数的次乘性，以及由于$\|\boldsymbol{\nu}_t\|_2,_\|\boldsymbol{\delta}_t\|_2\leq\sqrt{}_{m\,2}$而得。令 $\sigma_1=(_\kappa_1\|C\|_2\|L\|_2+1)\sqrt{}_{m\,2}$。根据 (8)，对于每个 t 以及满足$\|c\|_2=1$的 c，c^Tz_t 是 σ_1-次高斯 [18, Ex. 5.6(b)]。

定义 $\Omega_t=C\left(R^tX_0(R^t)^T+\sum_{i=0}^{t-1}R^iW(R^i)^T\right)C^T$。我们有 $c^Tz_t\sim\mathcal{N}(0,c^T\Omega_tc)$。若记 $\sigma_2^2=\|C\|_2^2($ $\|X_0\|_2\kappa_2+\|W\|_2\kappa_3)$，则对所有 t 都有 $c^T\Omega_tc\leq\sigma_2^2$，这可类似地由三角不等式、柯西-施瓦茨不等式和矩阵范数的次乘性推出。由于c^Tz_t 是均值为零的高斯变量，且其方差上界为 σ_2^2，因此 c^Tz_t 是 σ_2-次高斯。注意，σ_2 不依赖于 c，且这对任意满足 $\|c\|_2=1$ 的 c 都成立。由于 $c^Tz_t\overline{D}=c^Tz_t+c^Tz_t$，根据 [18, 引理 5.4 (b)] c^T，对于所有 t 以及满足 $\|c\|_2=1$ 的 c，$_tz$ 是 $\sigma=\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$-次高斯。因此，对于所有 t，$z_t$ 是 σ-次高斯。

定义 $\mathbf{q}_t=Q_\Delta(\mathbf{z}_t)$ 和 $\overline{\mathbf{q}_t}=g(\mathbf{q}_t)$。注意，对于 $r\in\mathbb{N}_0$，根据定义，集合 $\mathcal{B}_r$ 恰好包含 $|\mathcal{B}_r|=(2r+1)^m$ 个点。根据双射 g 的定义，对于 $r\in\mathbb{N}_+$，$\|\mathbf{q}_t\|_\infty\geq r$ 当且仅当 $\mathbf{q}_t\geq(2(r-1)+1)^m+1$。取 $z\in\mathbb{N}_+$。我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[\overline{\mathbf{q}}_t=z]&\leq\mathbb{P}[\overline{\mathbf{q}}_t\geq z] &(9)\\&\leq\mathbb{P}\left[\overline{\mathbf{q}}_t\geq\left(2(\lfloor\frac{\sqrt[m]{z-1}+1}{2}\rfloor-1)+1\right)^m+1\right]\\&\leq\mathbb{P}\left[\|\mathbf{q}_t\|_\infty\geq\lfloor\frac{\sqrt[m]{z-1}+1}{2}\rfloor\right], &(10)\end{aligned}$$

其中，(10) 中的 $z=1$ 情形显然成立，而对于 $z>1$，(10) 则可由我们在上文 (9) 中的观察得出。注意，对于 $r\in\mathbb{N}_0$，$\|\mathbf{q}_t\|_\infty\geq r$，当且仅当 $\|C\mathbf{e}_t+\boldsymbol{\delta}_t\|_\infty\geq r-\frac{1}{2}$。

因此，进一步放宽 (10)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[\overline{\mathbf{q}}_t=z]&\leq\mathbb{P}\left[\|C\mathbf{e}_t+\boldsymbol{\delta}_t\|_\infty\geq\lfloor\frac{\sqrt[m]{z-1}+1}{2}\rfloor-\frac{1}{2}\right]\\&\leq\mathbb{P}\left[\|C\mathbf{e}_t+\boldsymbol{\delta}_t\|_\infty\geq\left(\frac{\sqrt[m]{z-1}}{2}-1\right)\right] &(11)\\&\leq 2me^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{1}{2}\sqrt[m]{z-1}-1\right)^2} &(12)\end{aligned}$$

