arXiv:2304.00606v1 [math.DG] 2 Apr 2023

关于 G_2 轨形上平坦联络的计数

LANGTE MA

2023年4月4日

摘要。我们研究无挠 G_2 轨形上（射影）平坦丛的 G_2-瞬子模空间。我们证明，在加入小的、一般的全纯扰动后，该模空间在不可约轨处是紧致且光滑的。因此，我们定义了一个整数值不变量，它在无挠 G_2-结构的 C^0-变形下保持不变。我们计算了由 Joyce 构造的紧致 G_2-流形所产生的一些轨形的这一不变量。

1. 引言

1.1. 背景。

对具有特殊整体性的流形上的规范理论的研究由 Donaldons–Thomas [DT98] 发起，旨在将 3 维和 4 维中的规范理论技术加以推广。在 7 维情形中，进入这一研究框架的黎曼流形上的全纯群是 G_2，即八元数的自同构群，作为 $SO(7)$ 的一个子群。对于此类流形，Donaldson–Segal [DS11] 提出了一项计划，通过建立瞬子模空间与标定子流形之间的联系来构造不变量；该计划随后由 Doan–Walpuski [DW19]进一步阐述。理想情况下，人们希望能够全面理解 G_2-瞬子的模空间，进而结合对不可约点的计数以及对紧性可能失效过程的追踪，提取出一个计数不变量。此类不变量应有助于研究 G_2-结构的变形性质。

尽管我们对 G_2-瞬子的模空间仍缺乏一般性的认识，但通过研究具体实例已取得进展。本文所关注的实例源自 Joyce 构造 [Joy96]。粗略而言，这些紧致的 G_2-流形是通过利用超凯勒 ALE 空间族消解奇点，从平坦的 G_2-轨形中构造出来的。在 [Wal13], Walpuski 通过发展一种粘合技术，构造了 Joyce 的 G_2-流形上的非平凡 G_2-瞬子；该技术将 ALE 空间上的有限能量 ASD 瞬子族拼接到 G_2-轨形上的平坦联络上。因此，分析这些构造块上的瞬子，将有助于全面了解 Joyce 列表中的 G_2-流形上的 G_2-瞬子模空间。

本文迈出了研究 G_2-轨形上平坦联络模空间的第一步。由于 7 维平坦联络的变形理论

不是弗雷德霍姆理论，我们选择考察平坦丛上的 G_2-瞬子。直观地说，可以将 G_2-结构视为联络平坦性方程的一种变形。为了得到正则模空间，还需要通过全纯扰动进一步扰动 G_2-瞬子方程。在确立模空间的紧性后，便可通过适当的计数过程提取一个计数不变量。作者将与 Galt [GM23] 合作，在未来的论文中完成第二步，即研究一族 ALE 空间上的 G_2-瞬子。这种分析瞬子模空间的方法也见于 Kronheimer 关于计数 $K3$ 曲面上瞬子的工作 [Kro91] 。我们的工作部分受到其方法的启发。

1.2. **主要结果**。

本文中的“轨形”一词主要指 Satake [Sat56] 和 Thurston [Thu97]所采用的经典意义下的有效轨形。若出现对“轨形”的一般性观点，我们会明确说明。我们还将在第 2 节回顾有效轨形的基础知识。

我们用 (X,ϕ) 表示一个典型的紧致光滑 G_2-轨形，这意味着黎曼轨形 X 上的 Levi–Civita 联络的全纯群包含于 $G_2 \subset SO(7)$。如下文第 2 节所述，这种结构的信息由一个满足下列条件的 3-形式 $\phi \in \Omega^3(X;\mathbb{R})$ 编码：

$$d\phi = 0 \qquad d\star_\phi \phi = 0, \tag{1.1}$$

其中， $\star_\phi$ 表示相对于由 ϕ诱导的度量定义的霍奇星算子。还要求对每一点 $x \in X$，都存在一个以$x \in U_x \subset X$ 为中心的轨形图 $U_x ! U_x$，使得 $\phi|_x$提升到 U_x后，可与$\mathbb{R}^7$上的标准 3-形式 ϕ_0 等同：

$$\phi_0 := dx_{123} + dx_{145} + dx_{167} + dx_{246} - dx_{257} - dx_{347} - dx_{356}, \tag{1.2}$$

其中 dx_{ijk}:= $dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k$。条件 (1.1) 通常称为 G_2-结构的无挠性质。

记 $P^\dagger$为 (X,ϕ) 上的主 $U(r)$-轨形丛，并记 P为 $P^\dagger$的伴随丛，其结构群为 $PU(r)$。暂不考虑正则性问题，记 A 为伴随丛 P 上的 C^∞-联络空间，G 为由 $P^\dagger$的 C^∞-自同构组成、且固定行列式线丛 det $P^\dagger$的规范群。或者，也可以将 A 视为 $P^\dagger$ 上的酉联络空间，这些联络在 det $P^\dagger$上诱导出一个固定联络；而 G 则由保持这一联络空间的自同构组成。对于 $P^\dagger$上的酉联络 $A^\dagger$，记 A 为其在伴随丛 P上诱导的联络。

定义 1.1。若酉联络 $A^\dagger \in$A 满足

$$F_A \wedge \star_\phi \phi = 0,$$

其中， A 是 $A^\dagger$ 在伴随丛 P上的诱导联络。

在第4节中，我们将引入一个由整体扰动构成的巴拿赫空间 P。每个元素 $\boldsymbol{\pi} \in$ P 都会产生一个 G-不变泛函 $\sigma_{\boldsymbol{\pi}}$: A ! $\Omega^6(X,\mathfrak{g}_P)$，其可以

用于扰动 G_2-瞬子方程。这里， $\mathfrak{g}_P$ 表示通过伴随作用与 P 相关联的李代数丛。我们记

$$\mathcal{M}_{\phi,\boldsymbol{\pi}}(X,P^\dagger) := \{A \in \mathscr{A} : F_A \wedge \star_\phi \phi + \sigma_{\boldsymbol{\pi}}(A) = 0\}/\mathscr{G}$$

用于 $P^\dagger$ 上 $\boldsymbol{\pi}$ 扰动的射影 G_2-瞬子模空间。令 $Z(r) \subset U(r)$ 为 $U(r)$ 的中心，它是一个阶为 r 的循环群。若联络 $A \in$ A 的各向同性群 Stab(A) $\subset$G 是 $Z(r)$，则称该联络不可约。我们证明以下关于模空间结构的结果。

定理 1.2。 设 $P^\dagger$ 是定义在无挠 G_2-轨形 (X,ϕ) 上的主 $U(r)$-轨形丛，其陈类满足

$$(r-1)c_1^2(P^\dagger) - 2rc_2(P^\dagger) = 0 \in H^4_{\mathrm{orb}}(X;\mathbb{Z}). \tag{1.3}$$

设 $\boldsymbol{\pi} \in \mathscr{P}$ 是一般小扰动。则有以下结论。

(1) 模空间 $\mathcal{M}_{\phi,\boldsymbol{\pi}}(X,P^\dagger)$ 是紧致的。*(2)* 不可约轨 $\mathcal{M}^*_{\phi,\boldsymbol{\pi}}(X,P^\dagger)$ 是一个光滑的0维流形，即它由扰动后的 G_2-瞬子方程横截切出。

我们解释无挠假设 (1.1) 为何在定理 1.2 中发挥重要作用。闭性条件 $d\phi = 0$ 用于为 G_2-瞬子曲率的 L^2-范数提供先验界。当瞬子方程未受扰动时，要求 (1.3) 与 ϕ 的闭性相结合，意味着所有 G_2-瞬子都是平坦联络。 ϕ 的余闭条件对于建立 G_2-瞬子的椭圆变形理论至关重要。

我们仅在有限几种轨形情形下梳理模空间 $\mathcal{M}_\phi(X,P^\dagger)$ 的可定向性问题。具体而言，我们要求 X 的奇异集局部要么模型化为保持 ϕ的对合的不动点集，要么以适当意义成为前述模型的交集。在局部上，这使得奇异集要么是“结合子流形”（标定子流形），要么是两条结合子流形相交形成的曲线。尽管如此，这类轨形涵盖了 Joyce 构造中出现的大多数情形。我们称这类轨形为简单 G_2-轨形。

除 (1.3) 外，为了避免可约瞬子，我们还对 $P^\dagger$ 作出另一项拓扑假设。我们在定义 3.11 中将满足这些条件的丛称为容许的。做好这些准备后，我们便可定义一个计数不变量。

定理 1.3。 设 $P^\dagger$ 是一个定义在无挠、紧致、光滑G_2轨形 (X,ϕ) 上的容许的 $U(r)$-丛。那么，对 $P^\dagger$ 上不可约射影 G_2-瞬子进行计数，定义了一个不变量

$$n_\phi(X,P^\dagger) := \#\mathcal{M}^*_{\phi,\boldsymbol{\pi}}(X,P^\dagger) \in \mathbb{Z}/2.$$

若进一步要求 (X,ϕ) 是一个简单 G_2轨形，且 $c_1(P^\dagger)$ 为偶数或 $r=2$，那么带符号计数给出

$$n_\phi(X,P^\dagger) := \#\mathcal{M}^*_{\phi,\boldsymbol{\pi}}(X,P^\dagger) \in \mathbb{Z}$$

在固定额外的定向数据之后。此外，不变量 $n_\phi(X,P^\dagger)$ 在 X 上无挠 G_2-结构的 C^0-变形下保持不变。

尽管我们尚未找到在固定的光滑轨形 X 上的无挠 G_2-结构使 $n_\phi(X, P^\dagger)$ 取不同值的例子，但推导变形不变性时，无挠条件发挥了关键作用。这是因为我们需要闭性来保证定理 1.2 中的紧性。请注意，Crowley–Nordström [CN15] 已经为余闭 G_2-结构建立了 h-原理。因此，通过一条余闭 G_2-结构路径连接无挠 G_2-结构并不难实现。如果在某个跳跃点处， G_2-结构开始不再闭合，那么容许丛的模空间会如何变化，将是一个值得研究的问题。

由于我们研究的是（射影）平坦丛，我们定义的不变量有可能仅仅是拓扑不变量。若射影平坦联络的模空间已按以下意义非退化，则确实如此。

定义 1.4。设 $A^\dagger$ 是容许的主克莱因四元群 r-丛 $P^\dagger$ 上的一个不可约射影平坦联络。若满足

$$H^1(X, \rho_A) = 0,$$

其中 $\rho_A : \pi_1^{\mathrm{orb}}(X) \to SO(r^2-1)$ 是与丛 $\mathfrak{su}(P^\dagger)$ 上的诱导平坦联络相联系的表示；该丛由 $P^\dagger$ 的无迹斜厄米自同态组成。

命题 1.5。设 $P^\dagger$ 是一个容许的 $U(r)$-丛，底空间为无挠、紧致、光滑的 G_2-轨形 (X, ϕ)。假设 $P^\dagger$ 上的每个不可约射影平坦联络均非退化。则不变量 $n_\phi(X, P^\dagger)$ 与无挠 G_2- 结构 ϕ 的选择无关。

我们要求命题 1.5 中满足无挠条件，以确保不变量$n_\phi(X, P^\dagger)$有定义。在非退化情形下，对于不同的无挠G_2结构，相应的模空间及其变形结构都可通过典范方式相互识别。当(X, ϕ)是平坦轨形时，Weitzenböck 公式论证表明，每个不可约射影平坦联络都会自动满足非退化条件。特别地，由 Joyce 构造得到的所有轨形都自动满足非退化条件。我们通过穷举所有不可约表示，计算了其中一个此类轨形的不变量。对于 Joyce 构造中的许多其他平坦轨形，也可以用类似方法完成此类计算。

命题 1.6. 设(X, ϕ) 为例 *3* 中构造的平坦单轨形[Joy96]。则在(X, ϕ)上存在容许的 $U(2)$-丛 $P^\dagger$，其对应的不变量为$n_\phi(X, P^\dagger) = 2^6 \in \mathbb{Z}$。

最后，我们提到，Crowley–Nordström[CN15] 引入了一个关于7维流形上 G_2-结构（不一定是无挠）的同伦不变量 $\nu(X, \phi) \in \mathbb{Z}/48$，称为“ $\hat{A}$-缺陷”。如果我们考虑非单连通的 G_2-流形（X、ϕ），且$H^1(X; \mathbb{Z}) = 0$，则可以通过对所有平坦 $SU(2)$-丛上的不可约 G_2-瞬子进行计数并求和，定义一个不变量$n_\phi(X) \in \mathbb{Z}$。我们猜测$n_\phi(X)$与 $\nu(X, \phi)$之间可能存在某种关系，这类似于Casson不变量与

同调3-球面上的Rohlin不变量的情形。Scaduto的工作 [Sca20]对Joyce流形上的 ν-不变量进行了计算。

1.3. **概要**。

第 2 节回顾有关无挠克莱因四元群-轨形的必要知识。第 3 节为克莱因四元群-轨形上的 G_2-瞬子模空间搭建框架，其中包括变形、可约性和定向。第 4 节按照 Donaldson 的工作引入整体扰动，并证明不可约模空间的横截性。第 5 节证明小扰动下模空间的紧性。第 6 节定义不变量$n_\phi(X)$，并验证其变形不变性。文末还给出了若干算例。

致谢。 作者衷心感谢 Simon Donaldson 提出这一课题，并给予耐心的指导和鼓励。他还要感谢 Donghao Wang 富有启发性的讨论。

2. **预备知识**

本节回顾克莱因四元群-流形上规范理论的基础知识，并说明如何将相应概念推广到轨形情形。关于克莱因四元群-流形几何的详细阐述，可参阅 Joyce的书 [Joy00]。关于克莱因四元群-流形的规范理论视角，Donaldson–Segal 的论文 [DS11]是极佳的参考资料。

2.1. **与 G_2 相关的线性代数**。

我们先简要回顾李群 G_2 背后的线性代数。若要了解更全面的论述，可参阅 Salamon–Walpuski 的笔记 [SW17]。令$V = (\mathbb{R}^7, g_0)$ 为配备标准欧几里得内积 $g_0 = \sum_{i=1}^7 dx_i^2$ 的 7维实向量空间 $\mathbb{R}^7$ ，其中 $(x_1, ..., x_7)$ 是 $\mathbb{R}^7$ 上的标准坐标。我们还固定了 V 上的一个定向，使相应的体积形式为 $\mathrm{vol}_0 = dx_1 \wedge ... \wedge dx_7$。在 V 上，我们有一个 3-形式

$$\phi_0 := dx_{123} + dx_{145} + dx_{167} + dx_{246} - dx_{257} - dx_{347} - dx_{356}, \tag{2.1}$$

