arXiv:2304.00594v1 [math.NA] 2 Apr 2023

# 随机纳维–斯托克斯–傅里叶系统的蒙特卡罗方法收敛性分析

M´aria Luk´aˇcov´a – Medvid'ov´a* Bangwei She♠ Yuhuan Yuan†, *

*美因茨约翰内斯·古腾堡大学数学研究所 Staudingerweg 9, 55128 美因茨，德国 lukacova@uni-mainz.de

♠首都师范大学多学科研究院 西三环北路105号，100048 北京，中国 bangweishe@cnu.edu.cn

†南京航空航天大学数学学院 将军大道29号，211106 南京，中国 yuhuanyuan@nuaa.edu.cn

**摘要**

本文将可压缩纳维–斯托克斯–傅里叶系统的初始数据、外力、黏度系数和热传导系数视为随机数据。我们将常用于近似统计矩的蒙特卡罗方法与适用于物理空间和时间的确定性离散方法相结合。在数值密度和温度以概率有界为假设的条件下，我们通过真正的随机紧性论证，证明随机有限体积解收敛到统计强解。此外，我们还证明了期望和偏差的蒙特卡罗估计量的收敛性并给出误差估计。我们展示了若干数值结果，以说明理论结果。

**关键词：** 不确定性量化，蒙特卡罗方法，有限体积法，随机黏性可压缩流，统计强解，收敛速率

## 1 引言

随机性是科学与工程模型的固有属性。模型参数以及初始数据和边界数据通常只能通过观测或测量获得，而这些数据可能存在多种误差。为了将数据的不确定性传播到

* M.L. 的工作得到德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）项目 233630050（TRR 146）以及 TRR 165 Waves to Weather 的资助。M.L. 感谢古腾堡研究学院和美因茨多尺度建模研究所对其研究的支持。♠ B.S. 的工作得到中国国家自然科学基金委员会项目（批准号：12201437）的资助。

底层模型的解中，近年来人们开发了多种方法。基于统计抽样的蒙特卡罗方法可能是其中最流行的一种。尽管其收敛速率相对于集合规模而言较慢，但其优点是不受数据维数灾难的影响。后者是谱方法、伪谱方法或其他离散化方法的典型特性，参见例如 [1, 7, 27] 及其中的参考文献。

本文旨在严格分析随机数据条件下热传导、黏性可压缩流体流动的蒙特卡罗方法。我们回顾描述此类流体流动的纳维–斯托克斯–傅里叶系统

$$\partial_t \varrho + \mathrm{div}_x(\varrho \boldsymbol{u}) = 0, \tag{1.1}$$

$$\partial_t(\varrho \boldsymbol{u}) + \mathrm{div}_x(\varrho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) + \nabla_x p = \mathrm{div}_x \mathbb{S}(\mu, \lambda, \nabla_x \boldsymbol{u}) + \varrho \boldsymbol{g}, \tag{1.2}$$

$$c_v(\partial_t(\varrho\vartheta) + \mathrm{div}_x(\varrho \boldsymbol{u}\vartheta)) - \kappa\Delta\vartheta = \mathbb{S}(\mu, \lambda, \nabla_x \boldsymbol{u}) : \nabla_x \boldsymbol{u} + p\mathrm{div}_x \boldsymbol{u}, \tag{1.3}$$

$$c_v = 1/(\gamma - 1),\ \gamma > 1,\ \mathbb{S}(\mu, \lambda, \nabla_x \boldsymbol{u}) = \mu\Big(\nabla_x \boldsymbol{u} + \nabla_x^t \boldsymbol{u} - \frac{2}{d}\mathrm{div}_x \boldsymbol{u}\mathbb{I}\Big) + \lambda \mathrm{div}_x \boldsymbol{u}\mathbb{I}.$$

**边界条件和初始条件**

$$x \in \mathbb{T}^d \equiv \big([-1,1]|_{\{-1,1\}}\big)^d,\ d = 2, 3, \tag{1.4}$$

$$\varrho(0,\cdot) = \varrho_0,\ \boldsymbol{u}(0,\cdot) = \boldsymbol{u}_0,\ \vartheta(0,\cdot) = \vartheta_0. \tag{1.5}$$

这里， $\varrho$， $\boldsymbol{u}$ 和 $\vartheta$ 分别表示流体密度、速度和绝对温度。对于压力$p$，我们假设理想气体定律，即 $p = \varrho\vartheta$. 此外， $\gamma$ 为绝热系数， $c_v$ 为定容比热。下文中，我们考虑以下模型数据

驱动力. $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}(x)$; 黏度系数.热传导系数. $\kappa > 0$; 初始数据. $\varrho_0$, $\boldsymbol{u}_0$, $\vartheta_0$.

## 1.1 解对数据的依赖性

在我们的分析中，明确 Navier–Stokes– Fourier 系统的解对数据的依赖性十分重要。设 $\boldsymbol{m}$ 表示动量， $E$ 表示能量， $S$ 表示（物理）熵

$$\boldsymbol{m} = \varrho \boldsymbol{u}, \quad E = \frac{1}{2}\varrho|\boldsymbol{u}|^2 + c_v\varrho\vartheta, \quad S = \varrho s, \quad s = \log\left(\frac{\vartheta^{c_v}}{\varrho}\right).$$

那么，该问题（$\varrho$、 $\boldsymbol{u}$、 $\vartheta$）1.1）–（1.5) 的强解满足质量守恒、能量平衡和熵平衡

$$\int_{\mathbb{T}^d} \varrho(\tau,\cdot)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{T}^d} \varrho(0,\cdot)\,\mathrm{d}x =: M_0, \tag{1.6}$$

$$\int_{\mathbb{T}^d} E(\tau,\cdot)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{T}^d} E(0,\cdot)\,\mathrm{d}x + \int_0^\tau \int_{\mathbb{T}^d} \varrho \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{g}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \tag{1.7}$$

$$\int_{\mathbb{T}^d} S(\tau,\cdot)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{T}^d} S(0,\cdot)\,\mathrm{d}x + \int_0^\tau \int_{\mathbb{T}^d} \left(\frac{\mathbb{S}:\nabla_x \boldsymbol{u}}{\vartheta} + \kappa\frac{|\nabla_x\vartheta|^2}{\vartheta^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{1.8}$$

对任意 $\tau\in[0,T]$.

引入相对能量泛函

$$\begin{aligned}
&R_E\left((\varrho,\boldsymbol{u},\vartheta)\mid(\tilde\varrho,\tilde{\boldsymbol{u}},\tilde\vartheta)\right) = \frac{1}{2}\varrho|\boldsymbol{u}-\tilde{\boldsymbol{u}}|^2 + \mathbb{E}_{\mathcal{H}}\big((\varrho,\vartheta)|(\tilde\varrho,\tilde\vartheta)\big)\\
&\text{with } \mathbb{E}_{\mathcal{H}}\big((\varrho,\vartheta)|(\tilde\varrho,\tilde\vartheta)\big) = \mathcal{H}_{\tilde\vartheta}(\varrho,\vartheta) - \frac{\partial\mathcal{H}_{\tilde\vartheta}(\tilde\varrho,\tilde\vartheta)}{\partial\varrho}(\varrho-\tilde\varrho) - \mathcal{H}_{\tilde\vartheta}(\tilde\varrho,\tilde\vartheta)\\
&\text{and } \mathcal{H}_{\tilde\vartheta}(\varrho,\vartheta) = \varrho\left(c_v\vartheta - \tilde\vartheta s(\varrho,\vartheta)\right),
\end{aligned}$$

其中$(\tilde\varrho,\ \tilde{\boldsymbol{u}},\ \tilde\vartheta)$是满足以下条件的任意光滑函数 $\tilde\varrho>0,\ \tilde\vartheta>0$。例如，正如文献 [5]，$R_E$所示，是$(\varrho,\ \boldsymbol{m},\ S)$的凸函数，并且有

$$R_E \geq \mathbb{E}_{\mathcal{H}} \geq 0.$$

取$(\tilde\varrho,\ \tilde{\boldsymbol{u}},\ \tilde\vartheta)=(1,\ 0,\ 1)$，并假设$\|\boldsymbol{g}\|_{C^1(\mathbb{T}^d)}\leq g$，可得

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\mathcal{H}_{\tilde\vartheta}(\varrho,\vartheta)}{\partial\varrho} = c_v\vartheta - \tilde\vartheta\big(s-1\big),\\
&R_E\left((\varrho,\boldsymbol{u},\vartheta)\mid(1,0,1)\right) = \frac{1}{2}\varrho|\boldsymbol{u}|^2 + \mathbb{E}_{\mathcal{H}}\big((\varrho,\vartheta)|(1,1)\big) = E - S - (c_v+1)\varrho + 1
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\int_0^\tau\int_{\mathbb{T}^d}\varrho\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{g}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t &\leq \int_0^\tau\int_{\mathbb{T}^d}\frac{1}{2}\varrho|\boldsymbol{u}|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}|\overline{g}|^2\int_0^\tau\int_{\mathbb{T}^d}\varrho\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\leq \int_0^\tau\int_{\mathbb{T}^d} R_E\left((\varrho,\boldsymbol{u},\vartheta)\mid(1,0,1)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \frac{1}{2}|\overline{g}|^2 T M_0.
\end{aligned}$$

结合（1.6）–（1.8），得到相对能量不等式

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}^d} R_E\left((\varrho,\boldsymbol{u},\vartheta)\mid(1,0,1)\right)(\tau,\cdot)\,\mathrm{d}x &\leq \int_{\mathbb{T}^d} R_E\left((\varrho_0,\boldsymbol{u}_0,\vartheta_0)\mid(1,0,1)\right)\mathrm{d}x\\
&+ \int_0^\tau\int_{\mathbb{T}^d} R_E\left((\varrho,\boldsymbol{u},\vartheta)\mid(1,0,1)\right)(t,\cdot)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \frac{1}{2}|\overline{g}|^2 T M_0.
\end{aligned}$$

应用格朗沃尔不等式可得，对任意 $t\in[0,T]$，有

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_{\mathbb{T}^d} R_E\left((\varrho,\boldsymbol{u},\vartheta)\mid(1,0,1)\right)(t,\cdot)\,\mathrm{d}x\\
&\leq \frac{1}{2}|\overline{g}|^2 T M_0 + e^T\int_{\mathbb{T}^d} R_E\left((\varrho_0,\boldsymbol{u}_0,\vartheta_0)\mid(1,0,1)\right)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

考虑到相对能量关于 $(\varrho,\ \boldsymbol{m},\ S)$ 的凸性，通过直接计算可容易验证，对任意 $t\in[0,T]$

$$\|\varrho(t,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{T}^d)}+\|\boldsymbol{m}(t,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{T}^d)}+\|S(t,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{T}^d)}\lesssim 1+\int_{\mathbb{T}^d}R_E\left((\varrho,\boldsymbol{u},\vartheta)\mid(1,0,1)\right)(t,\cdot)\,\mathrm{d}x.$$

此处及下文中，我们记 $a\lesssim b$ if $a\le C\,b$，其中 $C$ 为正常数。假设初始相对能量有界，我们得到

$$\begin{aligned}\|\varrho\|_{L^\infty(0,T;L^1(\mathbb{T}^d))}+\|\boldsymbol{m}\|_{L^\infty(0,T;L^1(\mathbb{T}^d))}+\|S\|_{L^\infty(0,T;L^1(\mathbb{T}^d))}&\lesssim 1+\int_{\mathbb{T}^d}R_E\left((\varrho_0,\boldsymbol{u}_0,\vartheta_0)\mid(1,0,1)\right)\,\mathrm{d}x\\&\le C(\overline{g},T)\left(1+\int_{\mathbb{T}^d}\left(E(\varrho_0,\boldsymbol{u}_0,\vartheta_0)-S(\varrho_0,\vartheta_0)-(c_v+1)\varrho_0+1\right)\mathrm{d}x\right).\end{aligned}\tag{1.9}$$