其中，(12) 是由针对次高斯随机向量的极大不等式推出的（参见 [19, 2 2 1] $\zeta=$定理 $1/\ 8\sigma^2$ $^2\leq e^{\zeta\ \sqrt[m]{-1}-2\ ^2}$）。令 ( )。当 z 充分大时，我们有 z (z)，因此，当 z 充分大时，$P[\mathbf{q}_t=z]\leq{}^2{}_m\ {}_{z^2}$。这表明，无论 m 取何值，经函数 g 处理后的量化器输出都属于参数为 $\alpha=2$ 的幂律包络类，其 β 取决于 ζ 和 m。若 $m=1$，则立即有 $\mathbf{q}_t$ 属于指数类，其 $\alpha=\zeta$ 和 β 取决于ζ。若 $m=2$，则 $\mathbf{q}_t$ 属于指数类，其 $\alpha=\frac{\zeta}{2}$ 和 β 取决于 ζ。由于 (12) 中的界对所有 t 都成立，因此对极限分布 $\mathbf{q}=g(\mathbf{q})$ 也成立。

■

注意，由于$\mathbf{q}$是双射，$H(\mathbf{q}_t)=H(\mathbf{q}_t)$，且 $H(\mathbf{q})=H(\mathbf{q})$。同样，根据命题 2.1 $D_{KL}(\mathbf{q}_t\|\mathbf{q})$，$\to0$。后一事实的一个推论，以及定理 3.1 关于$\mathbf{q}$属于幂律或指数包络类的论断，是 $\lim_{t\to\infty}H(\mathbf{q}_t)=H(\mathbf{q})$ [20, 定理 21]。[5]和 [6]中的结果仅适用于 $\mathbb{N}_+$ 上的**平稳源**，而$\mathbf{q}_t$仅是渐近平稳的。不过，根据命题 2.1 和定理 3.1，我们提出如下猜想。

猜想 3.2：设 g 是定理 3.1 中所述的双射。假设图 2 中的无损编码器首先计算$\mathbf{q}_t=g(\mathbf{q}_t)$，然后通过$a_t=C_{t,\mathbf{q}^{t-1}}(\mathbf{q}_t)$对$\mathbf{q}_t$ 进行编码，其中 $C_{t,\mathbf{q}^{t-1}}$ 是通过 [6]（当 $m\leq2$时）或[5]（采用零时延修改，即以 SFE 编码取代算术编码，参见式 (6)）构造的编码函数。该编码在第 II 节所述意义下是前缀无歧义的（事实上，时刻 t 使用的特定前缀无歧义编码仅取决于$\mathbf{q}^{t-1}$），且解码器能够准确重构$\mathbf{q}_t$，从而确保满足线性二次高斯控制性能约束。我们猜想，时间平均期望码字长度满足 $\lim_{T\to\infty}\ ^1{}_T\sum_{=0}^{T-1}{}_iE[\ell(a_t)]=H(\mathbf{q})+2$。

证明（或证伪）猜想 3.2 是未来工作的一个研究课题；我们猜测，鉴于 $\{\mathbf{q}_t\}$ 的遍历性，且 $\mathbf{q}_t\to\mathbf{q}$ 在 KL 意义下成立，该猜想是正确的。

IV. 一种实用的自适应算法

在 [5]–[8] 中，编码方案的一个关键要素是截断值的概念。一般来说，如果信源在某一时刻产生的符号低于截断阈值，就会通过算术编码对该符号进行编码。如果信源产生的符号超过截断阈值，则先通过算术编码对转义符号进行编码，随后使用固定的（Elias）通用码对该符号进行编码。在 [5]–[8],中，截断值会随时间增长；（在我们的情形中）随着编码的符号数量增多，截断值将趋于无穷大。随时间增长的截断值并不实用，因为它们要求用于实现算术编码的算术精度不断提高；而在零时延情形下，

SFE、编码器和解码器的精度也会随时间不断提高[9]。由于我们关注的是长期的无限时域通信成本，因此我们建议预先固定截断值，并将固定的算术精度纳入考量。本节余下部分将介绍该算法。

我们首先介绍“删失”的概念，然后再描述编码。设 p 为编码器和解码器执行（无符号整数）算术运算时所用的精度，以比特为单位。我们首先将 $\mathbf{q}_t$ 转换为定义在 N_+^m 上的信源，方法是计算向量 $\mathbf{s}_t$ ，其元素为

$$[\mathbf{s}_t]_i = \begin{cases} 2[\mathbf{q}_t]_i, & [\mathbf{q}_t]_i > 0 \\ -2[\mathbf{q}_t]_i + 1, & [\mathbf{q}_t]_i \le 0 \end{cases}. \tag{13}$$