其中 $dx_{ijk} := dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k$。我们将 G_2 定义为 $GL_{\mathbb{R}}(7)$ 中保持 3-形式 ϕ_0 的元素所构成的子群。众所周知， G_2 是一个紧致、连通、单连通的半单李群，其实维数为 14（参见 [Joy00, SW17]）。3-形式 ϕ_0 通过以下关系在 V 上定义了一个叉积

$$\phi_0(u, v, w) = g_0(u \times v, w), \quad \forall\, u, v, w \in V. \tag{2.2}$$

这里，叉积指满足以下条件的斜对称双线性形式 $\times : V \times V ! V$

$$g_0(u \times v, u) = 0 \quad \text{and} \quad |u \times v|^2 = |u|^2|v|^2 - g_0(u, v)^2, \quad \forall\, u, v \in V.$$

若将 $\mathbb{R}^7$ 与八元数的虚部 $\mathbb{O}$等同，则由ϕ_0 给出的叉积就是八元数乘法后取虚部。 V 的体积形式 vol_0 与 3-形式 ϕ_0 的关系为

$$\iota_u\phi_0 \wedge \iota_v\phi_0 \wedge \phi_0 = 6g_0(u_0, v_0)\,\mathrm{vol}_0, \quad \forall\, u, v \in V, \tag{2.3}$$

其中 ι_u 是收缩映射。(2.3) 表明，一旦选定 V 的定向，3-形式 ϕ_0 就会诱导出内积 g_0 。

诱导的 G_2 在交替二阶张量空间 Λ^2V^* 上的作用，将该空间分解为不可约 G_2 表示之和:

$$\Lambda^2V^* := \Lambda^2_7 \oplus \Lambda^2_{14}, \tag{2.4}$$

其中 Λ^2_7 同构于 G_2 在 $\mathbb{R}^7$ 上的基本表示，而 Λ^2_{14} 同构于其李代数 $\mathfrak{g}_2$ 上的伴随 G_2 表示。这些不可约表示也可以显式写为（参见 [SW17，定理 8.5]）：

$$\Lambda^2_7 = \left\{\omega \in \Lambda^2V^* :\ \star(\phi_0 \wedge \omega) = 2\omega\right\}, \text{ 以及 } \Lambda^2_{14} = \left\{\omega \in \Lambda^2V^* :\ \star(\phi_0 \wedge \omega) = -\omega\right\}. \tag{2.5}$$

换言之，算子 $\star(\phi_0\wedge -)$分别作用于 Λ^2V^* 时， Λ^2_7和 Λ^2_{14}是对应于特征值 2 和 -1的特征子空间。利用关系

$$\star(\phi_0 \wedge \star(\phi_0 \wedge \omega)) = 2\omega + \star(\phi_0 \wedge \omega), \quad \forall\, \omega \in \Lambda^2V^*,$$

可以写出投影映射

$$\pi_7(\omega) = \frac{1}{3}(\omega + \star(\phi_0 \wedge \omega)) \text{ and } \pi_{14}(\omega) = \frac{1}{3}(2\omega - \star(\phi_0 \wedge \omega)). \tag{2.6}$$

由方程 (2.6) 可立即得到 (2.3) 的以下推广 :

$$\omega \wedge \omega \wedge \phi_0 = \left(2|\pi_7(\omega)|^2 - |\pi_{14}(\omega)|^2\right)\mathrm{vol}_0, \quad \forall\, \omega \in \Lambda^2V^*. \tag{2.7}$$

我们将 ϕ_0在 $GL^+_{\mathbb{R}}$(7) 作用下的轨道记为 $\mathcal{P}^3$(V)，其中 $GL^+_{\mathbb{R}}$(7) 是由 V的保定向自同构构成的群。我们称元素$\phi \in \mathcal{P}^3(V)$为正3-形式。显然， $\mathcal{P}^3(V)$ 是 Λ^3V^* 的开子集，可将其识别为 $GL^+_{\mathbb{R}}$ (7)/G_2。以上讨论表明，每个正3-形式 ϕ 都确定了定向$\mathbb{R}^7$上的一个内积 g_ϕ 和一个体积形式 vol_ϕ 。

定义 2.1. 设 $\phi \in \mathcal{P}^3(V)$ 是一个正3-形式。若一个定向3-平面 $W \subset V$满足 $\mathrm{vol}_W = \phi|_W$，则称其为 ϕ-结合子流形，其中 vol_W 是由$\mathfrak{g}_\phi$诱导的 W 上的体积形式。

由 (2.2) 可知，每个 ϕ-结合子空间 W都是由某些线性无关向量 u、$v \in V$张成的，其中包含 u和 v 以及 $u \times_\phi v$。结合子空间与 $\mathbb{R}^7$ 在 G_2的有限子群作用下的不变子空间密切相关。例如， $\sigma \in G_2$ 中的任意一个二阶元素都会在 V 中固定一个结合子空间（参见 [Joy00，命题 10.8.1]）。一般而言，有限子群在 G_2 中的作用下， V 的不变向量空间可描述如下。

命题 2.2 ([Joy00，命题 11.1。3])。 设 $\Gamma \subset G_2$ 为一个有限子群，并且

$$V^\Gamma := \{v \in V : \gamma v = v \ \ \forall \gamma \in \Gamma\}$$

为克莱因四元群不变向量构成的子空间。那么 V^Γ 具有以下形式之一 $s.$

(a) $V^\Gamma = V$ 或 $\{0\}$。*(b)* V^Γ 是一个结合子空间，此时 Γ 与 SU的一个有限子群共轭(2)，使得 $V/\Gamma \simeq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{C}^2/\Gamma$。*(c)* $V^\Gamma \simeq \mathbb{R}$，此时 Γ 与 SU的一个有限子群共轭(3)，使得$V/G \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{C}^3/\Gamma$。

2.2. 克莱因四元群-轨形。

按照 [ALR07], 中的处理，我们首先回顾经典意义下的“有效轨形”概念 [Sat56]。设 X 为一个仿紧豪斯多夫空间。 n维轨形图定义在 X上，是一个三元组 (U, G, ϕ)，其中

(1) $U \subset \mathbb{R}^n$ 是原点的一个开邻域；(2) G是 $O(n)$ 的一个有限子群；(3) $\phi\colon U \to X$是一个 G-不变映射，它诱导出一个同胚 $\phi\colon U/G \to \phi(U)$。

一个 n 维轨形图册 $\mathsf{U} = \{(U_\alpha, G_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ 由一族覆盖 X 的 n 维轨形图构成，并满足以下相容性假设

- 给定两个图 $(U_\alpha, G_\alpha, \varphi_\alpha)$ 和 $(U_\beta, G_\alpha, \varphi_\beta)$，对于任意 $x \in \varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta)$，可以找到第三个覆盖 x 的图 $(U_\gamma, G_\gamma, \varphi_\gamma)$，以及光滑嵌入 $\lambda_{\alpha\gamma}\colon U_\gamma \hookrightarrow U_\alpha$, $\lambda_{\beta\gamma}\colon U_\gamma \hookrightarrow U_\beta$，使得

$$\varphi_\gamma = \varphi_\alpha \circ \lambda_{\alpha\gamma} = \varphi_\beta \circ \lambda_{\beta\gamma}$$

给定满足 $\varphi_\alpha = \varphi_\beta \circ \lambda_{\beta\alpha}$ 的光滑嵌入 $\lambda_{\beta\alpha}\colon U_\alpha \to U_\beta$，可以证明[Moe 02] 对于每个 $g_\alpha \in G_\alpha$， G_β 中都存在唯一的元素，记作 $\lambda_{\beta\alpha}(g_\alpha)$，使得

$$\lambda_{\beta\alpha} \circ g_\alpha = \lambda_{\beta\alpha}(g_\alpha) \circ \lambda_{\beta\alpha}.$$

映射 $\lambda_{\beta\alpha}\colon G_\alpha \to G_\beta$ 是单射，并使该嵌入具有 G_α-等变性。

定义 2.3. n 维轨形 X 是一个配备最大 n 维轨形图册的仿紧豪斯多夫空间。

给定轨形 X 中的点 x，我们可以选取一个覆盖 x 的轨形图（U， G， φ）。设 $\tilde{x} \in \varphi^{-1}(x) \subset \tilde{U}$ 是 x 的一个原像。我们将由 $\tilde{x}$ 的稳定子组成的 G 的子群记为 $G_{\tilde{x}}$。在 $\varphi^{-1}(x)$ 中对 $\tilde{x}$ 的不同选择以及不同的轨形图，会得到规范同构的稳定子 $G_{\tilde{x}}$。因此，我们将 G_x 记作与某个 $\tilde{x} \in \varphi^{-1}(x)$ 对应的抽象群同构，并称 G_x 为 x 的各向同性群。在 x 附近，轨形 X 局部建模为 U_x/G_x，其中 $U_x \subset \mathbb{R}^n$ 是一个开集，使得 x 在商空间下与原点对应。我们将.....记为

$$S_X := \{x \in X : G_x \neq 1\} \tag{2.8}$$

具有非平凡各向同性群的点集。 S_X 中的每个点都称为轨形 X 的奇异点。

~ ~给定一个轨形图（$U_\alpha, G_\alpha, \varphi_\alpha$），可以考虑切丛 TU_α，它自然是一个带有 G_α-作用的 G_α-等变丛，其中该作用由对基空间 U_α 上的 ~ ~G_α-作用求微分诱导而来。轨形图（TU_α, G_α）可以拼接起来，得到

$$TX := \bigsqcup_\alpha \tilde{}(TU_\alpha/G_\alpha)/\sim,$$

其中拼接映射由嵌入 $\lambda_{\beta\alpha}$ 的微分给出。全空间 TX 是一个 $2n$ 维轨形，我们称之为 X 的切丛。存在一个自然投影 $\pi\colon TX ! X$，其在 $x \in X$ 处的纤维为

$$\pi^{-1}(x) = T_{\tilde{x}}\tilde{U}/G_{\tilde{x}},$$

其中 $\tilde{x} \in \phi^{-1}(x)$ 是 x 的原像中的一个点。

这种构造可以推广到余切丛 T^*X、对称张量丛 $\mathrm{Sym}^* T^*X$ 和交替张量丛 $\Lambda^* T^*X$。在局部坐标图 $\tilde{}(U_\alpha, G_\alpha)$ 上，这些丛是 G_α-等变丛。这些丛的整体截面由局部 G_α-等变截面组成，并且这些截面在拼接映射下相容。特别地，轨形 X 上的黎曼度量 g 是 $\mathrm{Sym}^2 T^*X$的正定截面。与流形情形类似，轨形黎曼度量 g 在 X的所有张量丛上诱导出 Levi–Civita 联络，我们将其记为 ∇_g。

如果 X 存在处处不为零的截面，我们就称其为可定向的。这样的截面确定了 X的定向。结合黎曼度量 g，我们得到 X上的体积~形式 formvol。 X 上的积分定义如下。在局部坐标图 $U_\alpha = \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset X$ 上， U_α 上的紧支撑 n-形式 ω_α 可视为等变n-形式 $\tilde{\omega}_\alpha$ 在 G_α作用下的商。于是我们定义

$$\int_{U_\alpha} \omega_\alpha := \frac{1}{|G_\alpha|} \int_{\tilde{U}_\alpha} \tilde{\omega}_\alpha,$$

其中，右侧的积分借助体积形式定义。要在 X 上对一般的 n-形式积分，我们取一个从属于 $\{U_\alpha\}$ 的单位分解来截断该 n-形式，然后将各个图上的积分相加。

设 ($\tilde{U}_\alpha, G_\alpha$) 是一个定向轨形图。对于每个 $\tilde{x} \in$ $\tilde{U}_\alpha$，我们用 $\mathcal{P}^3(T_{\tilde{x}}$ ~ $U_\alpha)$ 表示 $T_{\tilde{x}}\tilde{U}_\alpha$ 上的正 3-形式集合。我们记 $\mathcal{P}^3(T\tilde{U}_\alpha)$ 为 $= \bigcup_{\tilde{x}} \mathcal{P}^3(T_{\tilde{x}}\tilde{U}_\alpha)$。

定义 2.4. 设 X 是一个定向七维轨形。

- 几乎 G_2-结构定义在 X 上，是一个 3-形式 $\phi \in C^\infty(X, \Lambda^3 T^*X)$，其限制 ~ ~到每个图表$(U_\alpha, G_\alpha)$上，都是等变正 3-形式 $\phi_\alpha \in C^\infty(\tilde{U}_\alpha, \mathcal{P}^3(T\tilde{U}_\alpha))$的 G_α-商。
- 记g_ϕ 为由几乎 G_2-结构 ϕ诱导的黎曼度量。若ϕ 是g_ϕ-平行的，即 $\nabla_{g_\phi}\phi = 0$，则称其为（无挠） G_2-结构。

条件 $\nabla_{g_\phi}\phi = 0$ 等价于列维-奇维塔联络 ∇_{g_ϕ} 无挠。以下结果为判断一个几乎G_2-结构是否平行提供了一个有用的判据。

引理 2.5 ([Joy00, 命题 10.1。3])。 设 ϕ 是轨形 X上的一个几乎 G_2-结构。那么，当且仅当 ϕ 是 g_ϕ-平行时，

$$d\phi = 0 \quad and \quad d \star_\phi \phi = 0,$$

其中， $\star_\phi$ 是由诱导度量g_ϕ定义的霍奇星算子。

~设$(U_\alpha, G_\alpha, \varphi_\alpha)$是 X的一个轨形图，且 $U_\alpha = \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset X$。在定义中， G_2-结构$\phi|_{U_\alpha}$ 的限制由 G_α-等变正~3-形式 ϕ_α的商给出。由于 G_α 固定了 U_α中的原点，它保持正3-形式 $\phi_\alpha|_0$不变。因此，除去 $GL^+_{\mathbb{R}}$ (7)-共轭， G_α 可视为 G_2 的一个离散子群。 G_2 的有限子群的共轭类已在 [CW83、Gri95]中分类。这里不再深入讨论细节。粗略地说，G_2 中有七个有限子群，它们通过 G_2的基本表示在 $\mathbb{R}^7$ 上不可约地作用。 G_2 的所有其他有限子群，在共轭意义下，都包含于 $SU(2) \times SU(2)$或 $SU(3)$中。因此，点 $x \in X$ 的各向同性群 G_x 必为其中之一。

紧致 G_2轨形的典型例子，是将一个紧致 G_2流形在保持 G_2结构的有限群作用下取整体商。这里我们简要回顾一些构造。更多细节请参见Joyce的书 [Joy00]。

例 2.1。 设 M 是一个配备了 G_2结构 ϕ的紧致 7 维流形。 [Joy00, 《定理 10.2》1] 告诉我们，全纯群 $\mathrm{Hol}^0(g_\phi)$ 的连通分支是 $\{1\}$、 $SU(2)$、 $SU(3)$ 或 G_2 之一。