上述估计表明，$L^\infty(0,T;\,L^1(\mathbb{T}^d))$ 范数下，纳维–斯托克斯–傅里叶系统(1.1)-(1.5)的强解由数据控制。

本文将分析满足上述随机模型数据的纳维–斯托克斯–傅里叶系统。为此，我们将蒙特卡罗方法与用于时空离散的有限体积（FV）方法相结合。我们的目标是针对统计抽样和时空离散，分别给出严格的收敛性与误差分析。尽管蒙特卡罗有限体积方法等蒙特卡罗近似已常规用于计算流体动力学或气象学中的不确定性量化，但对于可压缩黏性导热流体流动，其严格的收敛性与误差分析在文献中仍付之阙如。本文给出了这方面的首批结果。

我们参考了近期的工作 [15], ，其中分析了随机可压缩斜压Navier–Stokes系统的蒙特卡洛有限体积法的收敛性和误差估计。与黏性斜压情形不同，导热黏性可压缩流体流动的分析更为复杂。首先，满足理想气体定律的Navier–Stokes–Fourier方程 $p=\varrho\vartheta$ 的整体弱解的存在性仍是一个开放问题。目前只有一些关于弱解整体时间存在性的结果，但这些结果要求 $p$、$e$、$s$ 以及系数 $\mu$、$\kappa$ 满足某些结构限制，参见 [16, 定理3。1]。

确定性离散化方法（例如有限体积方法）收敛性分析的主要工具之一是所谓的弱强唯一性原理 [12]。这意味着，被识别为一列离散解的极限的广义解（耗散弱解），只要强解存在，就与该强解一致。第二个问题在于，对于Navier–Stokes–Fourier系统，耗散弱强唯一性结果仅是有条件的，参见 [9]。例如，弱强唯一性原理要求假设密度和温度有界。

综合考虑这些事实，我们将在统计强解的框架下开展工作，并将数值密度和温度在概率意义下的有界性作为我们的主要假设。换言之，纳维–斯托克斯–傅里叶系统的统计显著解不会出现密度和温度爆炸。正如纳什在其开创性工作 [25]中所指出的，这一假设非常自然。我们提及 Feireisl、Wen 和 Zhu 的近期工作 [17], ，其中已严格证明了密度和温度有界的（确定性）纳维–斯托克斯–傅里叶系统的条件正则性结果。

我们提到，Lanthaler、Mishra 和 Par´es-Pulido [22, 26] 已在不可压缩欧拉系统的背景下使用统计强解这一概念。对于椭圆问题，相关文献相当丰富，例如参见 Barth 等人 [3]，Charrier 等人 [10] 及其中所引的参考文献。在 [2, 21, 24] 标量双曲方程的蒙特卡罗方法收敛性分析中，已有研究基于确定性逐路径论证展开。与这些工作不同，我们不预先假设统计解的存在性，而是将通过真正的随机紧性论证证明近似解在随机空间中的收敛性。

本文组织如下。在第 2 节中，我们对纳维–斯托克斯–傅里叶系统的统计强解的期望和偏差的蒙特卡洛估计量进行统计分析。第 3节讨论随机数据条件下有限体积法的收敛性，并假设数值密度和温度在概率意义下有界。结合蒙特卡罗抽样与确定性近似的结果，我们得到本文的主要结论：随机纳维–斯托克斯–傅里叶系统的蒙特卡洛有限体积法的收敛性和误差估计，详见第 4 节和第 5节。在第 6 节中，我们通过数值实验说明理论结果。第7 节以总结性评论结束全文。

## 2 统计 纳维–斯托克斯–傅里叶系统的分析

首先，为进行统计分析，我们引入方程（1.1）–（1.5）的随机数据空间

$$D = \Big\{ [\varrho, \boldsymbol{u}, \vartheta, \mu, \lambda, \kappa, \boldsymbol{g}] \,\Big|\, \varrho \in W^{3,2}(\mathbb{T}^d),\ \boldsymbol{u} \in W^{3,2}(\mathbb{T}^d; \mathbb{R}^d),\ \vartheta \in W^{3,2}(\mathbb{T}^d),\ \min_{\mathbb{T}^d} \varrho > 0,\ \min_{\mathbb{T}^d} \vartheta > 0,$$
$$\int_{\mathbb{T}^d} [E - S - (c_v + 1)\varrho + 1] \,\mathrm{d}x < \infty,\ \mu > 0,\ \lambda \geq 0,$$
$$\kappa > 0,\ \boldsymbol{g} \in W^{2,2}(\mathbb{T}^d; \mathbb{R}^d) \Big\}, \tag{2.1}$$

该空间被视为波兰空间的博雷尔子集

$$X = W^{3,2}(\mathbb{T}^d) \times W^{3,2}(\mathbb{T}^d; \mathbb{R}^d) \times W^{3,2}(\mathbb{T}^d) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times W^{2,2}(\mathbb{T}^d; \mathbb{R}^d).$$

假设模型数据是 $D$中的随机变量。更准确地说，存在一个完备概率空间 $[\Omega\ \mathcal{B},\ \mathcal{P}]$ 以及一个可测映射

$$\boldsymbol{U}_0 : \omega \in \Omega \longrightarrow \Big[ \varrho_0(\omega), \boldsymbol{u}_0(\omega), \vartheta_0(\omega), \mu(\omega), \lambda(\omega), \kappa(\omega), \boldsymbol{g}(\omega) \Big] \in D$$

对于几乎所有的 $\omega \in \Omega$。

显然，随机数据会导出随机纳维–斯托克斯–傅里叶系统 (1.1)–(1.5)。下文中，我们希望在时间区间 $(0, T)$ 上分析该随机系统，其中 $T$ 是一个确定性数值。请注意，一般而言，统计强解 $(\varrho, \boldsymbol{u}, \vartheta)$ 存在于 $[0, T_{max})$ 上，其中 $T_{max}$ 是强解的最大存在时间。正如 [13] 中所证明的，$T_{max}$ 是一个随机变量。在第3.2节中，我们将证明统计强解确实存在于 $[0, T]$ 上，即对于几乎所有 $\omega \in \in \Omega$，$T < T_{max}(\omega)$。这将由我们的主要假设 (3.3) 推出，该假设要求密度和温度在概率意义下有界。由于强解的唯一性，我们将对应于数据 $\boldsymbol{U}_0 \in D$ 的纳维–斯托克斯–傅里叶系统强解记为 $(\varrho, \boldsymbol{u}, \vartheta)[\boldsymbol{U}_0, t]$。

## 2.1 统计收敛

本节中，我们定义期望和偏差的蒙特卡洛估计量，并讨论它们对于正则性类中的纳维–斯托克斯–傅里叶系统（1.1）–（1.5）的统计收敛性，该正则性类由先验估计（1.9）给出。基于确定性估计（1.9），我们对数据作出如下假设：

$$\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{T}^d}\left[E(\varrho_0,\boldsymbol{u}_0,\vartheta_0)-S(\varrho_0,\vartheta_0)-(c_v+1)\varrho_0+1\right]\mathrm{d}x\right]<+\infty, \tag{2.2a}$$

$$\|\boldsymbol{g}\|_{C(\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^d)}\leq\overline{g}\ \ \mathcal{P}-\text{a.s.},\qquad \overline{g}-\text{a deterministic constant} \tag{2.2b}$$

并得到以下收敛结果。这里的记号 $\mathbb{E}[\cdot]$ 表示期望。

**命题 2.1**（大数强律）。设 $\boldsymbol{U}_0^n$、$n=1$、2、.....是随机数据的一组独立同分布（*i.i.d.*）副本

$$\boldsymbol{U}_0=\left[\varrho_0,\boldsymbol{u}_0,\vartheta_0,\mu,\lambda,\kappa,\boldsymbol{g}\right]\in D\quad \textit{satisfying}\quad (2.2).$$

则对所有 $t\in[0,T]$ 均有

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}X^n(t,\cdot)\to 0\ \textit{in}\ L^1(\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^{d+2})\quad\textit{and}\quad\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}Y^n(t,\cdot)\to 0\ \textit{in}\ L^1(\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^{d+2})$$
$$\textit{as}\ N\to\infty,\quad \mathcal{P}-a.s., \tag{2.3}$$

其中

$$\begin{aligned}&X^n(t,\cdot):=(\varrho^n,\boldsymbol{m}^n,S^n)(t,\cdot)-\mathbb{E}\left[(\varrho,\boldsymbol{m},S)(t,\cdot)\right],\quad \boldsymbol{m}^n=\varrho^n\boldsymbol{u}^n,\quad S^n=\varrho^n\log\left(\frac{(\vartheta^n)^{c_v}}{\varrho^n}\right)\\&Y^n(t,\cdot):=|X^n|-Dev\left[(\varrho,\boldsymbol{m},S)(t,\cdot)\right],\quad Dev\left[(\varrho,\boldsymbol{m},S)\right]=\mathbb{E}\left[\,|(\varrho,\boldsymbol{m},S)-\mathbb{E}\left[(\varrho,\boldsymbol{m},S)\right]|\,\right],\end{aligned} \tag{2.4}$$

且 $(\varrho^n,\ \boldsymbol{u}^n,\ \vartheta^n):=(\varrho,\ \boldsymbol{u},\ \vartheta)\ [\boldsymbol{U}_0^n,t]$ 是纳维–斯托克斯–傅里叶系统（1.1）–（1.5）从 $\boldsymbol{U}_0^n$ 生成的强解。

证明。该证明由取值于可分 Banach 空间的随机变量的大数强律可得，见引理A.1(Ledoux 和 Talagrand [23, 推论 7。10]）。显然，$(\varrho^n,\boldsymbol{m}^n,S^n)$ 是一列相互独立的随机变量。因此，$X^n$ 和 $Y^n$ 是均值为零的相互独立随机变量，即

$$\mathbb{E}\left[X^n(t,\cdot)\right]=0\quad\text{and}\quad\mathbb{E}\left[Y^n(t,\cdot)\right]=0.$$

此外，利用 (2.2) 可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\|(\varrho,\boldsymbol{m},S)\|_{L^\infty(0,T;L^1(\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^{d+2}))}\right]\\&\leq C(\overline{g},T)\left(1+\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{T}^d}\left[E(\varrho_0,\boldsymbol{u}_0,\vartheta_0)-S(\varrho_0,\vartheta_0)-(c_v+1)\varrho_0+1\right]\mathrm{d}x\right]\right)<\infty,\end{aligned}$$

由此可得

$$\mathbb{E}\left[\|X^n(t,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^{d+2})}\right]<\infty\quad\text{and}\quad\mathbb{E}\left[\|Y^n(t,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^{d+2})}\right]<\infty.$$

引理A.1 的应用完成了证明。 □

此外，我们研究偏差估计量

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left|(\varrho^n,\boldsymbol{m}^n,S^n)(t,\cdot)-\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N}(\varrho^m,\boldsymbol{m}^m,S^m)(t,\cdot)\right|,$$

该结果用于数值模拟。具体而言，应用三角不等式，我们得到以下偏差估计量的收敛性

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left|(\varrho^n,\boldsymbol{m}^n,S^n)(t,\cdot)-\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N}(\varrho^m,\boldsymbol{m}^m,S^m)(t,\cdot)\right|-\mathrm{Dev}\left[(\varrho,\boldsymbol{m},S)(t,\cdot)\right]\right\|_{L^1(\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^{d+2})}\\
&\lesssim\left\|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left|(\varrho^n,\boldsymbol{m}^n,S^n)(t,\cdot)-\mathbb{E}\left[(\varrho,\boldsymbol{m},S)(t,\cdot)\right]\right|-\mathrm{Dev}\left[(\varrho,\boldsymbol{m},S)(t,\cdot)\right]\right\|_{L^1(\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^{d+2})}\\
&\quad+\left\|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left|\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N}(\varrho^m,\boldsymbol{m}^m,S^m)(t,\cdot)-\mathbb{E}\left[(\varrho,\boldsymbol{m},S)(t,\cdot)\right]\right|\right\|_{L^1(\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^{d+2})}\to 0
\end{aligned}\tag{2.5}$$