设 $k \in \mathrm{N}_+^m$ 为一个截断值向量。 k 是预先固定的，也是我们编码算法的超参数。我们要求 $\mathrm{n} = \prod_{j=1}^{m}([k]_j + 1)$ 有 $\mathrm{n} < 2^{\frac{p}{2}}$. 定义截断算子 $\mathrm{trunk}_k : \mathrm{N}_+^m \to \mathrm{N}_0^m$ 如下：

$$[\mathrm{trunk}_k(s)]_i = \begin{cases} [s]_i, & [s]_i \le [k]_i \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}. \tag{14}$$

定义截断后的符号元组 $\mathbf{s}_t = \mathrm{trunk}_k(\mathbf{s}_t)$，它是字母表基数为 n 的信源。将被截断的符号序列记为 $\hat{\mathbf{s}}_t$，因此 $[\hat{\mathbf{s}}_t]_i$ 是从 $\mathbf{s}_t$ 中截断的第 i^{th} 个符号。注意，向量 $\hat{\mathbf{s}}_i$ 的维数是随机的。定义线性索引函数 $\lambda : \mathrm{N}_0^m \to \mathrm{N}_0$ 如下： $\lambda(s) = \sum_{i=1}^{m-1} [s]_i \prod_{j=i+1}^{m} ([k]_j + 1) + [s]_m$。我们有， λ 是从 $\mathbf{s}_t$ 的取值范围到集合 $\{0, 1, \ldots, \mathrm{n} - 1\}$ 的一个双射。令 $\mathbf{m}_t = \lambda(\mathbf{s}_t)$。在我们的算法中，我们使用 SFE 编码对 $\mathbf{m}_t$ 进行编码（参见 [21], [4, 第 IV.A 节1]）。随后，使用 Elias ω 码对 $\hat{\mathbf{s}}_t$ 的每个元素进行编码 [10]。解码器对 $\mathbf{m}_t$ 进行解码，并通过求逆线性索引函数 λ 恢复 $\mathbf{s}_t$。解码器统计 $\mathbf{s}_t$ 中的溢出“0”符号，并从剩余比特中解码经 Elias ω 编码的 $\hat{\mathbf{s}}_t$。然后，解码器重构 $\mathbf{s}_t$ 和 $\mathbf{q}_t$。

我们参照 [9] 中自适应算术编码的定精度实现，采用类似方法实现 SFE 编码。若要通过 SFE编解码器对 $\mathbf{m}_t$ 进行编码，需要其概率质量函数。我们基于 $\mathbf{m}^{t-1}$ 建立经验模型，并用它对 $\mathbf{m}_t$ 进行编码。令 $\mathbf{c}_t \in \mathrm{N}_0^n$，并假设 $[\mathbf{c}_{-1}]_i = 1$ 对 $i \in \{0, \ldots, \mathrm{n}-1\}$ 均成立。对于所有 t，令 $\mathbf{r}^t = \sum_{i=0}^{n} [\mathbf{c}_t]_i$。时刻 t 的 SFE 编码所用的概率质量函数 $+1$ 基于经验频率

$$[\mathbf{c}_t]_i = \begin{cases} \frac{1}{2}\left([\mathbf{c}_{t-1}]_i - 1\right) + 1 + \mathbb{1}_{\mathbf{m}_t = i}, & \text{if } \mathbf{r}_{t-1} = 2^{p/2} - 1 \\ [\mathbf{c}_{t-1}]_i + \mathbb{1}_{\mathbf{m}_t = i}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

我们使用 PMF $\mathrm{P}_{\mathbf{c}_{t-1}}(i) = [\mathbf{c}_{t-1}]_i$ 对 $\mathbf{m}_t$ 进行编码。编码器和解码器都以相同的初始模型 $\mathbf{c}_{-1}$ 开始，并在编码/解码后更新各自的模型，使其保持同步。更新规则会定期重新缩放，以确保能够以 p 比特的精度执行 SFE 编码/解码所需的算术运算。更多详情请参见[22, 第 11]章。由于时刻 t 用于 SFE 编码的模型仅取决于 $\mathbf{m}^{t-1}$，因此给定 $\mathbf{m}^{t-1}$ 时，SFE 编码满足第 II 节所述的前缀无关性质。Elias omega 编码同样是即时可解码的，因此通过 SFE 编码 $\mathbf{s}_t$ 和 $\mathbf{s}_t$ 对 $\mathbf{q}_t$ 进行联合编码，满足我们期望的前缀约束。现在，我们通过数值方式刻画该算法的性能。