(a) 当 $\mathrm{Hol}^0(g_\phi) = \{1\}$时，我们考虑平坦七维环面 $T^7 = \mathbb{R}^7/\mathbb{Z}^7$。 $\mathbb{R}^7$ 上的 3-形式 ϕ_0 (2.1) 在 $\mathbb{Z}^7$平移下是不变量。因此，它下降为 T^7上的无挠 G_2结构 ϕ_0。设 $\Gamma \subset G_2$ 是一个有限子群。由于 Γ 保持 3-形式ϕ_0不变，商 T^7/Γ 是一个 G_2轨形。

(b) 当 $\mathrm{Hol}^0(g_\phi) = SU(2)$ 时，我们考虑平坦 3 维环面与 $K3$曲面之间的乘积 $M = T^3 \times K3$。 $K3$ 曲面带有复结构 J，以及与之相容的凯勒形式 ω 和全纯体积形式 θ。于是我们在 M 上得到一个 G_2-结构（参见 [Joy00，命题 11.1.1]）

$$\phi = dx_{123} + dx_1 \wedge \omega + dx_2 \wedge \operatorname{Re}\theta - dx_3 \wedge \operatorname{Im}\theta. \tag{2.9}$$

于是可以取一个保持 ϕ 的微分同胚有限群 Γ。整体商 M/Γ 是一个 G_2-轨形。例如， $\mathbb{Z}/2$ 在 $T^3 \times K3$ 上的作用由映射 $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, -x_2, -x_3)$ 给出，并在 $K3$ 上作用为复共轭。

(c) 当 $\mathrm{Hol}^0(g_\phi) = SU(3)$ 时，我们考虑圆与卡拉比–丘三维流形 Y 之间的乘积 $M = S^1 \times Y$。令 ω 为 Y 上的凯勒形式， θ 为全纯体积形式。于是， M 上的 G_2-结构具有如下形式（参见 [Joy00，命题 11.1.2]）

$$\phi = dx \wedge \omega + \operatorname{Re}\theta. \tag{2.10}$$

然后， $\mathbb{Z}/2$ 通过在 S^1 上施加对径映射、在 Y上施加复共轭所得到的映射作用于 $S^1 \times Y$。

受这些例子的启发，我们将考虑在奇异集附近具有某些明确局部模型的 G_2-轨形。

定义 2.6. 若紧致的 G_2-轨形 X 的奇异集 S_X 局部上呈现以下某一种类型，则称其为简单的。

(I) $x \in S_X$ 具有一个配备标准正3-形式 ϕ_0 的轨形图 $(U_x, \mathbb{Z}/2)$，其中 $\mathbb{Z}/2 = \{1, -1\}$ 的生成元 -1 在 $\tilde{U}_x \subset \mathbb{R}^7$ 上的作用为

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) \longmapsto (x_1, x_2, x_3, -x_4, -x_5, -x_6, -x_7).$$

(II) $x \in S_X$ 具有一个配备标准正3-形式 ϕ_0 的轨形图 $(U_x, \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2)$，其中生成元 $(1, -1)$ 和 $(-1, 1)$ 在 $\tilde{U}_x \subset \mathbb{R}^7$ 上的作用为

$$(1, -1) \cdot (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (x_1, x_2, x_3, -x_4, -x_5, -x_6, -x_7)$$
$$(-1, 1) \cdot (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (x_1, -x_2, -x_3, x_4, x_5, -x_6, -x_7).$$

定义 2.6 中的第一个局部模型 (1) 将奇异集局部描述为 $\mathbb{R}^7$ 中一个结合子空间的商，其邻域形成一个 $\mathbb{R}P^3$-锥丛。定义 2.6 中的第二个局部模型 (2) 描述了两个由 (1) 建模的奇异集部分相交成一条曲线的情形。在 Joyce 构造紧致G_2-流形时，G_2-轨形自然地作为平坦七维环面在有限群作用下的整体商出现。在其论文 [Joy96], 中给出的具体例子里，大多数相关的 G_2-轨形都很简单。

现在我们简要讨论轨形的同伦群和（上）同调群，采用 [ALR07]中的处理方式。对于每个轨形 X，都可以关联一个分类空间c: $\mathcal{B}X$！X，它具有 CW 复形 [Seg74]的同伦型。这个分类空间在弱同伦等价意义下唯一。于是，我们分别将轨形 X 的同伦群和（上）同调群定义为

$$\pi_n^{\mathrm{orb}}(X, x) := \pi_n(\mathcal{B}X, x_c) \quad H_n^{\mathrm{orb}}(X; R) := H_n(\mathcal{B}X; R) \quad H^n_{\mathrm{orb}}(X; R) := H^n(\mathcal{B}X; R), \tag{2.11}$$

其中，$x_c \in \mathcal{B}X$ 满足 $c(x_c) = x$，且 R 是任意交换环。文献 [ALR07，推论 1.24] 证明，每个（经典）紧致 n-轨形 X 都是光滑流形 M 在紧李群 G的光滑、有效且几乎自由作用下的整体商。事实上，可以取 M 为 X的标架丛的总空间，并取 $G = O(n)$。此时，分类空间 $\mathcal{B}X$ 是 Borel 构造$EG \times_G M$，其中 EG 是紧李群 G的分类丛。因此，$X = M/G$ 的轨形（上）同调就是(M, G)的等变（上）同调。

还可以考虑轨形上的德拉姆上同调，其链复形由轨形 n-形式 $\Omega^n(X)$ 构成，微分为形式上的外微分。我们将德拉姆上同调记为 $H^*_{\mathrm{dR}}(X)$，它可与 X 的（非轨形）奇异上同调 $H^*(X; \mathbb{R})$ 及 $\mathbb{R}$-系数相识别（参见 [Sat56]）。此外，轨形上同调 $H^*_{\mathrm{orb}}(X; \mathbb{R})$ 也与通常的奇异上同调 $H^*(X;\ \mathbb{R})$ 同构。

当 G 是有限群时，纤维化 M！$EG \times_G M$！BG 给出一个短正合列:

$$1 \longrightarrow \pi_1(M) \longrightarrow \pi_1^{\mathrm{orb}}(X) \longrightarrow G \longrightarrow 1. \tag{2.12}$$

通过取 M 的万有覆盖 $\tilde{M}$，轨形基本群 $\pi_1^{\mathrm{orb}}(X)$ 可˜与作用在 M [上的覆盖变换群等同（参见 M [ALR07，定理 2.18]）。轨形基本群还有一种更初等的描述，对应于流形基本群的定义。我们按照 [Hae90] 中的论述回顾这一描述。

˜**定义 2.7**。设 X 是一个配备轨形图册 $\{(U_\alpha, G_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$的轨形。设 $x, y \in X$ 是两个固定点。

• 从 x 到 y 的轨形路径 γ 由以下数据组成。(1) 单位区间 $[0,1]$的一个划分 $0 = t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_n = 1$。(2) 一个指标函数 $\tau: \{1,\ldots,n\} \to I$ 以及一族连续路径 $\tilde{\gamma}_i : [t_{i-1}, t_i] \to U_{\tau(i)}$，满足$\varphi_{\tau(1)}(\tilde{\gamma}_1(0)) = x$, $\varphi_{\tau(i)}(\tilde{\gamma}_i(t_{i-1})) = \varphi_{\tau(i-1)}(\tilde{\gamma}_{i-1}(t_{i-1}))$ $\varphi_{\tau(n)}(\tilde{\gamma}_n(1)) = y$.

• 若将 $[0,1]$ 细分并将其细化为具有共同指标函数 τ，则从 x 到 y 的两个轨形路径 γ 和 γ' 等价，当且仅当存在某个 $g_i \in G_{\tau(i)}$，使得局部提升满足$\tilde{\gamma}_i = g_i \cdot \tilde{\gamma}'_i$。

• 若存在一族连续变化的轨形路径 $(\gamma^s)_{s\in[0,1]}$，使得对所有 $s \in [0,1]$ 都有

$$\gamma^s(0) = x, \quad \gamma^0 = \gamma, \quad \gamma^1 = \gamma', \quad \gamma^s(1) = y.$$

• 轨形基本群 $\pi_{\mathrm{orb}1}(X, x)$ 定义为以x为基点的轨形路径集合，模去轨形路径等价和端点相对同伦，并赋予显然的群结构。

可以直观地将轨形路径视为 X 上的一条连续路径及其选定的局部提升，而轨形基本群则是这类对象的同伦类。考虑轨形丛上的联络的全纯时，轨形路径这一概念将很有用。

2.3. **轨形丛与联络**。

定义 ˜**2.8.** 设 X 是一个配备轨形图册 $\{(U_\alpha, G_\alpha, \varphi_\alpha)\}$的 n-轨形。

• 设 E 是 X 上的一个秩为r 的向量轨形丛，它由一族$\{E_\alpha\}$ $\tilde{G}_\alpha$-等变的秩为r的˜ ˜ ˜˜丛 $E_\alpha \to U_\alpha$ 构成，并配备纤维逐点同构的嵌入 $E_\alpha \hookrightarrow E_\beta$，这些嵌入与嵌入 $U_\alpha \hookrightarrow U_\beta$相容。˜

• 设 G 是一个紧李群。X 上的主 G-轨形丛 P 由一族 $\{P_\alpha\}$˜ ˜个 G_α-等变主 G-丛 $\pi_\alpha : P_\alpha \to U_\alpha$ 构成（左侧 G_α-作用与 P_α上的右侧 G-作用˜ ˜˜可交换），并配备纤维逐点同构的嵌入 $P_\alpha \hookrightarrow P_\beta$˜ ˜，这些嵌入与嵌入 $U_\alpha \hookrightarrow U_\beta$相容。

设 P 是位于 X 上的主 G-轨形丛。与流形的情形相同，[KN63], 上的联络 A 定义为以下（G_α, G）-等变丛序列的相容 G-等变分裂所组成的集合：

$$0 \longrightarrow \tilde{P}_\alpha \times \mathfrak{g} \xrightarrow{\psi_\alpha} T\tilde{P}_\alpha \xrightarrow{\pi_{\alpha,*}} \pi_\alpha^* T\tilde{U}_\alpha \longrightarrow 0, \tag{2.13}$$

其中 $\mathfrak{g}$ 是 G的李代数，而 ψ_α 是诱导 $\tilde{}$与 TP_α的垂直纤维之间同构的无穷小李代数作用。式（2.13）的分裂可以表示为 ψ_α 的左逆；将其与到 $\mathfrak{g}$的投影复合后，可得到定义在 P_α 上的（G_α,G）-等变 $\mathfrak{g}$值 1-形式 $\tilde{}$；也可以表示为 π_α的右逆$_{,*}$，其像是 TP_α的（G_α,G）-等变水平子空间。

对于表示 $\rho\colon G \to \mathrm{Aut}(V)$，我们可以关联一个向量轨形丛 $E = P\times_\rho V$。特别地，伴随表示 $\mathrm{ad}\colon G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ 给出伴随丛$\mathfrak{g}_P := P \times_{\mathrm{ad}} \mathfrak{g}$。光滑联络在 P 上构成的空间 A_P 是以 $\Omega^1(X,\mathfrak{g}_P)$ 为模型的仿射空间。伴随作用 $\mathrm{Ad}\colon G \to \mathrm{Aut}(G)$ 产生另一个纤维丛 $G_P := P \times_{\mathrm{Ad}} G$。尽管局部纤维 G_P 是李群 G，它却不是主 G-丛。P 的自同构群可识别为 $C^\infty(X,G_P)$，其李代数为 $\Omega^0(X,\mathfrak{g}_P)$。我们将 $\mathsf{G}_P := C^\infty(X,G_P)$ 称为 P 的规范群，并将 P 的自同构称为规范变换。接着，G_P 通过拉回作用于 A_P：

$$u\cdot A := uAu^{-1} = A - (d_A u)u^{-1}. \tag{2.14}$$

给定主 G-轨形丛 P 上的一个 G-联络 A，我们可以仿照流形情形，定义 A 沿 X 中轨形环路的全纯。当 A 平坦，即其曲率 $F_A = 0$ 时，全纯在轨形环路的同伦下保持不变。固定一个基点 $x \in X$ 以及 x 的一个提升 $p \in P$ 后，平坦联络的全纯定义了一个表示

$$\mathrm{Hol}(A) : \pi_1^{\mathrm{orb}}(X,x) \longrightarrow G. \tag{2.15}$$

对 x 和 p 的不同选择，会使表示在 G 中某个元素的伴随作用下发生变化。反过来，给定一个表示 $\rho \in \mathrm{Hom}(\pi_1^{\mathrm{orb}}(X)\ G)$，可以构造一个带有联络 A_ρ 的主 G-轨形丛 P_ρ，使其通过整体单值化实现 ρ（参见 [SY17]）。因此，我们考虑集合 $\mathfrak{F}(X,G)$，其元素为形如 (P,A) 的二元组，其中 P 是 X 上的主 G- 轨形丛，A 是 P 上的平坦联络。若存在丛同构 $f\colon P \to P'$，使得 $f^*A' = A$，则二元组 (P,A) 与 (P',A') 等价。由此可以证明，上述过程在这类二元组的等价类与 G 上的 $\pi_1^{\mathrm{orb}}(X)$-表示的共轭类之间建立了一一对应。

命题 2.9 ([SY17])**.** 整体单值化映射诱导出以下一一对应：

$$\mathfrak{F}(X,G)/\sim \quad\longleftrightarrow\quad \mathrm{Hom}(\pi_1^{\mathrm{orb}}(X),G)/\mathrm{Ad}\,.$$

这种对应关系在流形情形中众所周知。完整证明可参见 [Tau11, Chapter 13]。

设 G 是 $O(n)$ 的李子群，其中 n 是某个正整数。表示 $\rho\colon G \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)$ 将秩为 n 的丛 $E := P\times_\rho X$ 与主 G-轨形丛 $P \to X$ 关联起来。将 E 的全空间视为轨形，其分类空间 $\mathcal{B}E$ 自然是 $\mathcal{B}X$ 上的一个 $\mathbb{R}^n$-丛（参见 [ALR07]）。于是，我们将 P 的 Stiefel–Whitney 类和庞特里亚金类定义为与丛 $\mathcal{B}E \to \mathcal{B}X$ 相关联的特征类：

$$w_i(P) \in H^i_{\mathrm{orb}}(X;\mathbb{Z}/2) \quad \text{and} \quad p_i(P) \in H^{4i}_{\mathrm{orb}}(X;\mathbb{Z}). \tag{2.16}$$

若 G 是 $U(n)$ 的李子群，则主 G-轨形丛的陈类也以类似方式定义。将特征形式与主 G-轨形丛上联络的曲率形式联系起来的陈–韦伊理论也已建立。关于详尽论述，可参阅 [LGTX07]。当轨形 X 是整体商 M/G，且 P 是一个等变 G-丛时，Berline–Getzler–Vergne 的著作 [BGV92 的第 7] 章对等变陈–韦伊理论作了出色的阐述。例如，在同一关系 $H^*_{\mathrm{dR}}(X) \simeq H^*_{\mathrm{orb}}(X;\mathbb{R})$ 下，P 的实庞特里亚金类由 P 上一个 G-联络 A 的曲率形式 F_A 的对称多项式以相同的组合给出，这与流形上的主 G-丛情形相同。