当 $N\to\infty$，$\mathcal{P}$–几乎处处成立。

## 2.2 统计收敛速率

本节研究蒙特卡洛估计量的统计收敛速率。关键论证是中心极限定理，参见引理 A.3 ([23, 定理 10。5])。

应用嵌入定理将其嵌入希尔伯特空间

$$L^1(\mathbb{T}^d)\hookrightarrow\hookrightarrow W^{-k,2}(\mathbb{T}^d),\qquad k>d/2$$

我们可以控制 初始相对能量的二阶矩及期望值

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left\|X^n(t,\cdot)\right\|^2_{W^{-k,2}(\mathbb{T}^d)}\right]+\mathbb{E}\left[\left\|Y^n\right\|^2_{W^{-k,2}(\mathbb{T}^d)}\right]\\
&\lesssim\mathbb{E}\left[\left\|(\varrho,\boldsymbol{m},S)(t,\cdot)\right\|^2_{W^{-k,2}(\mathbb{T}^d)}\right]\lesssim\mathbb{E}\left[\left\|(\varrho,\boldsymbol{m},S)(t,\cdot)\right\|^2_{L^1(\mathbb{T}^d)}\right]\\
&\le C(\overline{g},T)\left(1+\mathbb{E}\left[\left(\int_{\mathbb{T}^d}\left[E(\varrho_0,\boldsymbol{u}_0,\vartheta_0)-S(\varrho_0,\vartheta_0)-(c_v+1)\varrho_0+1\right]\mathrm{d}x\right)^2\right]\right).
\end{aligned}$$

为了控制上述估计的右端，我们需要作出以下假设

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_{\mathbb{T}^d}\left[E(\varrho_0,\boldsymbol{u}_0,\vartheta_0)-S(\varrho_0,\vartheta_0)-(c_v+1)\varrho_0+1\right]\mathrm{d}x\right)^2\right]<\infty,\tag{2.6a}$$

$$\|\boldsymbol{g}\|_{C(\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^d)}\le\overline{g}\ \ \mathcal{P}-\text{a.s.},\qquad\overline{g}-\text{a deterministic constant.}\tag{2.6b}$$

我们指出，(2.6) 蕴含 (2.2)。现在，我们应用引理 A.3 并得到统计误差估计。

**命题 2.2**（中心极限定理）。 设 $\boldsymbol{U}_0^n$, $n = 1, 2, \ldots$ 是随机数据的独立同分布副本

$$\boldsymbol{U}_0 = \left[\varrho_0, \boldsymbol{u}_0, \vartheta_0, \mu, \lambda, \kappa, \boldsymbol{g}\right] \in D \quad \textit{satisfying} \quad (2.6).$$

于是有

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} X^n(t,\cdot) \to \left(\mathfrak{R}, \mathfrak{M}, \mathfrak{S}\right) \quad \textit{and} \quad \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} Y^n(t,\cdot) \to \left(\mathfrak{R}_D, \mathfrak{M}_D, \mathfrak{S}_D\right)$$
$$\textit{in law in } W^{-k,2}(\mathbb{T}^d; \mathbb{R}^{d+2}), \textit{ as } N \to \infty, \quad \textit{for all } t \in [0,T],$$

其中 $X^n$, $Y^n$ 定义见(2.4), $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{R}_D$, $\mathfrak{M}_D$, $\mathfrak{S}_D$ 为随机高斯变量。特别地，我们有如下收敛速率

$$N^{1/2} \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} X^n(t,\cdot) \right\|_{W^{-k,2}(\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^{d+2})} \lesssim 1 \quad \textit{and} \quad N^{1/2} \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} Y^n(t,\cdot) \right\|_{W^{-k,2}(\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^{d+2})} \lesssim 1 \qquad (2.7)$$

对于 $k > \frac{d}{2}$, $N = 1, 2, \ldots$, $\mathcal{P}$-几乎处处成立。

如命题 2.1 所示，蒙特卡洛估计量在 $L^1(\mathbb{T}^d)$ 拓扑下收敛。然而，为了恢复蒙特卡洛方法典型的 $N^{-1/2}$ 统计收敛速率，我们需要在弱拓扑 $W^{-k,\ 2}(\mathbb{T}^d)$ 下进行分析，这是由低正则性估计（1.9）所致。此外，我们还得到偏差估计量的收敛速率

$$N^{1/2} \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left| (\varrho^n, \boldsymbol{m}^n, S^n)(t,\cdot) - \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N} (\varrho^m, \boldsymbol{m}^m, S^m)(t,\cdot) \right| - \mathrm{Dev}\left[(\varrho, \boldsymbol{m}, S)(t,\cdot)\right] \right\|_{W^{-k,2}(\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^{d+2})}$$
$$\lesssim 1 \qquad \text{for } k > \frac{d}{2},\ N = 1, 2, \ldots,\ \mathcal{P} - \text{a.s.} \qquad (2.8)$$

# 3 收敛　性与 FV 方法的误差估计　　d

我们的下一个目标是在空间和时间上近似纳维–斯托克斯–傅里叶系统（1.1）–（1.5）。为此，我们采用 Feireisl 等人提出的黏性有限体积方法 [11, 定义 2。3], 其完整介绍见第B 节。我们指出，下面的技术和分析并不局限于特定的数值方法，还可以推广到更广泛的一类相容且稳定的近似方法。

## 3.1 确定性数据

我们首先给出有限体积方法（B.1）的收敛结果。顺便指出，$\Delta t \searrow 0$ 和 $h \searrow 0$ 分别是时间离散和空间离散的小正参数。回顾 [11, 定理 5。6], 我们得到如下关于确定性数据的收敛结果。

**命题 3.1 （收敛）**。假设初始数据具有正则性，属于以下空间

$$(\varrho_0, \boldsymbol{u}_0, \vartheta_0) \in W^{3,2}(\mathbb{T}^d; \mathbb{R}^{d+2}), \ 0 < \underline{\varrho} \leq \min_{\mathbb{T}^d} \varrho_0, \ 0 < \underline{\vartheta} \leq \min_{\mathbb{T}^d} \vartheta_0.$$

设 $\boldsymbol{g} \in W^{2,2}(\mathbb{T}^d; \mathbb{R}^d)$、$\mu > 0$、$\lambda \geq 0$以及 $\kappa > 0$。设 $(\varrho_h, \boldsymbol{u}_h, \vartheta_h)_{h \searrow 0}$是通过有限体积方法 （B.1）获得的一族数值解，其中 $\Delta t \approx h$ 满足

$$\sup_h \left( \| \varrho_h, \varrho_h^{-1}, \vartheta_h, \vartheta_h^{-1} \|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^4)} \right) < \infty. \tag{3.1}$$

*Then*

$$\left\| (\varrho_h, S_h) - (\varrho, S) \right\|_{L^p((0,T)\times\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^2)} + \| \boldsymbol{m}_h - \boldsymbol{m} \|_{L^p(0,T;L^2(\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^d))} \quad \to 0 \quad as \ h \to 0$$

对于任意 $1 \leq p < \infty$，其中 （$\varrho$、$\boldsymbol{u}$、$\vartheta$）是纳维–斯托克斯–傅里叶系统 （1.1）–（1.5）的全局经典解； $\boldsymbol{m} = \varrho \boldsymbol{u}$ 而 $S = \varrho \log \left( \frac{\vartheta^{cv}}{\varrho} \right)$ 分别是相应的动量和熵。

这一结果基于纳维–斯托克斯–傅里叶系统（1.1）–（1.5）的弱强唯一性原理。事实上，一般而言，有限体积方法仅以弱*意义收敛于耗散弱解，见 [11]。注意，这一收敛是有条件的，并且要求数值密度和温度具有有界性（3.1）。此外，由于耗散弱强唯一性原理，当（3.1）成立时，强解在耗散解类中是稳定的，见 [9]。因此，只要强解存在，有限体积解就会强收敛于该强解。现在，应用 Feireisl、Wen 和 Zhu [17]给出的条件正则性结果，由于密度和温度在 $[0, T]$ 上有界，强解在时间上是全局的。初始数据的 $W^{3,2}$正则性也由强解继承。

此外，假设数据具有稍高的正则性，我们可以通过相对能量方法推导有限体积方法的收敛速率，详见我们近期的工作 [5, 定理 5.2]。

**命题 3.2 (误差估计).** 设初始数据 $(\varrho_0, \boldsymbol{u}_0, \vartheta_0)$ 属于正则性类

$$(\varrho_0, \boldsymbol{u}_0, \vartheta_0) \in W^{6,2}(\mathbb{T}^d; \mathbb{R}^{d+2}), \ \min_{\mathbb{T}^d} \varrho_0 = \underline{\varrho} > 0, \ \min_{\mathbb{T}^d} \vartheta_0 = \underline{\vartheta} > 0$$

以及 $\boldsymbol{g} \in W^{5,2}(\mathbb{T}^d; \mathbb{R}^d)$, $\mu > 0$, $\lambda \geq 0$ 和 $\kappa > 0$。设 $(\varrho_h, \boldsymbol{u}_h, \vartheta_h)$ 是由有限体积方法 *(B.1)* 得到的数值解，其中 $(\Delta t, h) \in (0,1)^2$ 满足 *(3.1)*。

则有以下估计

$$\left\| (\varrho_h, \boldsymbol{m}_h, S_h) - (\varrho, \boldsymbol{m}, S) \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^{d+2}))} \leq C(\Delta t^{1/2} + h^{1/4}), \tag{3.2}$$

其中

$$C = C(T, \|\boldsymbol{g}\|_{W^{5,2}(\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^d)}, \|(\varrho_0, \boldsymbol{u}_0, \vartheta_0)\|_{W^{6,2}(\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^{d+2})}, \|(\varrho_h, \varrho_h^{-1}, \vartheta_h, \vartheta_h^{-1})\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^4)}, \underline{\varrho}, \underline{\vartheta}).$$

## 3.2 随机数据

现在我们可以考虑属于集合$\varrho_0$， $\boldsymbol{u}_0$， $\vartheta_0$）的随机初始数据（$\mu$， $\lambda$， $\kappa$， $\boldsymbol{g}$）和随机参数（ $D$。我们首先讨论有限体积近似的可测性。有限体积方法（B.1）是一种全隐式方法。因此，需要求解一个非线性系统，并且可能会得到不唯一的近似解。根据 Bensoussan 和 Temam [6,定理 A.1] 以及 [15, 第 3 节。2] 存在一种 可测选择，具体而言，是一个 Borel 映射，使得

$$\Big[\varrho_0, \boldsymbol{u}_0, \vartheta_0, \mu, \lambda, \kappa, \boldsymbol{g}\Big] \in D \mapsto (\varrho_h, \boldsymbol{u}_h, \vartheta_h) \in \{\varrho_h, \boldsymbol{u}_h, \vartheta_h\}.$$

此处 $\{\varrho_h, \boldsymbol{u}_h, \vartheta_h\}$ 表示在固定网格离散参数 $h$下，与数据 $\Big[\varrho_0, \boldsymbol{u}_0, \vartheta_0, \mu, \lambda, \kappa, \boldsymbol{g}\Big]$ 相对应的所有可能的有限体积近似的集合。因此，在上述选择下，有限体积解（$\varrho_h$、 $\boldsymbol{u}_h$、 $\vartheta_h$）是数据的 Borel 可测函数。

如第3.1 节所述，数值密度和温度的有界性对于获得 Navier–Stokes–Fourier 系统（1.1）–（1.5）的全局时间强解收敛至关重要。在统计分析中，我们将放宽这一假设，只假设它们依概率有界。