V. 数值结果

我们使用 [11] 中倒立摆系统的线性化模型进行实验。我们在附录 附录 I 中详细介绍倒立摆系统。该系统的状态向量有 $\mathrm{m} = 4$ 个维度，包括水平位置和速度，以及相对于小车平台法线的摆锤方位角和角速度。系统的控制输入为 $\mathrm{u} = 1$ 维。我们以每秒 100 个样本的采样频率对系统动力学进行离散化，并假设连续时间控制输入以相同频率进行采样保持。假设离散时间系统动力学为 $\mathbf{x}_{t+1} = A_\tau \mathbf{x}_t + B_\tau \mathbf{u}_t + \mathbf{w}_t$ ，其中 $A_\tau \in \mathbb{R}^{4\times4}$， $B_\tau \in \mathbb{R}^{4\times1}$，且 $\mathbf{w}_t$ 为独立同分布过程噪声，满足 $\mathbf{w}_t \perp\!\!\!\perp \mathbf{u}_0^{t-1}$，$\mathbf{x}_0^t$，$\mathbf{w}_0^{t-1}$ 且 $\mathbf{w}_t \sim \mathcal{N}(0,\ W_\tau)$。我们假设代价权重为对角 W_τ ，满足 $W_\tau = .005 I_4$，且初始配置不确定，满足 $\mathbf{x}_0 \sim \mathcal{N}(0,\ .05 I_4)$。我们假设 LQG 代价权重为 $Q = I_{4\times4}$ 和 $\Phi = 1$。

所有仿真均使用 MATLAB R2022B[23]完成。我们实现了第 II 节中的量化器设计，并使用第 IV 节中的压缩算法对量化结果进行编码。为求解式 (1) 中的速率-失真优化问题并获得测量矩阵 C，我们使用了 YALMIP 工具箱 [24] 和 MOSEK 求解器 [25]。在实现无损压缩算法时，我们采用了 SFE 编码的“排序”版本；这通常能减少冗余（参见 [4, 第 IV.A 节1]）。SFE 编码采用无符号 64 位算术实现，并基于 [9]中的算术编码实现。经过一些初步调试后，我们选定了截断向量 $k = [8191, 3, 3, 3]^{\mathrm{T}}$。更多详情请见 [22, 第 11] 章。

在图 3 中，我们绘出了通过改变目标 LQG 代价 γ 得到的量化器设计的经验达到代价。我们还绘出了式 (1) 中的下界 $\mathcal{R}(\gamma)$，以及定理 IV.3 (ii) (22)]，给出的上界，该上界约为 $\mathcal{R}(\gamma) + 1.26\mathrm{m} + 1$ 比特。速率失真下界呈现出典型的变化趋势；下界的水平渐近线对应于完全可观测状态反馈下的最低可行 LQG 性能（在此采样率下）。接近该渐近线时，数据速率下界急剧上升；而当可以容忍较高代价时，该下界则相当适中。我们对系统进行了 $\mathrm{T} = 400000$ 个样本的仿真，并绘制了整个时域内的平均控制代价与平均码字长度之间的关系。我们发现，控制代价的收敛相当缓慢。图中显示的大多数（但并非全部）点所对应的目标控制代价都低于计算得到的经验平均代价。图 4 展示了运行平均比特率和控制代价的收敛过程。