3. G_2轨形上的规范理论

本节遵循 Donaldson–Segal [DS11]，建立 G_2轨形上的规范理论框架。关于更全面的论述，可参阅 Sá Earp 的论文 [SE09]。

首先，我们明确轨形与丛的约定。设 (X,ϕ) 是一个配备无挠 G_2 结构的紧致轨形，且 $\pi\colon P^\dagger \to X$ 是一个主 $U(r)$-丛。由 $P^\dagger$，通过行列式同态 $\det\colon U(r)\to U(1)$，我们得到一个线丛 $\det P^\dagger$；通过射影同态 $\mathrm{pr}\colon U(r)\to PU(r)$，得到一个 $PU(r)$-丛 P。$P^\dagger$ 的一般联络记为 $A^\dagger$，它在 $\det P^\dagger$ 上诱导联络 θ_A，并在 P 上诱导联络 A。

3.1. G_2-瞬子。

我们固定 $P^\dagger$ 上的一个光滑联络 $A_0^\dagger$ 作为参考联络。我们还固定一个整数 $k\geq 4$，以确保 Sobolev 嵌入 $L^2_k \hookrightarrow C^0$。于是，我们在 $PU(r)$-丛 P 上得到诱导联络 A。记 A_k 为 P 上属于类 L^2_k 的所有 $PU(r)$- 联络所构成的空间。明确地说，$A\in\mathsf{A}_k$ 当且仅当

$$\|A-A_0\|_{L^2_{k,A_0}(X)} := \sum_{i=0}^{k}\left(\int_X |\nabla^i_{A_0}(A-A_0)|^2 d\,\mathrm{vol}\right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

其中，$\nabla^i_{A_0}$ 表示对 A_0 求 i 阶导数。于是，A_k 是一个以 $L^2_k(X,\Lambda^1\otimes\mathfrak{g}_P)$ 为模型的仿射空间，其中 Λ^* 表示 $\Lambda^* T^*X$。

注 3.1. 我们总是通过同构 $\mathrm{ad}\colon \mathfrak{su}(r)\to\mathfrak{pu}(r)$ 将 $\mathfrak{pu}(r)$ 与李代数 $\mathfrak{su}(r)$ 视为相同；该同构由对伴随映射求导得到。$\mathfrak{su}(r)$ 上的内积通过 Killing 型定义：

$$\langle\alpha,\beta\rangle := -\operatorname{tr}(\mathrm{ad}(\alpha)\circ\mathrm{ad}(\beta)) = -2r\operatorname{tr}(\alpha\beta),\quad \forall\alpha,\beta\in\mathfrak{su}(r).$$

规范群 G_{k+1} 定义如下。注意，$U(r)$ 对 $SU(r)$ 的伴随作用可经由 $PU(r)$ 分解。因此，我们可以考虑丛

$$G'_P := P\times_{\mathrm{Ad}} SU(r)\qquad G_P := P\times_{\mathrm{Ad}} PU(r).$$

第二个丛 G_P的截面是 P的自同构。射影同态 $\mathrm{pr}: SU(r) \to PU(r)$ 诱导出一个映射 $\mathrm{pr}_P: G'_P \to G_P$。我们将规范群定义为

$$\mathscr{G}_{k+1} := L^2_{k+1}(G'_P)$$

其通过与 pr_P 预复合的方式作用于丛 P。G^{k+1} 中的元素通常称为 $SU(r)$ 的"行列式为 1" 的规范变换。截面 G'_P 通过拉回按通常方式作用于联络空间:

$$u \cdot A := A - (d_A u)u^{-1}, \quad u \in \mathscr{G}_{k+1},\ A \in \mathscr{A}_k. \tag{3.1}$$

对于 7维轨形，当 $k \geq 3$ 时，Sobolev 乘法定理 $L^2_{k+1} \times L^2_k \to L^2_k$ 成立。因此，G^{k+1} 中的规范变换保持 A_k 不变。G^{k+1} 的李代数可识别为 $L^2_{k+1}(X, \mathfrak{g}_P)$。

或者，也可以考虑 $P^\dagger$ 上满足额外约束的 $U(r)$-联络。记 $\theta_0 = \det A_0^\dagger$ 为行列式线丛 $\det P^\dagger$ 上的诱导联络。于是，联络空间 A_k 可识别为 $P^\dagger$ 上满足 $\det A^\dagger = \theta_0$ 的 L^2_k $U(r)$-联络 $A^\dagger$ 所构成的空间。保持 θ_0 不变的 $P^\dagger$ 上的规范变换具有平凡行列式，因此构成前述群 G^{k+1}。

记 $\psi := \star_\phi \phi$ 为与正3-形式 ϕ相关联的 4-形式。陈–西蒙斯泛函的 G_2 变体定义为:

$$\mathrm{cs}_\phi(A_0 + a) := -2r \int_X \left(\frac{1}{2} \operatorname{tr}(a \wedge F_{A_0+a}) + \frac{1}{3} \operatorname{tr}(a \wedge a \wedge a) \right) \wedge \psi. \tag{3.2}$$

显然，陈–西蒙斯泛函在联络空间 $\mathrm{cs}_\phi : \mathsf{A}_k \to \mathbb{R}$上定义了一个解析泛函。

引理 3.2. 陈–西蒙斯泛函的梯度为

$$\operatorname{grad} \mathrm{cs}_\phi(A) = \star_\phi(F_A \wedge \psi).$$

证明。 我们将 $A = A_0 + a$ 处的切空间 $T_A \mathsf{A}_k$ 识别为 $L^2_k(X, \Lambda^1 \otimes \mathfrak{g}_P)$。那么微分可计算为

$$\begin{aligned} \frac{1}{2r} D\,\mathrm{cs}_\phi\,|_A(\alpha) = &- \int_X \frac{1}{2} \left(\operatorname{tr}(a \wedge d_{A_0}\alpha) + \operatorname{tr}(\alpha \wedge d_{A_0} a) \right) \wedge \psi \\ &- \int_X \frac{1}{3} \left(\operatorname{tr}(\alpha \wedge a \wedge a) + \operatorname{tr}(a \wedge \alpha \wedge a) + \operatorname{tr}(a \wedge a \wedge \alpha) \right) \wedge \psi. \end{aligned}$$

分部积分可得

$$\int_X \operatorname{tr}(a \wedge d_{A_0}\alpha) \wedge \psi = \int_X \operatorname{tr}(\alpha \wedge d_{A_0} a) \wedge \psi.$$

迹算子的循环置换不变性告诉我们

$$\begin{aligned} D\,\mathrm{cs}_\phi\,|_A(\alpha) &= -2r \int_X \operatorname{tr}(\alpha \wedge (d_{A_0} a + a \wedge a)) \wedge \psi \\ &= -2r \int_X \operatorname{tr}(\alpha \wedge F_A \wedge \psi) \\ &= \langle \alpha, \star_\phi(F_A \wedge \psi) \rangle_{L^2}. \end{aligned}$$

证毕。 □

定义 3.3。设 $P^\dagger$！X是 G_2-轨形 (X,ϕ) 上的主 $U(r)$-轨形丛。若酉联络 $A^\dagger$ 满足

$$F_A \wedge \psi = 0,$$

其中， A是 $A^\dagger$在丛 $PU(r)$-丛 P上的诱导联络。

由于我们通常研究丛 $PU(r)$ 上的联络，因此当 $F_A \wedge \psi = 0$ 时，我们简称 A 为 G_2-瞬子。引理 3.2 告诉我们， G_2-瞬子是陈–西蒙斯泛函 cs_ϕ的临界点。将 G_2-瞬子视为临界点，反映了 3 维情形中的一种现象：平坦联络是陈–西蒙斯泛函的临界点。另一方面， G_2-瞬子也与 4 维中的反自对偶瞬子有相似之处。回顾 (2.4)， G_2在 $\Lambda^2(\mathbb{R}^7)^*$ 上的作用分解为两个 G_2-表示 $\Lambda^2_7 \oplus \Lambda^2_{14}$。由于 3-形式 ϕ 是平行的，这种分解立即延伸到 G_2-轨形 X上的 2-形式丛：

$$\Lambda^2 T^*X = \Lambda^2_7 \oplus \Lambda^2_{14}.$$

记 $\pi_7 : \Lambda^2$！Λ^2_7 为正交投影。为简便起见，当上下文清楚时，我们将 $\star_\phi$记作 $\star$。

引理 3.4. 设 $P \to X$ 是一个主 $U(r)$-轨形丛，其底空间为 G_2-轨形 (X,ϕ)。则下列条件等价。

(a) A 是 P 上的一个 G_2-瞬子。
(b) $\pi_7(F_A) = 0$。*(c)* $\star_\phi(F_A \wedge \phi) = -F_A$。

证明。 (b) 与 (c) 等价由 (2.5) 得出。为证明 (a) 与 (c) 等价，我们注意到以下恒等式（参见 [SW17，公式 (4.60)]）

$$\star(\psi \wedge \star(\psi \wedge F_A)) = F_A + \star(F_A \wedge \phi).$$

由于 $\psi \wedge -$ 的伴随算子为 $\star(\psi \wedge (\star -))$，我们得出 $F_A + \star(F_A \wedge \phi) = 0$ 当且仅当 $\psi \wedge F_A = 0$。证毕。□

引理 3.4 中的第二个判据 (b) 将 G_2-瞬子引向四维中 ASD 瞬子的类似情形。回忆一下， $SO(4)$ 有两个不可约 3 维表示，这将 4-流形上的 2-形式丛分解为两部分 $\Lambda^2 = \Lambda^+ \oplus \Lambda^-$，分别由自对偶和反自对偶 2-形式组成。于是，若联络 A 的自对偶部分为零，即 $\pi_+(F_A) = 0$，则它是反自对偶的。通过考虑 Yang–Mills 泛函，可以进一步深化与 ASD 瞬子的类比

$$\begin{aligned} \mathcal{YM} : \mathscr{A}_k &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A &\longmapsto \int_X |F_A|^2 d\,\mathrm{vol}\,. \end{aligned} \tag{3.3}$$

当 A是一个 G_2-瞬子时，(2.6) 和 (2.7) 意味着

$$\mathcal{YM}(A) = \|\pi_{14}(F_A)\|_{L^2}^2 = -\int_X 2r\,\mathrm{tr}(F_A \wedge F_A) \wedge \phi = 8\pi^2 \langle p_1(\mathfrak{g}_P) \smile [\phi], [X] \rangle, \quad (3.4)$$

其中 $p_1(\mathfrak{g}_P) \in H^4_{\mathrm{orb}}(X;\mathbb{R})$ 是轨形丛 $\mathfrak{g}_P$ 的实 Pontryagin 类。由于 (3.4) 的右端与联络 A 的选取无关， G_2-瞬子是 Yang–Mills 泛函的绝对极小值。这一性质也刻画了四维中的反自对偶瞬子。

定义 **3.5.** 定义为 $P^\dagger$ 上射影 G_2-瞬子的模空间:

$$\mathcal{M}_\phi(X, P^\dagger) := \{A \in \mathscr{A}_k : F_A \wedge \psi = 0\} / \mathscr{G}_{k+1}.$$

尽管我们研究的是 L^2_k 类中的联络，但每个 G_2-瞬子的等价类都存在光滑代表元。因此，我们选择在模空间的记号中省略正则性。

3.2. **局部变形**。

模空间 $\mathcal{M}_\phi(X, P^\dagger)$ 的局部结构，通过研究“变形复形”最容易理解。无穷小地，规范群 G_{k+1} 在 A_k上的作用由下式给出

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e^{t\xi} \cdot A = -d_A \xi, \quad \xi \in L^2_{k+1}(X, \mathfrak{g}_P)$$

此外， G_2-瞬子算子 $F_A \wedge \psi$ 的线性化由下式给出

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F_{A+t\alpha} \wedge \psi = d_A \alpha \wedge \psi, \quad \alpha \in L^2_k(X, \Lambda^1 \otimes \mathfrak{g}_P).$$

因此，我们考虑以下由微分算子构成的序列 $E_A(X)$:

$$L^2_{k+1}(X, \mathfrak{g}_P) \xrightarrow{-d_A} L^2_k(X, \Lambda^1 \otimes \mathfrak{g}_P) \xrightarrow{d_A \wedge \psi} L^2_{k-1}(X, \Lambda^6 \otimes \mathfrak{g}_P) \xrightarrow{d_A} L^2_{k-2}(X, \Lambda^7 \otimes \mathfrak{g}_P).$$

我们注意到，当且仅当 A 是一个 G_2-瞬子时，序列 $E_A(X)$ 才构成链复形。在这种情况下，我们称 $E_A(X)$ 为模空间 $\mathcal{M}_\phi(X, P^\dagger)$ 在 $[A]$处的变形复形。这个复形 $E_A(X)$ 是椭圆复形，因为由微分算子的主符号构成的相应序列是正合的（参见 [DS11]）。因此，$E_A(X)$ 的上同调是有限维的。

$E_A(X)$ 的上同调具有具体的几何意义，这与四维中 ASD 瞬子的变形复形类似。$H^0(E_A(X))$ 是各向同性群 $\mathsf{Stab}(A)$ 的李代数。为了更好地理解 $\mathsf{Stab}(A)$，我们考虑 $A^\dagger$ 在 $P^\dagger$ 上的相应联络。固定一个非奇异基点 $x_0 \in X$，并将 $G'_P|_{x_0}$ 的纤维与 $SU(r)$ 识别。 $u \in \mathsf{Stab}(A)$ 意味着 u 是 $A^\dagger$-平行的，因而由其在 x_0 上的限制所决定。因此，$\mathsf{Stab}(A)$ 可识别为 $SU(r)$ 的一个子群（事实上它是一个李子群，尽管不一定是闭的）。记 $\mathsf{Hol}(A^\dagger, x_0) \subset U(r)$ 为由沿着以 x_0 为基点的轨形环路进行 $A^\dagger$-平行移动所得到的 $P^\dagger|_{x_0}$ 的自同构生成的全纯群。于是，$\mathsf{Stab}(A)$ 可识别为 $\mathsf{Hol}(A^\dagger, x_0)$ 在

$SU(r)$ 的中心。我们将 $SU(r)$ 的中心记为 $Z(r)$，它由单位矩阵乘以 r 次单位根所得到的倍数组成。

引理 3.6。设 $A^\dagger$ 是 $P^\dagger$ 上的一个酉联络，它在 P 上诱导出联络 A。则以下条件等价。

(a) $\mathrm{Stab}(A) = Z(r)$. *(b)* 维数 $H^0(E_A(X)) = 0$. *(c)* $\mathrm{Hol}(A^\dagger)$在 $\mathbb{C}^r$ 上不可约地作用。