**假设 [有限体积近似依概率有界** ]
我们假设有限体积解序列（$\varrho_h$、 $\boldsymbol{u}_h$、 $\vartheta_h$）$_{h\searrow 0}$ 依概率有界，即

$$\begin{aligned}&\text{for any } \epsilon > 0, \text{ there exists } M = M(\epsilon) \text{ such that for all } h \in (0,1)\\ &\mathcal{P}\left(\left[\|\varrho_h, \varrho_h^{-1}, \vartheta_h, \vartheta_h^{-1}\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^4)} > M\right]\right) \leq \epsilon. \end{aligned} \tag{3.3}$$

我们的下一个目标是证明通过有限体积方法得到的随机数值解（$\varrho_h$（$\omega$） $\boldsymbol{u}_h$（$\omega$） $\vartheta_h$（$\omega$）$_{h\searrow 0}$，$\omega \in$ $\boldsymbol{u}$ Ω 收敛到强统计解（$\varrho$， ， $\vartheta$）。应用基于 Skorokhod 表示定理 [19] 和 Gy¨ongy–Krylov 定理的内在随机紧性论证 [18]，我们得到以下收敛结果，另见 [14]。

1. 我们考虑关于数据 Borel 可测的数值解（$\varrho_h$， $\boldsymbol{u}_h$， $\vartheta_h$）

$$\boldsymbol{U}_0 = \Big[\varrho_0, \boldsymbol{u}_0, \vartheta_0, \mu, \lambda, \kappa, \boldsymbol{g}\Big] \in D \quad \text{satisfying} \quad (2.2).$$

2. 取有限体积解（$\varrho_{h_k}$， $\boldsymbol{u}_{h_k}$， $\vartheta_{h_k}$）$_{h_k\searrow 0}$ 的一个子列，我们考虑一族随机变量

$$\begin{aligned}&\Big[\varrho_0, \boldsymbol{u}_0, \vartheta_0, \mu, \lambda, \kappa, \boldsymbol{g}, \varrho_{h_k}, \boldsymbol{m}_{h_k} := \varrho_{h_k}\boldsymbol{u}_{h_k}, S_{h_k} := \varrho_{h_k}\log\left(\frac{(\vartheta_{h_k})^{c_v}}{\varrho_{h_k}}\right), \Lambda_{h_k}\Big]_{h_k\searrow 0}\\ &\text{with } \Lambda_{h_k} = \|(\varrho_{h_k}, \varrho_{h_k}^{-1}, \vartheta_{h_k}, \vartheta_{h_k}^{-1})\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^4)}\end{aligned}$$

取值于波兰空间

$$Y = W^{3,2}(\mathbb{T}^d) \times W^{3,\ 2}(\mathbb{T}^d;\ \mathbb{R}^d) \times W^{3,\ 2}(\mathbb{T}^d) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times W^{2,\ 2}(\mathbb{T}^d;\ \mathbb{R}^d) \times W^{-k,\ 2}((0,\ T) \times \mathbb{T}^d)$$

$$\times W^{-k,2}((0,T)\times\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^d)\times W^{-k,2}((0,T)\times\mathbb{T}^d)\times\mathbb{R},\quad k>d/2.$$

鉴于假设 (3.3)，与.....相关的概率分布族

$$\Big[\varrho_0,\boldsymbol{u}_0,\vartheta_0,\mu,\lambda,\kappa,\boldsymbol{g},\varrho_{h_k},\boldsymbol{m}_{h_k},S_{h_k},\Lambda_{h_k}\Big]_{h_k\searrow 0}$$

在 $Y$中是紧的。应用 Skorokhod 表示定理 [19]，我们得出存在一个新的概率空间和一个新的随机变量序列

$$\Big[\tilde{\varrho}_{0,h_k},\tilde{\boldsymbol{u}}_{0,h_k},\tilde{\vartheta}_{0,h_k},\widetilde{\mu}_{h_k},\widetilde{\lambda}_{h_k},\widetilde{\kappa}_{h_k},\widetilde{\boldsymbol{g}}_{h_k},\widetilde{\varrho}_{h_k},\widetilde{\boldsymbol{m}}_{h_k},\widetilde{S}_{h_k},\widetilde{\Lambda}_{h_k}\Big]\sim\Big[\varrho_0,\boldsymbol{u}_0,\vartheta_0,\mu,\lambda,\kappa,\boldsymbol{g},\varrho_{h_k},\boldsymbol{m}_{h_k},S_{h_k},\Lambda_{h_k}\Big]$$

满足

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Lambda}_{h_k}&=\|(\widetilde{\varrho}_{h_k},\widetilde{\varrho}_{h_k}^{-1},\widetilde{\vartheta}_{h_k},\widetilde{\vartheta}_{h_k}^{-1})\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^4)}<\infty,\\
\tilde{\varrho}_{0,h_k}&\to\tilde{\varrho}_0,\ \tilde{\vartheta}_{0,h_k}\to\tilde{\vartheta}_0\ \text{in}\ W^{3,2}(\mathbb{T}^d),\\
\tilde{\boldsymbol{u}}_{0,h_k}&\to\tilde{\boldsymbol{u}}_0\ \text{in}\ W^{3,2}(\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^d),\\
\widetilde{\mu}_{h_k}&\to\widetilde{\mu},\ \widetilde{\lambda}_h\to\widetilde{\lambda},\ \widetilde{\kappa}_h\to\widetilde{\kappa},\ \widetilde{\boldsymbol{g}}_{h_k}\to\widetilde{\boldsymbol{g}}\ \text{in}\ C(\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^d),\\
\tilde{\varrho}_{h_k}&\to\tilde{\varrho},\ \widetilde{S}_{h_k}\to\widetilde{S}\ \text{in}\ L^r((0,T)\times\mathbb{T}^d),\ 1\le r<\infty,\\
\widetilde{\boldsymbol{m}}_{h_k}&\to\widetilde{\boldsymbol{m}}\ \text{in}\ L^r(0,T;L^2(\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^d)),\ 1\le r<\infty,
\end{aligned}$$

˜几乎处处成立，其中根据命题 3.1 $(\tilde{\varrho},\tilde{\boldsymbol{u}},\vartheta)$ 是与数据1.1)–(1.5对应的 Navier–Stokes–Fourier 系统的强解（

$$\Big[\tilde{\varrho}_0,\tilde{\boldsymbol{u}}_0,\tilde{\vartheta}_0,\widetilde{\mu},\widetilde{\lambda},\widetilde{\kappa},\widetilde{\boldsymbol{g}}\Big]\sim\Big[\varrho_0,\boldsymbol{u}_0,\vartheta_0,\mu,\lambda,\kappa,\boldsymbol{g}\Big].$$

符号 $\sim$ 表示随机变量的同分布。

3. 由于强解的唯一性，无需提取子序列，因为极限是唯一的。更重要的是，借助 Gy¨ongy–Krylov 定理 [18]，我们在原概率空间中恢复了收敛性，

$$\begin{aligned}
\|(\varrho_h,S_h)-(\varrho,S)\|_{L^p((0,T)\times\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^2)}&\to 0\ \text{in probability},\\
\|\boldsymbol{m}_h-\boldsymbol{m}\|_{L^p(0,T;L^2(\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^d))}&\to 0\ \text{in probability}
\end{aligned}\tag{3.4}$$

对于任意 $1\le p<\infty$，其中 $(\varrho,\ \boldsymbol{u},\ \vartheta):=(\varrho,\ \boldsymbol{u},\ \vartheta)[\boldsymbol{U}_0,t]$ 是由 $\boldsymbol{U}_0$ 所产生的 Navier–Stokes–Fourier 系统（1.1）–（1.5）的强解；$\boldsymbol{m}=\varrho\boldsymbol{u}$ 且 $S=\varrho\log\left(\frac{\vartheta^{c_v}}{\varrho}\right)$ 分别是相应的动量和熵。

在得到随机数值解 $(\varrho_h(\omega)\ \boldsymbol{u}_h(\omega)\ \vartheta_h(\omega))\ \ \omega\in\Omega$，的收敛性后，我们准备证明通过蒙特卡洛有限体积方法得到的统计矩的收敛性。

# 4 蒙特卡洛有限体积法的收敛

我们先按以下方式拆分蒙特卡洛有限体积近似的误差

$$\begin{aligned}&\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(\varrho_h^n,\boldsymbol{m}_h^n,S_h^n\right)-\mathbb{E}\left[\left(\varrho,\boldsymbol{m},S\right)\right]\\=&\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(\varrho^n,\boldsymbol{m}^n,S^n\right)-\mathbb{E}\left[\left(\varrho,\boldsymbol{m},S\right)\right]+\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left[\left(\varrho_h^n,\boldsymbol{m}_h^n,S_h^n\right)-\left(\varrho^n,\boldsymbol{m}^n,S^n\right)\right].\end{aligned}$$

结合统计估计（2.3）、（2.5）以及确定性收敛分析（3.4），我们得到以下收敛结果。

**定理 4.1** (**收敛**)。 设数据为随机变量

$$\boldsymbol{U}_0=\left[\varrho_0,\boldsymbol{u}_0,\vartheta_0,\mu,\lambda,\kappa,\boldsymbol{g}\right]\in D\quad satisfying\quad(2.2).$$

假设 $\boldsymbol{U}_0^n=[\varrho_0^n,\boldsymbol{u}_0^n,\vartheta_0^n,\mu^n,\lambda^n,\kappa^n,\boldsymbol{g}^n]$、$n=1$、2，...，$N$是随机数据的独立同分布副本。设 $(\varrho_h^n,\ \boldsymbol{u}_h^n,\ \vartheta_h^n)^{h\searrow 0}$ 为与这些数据样本相对应的一列有限体积解 (B.1)。假设有限体积解 $(\varrho_h^n,\ \boldsymbol{u}_h^n,\ \vartheta_h^n)^{h\searrow 0}$、$n=1$、2，... 依概率有界，参见 (3.3)。

那么，对于期望和偏差的蒙特卡洛有限体积估计量

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(\varrho_h^n,\boldsymbol{m}_h^n,S_h^n),\qquad\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left|(\varrho_h^n,\boldsymbol{m}_h^n,S_h^n)(t,\cdot)-\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N}(\varrho_h^m,\boldsymbol{m}_h^m,S_h^m)(t,\cdot)\right|$$

我们有，对于任意 $\epsilon>0$，都有

$$\lim_{h\to 0}\mathcal{P}\left[\lim_{N\to\infty}\left\|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(\varrho_h^n,\boldsymbol{m}_h^n,S_h^n)-\mathbb{E}\left[\left(\varrho,\boldsymbol{m},S\right)\right]\right\|_{L^p(0,T;L^1(\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^{d+2}))}\leq\epsilon\right]=1,$$

$$\lim_{h\to 0}\mathcal{P}\left[\lim_{N\to\infty}\left\|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left|(\varrho_h^n,\boldsymbol{m}_h^n,S_h^n)-\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N}(\varrho_h^m,\boldsymbol{m}_h^m,S_h^m)\right|-Dev\left[\left(\varrho,\boldsymbol{m},S\right)\right]\right\|_{L^p(0,T;L^1(\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^{d+2}))}\leq\epsilon\right]=1$$

对于 $p\in[1,\infty)$。

证明。 下文我们仅给出密度 $\varrho$ 的证明，因为同样的方法也适用于动量 $\boldsymbol{m}$ 和熵 $S$。

- 蒙特卡洛 FV 期望估计量：根据依概率收敛（3.4），对于任意 $\epsilon > 0$，都有

$$\lim_{h\to 0} \mathcal{P}\left[ \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left( \varrho_h^n - \varrho^n \right) \right\|_{L^p((0,T)\times\mathbb{T}^d)} \leq \epsilon \right] = 1 \quad \text{for every } N = 1, 2, \ldots,\ p \in [1, \infty).$$