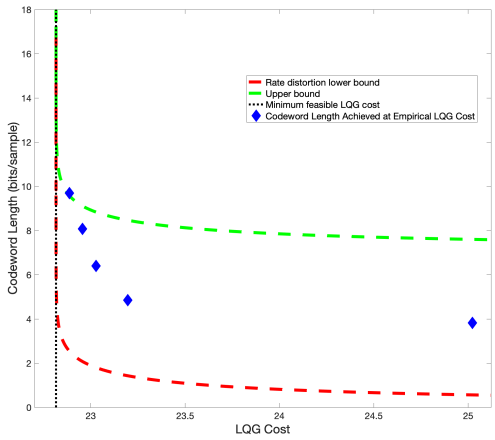


图 3. 控制成本约束 γ 绘制在横轴上，数据速率（以比特为单位）绘制在纵轴上。

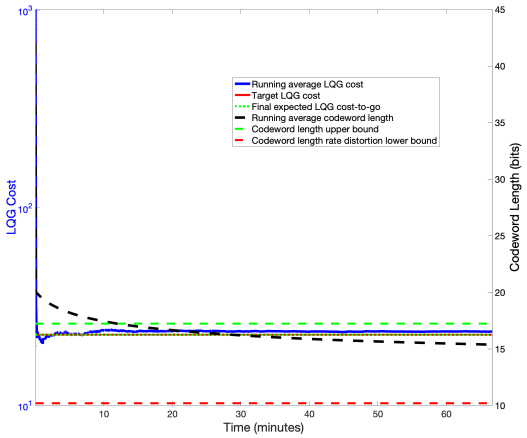


图 4. 在同一张图中绘出了特定固定目标控制成本下的控制代价和通信成本的运行平均值。图中展示了码字长度的上界和下界、目标控制成本，以及经过 $\mathrm{T} = 400000$ 个样本后的预期未来成本。可以看到，预期未来成本收敛于目标控制成本。

VI. 结论

解读这些数值结果时，必须谨慎，不能将其视为“真实世界”实验。这些实验使用伪随机数和有限精度算术，在一台标准的高端消费级笔记本电脑上完成。此类仿真无疑会受到数值误差的影响，而这些误差在某些应用中可能相当显著。

不使用（排序后的）SFE 编码来编码截断符号 $\mathrm{trunk}_k(\mathbf{s}_t)$ 的线性索引，也可以沿向量的各个维度使用算术编码对 $\mathrm{trunk}_k(\mathbf{s}_t)$ 进行编码，并将向量的元素视为马尔可夫源。例如，编码器和解码器可以为信源的第一个分量 $[\mathrm{trunk}_k(\mathbf{s}_t)]_0$ 存储一个模型，然后为 $[\mathrm{trunk}_k(\mathbf{s}_t)]_1$, 存储 $[k]_0 + 1$ 个模型，每个可能的 $[\mathrm{trunk}_k(\mathbf{s}_t)]_0$，实现各对应一个模型，依此类推。这种方法能够更准确地刻画信源概率质量函数，但代价是空间复杂度更高。此外，这还降低了模型重标度的频率

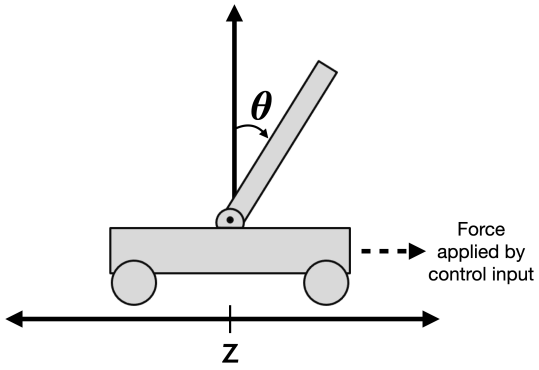


图 5. 倒立摆（又称“小车-摆杆”）系统由一辆电动轮式小车组成，可沿 z 轴在一个维度上移动。“倒立摆”安装在小车顶部，由一根细长摆杆构成，摆杆固定在小车上的支点处。控制输入可使小车沿其运动轴加速，从而使摆锤稳定在其不稳定平衡点 $\theta = 0$ 附近。

变量	描述	值
μ_{cart}	小车质量	0.5 千克
μ_{pend}	摆杆质量	.2 千克
κ	小车的摩擦系数	.1 牛顿/(米·秒)
ψ	摆锤的质量转动惯量	.006 千克·米^2
ϵ	摆锤到质心的长度	0.3 米
g	重力加速度	9.8 米/秒^2

表 I

图 5 [11] 中倒立摆系统的参数。

重标度。

附录 I 倒立摆的系统动力学

我们使用 [11] 中倒立摆系统的线性化模型进行实验。倒立摆系统如图 5 所示并在其中进行了描述。系统状态被视为 $\mathrm{m} = 4$ 维，其中$\mathbf{z}$表示小车沿其运动轴的横向位置（单位：米），$\dot{\mathbf{z}} = \frac{d}{d\,t}\mathbf{z}$ 表示相应的速度（单位：米/秒），$\boldsymbol{\theta}$ 表示摆杆偏离垂直方向的角度（单位：弧度），而$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \frac{d}{d\,t}\boldsymbol{\theta}$ 表示相应的角速度（单位：弧度/秒）。控制输入$\bar{\mathbf{u}}$ 是一维的。对于 $\mathrm{t} \in \mathbb{R}$、$\mathrm{t} \geq 0$，将连续时间状态向量记为

$$\mathbf{x}(\mathrm{t}) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}(\mathrm{t}) \\ \dot{\mathbf{z}}(\mathrm{t}) \\ \boldsymbol{\theta}(\mathrm{t}) \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}(\mathrm{t}) \end{bmatrix}. \tag{15}$$