证明。 $(a) \Longrightarrow (b)$。这是由 $H^0(E_A(X))$ 是 Stab(A) 的李代数这一事实直接得出的。

$(b) \Longrightarrow (c)$。假设 Hol$(A^\dagger)$ 的作用分解为 $\mathbb{C}^r$ 两个不变子空间 $\mathbb{C}^{r_1}$ 和 $\mathbb{C}^{r_2}$。对每个元素 $\zeta \in U(1)$，我们定义一个从 $\mathbb{C}^r$ 到自身的映射：将前 r_1 个因子乘以 ζ^{r_2}，将其余 r_2 个因子乘以 ζ^{-r_1}。于是，每个映射都定义了 $SU(r)$ 中的一个元素，且该元素与 Hol$(A^\dagger)$ 的作用相交织。这样的赋值将 $1 \in U(1)$ 的一个邻域嵌入 $SU(r)$。这意味着 $\dim H^0(E_A(X)) \geq 1$。

$(c) \Longrightarrow (a)$。由于 Hol$(A^\dagger)$ 在 $\mathbb{C}^r$ 上作用不可约，舒尔引理告诉我们，Stab(A) 中的每个元素都必须通过标量乘法作用于 $\mathbb{C}^r$。由于 Stab(A) 包含于 $SU(r)$ 且包含 $Z(r)$，我们得出 Stab$(A) = Z(r)$。□

定义 3.7. 若联络 $A \in \mathsf{A}_k$ 的各向同性群 Stab$(A) = Z(r)$，则称该联络为不可约；否则称为可约。我们将 L_k^2 类不可约联络的空间记为 A_k^*。

设 A 是一个 G_2-瞬子。由于 Stab(A) 中的每个元素都是 A-平行的，容易验证，$E_A(X)$ 关于伴随作用是 Stab(A)-等变的。第一上同调 $H^1(E_A(X))$ 表示 $[A]$ 在 $\mathcal{M}_\phi(X, P^\dagger)$ 中的扎里斯基切空间。 [DK90 第 4] 章中的论证可用于构造一个库兰尼希障碍映射$\mathfrak{o}_A$：$H^1(E_A(X))$！$H^2(E_A(X))$，使得 $\mathcal{M}_\phi(X, P^\dagger)$ 中 $[A]$ 的一个邻域可与 $\mathfrak{o}_A^{-1}(0)/$ Stab(A) 中的一个邻域等同。注意，当 Stab$(A) = Z(r)$ 是中心时，Stab(A) 在 $E_A(X)$ 上的作用是平凡的。特别地，当 $H^0(E_A(X)) = H^2(E_A(X)) = 0$ 时，$[A]$ 的一个邻域可与 $H^1(E_A(X))$ 中原点的一个邻域等同。这一解释引出了以下定义。

定义 3.8. </style}称 G_2-瞬子 $[A] \in \mathcal{M}_\phi(X, P^\dagger)$ 为正则的，当且仅当 $H^2(E_A(X)) = 0$。

对 $E_A(X)$ 的偶部分取伴随后，可以将 $E_A(X)$ 的信息归纳为一个椭圆算子：

$$L_A := \begin{pmatrix} 0 & -d_A^* \\ -d_A & \star(d_A \wedge \psi) \end{pmatrix} : L_k^2(X, (\Lambda^0 \oplus \Lambda^1) \otimes \mathfrak{g}_P) \longrightarrow L_{k-1}^2(X, (\Lambda^0 \oplus \Lambda^1) \otimes \mathfrak{g}_P). \quad (3.5)$$

注意到，关于 L^2-内积，L_A 是自伴的。因此我们得出

$$0 = \mathrm{ind}\, L_A = h^1(E_A(X)) + h^3(E_A(X)) - h^0(E_A(X)) - h^2(E_A(X)),$$

其中 $h^i(E_A(X)) = \text{维}\, H^i(E_A(X))$。根据上述讨论，我们得出结论：正则不可约的 G_2-瞬子在模空间中是孤立的。

3.3. **可约 G_2-瞬子**。

我们从一个线丛 L 开始，它定义在一个 G_2-轨形 (X,ϕ) 上。记 ω_ϕ 为关于 G_2-结构 ϕ、表示 $c_1(L)$ 的调和 2-形式。由于 ϕ 相对于 g_ϕ是平行的， G_2-表示 $\Lambda^2=\Lambda^2_7\oplus\Lambda^2_{14}$将调和 2-形式空间分解为 $\mathcal{H}^2(X)=\mathcal{H}^2_7(X)\oplus\mathcal{H}^2_{14}(X)$。 G_2-瞬子在 L 上的刻画可由以下观察给出。

引理 3.9. 设 $L\to X$ 是一个线丛。当且仅当 $F_A=-2\pi i\omega_\phi$ 满足 $\omega_\phi\in\mathcal{H}^2_{14}(X)$ 时， L 上的酉联络 A 是一个 G_2-瞬子。此外， G_2-瞬子的规范等价类由雅可比环面参数化

$$J(X):=H^1_{\mathrm{orb}}(X;i\mathbb{R})/H^1_{\mathrm{orb}}(X;\mathbb{Z}).$$

证明。 设 A 是 L 上的一个 G_2-瞬子。则 (2.5) 告诉我们

$$\star(F_A\wedge\phi)=-F_A\Longrightarrow\star F_A=-F_A\wedge\phi.$$

于是，Bianchi 恒等式推出 F_A 是调和的。由于 $i/2\pi F_A$ 表示 $c_1(L)$，我们得出 $F_A=-2\pi i\omega_\phi$。由于 $\pi_7(F_A)=0$，可知 $\omega_\phi\in\mathcal{H}^2_{14}(X)$。反过来则由 G_2-瞬子的定义直接得到。

给定 L 上的两个 G_2-瞬子 A_1 和 A_2，它们的差 $a=A_1-A_0\in\Omega^1(X;i\mathbb{R})$ 是闭的，因为它们的曲率形式与 $-2\pi i\omega_\phi$ 相同。规范群单位连通分支中的任意酉规范变换都具有 $u=e^\xi$ 这种形式，其中 $\xi\in\Omega^0(X;i\mathbb{R})$。由于 $e^\xi\cdot A=A-d\xi$，可知在单位连通分支中的规范变换作用下， G_2-瞬子可与 $H^1(X;i\mathbb{R})$ 等同。转到轨形 X 的分类空间后，可知酉规范群的连通分支与 $H^1_{\mathrm{orb}}(X;\mathbb{Z})$ 等同。于是，只需像在流形情形中那样，将规范群不同连通分支中元素的作用与 $H^1_{\mathrm{orb}}(X;\mathbb{Z})$ 在 $H^1_{\mathrm{orb}}(X;\mathbb{R})$ 上的作用对应起来，即可得到结论。□

根据我们对线丛上可约 G_2-瞬子的了解，可以得到高秩酉丛上可约射影 G_2-瞬子存在的一个必要条件，这与 ASD 瞬子的情形类似 [Kro05，命题 2.3]。

引理 3.10。 设 $P^\dagger$ 是一个在轨形 (r) 上的主 U-丛，轨形为 (X,ϕ)。记 $\omega_\phi^\dagger\in\mathcal{H}^2(X)$ 为 $c_1(\det P^\dagger)$ 的调和代表元。假设 $P^\dagger$ 存在一个可约射影 G_2-瞬子。那么可以找到一个整数 $r'\in(0,r)$ 以及一个整调和类 $\omega\in\mathcal{H}^2(X)$，使得

$$\omega-\frac{r'}{r}\omega_\phi^\dagger\in\mathcal{H}^2_{14}(X).$$

证明。 论证与 [Kro05，命题 2.3] 完全类似。设 $A^\dagger$是 $P^\dagger$上一个可约的射影 G_2-瞬子。于是 $A^\dagger$将 $P^\dagger$的结构群约化为某些满足 $r_1+r_2=r$ 的整数 r_1、 r_2所对应的 $U(r_1)\times U(r_2)$；也就是说，可以找到一个形如 $Q^\dagger=P_1^\dagger\times_X P_2^\dagger$ 的子丛 $Q^\dagger\subset P^\dagger$，其中 $P_i^\dagger$是一个主 $U(r_i)$-丛

在 X 上。联络 $A^\dagger$ 相应地分解为 $A_1^\dagger \oplus A_2^\dagger$。记 $\theta_i = \det A_i^\dagger$ 为行列式线丛上的诱导联络。相应的曲率由迹 $F_{\theta_i} = \operatorname{tr} F_{A_i^\dagger}$. 给出。我们也记 $\theta = \det A^\dagger$。由于 $A^\dagger = A_1^\dagger \oplus A_2^\dagger$ 是一个射影 G_2-瞬子，因此我们得出

$$\left(F_{A_i^\dagger} - \frac{1}{r_i}\operatorname{tr} F_{A_i^\dagger} \otimes \mathrm{id}\right) \wedge \psi = 0.$$

对于 $A^\dagger$，同样的公式也成立。由此公式，我们得到

$$\pi_7\left(\operatorname{tr}(F_{A^\dagger})/r\right) = \pi_7\left(\operatorname{tr}(F_{A_1^\dagger})/r_1\right) = \pi_7\left(\operatorname{tr}(F_{A_2^\dagger})/r_2\right).$$

特别地，我们得到

$$\left(F_{\theta_1} - \frac{r_1}{r}F_\theta\right) \wedge \psi = 0.$$

现在，取 ω 为 $c_1(P_1^\dagger)$ 和 $r' = r_1$ 的调和代表，由陈–外尔同态即可得到结论。□

通常，引理 3.10 对于避免可约的 G_2-瞬子并没有太大帮助，这一点不同于反自对偶瞬子的情形。因为任何一个无挠 G_2 流形 (M, ϕ)，其全纯群若与 G_2 重合，则有 $b_1(M) = 0$。在这种情况下，引理 3.10 所施加的必要条件自动成立。然而，当全纯群是 G_2 的真子群时，确实可以利用引理 3.10 来避免可约情形。由于我们主要研究平坦联络，因此只需对 $P^\dagger$ 施加拓扑假设，就可以避免可约情形。

定义 3.11。 $P^\dagger$ 上的主 $U(r)$-丛称为容许的，如果其定义在轨形 (X, ϕ) 上，其中 G_2，并且

(1) $(r-1)c_1^2(P^\dagger) - 2rc_2(P^\dagger) = 0 \in H^4_{\mathrm{orb}}(X;\mathbb{Z})$。(2) 存在 $\lambda \in H_2^{\mathrm{orb}}(X;\mathbb{Z})$，使得 $\langle c_1(\det P^\dagger)\ \lambda\rangle$ 与 r 互素。

推论 3.12。 设 $P^\dagger$ 是一个定义在 G_2-轨形 (X, ϕ) 上的容许主 $U(r)$-丛。那么 $P^\dagger$ 不存在任何可约的射影 G_2-瞬子。

证明。 设 $A^\dagger$ 是定义在 $P^\dagger$ 上的射影 G_2-瞬子， A 是相应的联络，定义在伴随 $PU(r)$-丛 P 上。(3.4) 告诉我们 $\|F_A\|_{L^2}^2 = 4\pi^2/r\langle p_1(\mathfrak{g}_P) \smile [\phi], [X]\rangle$。由于 $p_1(\mathfrak{g}_P) = (r-1)c_1^2(P^\dagger) - 2rc_2(P^\dagger)$，我们得出 $F_A = 0$。因此 $A^\dagger$ 是射影平坦的。

假设 $A^\dagger$ 分解为 $A^\dagger = A_1^\dagger \oplus A_2^\dagger$。引理 3.10 的论证表明 $F_{\theta_1} - r_1/rF_\theta = 0$。特别地，陈–外尔同态表明 $r_1/rc_1(\det P^\dagger)$ 是一个整类。这与以下事实矛盾：对于任意 $\lambda \in H_2^{\mathrm{orb}}(X;\mathbb{Z})$， $\langle c_1(\det P^\dagger)\ \lambda\rangle$ 都与 r 互素，因为我们可以选取 $\lambda \in H_2^{\mathrm{orb}}(X;\mathbb{Z})$，使得 λ 与 $r_1/r \cdot c_1(\det P^\dagger)$ 之间的配对是一个非零整数。□

3.4. **简单情形下的定向**。

模空间 $\mathcal{M}_\phi(X, P^\dagger)$ 的可定向性问题已由 Donaldson– Segal [DS11] 和 Walpuski [Wal13] 在流形情形下解决。最近，Joyce–Upmeier [JU21]建立了一种为模空间定向进行规范指定的方法，其额外输入称为“旗结构”。我们不打算将这一结果全面推广到 G_2-轨形，而是研究简单 G_2-轨形的可定向性。

记 Ind $L_A := \ker L_A \otimes (\operatorname{coker} L_A)^*$，并记 Ind $\mathbb{L}$! A_k 为这样一个向量丛：其在 A 处的纤维为 $\operatorname{Ind} L_A$。规范群 G_{k+1} 通过将作用 $u\omega u^{-1}$扩展到 $\mathfrak{g}_P$值形式 ω上，从而作用于 Ind L_A。

命题 3.13. 设 (X, ϕ) 为一个简单的 G_2-轨形，且 $P^\dagger \to X$ 为一个 $U(r)$-丛，其中 $r = 2$ 或 $c_1(P^\dagger)$ 为偶数。则 $\mathcal{G}_{k+1}$ 在 $\det \operatorname{Ind} \mathbb{L}$上的作用是平凡的。

注意，命题 3.13 蕴含 $\mathcal{M}_\phi(X, P^\dagger)$ 是可定向的。正则不可约联络的切空间 $T_{[A]}\mathcal{M}$ 可识别为 $H^1(E_A(X))$，其行列式可识别为 $\det E_A(X)$。利用 $\mathfrak{g}_P$值形式上的度量，还可以将 $\det E_A(X) \simeq \det \operatorname{Ind} L_A$典范地识别。由于 A_k 是可缩的，我们知道 $\det \operatorname{Ind} \mathbb{L}$ 是平凡的。G_{k+1}作用的平凡性表明，丛 $\det \operatorname{Ind} \mathbb{L}$下降为 $\mathsf{A}_k/\mathsf{G}_{k+1}$上的平凡丛；在正则情形下，它限制为 $\mathcal{M}_\phi(X, P^\dagger)$ 的定向线丛。

推论 3.14. 设 (X, ϕ) 是一个简单的 G_2-轨形，且 $P^\dagger \to X$ 是一个 $U(r)$-丛，其中 $r = 2$ 或 $c_1(P^\dagger)$ 为偶数。假设不可约模空间 $\mathcal{M}^*_\phi(X, P^\dagger)$ 是正则的。那么 $\mathcal{M}^*_\phi(X, P^\dagger)$ 是可定向的。