应用三角不等式

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}\left[ \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \varrho_h^n - \mathbb{E}\left[\varrho\right] \right\|_{L^p((0,T)\times\mathbb{T}^d)} \leq \epsilon \right] \\ &\geq \mathcal{P}\left[ \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left( \varrho_h^n - \varrho^n \right) \right\|_{L^p((0,T)\times\mathbb{T}^d)} + \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \varrho^n - \mathbb{E}\left[\varrho\right] \right\|_{L^p((0,T)\times\mathbb{T}^d)} \leq \epsilon \right] \end{aligned}$$

以及 $\mathcal{P}$-几乎必然收敛结果（2.3）

$$\lim_{N\to\infty} \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \varrho^n - \mathbb{E}\left[\varrho\right] \right\|_{L^p(0,T;L^1(\mathbb{T}^d))} \to 0 \qquad \text{for } \ p \in [1, \infty), \quad \mathcal{P} - \text{a.s.}$$

我们得到，对于任意 $\epsilon > 0$，均有

$$\lim_{h\to 0} \mathcal{P}\left[ \lim_{N\to\infty} \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \varrho_h^n - \mathbb{E}\left[\varrho\right] \right\|_{L^p(0,T;L^1(\mathbb{T}^d))} \leq \epsilon \right] = 1 \quad \text{for } \ p \in [1, \infty).$$

- 蒙特卡洛 FV 偏差估计量：与期望估计量类似，利用（3.4），对于任意 $\epsilon > 0$

$$\lim_{h\to 0} \mathcal{P}\left[ \left\| \left( \varrho_h^n - \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N} \varrho_h^m \right) - \left( \varrho^n - \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N} \varrho^m \right) \right\|_{L^p((0,T)\times\mathbb{T}^d)} \leq \epsilon \right] = 1$$
$$\text{for every } N = 1, 2, \ldots,\ n \leq N,\ p \in [1, \infty),$$

由此可得

$$\begin{aligned} 1 &\geq \lim_{h\to 0} \mathcal{P}\left[ \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left( \varrho_h^n - \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N} \varrho_h^m \right) - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left( \varrho^n - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \varrho^m \right) \right\|_{L^p((0,T)\times\mathbb{T}^d)} \leq \epsilon \right] \\ &\geq \lim_{h\to 0} \mathcal{P}\left[ \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left\| \left( \varrho_h^n - \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N} \varrho_h^m \right) - \left( \varrho^n - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \varrho^m \right) \right\|_{L^p((0,T)\times\mathbb{T}^d)} \leq \epsilon \right] \geq 1. \end{aligned}$$

结合 wi　利用三角不等式和 $\mathcal{P}$-几乎必然收敛结果 (2.5) 可得

$$\lim_{h\to 0} \mathcal{P}\left[ \lim_{N\to\infty} \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left| \varrho_h^n - \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N} \varrho_h^m \right| - \text{Dev}\left[\varrho\right] \right\|_{L^p(0,T;L^1(\mathbb{T}^d))} \leq \epsilon \right] = 1 \quad \text{for } \ p \in [1, \infty).$$

□

# 5 蒙特卡洛有限体积法的误差估计

本节旨在分析蒙特卡洛有限体积近似的收敛速率。为此，我们考虑更具正则性的随机数据，即

$$\varrho_0 \in W^{6,2}(\mathbb{T}^d),\ \boldsymbol{u}_0 \in W^{6,2}(\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^d),\ \vartheta_0 \in W^{6,2}(\mathbb{T}^d),\ \min_{\mathbb{T}^d} \varrho_0 > 0,\ \min_{\mathbb{T}^d} \vartheta_0 > 0,$$
$$\mu > 0,\ \lambda \geq 0,\ \kappa > 0,\ \boldsymbol{g} \in W^{5,2}(\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^d), \quad \mathcal{P}-\text{a.s.}$$

在假设（3.3）成立，即有限体积解（$\varrho_h$、$\boldsymbol{u}_h$、$\vartheta_h$）$_{h\searrow 0}$依概率有界的条件下，由第 3.2 节的论证可知，存在纳维–斯托克斯–傅里叶系统（1.1）–（1.5）的一个随机经典解（$\varrho$、$\boldsymbol{u}$、$\vartheta$），使得

$$(\varrho, \boldsymbol{u}, \vartheta) \in C([0,T];W^{6,2}(\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^{d+2})) \cap C^1([0,T]\times\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^{d+2}), \qquad \mathcal{P}-\text{a.s.} \tag{5.1}$$

数值解依概率收敛于该强解。需要注意的是，局部强解具有更高确定性正则性，这是经典结果 [20, 8]。关于在有界密度和温度条件下得到的类（5.1）中的整体正则性结果，请参见我们近期的工作 [5, 命题 2。1] 结合统计估计（2.7）、（2.8）和确定性误差估计（3.2），我们得到蒙特卡洛有限体积近似的先验误差估计。

**定理5.1 (误差估计）**。设数据为随机变量

$$\boldsymbol{U}_0 = \Big[\varrho_0, \boldsymbol{u}_0, \vartheta_0, \mu, \lambda, \kappa, \boldsymbol{g}\Big] \in D \ \textit{satisfying} \quad (2.6)$$
$$\textit{and}\ \ (\varrho_0, \boldsymbol{u}_0, \vartheta_0) \in W^{6,2}(\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^{d+2}),\ \boldsymbol{g} \in W^{5,2}(\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^d),\ \mathcal{P}-a.s.$$

假设 $\boldsymbol{U}_0^n = [\varrho_0^n, \boldsymbol{u}_0^n, \vartheta_0^n, \mu^n, \lambda^n, \kappa^n, \boldsymbol{g}^n]$，$n = 1$，$2$，……，$N$是随机数据的独立同分布副本。设 $(\varrho_h^n,\ \boldsymbol{u}_h^n,\ \vartheta_h^n)_{h\searrow 0}$ 为与这些数据样本相对应的一列有限体积解 (B.1)。假设有限体积解 $(\varrho_h^n,\ \boldsymbol{u}_h^n,\ \vartheta_h^n)_{h\searrow 0}$，$n = 1$，$2$，…… 依概率有界，参见 (3.3)。

那么，蒙特卡洛有限体积期望估计量和偏差估计量

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(\varrho_h^n, \boldsymbol{m}_h^n, S_h^n), \qquad \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left|(\varrho_h^n, \boldsymbol{m}_h^n, S_h^n)(t,\cdot) - \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N}(\varrho_h^m, \boldsymbol{m}_h^m, S_h^m)(t,\cdot)\right|$$

对每个 $N = 1$、$2$、……以及所有 $t \in [0,T]$，满足以下误差估计：对于任意 $\epsilon > 0$，存在 $K = K(\epsilon)$，使得

$$\mathcal{P}\left[\left\|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(\varrho_h^n, \boldsymbol{m}_h^n, S_h^n\right)(t,\cdot) - \mathbb{E}\left[(\varrho, \boldsymbol{m}, S)(t,\cdot)\right]\right\|_{W^{-k,2}(\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^{d+2})}\right.$$
$$\left. \leq K\left(\Delta t^{1/2} + h^{1/4} + N^{-1/2}\right)\right] \geq 1-\epsilon, \tag{5.2}$$

$$\mathcal{P}\Bigg[\Bigg\|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\Big|(\varrho_h^n,\boldsymbol{m}_h^n,S_h^n)-\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N}(\varrho_h^m,\boldsymbol{m}_h^m,S_h^m)\Big|-Dev\left[\big(\varrho,\boldsymbol{m},S\big)\right]\Bigg\|_{W^{-k,2}(\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^{d+2})}$$
$$\leq K\left(\Delta t^{1/2}+h^{1/4}+N^{-1/2}\right)\Bigg]\geq 1-\epsilon. \tag{5.3}$$

**注 5.2**。 我们指出，关于网格参数 $h$ 的收敛速率仅为$1/4$。在数值密度和温度有上下界的假设下，速度梯度的离散半范数并无界，这限制了收敛速率，更多详情请参见 [5]。

证明。 这里我们只证明（5.2），因为（5.3）可以用同样的方法证明。命题 3.2 给出了逼近误差的估计：对于任意 $\epsilon>0$，存在 $K=K(\epsilon)$，使得

$$\mathcal{P}\left[\left\|\big(\varrho_h^n,\boldsymbol{m}_h^n,S_h^n\big)(t,\cdot)-\big(\varrho^n,\boldsymbol{m}^n,S^n\big)(t,\cdot)\right\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}\leq K(\Delta t^{1/2}+h^{1/4})\right]\geq 1-\epsilon \quad \text{for all} \quad t\in[0,T].$$

事实上， $K$ 仅取决于 $\epsilon$，也就是说，它与 $n$无关。因此，对于任意 $\epsilon>0$，存在 $K=K(\epsilon)$，使得

$$\mathcal{P}\left[\left\|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\Big(\big(\varrho_h^n,\boldsymbol{m}_h^n,S_h^n\big)(t,\cdot)-\big(\varrho^n,\boldsymbol{m}^n,S^n\big)(t,\cdot)\Big)\right\|_{L^2(\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^{d+2})}\leq K(\Delta t^{1/2}+h^{1/4})\right]\geq 1-\epsilon.$$

另一方面，由（2.7）可得

$$\mathcal{P}\left[\left\|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\big(\varrho^n,\boldsymbol{m}^n,S^n\big)(t,\cdot)-\mathbb{E}\left[(\varrho,\boldsymbol{m},S)(t,\cdot)\right]\right\|_{W^{-k,2}(\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^{d+2})}\lesssim N^{-1/2}\right]=1.$$

结合上述两个公式，证明即告完成。 □

# 6 数值实验

本节通过数值模拟展示蒙特卡洛有限体积法所获得的理论收敛结果。首先，我们定义如下误差：

- 均值误差：

$$E_1(U_h)=\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\left(\left\|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}U_h^{n,m}(T,\cdot)-\mathbb{E}\left[U(T,\cdot)\right]\right\|_{L^p(\mathbb{T}^d)}\right), \tag{6.1}$$

$$E_2(U_h)=\left[\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\left(\left\|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}U_h^{n,m}(T,\cdot)-\mathbb{E}\left[U(T,\cdot)\right]\right\|_{L^p(\mathbb{T}^d)}^{p}\right)\right]^{1/p}; \tag{6.2}$$

- 偏差误差:

$$E_3(U_h) = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\left(\left\|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left|U_h^{n,m}(T,\cdot) - \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N}U_h^{l,m}(T,\cdot)\right| - \mathrm{Dev}\left[U(T,\cdot)\right]\right\|_{L^p(\mathbb{T}^d)}\right), \quad (6.3)$$

$$E_4(U_h) = \left[\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\left(\left\|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left|U_h^{n,m}(T,\cdot) - \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N}U_h^{l,m}(T,\cdot)\right| - \mathrm{Dev}\left[U(T,\cdot)\right]\right\|_{L^p(\mathbb{T}^d)}^p\right)\right]^{1/p}. \quad (6.4)$$

这里， $U \in \{\varrho, \boldsymbol{m}, S\}$和 $U^{n,m}_h$ 是利用随机数据的第$n$个副本的第 $m$次实现得到的有限体积近似。注意，精确的期望和偏差由基于 $N_S$ 份随机数据、在最细网格上（使用 $h_{ref}$）得到的数值解近似。

$$\mathbb{E}\left[U(t,x)\right] = \frac{1}{N_S}\sum_{n=1}^{N_S}U^n_{h_{ref}}(t,x), \quad \mathrm{Dev}\left[U(t,x)\right] = \frac{1}{N_S}\sum_{n=1}^{N_S}\left|U^n_{h_{ref}}(t,x) - \frac{1}{N_S}\sum_{n=1}^{N_S}U^n_{h_{ref}}(t,x)\right|.$$

此外，为验证我们的理论结果，我们通过选取不同的 $h$ 和 $N$，给出（6.1）–（6.4）中的统计误差和总误差:

- 固定网格尺寸 $h = h_{ref}$下，相对于 $N$ 的统计误差:

$$N = 10\cdot 2^n, \quad n = 0,\dots,3.$$

- 相对于参数对（$h, 1/N$）=（$h, \mathcal{O}$（$h$））的总误差:

$$h = 2/(32\cdot 2^n), \quad N = 10\cdot 2^n, \quad n = 0,\dots,3.$$

注意，与理论上的依概率收敛结果不同（参见定理 4.1, 5.1），我们在数值模拟中考虑了更便于实际应用的依期望收敛。事实上， $\mathcal{P}$-几乎处处收敛（见命题 2.1, 2.2）以及期望值的有界性，意味着抽样（精确）解依期望收敛。在模拟中，有限体积方法（ $\varepsilon$ 中的参数 B.1）设为 0.6。（6.1）–（6.4）中的参数取为 $p = 1{,}2$, $M = 40$和 $N_S = 1000$, $h_{ref} := 2/(32\cdot 2^4)$.