然而，该系统的真实动力学是非线性的；线性化后，连续时间动力学假设为 [11]

$$d\mathbf{x}(\mathrm{t}) = A_{\mathrm{ct}}\mathbf{x}(\mathrm{t}) + B_{\mathrm{ct}}\mathbf{u}(\mathrm{t}) + W_{\mathrm{ct}}^{\frac{1}{2}} d\mathbf{w}(\mathrm{t}), \tag{16}$$

其中，系统矩阵 A_{ct} 和反馈矩阵 B_{ct} 是表 I 中系统参数的函数。令

$$\rho = \psi(\mu_{\mathrm{pend}} + \mu_{\mathrm{cart}}) + \mu_{\mathrm{pend}}\mu_{\mathrm{cart}}\epsilon^2 \tag{17}$$

具体而言，我们有

$$A_{\mathrm{ct}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{\left(\psi + \mu_{\mathrm{pend}}\epsilon^2\right)\kappa}{\rho} & \dfrac{\left(\mu_{\mathrm{pend}}^2\epsilon^2\mathsf{g}\right)}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{\left(\mu_{\mathrm{pend}}\epsilon\kappa\right)}{\rho} & \dfrac{\mu_{\mathrm{pend}}\mathsf{g}\epsilon(\mu_{\mathrm{cart}} + \mu_{\mathrm{pend}})}{\rho} & 0 \end{bmatrix}, \tag{18}$$

$$B_{\mathrm{ct}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{\left(\psi + \mu_{\mathrm{pend}}\epsilon^2\right)}{\rho} \\ 0 \\ \dfrac{\mu_{\mathrm{pend}}\epsilon}{\rho} \end{bmatrix}, \tag{19}$$

且 $d\mathbf{w}(\mathsf{t})$ 是标准布朗运动，用于表示建模误差和未建模动态（风等）。现在假设采样周期为 τ，构建模型 (16) 的离散时间版本。我们假设采用采样保持反馈策略，其中 $u(\mathsf{t}) = u_{\lfloor \mathsf{t}/\tau \rfloor}$。令

$$A_\tau = e^{A_{\mathrm{ct}}\tau}, \tag{20a}$$

$$B_\tau = \int_0^\tau e^{A_{\mathrm{ct}}\mathsf{s}} B_{\mathrm{ct}} d\mathsf{s}, \tag{20b}$$

and

$$W_\tau = \left(\int_0^\tau e^{A\mathsf{s}} W_{\mathrm{ct}} e^{A_{\mathrm{ct}}^{\mathrm{T}}\mathsf{s}} d\mathsf{s}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{20c}$$

对于矩阵 M 参数，e^M 表示 M的矩阵指数。对于 $\mathsf{t} \in \mathbb{N}_0$,，令$\mathbf{x}(\mathsf{t}\tau) = \mathbf{x}_\mathsf{t}$，且$\mathbf{u}(\mathsf{t}\tau) = \mathbf{x}_\mathsf{t}$。