命题 3.13 的证明是 Atiyah–Singer 指标理论的标准应用。为建立这一理论框架，我们将 P_u 写为 $S^1 \times X$ 上的丛，它是通过规范变换 $u \in \mathsf{G}_{k+1}$ 将 $[0, 1] \times P$ 的边界粘合而得到的。给定 $A \in \mathsf{A}_k$，我们选取一条光滑路径 $(A_t)_{t\in[0,1]}$，满足 $A_0 = A$ 和 $A_1 = u \cdot A$。于是得到一个作用于 $\mathfrak{g}_{P_u}$ 值 $S^1 \times X$ 形式上的椭圆算子：

$$S_u(A) := \frac{d}{dt} + L_{A_t} : L^2_k(S^1 \times X, (\Lambda^0 \oplus \Lambda^1) \otimes \mathfrak{g}_{P_u}) \longrightarrow L^2_{k-1}(S^1 \times X, (\Lambda^0 \oplus \Lambda^1) \otimes \mathfrak{g}_{P_u}).$$

根据 Atiyah–Patodi–Singer [APS76] 理论，指标可与谱流 $\operatorname{ind} S_u(A) = \operatorname{Sf}(L_{A_t})$ 联系起来；后者与路径 (A_t) 的选择无关。此外，u 作用在 $\det \operatorname{Ind} \mathbb{L}$ 上的权重由 $(-1)^{\operatorname{Sf}(L_{A_t})}$ 给出。因此，命题 3.13 的证明归结为以下论断。

引理 3.15. 在命题 *3.13* 的假设下，我们知道对于所有 $A \in \mathscr{A}_k$ 和 $u \in \mathcal{G}_{k+1}$，指标 $S_u(A)$ 均为偶数。

证明。 G_2结构 ϕ 确定了 $S^1 \times X$上的自旋结构 $\mathfrak{s}$。如[Wal13], 中所述， $S_u(A)$的主符号与 $\mathfrak{s}$上由$\mathfrak{g}_{P_u}$扭曲的狄拉克算子 $D_{\mathbb{A}}$ 的主符号对偶，其中 $\mathbb{A} = d/dt + A_t$ 是$\mathfrak{g}_{P_u}$上的诱导联络。为计算 $D_{\mathbb{A}}(\mathfrak{g}_{P_u})$的指标，我们使用了 [Kaw81]中的阿蒂亚–辛格指标定理的轨形推广。

暂且记作 $Y = S^1 \times X$。对于每个 $y \in Y$，各向同性群为 $G_y = \mathbb{Z}/2$ 或 V_4，其中 V_4 是克莱因四元群。具体地，记 $\mathbb{Z}/2 = \{1, -1\}$ 和 $V_4 = \{1, a, b, ab\}$，其中 $a = (-1, 1)$ 且 $b = (1, -1)$。我们考虑修正后的奇异集：

$$\Sigma_I := \{(y, -1) \in Y \times \mathbb{Z}/2 : G_y = \mathbb{Z}/2\}, \quad \Sigma_V := \{(y, g) \in Y \times V_4 : G_y = V_4,\ g \neq 1\}.$$

这些奇异集拼接成一个非有效轨形 $\Sigma_Y := \Sigma_I \sqcup_\sim \Sigma_V$，其中 $(y, -1) \sim (y, g)$ 当且仅当存在一个轨形图的包含映射 $(U_y, G_y) \hookrightarrow (U_{y'}, G_{y'})$，将 $-1 \in G_y$ 映到 $g \in G_{y'}$。为了解 Σ_Y 上的轨形结构，我们将 $\tilde{U}_y^g$ 记为 $\tilde{U}_y$ 的 g-不变子集。于是，Σ_Y 上的轨形图册由 $\{(\tilde{U}_y^g, G_y) : y \in Y, g \neq 1 \in G_y\}$ 给出。注意，当 g 非平凡时，$\tilde{U}_y^g$ 是一个维数为 2 或 4 的开球。因此，我们可以将 $\Sigma_Y = \Sigma_Y^{(2)} \cup \Sigma_Y^{(4)}$ 写成由 2 维和 4 维连通分支组成的不交并。我们还需要考虑 Σ_Y 的法丛 $N(\Sigma_Y)$，其局部形式为 $(\tilde{U}_y / \tilde{U}_y^g, G_y) \hookrightarrow (\tilde{U}_y^g, G_y)$。特别地，$g$ 通过 -1 倍作用于纤维 $N(\Sigma_Y)|_{(y,g)}$。

根据上述设置，Atiyah–Singer 指标定理的轨形版本 [Kaw81] 告诉我们

$$\begin{aligned}
\operatorname{ind} D_{\mathbb{A}}(\mathfrak{g}_{P_u}) &= \int_Y \operatorname{ch}(\mathfrak{g}_{P_u}^{\mathbb{C}}) \hat{A}(Y) + \frac{1}{2} \int_{\Sigma_Y^{(4)}} \operatorname{ch}(\mathfrak{g}_{P_u}^{\mathbb{C}}) \hat{A}_\pi(N(\Sigma_Y^{(4)})) \hat{A}(\Sigma_Y^{(4)}) \\
&\quad + \frac{1}{4} \int_{\Sigma_Y^{(2)}} \operatorname{ch}(\mathfrak{g}_{P_u}^{\mathbb{C}}) \hat{A}_\pi(N(\Sigma_Y^{(2)})) \hat{A}(\Sigma_Y^{(2)}) \\
&=: I_1(\mathfrak{g}_{P_u}^{\mathbb{C}}) + I_2(\mathfrak{g}_{P_u}^{\mathbb{C}}) + I_3(\mathfrak{g}_{P_u}^{\mathbb{C}}),
\end{aligned}$$

其中 $\mathfrak{g}_{P_u}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_{P_u} \otimes \mathbb{C}$，而 $\hat{A}_\pi$ 是 [LM89，第 267] 页中的扭曲 $\hat{A}$ 类。

$\mathfrak{g}_{P_u}^{\mathbb{C}}$ 的陈特征可按如下方式计算。伴随同态的微分给出一个同构 $\mathrm{ad} : \mathfrak{su}(r) \hookrightarrow \mathfrak{pu}(r)$。因此，我们可以将 $\mathfrak{g}_{P_u} = \mathfrak{su}(P_u^\dagger)$ 识别为……此外，$\mathrm{End}(P_u^\dagger) = \mathfrak{su}(P_u^\dagger) \otimes \mathbb{C} \oplus \underline{\mathbb{C}}$。舍去次数大于 8 的项后，我们可以计算

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}(P_u^\dagger) &= r + s_1 + \frac{1}{2} s_2 + \frac{1}{6} s_3 + \frac{1}{24} s_4 \\
&= r + c_1 + \frac{1}{2}(c_1^2 - 2c_2) + \frac{1}{6}(c_1^3 - 3c_2 c_1 + 3c_3) \\
&\quad + \frac{1}{24}(c_1^4 - 4c_2 c_1^2 + 4c_3 c_1 + 2c_2^2 - 4c_4),
\end{aligned}$$

其中 s_i 是将第 i 个幂和表示为初等对称多项式的多项式，其输入为 $P_u^\dagger$ 的陈类 c_i。因此，

$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_{P_u}$ 的陈特征为

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_{P_u}) &= \mathrm{ch}(\mathrm{End}(P_u^\dagger)) - 1 = \mathrm{ch}(P_u^\dagger)\,\mathrm{ch}(P_u^{\dagger,*}) - 1\\ &= \left(r + s_1 + \frac{1}{2}s_2 + \frac{1}{6}s_3 + \frac{1}{24}s_4\right)\left(r - s_1 + \frac{1}{2}s_2 - \frac{1}{6}s_3 + \frac{1}{24}s_4\right) - 1\\ &= r^2 - 1 + rs_2 - s_1^2 + \frac{rs_4}{12} - \frac{s_1s_3}{3} + \frac{s_2^2}{4}\\ &= r^2 - 1 + (r-1)c_1^2 - 2rc_2\\ &+ \frac{1}{12}\left((r-1)c_1^4 - 4rc_2c_1^2 + (4r-12)c_3c_1 + (2r+12)c_2^2 - 4rc_4\right).\end{aligned}$$

注意， $Y = S^1 \times X$ 是与圆的乘积。因此，直到八次，$\hat{}A$-类 $\hat{}$ 由 $A = 1 - p_1/24$ 给出，其中 $p_1 := p_1(Y)$。注意，法丛 $N(\Sigma_Y)$ 是从相应构造的奇异集 $\Sigma_X\hat{}$ 的法丛拉回的，其连通分支的维数为 1 或 3。直到三次， $A_\pi = \pm 1$，其中符号可参照 [AB68] 推导。

由于 $\det u = \mathrm{id}$，我们知道

$$c_1(P_u^\dagger) = c_1(\det P_u^\dagger) = \pi^* c_1(\det P^\dagger) = \pi^* c_1(P^\dagger),$$

其中 $\pi\colon S^1 \times X ! X$ 是投影。因此，根据维数计数，我们知道

$$\int_Y c_1^4 = 0 \qquad \int_Y c_1^2 \cdot p_1 = 0 \qquad \int_{\Sigma_Y^{(4)}} c_1^2 = 0 \qquad \int_{\Sigma_Y^{(2)}} c_1 = 0.$$

现在我们可以计算

$$\begin{aligned}I_1(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_{P_u}) &= \frac{1}{12}\int_Y rc_2 \cdot p_1 + \frac{1}{6}\int_Y -2rc_2c_1^2 + (2r-6)c_3c_1 + (r+6)c_2^2 - 2rc_4\\ I_2(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_{P_u}) + I_3(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_{P_u}) &= \pm\int_{\Sigma_Y^{(4)}} rc_2.\end{aligned}$$

我们可以用 $P^\dagger$ 扭转 Y 的自旋丛，并得到相应的项:

$$\begin{aligned}I_1(P^\dagger) &= \frac{1}{24}\int_Y c_2 \cdot p_1 + \frac{1}{12}\int_Y -2c_2c_1^2 + 2c_3c_1 + c_2^2 - 2c_4\\ I_2(P^\dagger) + I_3(P^\dagger) &= \pm\frac{1}{2}\int_{\Sigma_Y^{(4)}} c_2.\end{aligned}$$

上述计算告诉我们

$$\mathrm{ind}\, D_{\mathbb{A}}(\mathfrak{g}_{P_u}) - (12+2r)\,\mathrm{ind}\, D_{\mathbb{A}}(P^\dagger) \equiv -\frac{1}{2}\int_Y c_2 \cdot p_1 - 3\int_Y c_3 \cdot c_1 \mod 2.$$

由于 Y 具有自旋结构，我们知道 $p_1(Y)$ 可被四整除。因此我们得出结论:

$$\mathrm{ind}\, D_{\mathbb{A}}(\mathfrak{g}_{P_u}) \equiv \int_Y c_3(P_u^\dagger) \cdot \pi^* c_1(P^\dagger) \mod 2$$

因此，当秩$(P^\dagger) = 2$或 $c_1(P^\dagger)$为偶数时，我们知道 ind $D_{\mathbb{A}}(\mathfrak{g}_{P_u})$为偶数。 □

注 3.16. 最后一个乘积项 c_3c_1 在流形情形下也会出现，前提是考虑 $U(r)$-丛。Joyce–Upmeier [JU21, 定理 1.2] 借助嵌入 $U(r) \hookrightarrow SU(r+1)$证明了$U(r)$-丛的可定向性。因此，至少在流形情形下， c_3c_1必须是偶数，尽管我们并不知道这样做有什么充分理由。

4. 扰动与横截性

为实现维数为 4 [Don87]时反自对偶联络的横截性，以及维数为 3 [Flo88]时平坦联络的横截性，人们已构造了整体扰动。在本节中，我们论证， G_2-瞬子不可约层的横截性也可以通过整体扰动实现。

4.1. 整体扰动。

设 $P^\dagger$ 是一个位于 G_2-轨形（X, ϕ）上的 $U(r)$-丛。假设我们有一个由光滑浸入 $\rho_i\colon S^1 \times D^6 \to X$ 构成的 l-元组 $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, ..., \rho_l)$，满足

$$\rho_i(s,x) = \rho_j(s,x), \quad \text{for all } s \in [-\epsilon, \epsilon],\ x \in D^6 \tag{4.1}$$

其中， s 是 S^1 的参数，表示 $e^{i2\pi s}$，而 $\epsilon > 0$ 是一个小常数。记 $\rho_x\colon S^1 \to X$ 为以 $\rho(0,x)$ 为基点、由 $\rho(-,x)$ 给出的轨形环路。设 $\eta\colon U(r)^l \to \mathbb{R}$ 是一个在对角 $SU(2)$ 伴随作用下不变的光滑函数，并设 $\nu \in \Omega^2(D^6)$ 是一个支撑于 D^6 中心附近的非负 2-形式，使得 $\int_{D^6} \nu = 1$。

定义 4.1. 给定上述的 $(\boldsymbol{\rho}, \eta, \nu)$，我们定义

$$\begin{aligned} \tau_{\boldsymbol{\rho},\eta} : \mathscr{A}_k &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A &\longmapsto \int_{D^6} \eta\left(\mathrm{Hol}_{\rho_1,x}(A^\dagger), ..., \mathrm{Hol}_{\rho_l,x}(A^\dagger)\right)\nu \end{aligned}$$

为 A_k 上相应的柱函数。

现在我们推导函数 $\tau_{\boldsymbol{\rho},\eta}$ 的形式梯度。将函数 η 对 i 的偏导数记为 $\partial_i\eta\colon U(r)^l \to \mathfrak{u}(r)^*$，它是将 $d\eta$ 限制到 $T^*U(r)^l$ 的第 i 个因子 $T^*U(r) \simeq \mathfrak{u}^*(r)$ 上所得的结果。由于要求 $\rho_i(0,x) = \rho_j(0,x)$，因此记作 $\mathrm{Hol}_{\boldsymbol{\rho},x}(A^\dagger) := \left(\mathrm{Hol}_{\rho_1,x}(A^\dagger) ..., \mathrm{Hol}_{\rho_l,x}(A^\dagger)\right)$ 并无歧义。于是，柱函数 $\tau_{\boldsymbol{\rho},\eta}$ 的微分具有如下形式

$$d\tau_{\boldsymbol{\rho},\eta}|_A(a) = \sum_{i=1}^{l} \int_{D^6} \partial_i\eta|_{\mathrm{Hol}_{\boldsymbol{\rho},x}(A^\dagger)} \left(-\int_0^1 (\rho_i^* a)(s) ds \cdot \mathrm{Hol}_{\rho_i,x}(A^\dagger)\right)\nu, \quad a \in \Omega^1(X, \mathfrak{g}_P). \tag{4.2}$$