我们认 为初始数据是 $[-1,1]^2$ 上一个涡旋的随机扰动

$$\begin{aligned}
&\varrho_0(x) = 1 + 0.1\cdot Y_1(\omega)\cos(2\pi(x_1+x_2)),\\
&\boldsymbol{u}_0(x) = 0.1\cdot(Y_2(\omega), Y_3(\omega))^t + \begin{cases}\left(\frac{[1-\cos(4\pi|x|)]x_2}{|x|}, -\frac{[1-\cos(4\pi|x|)]x_1}{|x|}\right)^t, & \text{if } |x|<0.5,\\ (0,0)^t, & \text{otherwise,}\end{cases}\\
&\vartheta_0(x) = 2 + 0.2\cdot Y_4(\omega)\sin(2\pi(x_1+x_2)).
\end{aligned}$$

Navier–Stokes–Fourier方程 (1.1)–(1.5)中的其他参数取为

$$\boldsymbol{g} \equiv 0, \quad \tilde{\mu} = \mu + 10^{-4}\cdot Y_5(\omega), \quad \tilde{\lambda} = \lambda + 10^{-4}\cdot Y_6(\omega), \quad \tilde{\kappa} = \kappa + 10^{-4}\cdot Y_7(\omega)$$

其中 $\mu = \lambda = \kappa = 0.001$ 和 $Y_j(\omega) \overset{i.i.d.}{\sim} \mathcal{U}(-1,\ 1)\quad j = 1,\ \ldots\ldots,\ 7$。

图 1 展示了使用蒙特卡洛有限体积法在 $T = 0.1$下得到的数值解 $\varrho, \boldsymbol{m}, S$ 的均值和偏差，以及沿直线 $x = y$ 的局部放大图。图 2 和图 3 分别给出了 $\varrho, \boldsymbol{m}, S, \boldsymbol{u}, \vartheta$ 在 $L^1$-范数下的统计误差和总误差，即式 (6.1)-(6.4) 中的 $p = 1$。相应的 $L^2$-范数结果分别见图 4 和图 5。

数值结果证实，$\varrho$，$\boldsymbol{m}$，$S$ 的均值的统计误差及其偏差以速率 $N^{-1/2}$ 收敛。此外，使用参数对 $(h,\ 1/N) = (h,\ \mathcal{O}(h))$ 得到的总误差以属于 $[1/2, 1]$ 的速率收敛。该数值实验表明，其收敛速率高于理论部分所得的结果。不过请注意，理论收敛速率是针对一般数据得到的。

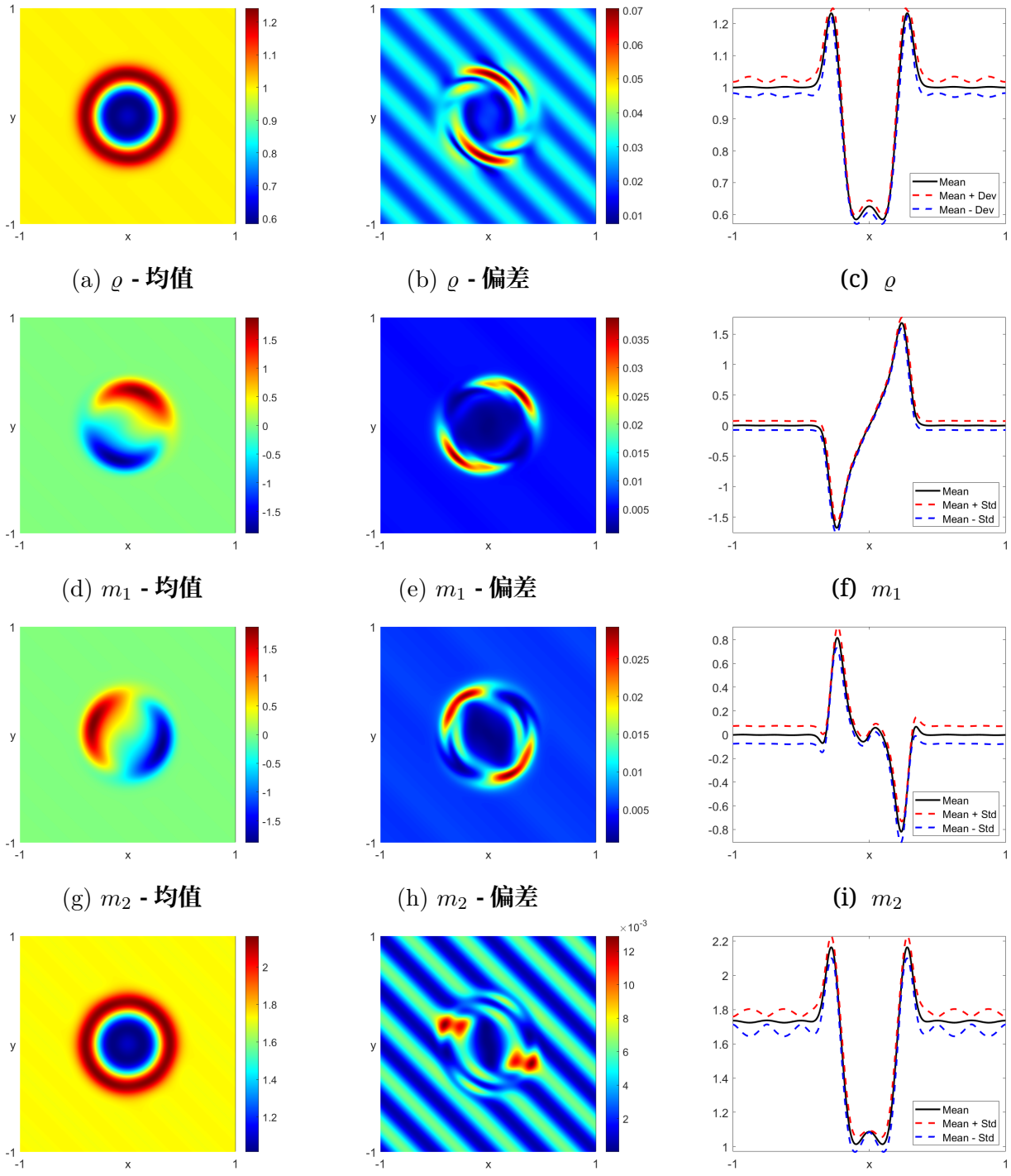
# 7 结论

1958年，J. Nash 在其开创性著作中提出 [25]，温度和密度有界可作为证明流动方程（条件）存在性、光滑性和唯一性的适当判据。事实上，Feireisl、Wen 和 Zhu 最近已对由纳维–斯托克斯–傅里叶系统描述的热传导黏性可压缩流体，严格证明了这一假设 [17], 另见 Basari´c、Feireisl、Mizerov´a [4]关于 Dirichlet 边界条件的情形。这些结果表明，纳维–斯托克斯–傅里叶方程组解的正则性是一种普遍性质。因此，本文假设可能发生爆破的解在统计意义上可以忽略。在一个相当弱的假设下，即数值密度和温度依概率有界，参见（3.3），我们对随机可压缩纳维–斯托克斯–傅里叶方程进行统计分析。数值解通过蒙特卡罗方法与适当的保结构、一致且稳定的时空离散数值方法相结合得到。具体而言，我们选用黏性有限体积方法（B.1），但也可采用任何一致且稳定的确定性方法。

在定理4.1 中，我们证明了蒙特卡洛估计量关于期望和偏差的收敛性。在随机空间中有限体积解的收敛性证明并非易事，需要运用内在随机紧性论证，例如斯科罗霍德表示定理和 Gy¨ ongy–Krylov 定理。在定理 5.1 中，我们给出了蒙特卡洛有限体积近似关于期望和偏差的误差估计。据我们所知，目前的结果是首批针对将蒙特卡罗方法应用于热传导黏性可压缩流动的严格收敛性和误差分析结果。第 6 节所 प्रस्तुत的数值实验说明了理论结果。

# 致谢

作者衷心感谢 E. Feireisl（布拉格）所进行的富有启发性的讨论 s.




(a) $\varrho$ - **均值** (b) $\varrho$ - **偏差** (c) $\varrho$

(d) $m_1$ - **均值** (e) $m_1$ - **偏差** (f) $m_1$

(g) $m_2$ - **均值** (h) $m_2$ - **偏差** (i) $m_2$

(j) $S$ - **均值** (k) $S$ - **偏差** (l) $S$

图 1: 涡旋实验：在包含 $512^2$ 个网格单元的网格上，通过蒙特卡洛有限体积法获得的**数值解**。左：$\varrho$ 的均值、$\boldsymbol{m}$、$S$；中：$\varrho$的偏差、$\boldsymbol{m}$、$S$；右：直线 $x = y$上的 $\varrho$、$\boldsymbol{m}$、$S$。

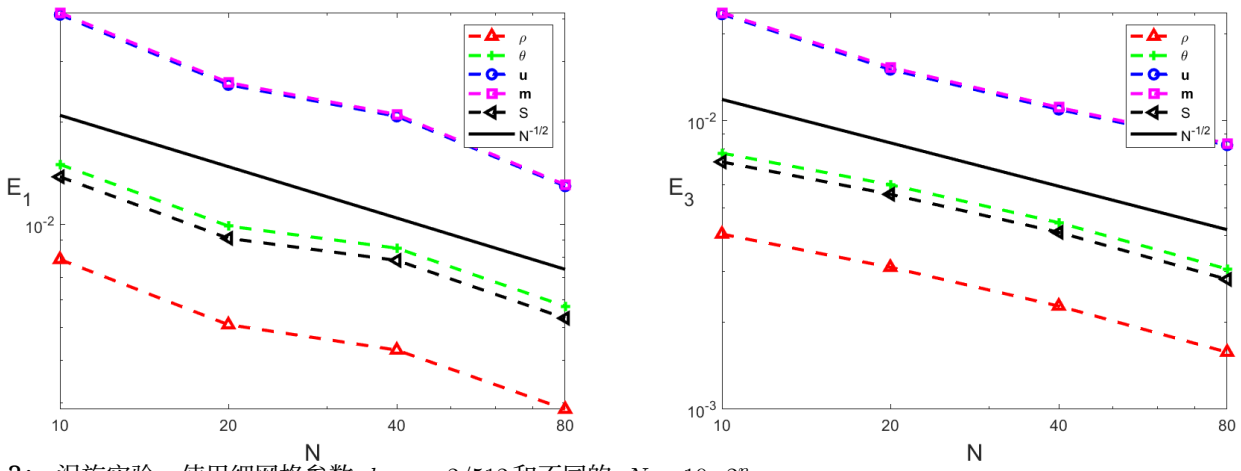



图 2： 涡旋实验：使用细网格参数 $h_{ref} = 2/512$ 和不同的 $N = 10 \cdot 2^n$, $n = 0 \ldots 3$ ，获得的均值 $E_1$、($E_1 = E_2$) 以及偏差 $E_3$、($E_3 = E_4$) 在 $L^1$ 范数下的**统计误差**。没有任何标记的黑色实线表示参考斜率 $N^{-1/2}$ 。