参考文献

[1] E. I. Silva、M. S. Derpich 和 J. Ostergaard，“受平均数据速率约束的控制系统设计框架”，*IEEE* 自动控制学报，第 56 卷，第 8 期，第 1886–1899 页，2011年。[2] T. Tanaka、K. H. Johansson、T. Oechtering、H. Sandberg 和 M. Skoglund，“LQG 控制系统中前缀无关码的速率”，载于 *IEEE* 国际信息论研讨会论文集，2016年，第 2399–2403 页。[3] V. Kostina 和 B. Hassibi，“控制中的率-代价权衡”，*IEEE* 自动控制学报，第 64 卷，第 11 期，第 4525–4540 页，2019年。[4] T. Cuvelier、T. Tanaka 和 R. W. Heath，“LQG 控制的时不变前缀编码”，*IEEE* 信息论精选领域期刊，第 1–1 页，2022年。[5] S. Boucheron、A. Garivier 和 E. Gassiat，“可数无限字母表上的编码”，*IEEE* 信息论汇刊，第 55 卷，第 1 期，第 358–373 页，2009年。[6] D. Bontemps，“无限字母表上的通用编码：指数递减包络”，*IEEE* 信息论汇刊，第 57 卷，第 3 期，第 1466–1478 页，2011年。[7] D. Bontemps、S. Boucheron 和 E. Gassiat，“关于可数字母表上的自适应编码”，*IEEE* 信息论汇刊，第 60 卷，第 2 期，第 808–821 页，2014年。[8] S. Boucheron、E. Gassiat 和 M. I. Ohannessian，“关于可数字母表上的自适应编码：极值稳定包络类”，*IEEE* 信息论汇刊，第 61 卷，第 9 期，第 4948–4967 页，2015年。[9] I. H. Witten、R. M. Neal 和 J. G. Cleary，“用于数据压缩的算术编码”，*ACM* 通讯，第 30 卷，第 6 期，第 520–540 页，6月 1987 [ ] 10 1145 214762 214771 。在线。可访问：https://doi.org/ 。/ 。[10] P. Elias，“通用码字集与整数表示”，*IEEE* 信息论汇刊，第 21 卷，第 2 期，第 194–203 页，1975年。[11]D. Tilbury、B. Messner、J. Luntz、R. Hill、J. Taylor 和 S. Das。（2019年，访问于2023年2月）MATLAB 和 Simulink 控制教程：倒立摆。[在线]。可访问：https://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=InvertedPendulum&section=SystemModeling [12]T. C. Cuvelier、T. Tanaka 和 R. W. Heath，“具有共享随机性的线性二次高斯控制中变长源编码的下界”，IEEE 控制系统快报，第 6 卷，第 2918–2923 页，2022年。 [在线]。可访问：https: //arxiv.org/abs/ 2203 12467 。A. Khina、Y. Nakahira、Y. Su 和 B. Hassibi，[13]“采用固定速率反馈的最优控制算法”，载于 IEEE 决策与控制会议论文集，2017年，第 6015–6020 页。[14] G. N. Nair 和 R. J. Evans，“有限反馈数据率下随机线性系统的可稳定性”，SIAM 控制与优化期刊，第 43 卷，第 2 期，第 413–436 页，2004年。 [在线]。可访问：https://doi.org/ 10 1137 0363012902402116 。/S S. Yuksel，[15]“采用固定速率受限反馈的含噪线性系统的随机稳定化”，IEEE 自动控制学报，第 55 卷，第 12 期，第 2847–2853 页，2010年。[16] O. Sabag、V. Kostina 和 B. Hassibi，“ 使用受约束量化器通过固定速率反馈稳定动力系统 ”，载于 IEEE 国际信息论研讨会论文集，2020年，第 2855–2860 页。[17] T. Tanaka、P. M. Esfahani 和 S. K. Mitter，“最小定向信息下的线性二次高斯控制：半定规划方法”，IEEE 自动控制汇刊，第 63 卷，第 1 期，第 37–52 页，2018年。[18] T. Lattimore 和 C. Szepesv´ari，《Bandit Algorithms》。剑桥大学出版社，2020年。[19] E. Pauwel，《高维统计学、优化与算法》，2020年9月。 [在线]。可访问：https://www.math.univ-toulouse.fr/ ~epauwels/M2RI/poly.pdf [20] P. Harremo¨es，《信息拓扑及其应用》。柏林、海德堡：施普林格·柏林·海德堡，2007年，第 113–150 页。 [在线]。可访问：https://doi.org/ 10 1007 978 3 540 32777 6 5 。/ - - - - T. M. Cover [21]和 J. A. Thomas，《信息论基础》，第 2 版。Wiley-Interscience，2006年。[22] T. Cuvelier，“在通信约束下实现可靠控制”，博士学位论文，德克萨斯大学奥斯汀分校，2023年。[23] MATLAB，R2022b 版。马萨诸塞州纳蒂克：MathWorks 公司，2022年。[24] J. L¨ofberg，“Yalmip：用于 MATLAB 建模与优化的工具箱”，载于 IEEE 计算机辅助控制系统设计会议论文集，中国台湾台北，2004年。[25] M. ApS，《MOSEK MATLAB 优化工具箱手册》。10.0.38 版，2023年。 [在线]。可访问：https://www.mosek.com/