注意， $\mathfrak{u}(r) = \mathfrak{su}(r) \oplus i\mathbb{R}$。我们可以将 $\partial_i\eta$ 与 $\mathfrak{u}(r)^*$ 在 $\mathfrak{su}(r)^*$上的限制复合，并通过 Killing 型将 $\mathfrak{su}(r)^*$ 与 $\mathfrak{su}(r)$识别。所得算子记为 $(\partial_i\eta)^0_\dagger\colon U(r)^l \to \mathfrak{su}(r)$。 η的共轭不变性意味着 $(\partial_i\eta)^0_\dagger(\mathrm{Hol}_{\boldsymbol{\rho}}(A^\dagger))$ 是 $\rho_i^*\mathfrak{g}_P$在 $\{0\} \times D^6$上的一个截面。通过沿着 S^1-因子对 $A^\dagger$ 作平行移动，该截面可以延拓为 $S^1 \times D^6$上的一个截面；它在$\{0\} \times D^6$ 上可能会出现不连续，跳跃由 $\mathrm{Hol}_{\rho_i,\ x}(A^\dagger)$-共轭给出。暂且将 H_i记作

这个 $\rho_i^*\mathfrak{g}_P$在 $S^1\times D^6$ 上的延拓截面（沿用 [KM11 第 876] 页的记号）。由此，根据 (4.2)，$\tau_{\boldsymbol{\rho},\eta}$、$\eta$ 的梯度为

$$\operatorname{grad}\tau_{\boldsymbol{\rho},\eta}=\star_\phi\left(\sum_{i=1}^{l}(\rho_i)_*(H_i\otimes\nu)\right). \tag{4.3}$$

尽管每一项单独的 $(\rho_i)_*(H_i\otimes\nu)$ 在 $\{0\}\times D^6$ 处可能是不连续的，但 η 的对角共轭不变性意味着 (4.3) 右端的和至少是连续的。实际上，我们可以对柱函数的梯度得到更强的估计。

引理 4.2。设 τ 是上述柱函数，且 $a=A^\dagger-A_0^\dagger\in L^2_k(X,\Lambda^1\otimes\mathfrak{su}(2))$ 是一般联络 $A^\dagger\in\mathscr{A}_k$ 的联络形式。则有如下估计。

(1) 存在一个常数 K_0，使得

$$\|\operatorname{grad}\tau|_{A^\dagger}\|_{C^0}\le K_0.$$

(2) 对于每个 $1\le j\le k$，存在一个常数 K_j，使得

$$\|\operatorname{grad}\tau|_{A^\dagger}\|_{L^2_j}\le K_j\left(1+\|a\|^j_{L^2_j}\right).$$

(3) 对于每个正整数 $n\ge 1$ 和 $0\le j\le k$，存在一个常数 $K_{n,\,j}$ 使得

$$\|D^n\operatorname{grad}\tau|_{A^\dagger}(a_1,...,a_n)\|_{L^2_j}\le K_{n,j}\left(1+\|a\|^j_{L^2_j}\right)\prod_{i=1}^{n}\|a_i\|_{L^2_j}.$$

以上出现的所有常数都与联络 $A^\dagger$ 无关。

证明。为简便起见，我们考虑只有一个光滑浸入ρ 的情形： $S^1\times D^6$ ！ X。一般情形的论证几乎完全相同，只是记号会更复杂。现在假设柱函数具有如下形式： $\tau(A)=\int_{D^6}\eta(\mathrm{Hol}_{\rho,\,x}(A^\dagger))\nu$，使得

$$\operatorname{grad}\tau=\star_\phi\rho_*(H\otimes\nu).$$

记 $A^c=\rho^*A^\dagger$ 和 $A_0^c=\rho^*A_0^\dagger$ 为 $S^1\times D^6$ 上的拉回联络， $a^c=A^c-A_0^c$ 为相应的联络形式。我们还可以将 $a^c=b(s)+\beta(s)ds$ 分解，其中 $b(s)$ 是 D^6 上取值于 $\mathfrak{su}(2)$ 的 1-形式的 S^1-族，而 $\beta(s)$ 是取值于 $\mathfrak{su}(2)$ 的 0-形式的S^1-族。

(1) 由于李群 $U(r)$ 是紧致的，我们知道 $(d\eta)^0_\dagger(\mathrm{Hol}_\rho(A^\dagger))$ 在C^0 中有界，其界为一个与 $A^\dagger$ 无关的常数。注意，截面 H 是由 $(d\eta)^0_\dagger(\mathrm{Hol}_\rho(A^\dagger))$ 沿 $S^1\times D^6$ 的 S^1 方向平行移动得到的。由于 S^1 上的 $U(r)$-联络空间模规范变换后是紧致的，规范不变截面 $(d\eta)^0_\dagger(\mathrm{Hol}_\rho(A^\dagger))$ 因而给出了 H 的一致 C^0 界。

（2）陈述中的常数都依赖于参考联络 $A_0^\dagger$。因此，为简化记号，我们可以假设 $\rho^*A_0^\dagger$ 是 $S^1\times D^6$ 上的平凡联络。于是

我们知道 $\mathrm{Hol}_\rho(A^\dagger) = \exp(-\int_0^1 \beta(s)ds)$。根据 H 的构造以及 η的规范不变性，我们知道

$$\begin{aligned} H|_{(s,x)} &= \exp(-\int_0^s \beta(t)dt)\cdot(d\eta)^0_\dagger(\mathrm{Hol}_{\rho,x}(A^\dagger))\cdot\exp(\int_0^s \beta(t)dt) \\ &= (d\eta)^0_\dagger\left(\exp(-\int_0^s \beta(t)dt)\cdot\exp(-\int_0^1 \beta(s)ds)\cdot\exp(\int_0^1 \beta(s)ds)\right). \end{aligned} \tag{4.4}$$

因此， H 沿 S^1方向的导数涉及对$(d\eta)^0_\dagger$ 的导数与各项之间乘积的复合

$$\partial_s^i\beta(s),\quad \exp(-\int_0^s \beta(t)dt),\quad \exp(\int_0^1 \beta(s)ds), \tag{4.5}$$

其中， ∂_s^i 表示沿 S^1方向取 i阶导数。H 沿 D^6方向的导数涉及对$(d\eta)^0_\dagger$ 的导数与各项之间乘积的复合

$$\int_0^s \nabla_x^i\beta(t)dt,\quad \int_0^1 \nabla_x^k\beta(t)dt,\quad \exp(-\int_0^s \beta(t)dt),\quad \exp(\int_0^1 \beta(s)ds), \tag{4.6}$$

其中， ∇_x^i 表示沿 D^6方向取 i阶导数。回想一下， $a^c = \rho^* A^\dagger - \rho^* A_0^\dagger$ 是 $S^1\times D^6$上的联络形式。显然,

$$\|\partial_s^i\beta(s)\|_{L^2(S^1\times D^6)} \le const.\|a^c\|_{L^2_i(S^1\times D^6)}$$

对于 $\int_0^s \nabla_x^i\beta(t)dt$的 L^2范数，我们先应用分部积分，得到以下估计:

$$\begin{aligned} \int_0^1\left|\int_0^s \nabla_x^i\beta(t)dt\right|^2 ds &\le \int_0^1 s\int_0^s |\nabla_x^i\beta(t)|^2 dtds \\ &\le \frac{1}{2}\left(\int_0^1 |\nabla_x^i\beta(t)|^2dt - \int_0^1 s|\nabla_x^i\beta(s)|^2ds\right) \\ &\le \int_0^1 |\nabla_x^i\beta(t)|^2dt. \end{aligned} \tag{4.7}$$

因此我们得出

$$\left\|\int_0^s \nabla_x^i\beta(t)dt\right\|_{L^2(S^1\times D^6)} \le \|\nabla_x^u\beta(s)\|_{L^2(S^1\times D^6)} \le const.\|a^c\|_{L^2_i(S^1\times D^6)}. \tag{4.8}$$

由于 H 的 j 阶导数由 $(d\eta)^0_\dagger$ 的导数与 (4.5) 和 (4.6) 中各项乘积复合而成，且每个乘积中导数的总阶数均为 j，因此我们得出

$$\|H\|_{L^2(S^1\times D^6)} \le const.\left(1+\|a^c\|^j_{L^2_j(S^1\times D^6)}\right),$$

这进一步推出了所声称的估计

$$\| \star_\phi \rho_*(H \otimes \nu)\|_{L^2_j} \leq const. \left(1 + \|a\|^j_{L^2_j}\right).$$

(3) 一旦知道了 (4.4) 中 H 的表达式，证明就几乎与 Ma20 的命题 3.2| 相同。唯一的区别来自 exp($\int_0^s \beta(t)dt$) 的伴随作用，而在 Ma20 的命题 3.2| 中，无需进一步进行平行移动。利用上面的论证和估计 (4.7)，即可处理这一额外的复杂性。□

引理 4.2 告诉我们，柱函数的梯度定义了一个映射

$$\operatorname{grad}\tau : \mathscr{A}_k \longrightarrow L^2_k(X, \Lambda^1 \otimes \mathfrak{g}_P).$$

此外，根据引理 4.2 的 (3)，该映射是光滑的。现在我们可以着手构造一个扰动的巴拿赫空间。

定义 4.3。 固定一个满足以下假设的可数柱函数族 $\boldsymbol{\tau} = \{\tau\}_{\alpha\in\mathbb{N}}$。

(1) 对于每个整数 $l > 0$，都可以找到一个由 l 元组组成的子族，其中的光滑浸入 $\{\boldsymbol{\rho}_\alpha\}$ 与 $\{\tau_\alpha\}$ 相关；该子族在 C^1 拓扑下，在满足 (4.1) 的所有 l 元组光滑浸入构成的空间中稠密。(2) 对于每个整数 $l > 0$，都可以找到一个光滑 $SU(2)$-不变函数子族 $\eta_\alpha : U(r)^l ! \mathbb{R}$，与 τ_α 相关；该子族在 C^∞ 拓扑下，在 $U(r)^l$ 上所有光滑 $SU(2)$-不变函数构成的空间中稠密。

然后我们固定 $C_\alpha := \sup\{K_{i,\alpha} : 0 \leq i \leq \alpha\}$，其中$K_{i,\ \alpha}$ 是与柱函数 τ_α相关的引理 4.2 中出现的常数。我们定义

$$\mathscr{P} := \left\{ \boldsymbol{\pi} = \{\pi_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}} : \pi_\alpha \in \mathbb{R},\ \sum_\alpha C_\alpha|\pi_\alpha| < \infty \right\}$$

为有限范数 $\|\boldsymbol{\pi}\| := \sum_\alpha C_\alpha|\pi_\alpha|$的序列空间 $\boldsymbol{\pi} = \{\pi_\alpha\}$。我们称 P 为整体扰动空间。

由于 P 的构造，总和 $\tau_{\boldsymbol{\pi}} := \sum_\alpha \pi_\alpha\tau_\alpha$ 在 A_k上定义了一个光滑函数，我们用它来扰动陈–西蒙斯泛函 cs_ϕ:

$$\mathrm{cs}_{\phi,\boldsymbol{\pi}} := \mathrm{cs}_\phi + \tau_{\boldsymbol{\pi}} : \mathscr{A}_k \to \mathbb{R}.$$

于是我们将受扰动的 G_2-瞬子方程定义为受扰动泛函的梯度为零的方程:

$$\operatorname{grad}\mathrm{cs}_{\phi,\boldsymbol{\pi}}(A) = 0 \Longleftrightarrow F_A \wedge \psi + \sigma_{\boldsymbol{\pi}}(A) = 0, \tag{4.9}$$

其中 $\sigma_{\boldsymbol{\pi}}(A) = \sum_\alpha \pi_\alpha \left(\sum_{i=1}^{l_\alpha} (\rho_{\alpha,\ i})_*(H_{\alpha,\ i} \otimes \nu)\right)$ 其中 $\boldsymbol{\rho}_\alpha = (\rho_{\alpha,\ 1},\ \ldots,\ \rho_{\alpha,\ l_\alpha})$。

4.2. **横截性**。

在本小节中，我们建立扰动不可约 G_2-瞬子的模空间的横截性。沿用 [KM07], 中的记号，我们用 $\mathcal{T}_j$ 表示按 $j \leq k$ 的 L_j^2-范数完备化后的 A_k 的切丛，并将其识别为 $\mathsf{A}_k \times L_j^2(X, \Lambda^1 \otimes \mathfrak{g}_P)$。规范群 G_{k+1} 的无穷小作用将切丛分解为两部分:

$$\mathcal{T}_j := \mathcal{J}_j \oplus \mathcal{K}_j, \tag{4.10}$$

其中 $\mathcal{J}_j|_A = \mathsf{im}\ d_A$是规范轨道在 A处的 L_j^2-切空间，而 $\mathcal{K}_j|_A = \ker d_A^*$是其 L^2-正交补。$\mathsf{cs}_{\phi,\boldsymbol{\pi}}$ 的局部规范不变量表明，其梯度 $\mathsf{grad}\ \mathsf{cs}_{\phi,\boldsymbol{\pi}}$是 $\mathcal{K}_{k-1}$的一个截面。也可以直接通过写出 $\mathsf{grad}\ \mathsf{cs}_{\phi,\boldsymbol{\pi}}(A) = \star_\phi(F_A \wedge \psi + \sigma_{\boldsymbol{\pi}}(A))$ 并计算 $d_A\sigma_{\boldsymbol{\pi}}(A) = 0$来论证。

我们考虑光滑映射

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathscr{P} \times \mathscr{A}_k^* &\longrightarrow \mathcal{K}_{k-1} \\ (\boldsymbol{\pi}, A) &\longmapsto \operatorname{grad} \mathrm{cs}_{\phi,\boldsymbol{\pi}}(A) \end{aligned} \tag{4.11}$$

横截性问题的核心是证明映射 $\mathcal{F}$ 与 $\mathcal{K}_{k-1}$的零截面横截。为此，我们引入海森矩阵

$$\begin{aligned} \mathrm{Hess}_{A,\boldsymbol{\pi}} : \mathcal{K}_k &\longrightarrow \mathcal{K}_{k-1} \\ a &\longmapsto \Pi_{\mathcal{K}}(D \operatorname{grad} \mathrm{cs}_{\phi,\boldsymbol{\pi}}|_A a), \end{aligned} \tag{4.12}$$

其中 $\Pi_{\mathcal{K}}$: $\mathcal{T}_{k-1}$! $\mathcal{K}_{k-1}$ 是纤维上的 L^2-正交投影。当 A 是 $\mathsf{cs}_{\phi,\boldsymbol{\pi}}$的临界点时，根据 [KM07, 命题 12.3.1]中的论证可知，$\mathsf{Hess}_{A,\boldsymbol{\pi}}$ 是一个自伴弗雷德霍姆映射。