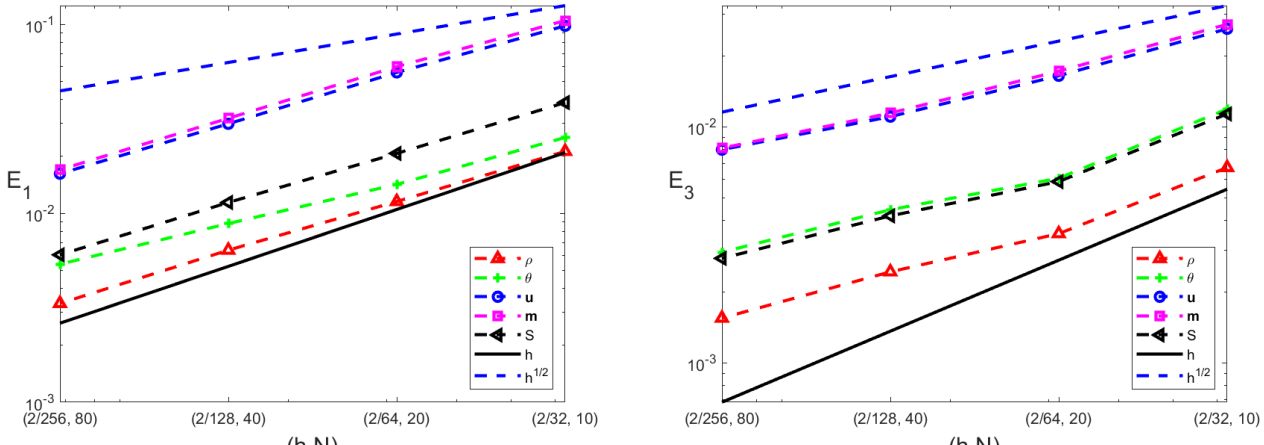



图 3： 涡旋实验：在 $h = 2/(32 \cdot 2^n)$ $N = 10 \cdot 2^n$, $n = 3$, 。。。, 0 条件下，均值 $E_1$、($E_1 = E_2$) 以及偏差 $E_3$、($E_3 = E_4$) 在 $L^1$ 范数下的**总误差**。没有任何标记的蓝色虚线和黑色实线分别表示参考斜率 $h^{1/2}$ 和 $h$。

# 参考文献

[1] R. Abgrall 和 S. Mishra. 双曲守恒律系统的不确定性量化。载于《双曲问题数值方法手册》，《数值分析手册》第18卷，第507–544页。Elsevier/North-Holland，阿姆斯特丹，2017年。[2] J. Badwaik、C. Klingenberg、N. H. Risebro 和 A.M. Ruf. 随机守恒律间断通量的多层蒙特卡罗有限体积方法。《ESAIM 数学建模与数值分析》，55(3)：1039–1065，2021年。[3] A. Barth、C. Schwab 和 N. Zollinger. 随机系数椭圆型偏微分方程的多层蒙特卡罗有限元方法。《Numer. Math.》，119：123-161，2011年。[4] D. Basari´c、E. Feireisl 和 H. Mizerov´a. 具有 Dirichlet 边界条件的 Navier-Stokes-Fourier 系统的条件正则性。预印本，arXiv:2301.13496，2023年。[5] D. Basari´c、M. Luk´aˇcov´a-Medvid'ov´a、H. Mizerov´a、B. She 和 Y. Yuan. Navier–Stokes–Fourier 系统有限体积方法的误差估计。即将发表于《数学计算》，2023年。[6] A. Bensoussan 和 R. Temam. ´Navier-Stokes 型随机方程。《函数分析杂志》，13：195–222，1973年。[7] H. Bijl、D. Lucor、S. Mishra 和 C. Schwab（编）。计算流体动力学中的不确定性量化方法，《计算科学与工程讲义》，Springer，2013年。[8] D. Breit、E. Feireisl 和 M. Hofmanov´a. 随机可压缩 Navier–Stokes 系统的局部强解。《偏微分方程通讯》，43(2)：313–345，2018年。[9] J. Bˇrezina、E. Feireisl 和 A. Novotn´y. Navier-Stokes- Fourier 系统强解的稳定性。《SIAM 数学分析杂志》，52(2)：1761––1785，2020年。[10] J. Charrier、R. Scheichl 和 A.L. Teckentrup. 随机系数椭圆型偏微分方程的有限元误差分析及其在多层蒙特卡罗方法中的应用。《SIAM 数值分析杂志》，51(1)：322-352，2013年。[11] E. Feireisl、M. Luk´aˇcov´a-Medvid'ov´a、H. Mizerov´a 和 B. She. Navier-Stokes-Fourier 系统有限体积方法的收敛性。《IMA 数值分析杂志》，41(4)：2388-2422，2021年。[12] E. Feireisl、M. Luk´aˇcov´a-Medvid'ov´a、H. Mizerov´a 和 B. She. 可压缩流体流动的数值分析。Springer-Verlag，Cham，2021年。[13] E. Feireisl 和 M. Luk´aˇcov´a-Medvid'ov´a. Navier–Stokes-Fourier 系统的统计解。arXiv 预印本 No. 2212.06784，2022年。[14] E. Feireisl 和 M. Luk´aˇcov´a-Medvid'ov´a. 可压缩 Navier–Stokes 系统随机配置有限体积法的收敛性。即将发表于《应用概率年刊》，2023年。

[15] E. Feireisl、M. Luk´aˇcov´a-Medvid’ov´a、B. She 和 Y. Yuan. 随机数据下可压缩流体流动的收敛性与误差分析：蒙特卡罗方法。《数学模型与应用科学方法》，32(14)：2887–2925，2022年。[16]E. Feireisl 和 A. Novotn´y. 黏性流体热力学中的奇异极限。Birkh¨auser–Basel，2017年。[17] E. Feireisl、H. Wen 和 C. Zhu. 关于黏性、可压缩且导热流体模型的纳什猜想。捷克科学院预印本 No. 6-2022。[18] I. Gy¨ongy 和 N. Krylov. 通过逼近构造 Itˆo 随机方程强解的存在性。《概率论及相关领域》，105(2)：143–158，1996年。[19] A. Jakubowski. 非度量空间中子列的几乎处处斯科罗霍德表示。《概率论及其应用》，42(1)：209–216，1997年。[20] S. Kawashima 和 Y. Shizuta. 关于与守恒律相关的对称双曲-抛物型系统的标准形。《Tˆohoku Math. J.》，40：449–464，1988年。[21] U. Koley、N.H. Risebro、C. Schwab 和 F. Weber. 随机标量退化对流扩散方程的多层蒙特卡罗有限差分法。《双曲微分方程杂志》，14(3)：415–454，2017年。[22] S. Lanthaler、S. Mishra 和 C. Par´es-Pulido. 不可压缩欧拉方程的统计解。《数学模型与应用科学方法》，31(2)：223–292，2021年。[23] M. Ledoux 和 M. Talagrand. 巴拿赫空间中的概率论，《数学及其边界领域成果》（3）第 23 卷 /《数学及相关领域成果》（3）/。Springer-Verlag，柏林，1991年。[24] S. Mishra 和 C. Schwab. 具有随机初始数据的双曲守恒律稀疏张量多层蒙特卡罗有限体积方法。《数学计算》，81(280)：1979–2018，2012年。[25]J. Nash. 抛物型和椭圆型方程解的连续性。《美国数学杂志》，80(4)：931–954，1958年。[26] C. Par´es-Pulido. 用于计算不可压缩欧拉方程统计解的有限体积方法。《IMA 数值分析杂志》，00：1–36，2022年。[27] D. Xiu. 随机计算的数值方法：一种谱方法。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，2010年。

# A 一些基本统计结果

本节回顾 Ledoux 和 Talagrad 关于统计分析的一些基础理论 [23]。

**引理 A.1 (** [23]的推论 7.10。设 $X$ 是一个取值于可分 *Banach* 空间 $B$中的 *Borel* 随机变量。设$(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是 $X$的一列独立副本。记 $S_N = X_1+\cdots+X_N$，其中 $N \geq 1$。则

$$\frac{S_N}{N} \to 0 \ a.s.$$

当且仅当 当 $\mathbb{E}[\|X\|] < \infty$ 和 $\mathbb{E}[X] = 0$。注意，*"a.s."* 表示"几乎处处" .

**引理 A.2 (**命题 9.11，见 [23])。 设 $B$ 是一个具有类型 $p$ 和余型 $q$ 的 *Banach* 空间，其型常数为 $C_1$，余型常数为 $C_2$。那么，对于任意有限序列$(X_i)$，若其为 $L_p(B)$ （分别为 $L_q(B)$）中的独立零均值 *Radon* 随机变量，

$$\mathbb{E}\left[\left\|\sum_i X_i\right\|^p\right] \leq (2C_1)^p \sum_i \mathbb{E}[\|X_i\|^p] \ \ and \ \mathbb{E}\left[\left\|\sum_i X_i\right\|^q\right] \geq (2C_2)^{-q} \sum_i \mathbb{E}[\|X_i\|^q].$$

**引理 A.3 (**定理 10.5，见 [23])。 设 $X$ 是一个均值为零的随机变量，满足 $\mathbb{E}\left[\|X\|^2\right] <\infty$，且取值于一个具有 *2* 型的可分 *Banach* 空间 $B$。那么， $X$ 满足中心极限定理。反过来，若在一个（可分）*Banach* 空间 $B$中，每个满足 $\mathbb{E}[X] = 0$ 且$\mathbb{E}\left[\|X\|^2\right] < \infty$ 的随机变量 $X$都满足中心极限定理，那么 $B$必为 *2* 型。

# B 有限体积法

为完整起见，我们介绍 [11] 中提出的有限体积法。将物理区域$\mathbb{T}^d$ 划分为结构化控制体（为简便起见，采用长方体） $\mathbb{T}^d = \bigcup_{K\in\mathcal{T}_h} K.$ 。有限体积近似 $(\varrho_h, \boldsymbol{u}_h, \vartheta_h)$ 定义为空间和时间上的分片常数函数，并满足以下非线性代数系统：

$$\int_{\mathbb{T}^d} D_t\varrho_h\phi_h \,\mathrm{d}x - \int_{\mathcal{E}} \mathrm{F}_h^\varepsilon(\varrho_h, \boldsymbol{u}_h)[\![\phi_h]\!] \,\mathrm{d}S_x = 0 \quad \text{for all } \phi_h \in Q_h, \tag{B.1a}$$

$$\int_{\mathbb{T}^d} D_t(\varrho_h\boldsymbol{u}_h)\cdot\boldsymbol{\varphi}_h \,\mathrm{d}x - \int_{\mathcal{E}} \mathrm{F}_h^\varepsilon(\varrho_h\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{u}_h)\cdot[\![\boldsymbol{\varphi}_h]\!] \,\mathrm{d}S_x + \int_{\mathbb{T}^d} (\mathbb{S}_h - p_h\mathbb{I}) : \nabla_h\boldsymbol{\varphi}_h \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{T}^d} \varrho_h\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{\varphi}_h \,\mathrm{d}x \quad \text{for all } \boldsymbol{\varphi}_h \in \boldsymbol{Q}_h, \tag{B.1b}$$

$$c_v\int_{\mathbb{T}^d} D_t(\varrho_h\vartheta_h)\phi_h \,\mathrm{d}x - c_v\int_{\mathcal{E}} \mathrm{F}_h^\varepsilon(\varrho_h\vartheta_h, \boldsymbol{u}_h)[\![\phi_h]\!] \,\mathrm{d}S_x + \int_{\mathcal{E}} \frac{\kappa}{h}[\![\vartheta_h]\!][\![\phi_h]\!] \,\mathrm{d}S_x = \int_{\mathbb{T}^d} (\mathbb{S}_h - p_h\mathbb{I}) : \nabla_h\boldsymbol{u}_h\phi_h \,\mathrm{d}x, \quad \text{for all } \phi_h \in Q_h, \tag{B.1c}$$

其中， $Q_h$ 是 $\mathcal{T}_h$上的分片常数函数空间， $\boldsymbol{Q}_h = Q_h$, $^d$

$$\begin{aligned}
p_h(t) &= \varrho_h(t)\vartheta_h(t) \quad \text{for } \vartheta_h(t) > 0 \quad \text{and} \quad p_h(t) = 0 \quad \text{for } \vartheta_h(t) \leq 0,\\
\mathrm{F}_h^\varepsilon(r_h, \boldsymbol{u}_h) &= \mathrm{Up}[r_h, \boldsymbol{u}_h] - h^\varepsilon[\![r_h]\!], \ \varepsilon \in (-1, 1),\\
\mathrm{Up}[r_h, \boldsymbol{u}_h] &= \{\!\{r_h\}\!\} \ \{\!\{\boldsymbol{u}_h\}\!\}\cdot\boldsymbol{n} - \frac{1}{2}|\{\!\{\boldsymbol{u}_h\}\!\}\cdot\boldsymbol{n}|[\![r_h]\!],\\
\mathbb{S}_h &= 2\mu\mathbb{D}_h\boldsymbol{u}_h + \lambda\mathrm{div}_h\boldsymbol{u}_h\mathbb{I}, \quad \mathbb{D}_h\boldsymbol{u}_h = (\nabla_h\boldsymbol{u}_h + \nabla_h^T\boldsymbol{u}_h)/2,\\
\nabla_h r_h &= \sum_{K\in\mathcal{T}_h} (\nabla_h r_h)_K 1_K, \quad (\nabla_h r_h)_K = \sum_{\sigma\in\partial K} \frac{|\sigma|}{|K|}\{\!\{r_h\}\!\}\boldsymbol{n} \quad \text{for } r_h \in Q_h,
\end{aligned}$$

$$\mathrm{div}_h \boldsymbol{v}_h = \sum_{K\in\mathcal{T}_h} (\mathrm{div}_h \boldsymbol{v}_h)_K 1_K, \quad (\mathrm{div}_h \boldsymbol{v}_h)_K = \sum_{\sigma\in\partial K} \frac{|\sigma|}{|K|} \{\!\{\boldsymbol{v}_h\}\!\} \cdot \boldsymbol{n} \quad \text{for } \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{Q}_h,$$

$$\Pi_h v = \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \mathbb{1}_K \frac{1}{|K|} \int_K v \,\mathrm{d}x \quad \text{for } v \in L^1(\mathbb{T}^d),$$

$$D_t r_h(t) = \frac{r_h(t) - r_h(t-\Delta t)}{\Delta t}, \quad \{\!\{r_h\}\!\} = \frac{r_h^{\mathrm{in}} + r_h^{\mathrm{out}}}{2}, \quad [\![r_h]\!] = r_h^{\mathrm{out}} - r_h^{\mathrm{in}}$$

并且 $r_h^{\mathrm{out}}$和 $r_h^{\mathrm{in}}$ 分别是相对于控制体界面上的给定法向量 $\boldsymbol{n}$的外侧极限和内侧极限。

# C L2 误差的图示补充

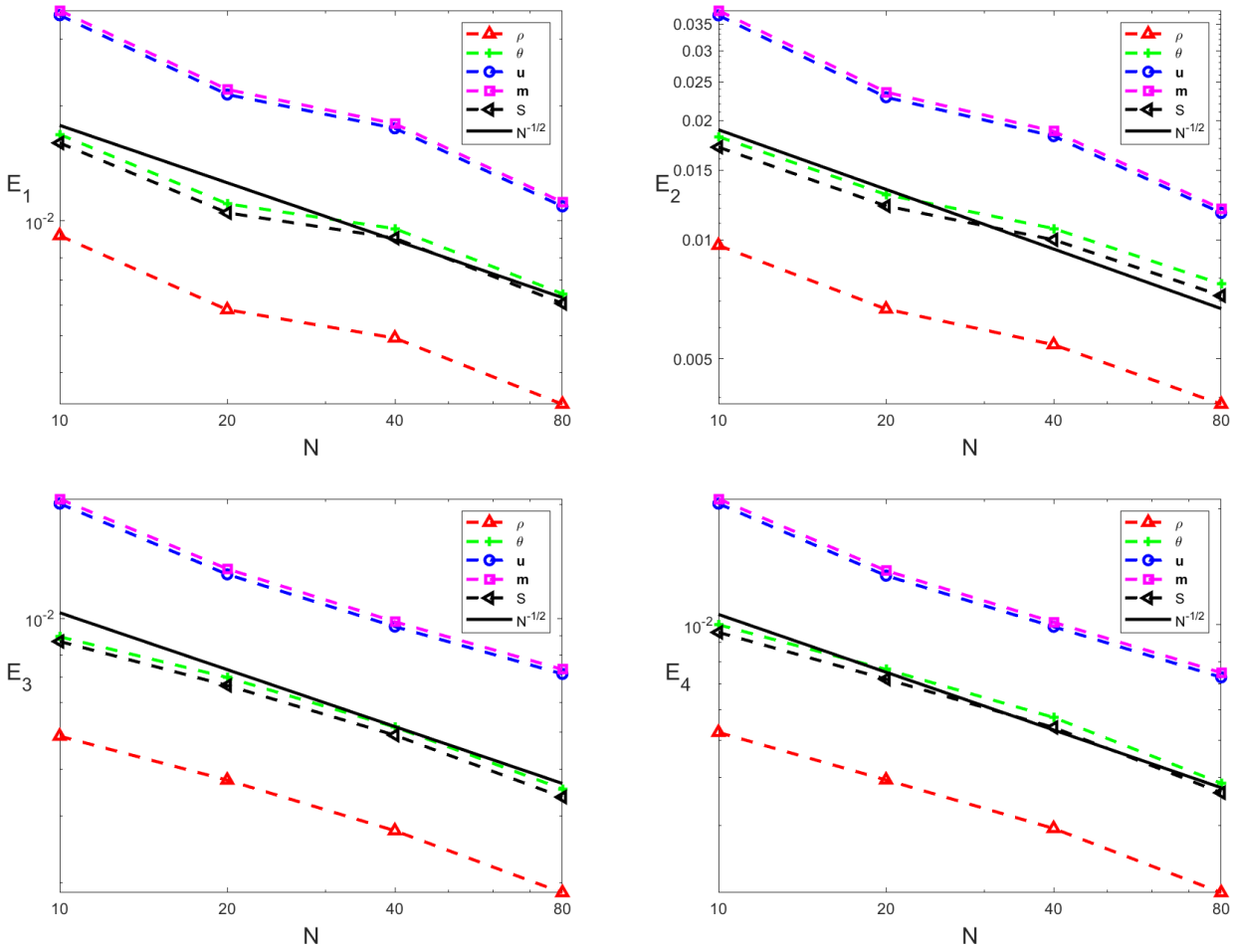



图 4：涡旋实验：采用细网格参数 $h_{ref} = 2/512$，并使用不同的 $N = 10 \cdot 2^n$，$n = 0, \ldots\ldots, 3$ 得到的均值 ($E_1$，$E_2$) 和偏差 ($E_3$，$E_4$) 的 $L^2$-范数统计误差。无标记的黑色实线表示 $N^{-1/2}$ 的参考线。

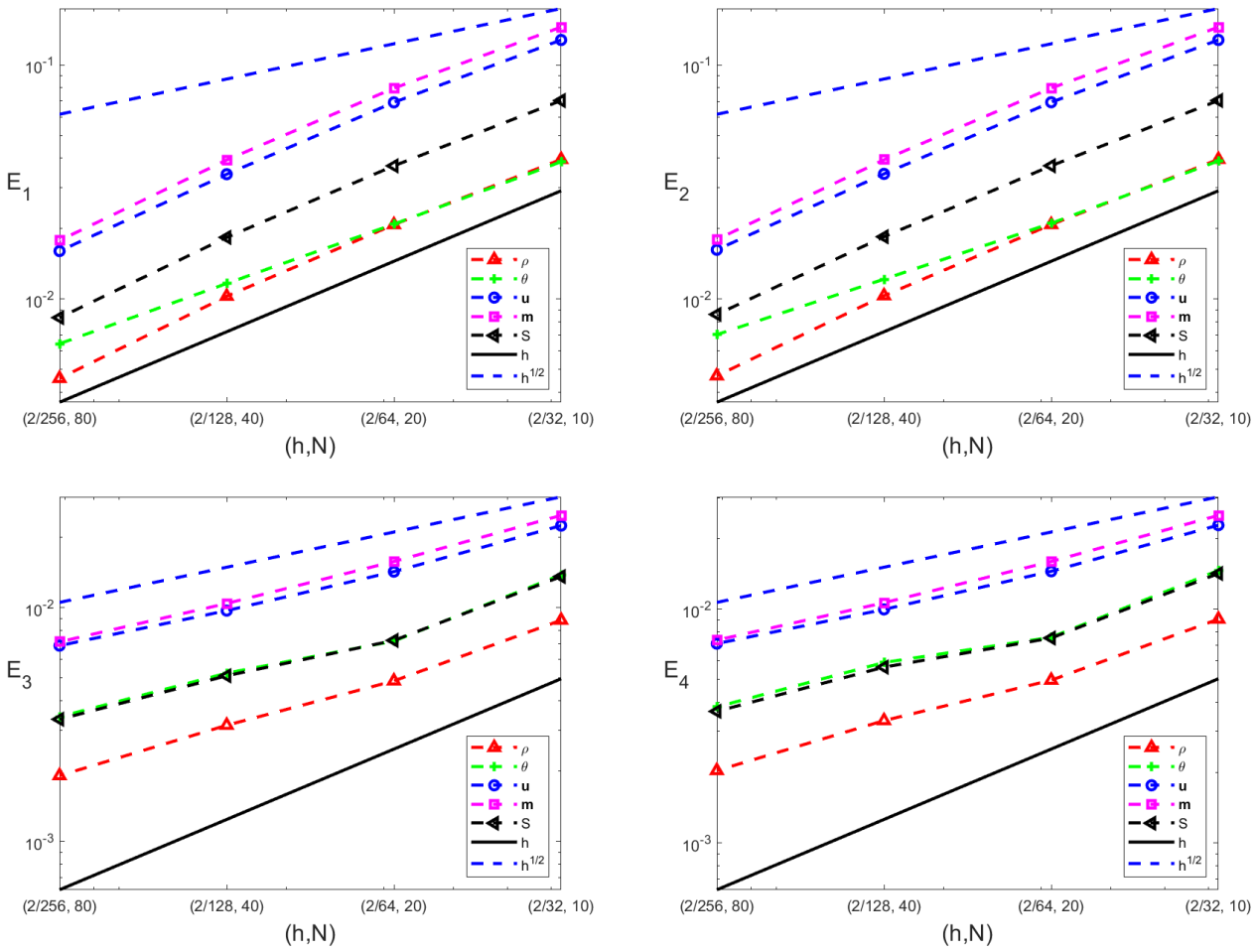



图 5： 涡旋实验：**均值的总误差** ($E_1$， $E_2$)和偏差($E_3$， $E_4$)在 $L^2$-范数下，其中 $h = 2/(32 \cdot 2^n)$ $N = 10 \cdot 2^n$， $n = 3$，.....，0。蓝色虚线和黑色实线（均无标记）分别表示 $h^{1/2}$ 和 $h$的参考斜率。