引理 4.4. 在(4.11) 中定义的映射 $\mathcal{F}$ 与 $\mathcal{K}_{k-1}$的零截面横截。

证明。 设 $(\boldsymbol{\pi}, A) \in \mathcal{F}^{-1}(0)$ 是零点集中的一个元素。 $\mathcal{F}$在 $(\boldsymbol{\pi}, A)$ 处的导数为

$$D\mathcal{F}|_{(\boldsymbol{\pi},A)}(\boldsymbol{o}, a) = \mathrm{Hess}_{A,\boldsymbol{\pi}}\, a + \star_\phi \sigma_{\boldsymbol{o}}(A), \tag{4.13}$$

其中 $(\boldsymbol{o}, a) \in \mathsf{P} \times \mathcal{K}_k$。由于 $\mathsf{Hess}_{A,\boldsymbol{\pi}}$关于 L^2-内积是自伴的，我们可以将 $\mathsf{Hess}_{A,\boldsymbol{\pi}}$ 的余核识别为 $\ker \mathsf{Hess}_{A,\boldsymbol{\pi}}$。因此，只需证明对每个非零的 $a \in \ker \mathsf{Hess}_{A,\boldsymbol{\pi}}$，都可以找到 $\boldsymbol{o} \in \mathsf{P}$，使得 $\langle a, \star_\phi \sigma_{\boldsymbol{o}}(A) \rangle_{L^2} \neq 0$。

注意， $\star_\phi \sigma_{\boldsymbol{o}}(A) = \mathsf{grad}\ \tau_{\boldsymbol{o}}$。我们看到 $\langle a, \star_\phi \sigma_{\boldsymbol{o}}(A) \rangle_{L^2} = D\tau_{\boldsymbol{o}}|_A(a)$。反设存在一个元素 $a \in \ker \mathsf{Hess}_{A,\boldsymbol{\pi}}$ ，使得对所有 $\boldsymbol{o} \in \mathsf{P}$ 都有 $D\tau_{\boldsymbol{o}}|_A(a) = 0$ 。那么对于足够小的 $A_\epsilon = A + \epsilon a$ ，有

$$\tau_{\boldsymbol{o}}(A) = \tau_{\boldsymbol{o}}(A_\epsilon) \text{ and } [A] \neq [A_\epsilon] \in \mathscr{B}_k^* = \mathscr{A}_k^*/\mathscr{G}_{k+1}.$$

然而，理由如下，这是不可能的。回顾一下， $\tau_{\boldsymbol{o}}(A)$ 中的每一项都具有 $\int_{D^6} \eta_\alpha(\mathrm{Hol}^{\boldsymbol{\rho}_\alpha}(A^\dagger))\nu$ 的形式。由于如定义 4.3 的 (2) 所示，函数 η_α 被选为所有 $SU(2)$-不变量函数空间中的稠密函数，因此对于所有长度为 a 的词 W

固定且足够大的词，例如 L，都有

$$\mathrm{tr}\left(W\left(\prod_{i=1}^{L}\mathrm{Hol}_{\rho_i}(A^\dagger)\right)\right)=\mathrm{tr}\left(W\left(\prod_{i=1}^{L}\mathrm{Hol}_{\rho_i}(A_\epsilon^\dagger)\right)\right)$$

对于所有 L-元组浸入 $\boldsymbol{\rho}=(\rho_1,...,\rho_L)$。接着， [Don02, 引理 5.13] 为我们提供了$g\in U(r)$, 使得 $g\mathrm{Hol}_{\rho_i}(A^\dagger)g^{-1}=\mathrm{Hol}_{\rho_i}(A_\epsilon^\dagger)$。由于 $A^\dagger$和 $A_\epsilon^\dagger$具有相同的行列式，我们知道 $g\in SU(r)$。回顾定义 4.3 中的 (1)，浸入 ρ_i 在光滑浸入空间中稠密。由于 A 和 A_ϵ 均不可约，我们得出 A 和 A_ϵ 规范等价，这就产生了矛盾。□

利用萨德–斯梅尔定理和微分拓扑中的标准横截性论证，引理 4.4 有如下直接推论（参见 [KM07, 引理 12.5.1]）。

推论 4.5. 对于一般扰动 $\boldsymbol{\pi}\in\mathscr{P}$，每个不可约的 $\boldsymbol{\pi}$-扰动 G_2-瞬子都是正则的，其意义见定义 *3.8*。

5. 模空间的紧性

得益于 Uhlenbeck [Uhl82], 的工作，对于一般的丛， G_2-瞬子模空间已知并非紧致。与 4 维中的反自对偶联络不同，由于泡化子集的行为十分复杂，这类模空间的紧化工作仍远未起步。尽管如此，我们仍能证明射影平坦丛上的 G_2-瞬子模空间是紧的。

定理 5.1. 设 $P^\dagger$ 是定义在一个 G_2-轨形(X,ϕ)上的射影平坦主 $U(n)$-丛。存在常数 $\epsilon_0>0$，使得受扰动的 G_2-瞬子模空间 $\mathcal{M}_{\phi,\boldsymbol{\pi}}(X,P^\dagger)$ 对于所有满足 $\|\boldsymbol{\pi}\|<\epsilon_0$ 的 $\boldsymbol{\pi}\in\mathscr{P}$ 均为紧致的。

由于在后文证明中我们将用字母‘r’表示小球的半径，因此本节选择写作 $U(n)$-丛，而不是 $U(r)$-丛，以免混淆。定理 5.1 的证明在高维规范理论中大体上是标准的（参见 [Nak88]）。这里采用的论证是 Simon Donaldson 在厄米–杨–米尔斯联络情形下告知作者的。证明的部分内容也概述于 [Don22]。我们从回顾 [Uhl82] 中的规范固定结果开始。

定理 5.2 ([Uhl82, 定理 1。3])。 设 $\mathbb{B}\subset\mathbb{R}^7$ 为单位球， $p>1$ 为一个指数。存在常数 $\epsilon_1>0$、 $\mathfrak{c}_1>0$，使得每个满足$\|F_A\|_{L^{7/2}(\mathbb{B})}\leq\epsilon_1$ 的平凡$SU(n)$-丛上的酉联络 A，都与一个满足下列条件的联络 $A'=d+a'$规范等价

$$(1)\ d^*a'=0\qquad(2)\ \star a'|_{\partial\mathbb{B}}=0\qquad(3)\ \|a'\|_{L_1^p(\mathbb{B})}\leq\mathfrak{c}_1\|F_A\|_{L^p(\mathbb{B})}$$

回想一下， P是诱导的 $PU(r)$-丛，我们已在其上固定了一个参考联络A_0。设 A是一个满足以下条件的扰动 G_2-瞬子

$$F_A\wedge\psi+\sigma_{\boldsymbol{\pi}}(A)=0$$

其中 $\boldsymbol{\pi} \in$P。因此我们得到

$$\pi_7(F_A) = - \star (\psi \wedge \star \sigma_{\boldsymbol{\pi}}(A)).$$

由 (2.7) 及 P 的可容许性，我们知道 $\|F_A\|_{L^2}^2 = 3\|\pi_7(F_A)\|_{L^2}^2$. 借助扰动的$C^0$ 界，我们得到了 $\|F_A\|_{L^2}$ 和 $\|\pi_7(F_A)\|_{C^0}$ 的先验界。为了应用 Uhlenbeck 的结果定理 5.2，我们需要将这些界提升到$L^{7/2}$ 范数。为此，我们在 X 的球上进行局部研究。

引理 5.3。设 $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^7$ 为配备标准 G_2-结构 ϕ_0 的单位球，$B' \subset \mathbb{B}$ 为一个内球，且 $q \in (0,7)$。存在常数 $\epsilon_2 > 0$、 $\mathfrak{c}_2 > 0$，使得对每个定义在平凡 $SU(r)$-丛上的联络 $A = d + a$，只要满足

$$(1)\ d^* a = 0 \qquad (2)\ \star a|_{\partial \mathbb{B}} = 0 \qquad (3)\ \|a\|_{L_1^{7/2}(\mathbb{B})} \leq \epsilon_2$$

有

$$\|a\|_{L_1^q(B')} \leq \mathfrak{c}_2 \left(\|F_A\|_{L^2(\mathbb{B})} + \|\pi_7(F_A)\|_{L^q(\mathbb{B})} \right).$$

证明。考虑算子 $\delta := d^* \oplus \pi_7 \circ d : \Omega^1(\mathbb{B}, \mathfrak{su}(r)) \to \Omega^0(\mathbb{B}, \mathfrak{su}(r)) \oplus \Omega^2(\mathbb{B}, \mathfrak{su}(r))$。当在非零余向量 $\xi \in T^*\mathbb{R}^7$ 上取值时，该算子的符号为 $a \mapsto (\iota_\xi a, \pi_7(\xi \wedge a))$。利用 $\pi_7(a \wedge \xi) = 0$ and$\xi \wedge a \wedge \star\phi_0 = 0$ 之间的等价关系，可以直接验证，当 ξ 非零时，在 ξ 上取值的符号是单射。椭圆正则性估计告诉我们

$$\|a\|_{L_1^p} \leq const. \left(\|\delta a\|_{L^p} + \|a\|_{L^1} \right)$$

对于任意紧支撑于 $\mathbb{B}$ 中的 $a \in \Omega^1(\mathbb{B}, \mathfrak{su}(r))$。由于 3-形式 ϕ_0 在 $\mathbb{B}$ 上是恰当的，根据斯托克斯定理

$$2\|\pi_7(da)\|_{L^2}^2 - \|\pi_{14}(da)\|_{L^2}^2 = -2n \int_{\mathbb{B}} \mathrm{tr}(da \wedge da) \wedge \phi_0 = 0,$$

由此我们得出 $\|da\|_{L^2}^2 = 3\|\pi_7(da)\|_{L^2}^2$。特别地，我们看到，$\ker \delta$ 中每个紧支撑的 1-形式都必须恒等于零。因此，上述椭圆估计右端的 L^1-项可以省略。

现在设 $A = d + a$ 是一个满足该假设的联络，并且 $\beta : \mathbb{B} \to \mathbb{R}$ 是一个满足 $\beta|_{B'} \equiv 1$ 的截断函数。那么

$$|\delta(\beta a)| \leq |d\beta||a| + |\beta a \wedge \beta a| + |\pi_7(F_A)|. \tag{5.1}$$

我们先假设 $q \in (0, 14/5]$。那么我们有 Sobolev 嵌入 $L_1^2 \hookrightarrow L^q$。结合 Uhlenbeck 的结果定理 5.2，我们得到

$$\|a\|_{L^q} \leq const. \|a\|_{L_1^2} \leq const. \|F_A\|_{L^2}$$

当 $\|F_A\|_{L^{7/2}}$ 足够小时。利用 δ 的椭圆估计，我们得到

$$\|\beta a\|_{L_1^q} \leq const. \left(\|F_A\|_{L^2} + \|\beta a \wedge \beta a\|_{L^q} + \|\pi_7(F_A)\|_{L^q} \right). \tag{5.2}$$

由 Hölder 不等式可知，对于满足 $1/m+1/n=1$ 的每一对正数 (m,n)，都有 $\|\beta a\wedge\beta a\|_{L^q}\leq\|\beta a\|_{L^{mq}}\|\beta a\|_{L^{nq}}$。令 $m=7/q$ 和 $n=7/(7-q)$。我们有 Sobolev 嵌入 $L_1^{7/2}\hookrightarrow L^{mq}$ 和 $L_1^q\hookrightarrow L^{nq}$，由此可得

$$\|\beta a\wedge\beta a\|_{L^q}\leq const.\|\beta a\|_{L_1^{7/2}}\|\beta a\|_{L_1^q}.$$

当 $\|\beta a\|_{L_1^{7/2}}$ 足够小时，我们可以将二次项移到（5.2）的左端，从而得到

$$\|a\|_{L_1^q(B')}\leq const.\left(\|F_A\|_{L^2(\mathbb{B})}+\|\pi_7(F_A)\|_{L^q(\mathbb{B})}\right).$$

现在，对于 $q\in(14/5,7)$，我们有 Sobolev 嵌入 $L_1^{14/5}\hookrightarrow L^q$。因此，借助关于 $\|\beta a\|_{L_1^{14/5}}$ 的估计，（5.2）仍然成立。随后应用相同的论证即可完成证明。□

注意，能量 $\mathcal{YM}(A)$ 并非共形不变。作为补偿，我们可以考虑球上的归一化能量

$$\hat{\mathcal{E}}(A,B_r(x)):=r^{-3}\int_{B_r(x)}|F_A|^2,\tag{5.3}$$

其中，$B_r(x)$ 是以 $x\in X$ 为中心、半径为 r 的球。显然，归一化能量是共形不变的。归一化能量具有如下单调性，这使得我们能够控制其限制在较小球上的值。

引理 5.4。设 $(\mathbb{B},\phi_0)$ 是 $\mathbb{R}^7$ 中配备标准 G_2-结构的单位球。存在常数 $\mathfrak{c}_3>0$，使得平凡 $SU(n)$-丛上的每个联络 A 都满足

$$\hat{\mathcal{E}}(A,B_r(0))\leq\hat{\mathcal{E}}(A,\mathbb{B})+\mathfrak{c}_3\|\pi_7(F_A)\|^2_{L^{7/2}(\mathbb{B})}.$$

证明。令 B_r 表示以原点为球心、半径为 r 的球。归一化能量沿径向方向的导数可计算为

$$\frac{\partial}{\partial r}\hat{\mathcal{E}}(A,B_r(0))=-3r^{-4}\int_{B_r}|F_A|^2+r^{-3}\int_{\partial B_r}|F_A|^2.$$

Appe根据关系 $-\mathrm{tr}(F_A\wedge F_A)\wedge\phi_0=2|\pi_7(F_A)|^2-|\pi_{14}(F_A)|^2$，我们得到

$$\frac{\partial}{\partial r}\hat{\mathcal{E}}(A,B_r(0))=-9r^{-4}\|\pi_7(F_A)\|^2_{L^2(B_r)}+3r^{-4}\int_{B_r}-2n\,\mathrm{tr}(F_A\wedge F_A)\wedge\phi_0+r^{-3}\int_{\partial B_r}|F_A|^2.$$

令 $\nu=1/3r\partial_r$ 为 $\mathbb{B}$上的径向向量场。由于 G_2 在球面 ∂B_r 上具有传递性作用，并保持 ϕ_0 不变，因此可以直接在某一坐标轴上的点处验证关系 $d\iota_\nu\phi_0=\phi_0$。记 $\iota_\nu\phi_0=\omega_0$，则有

$$\int_{B_r}\mathrm{tr}(F_A\wedge F_A)\wedge\phi_0=\int_{\partial B_r}\mathrm{tr}(F_A\wedge F_A)\wedge\omega_0.$$

对于任意 2-形式 α，存在一个关系

$$3\alpha\wedge\alpha\wedge\omega_0\leq|\alpha|^2r\,\mathrm{vol}_{\partial B_r}\tag{5.4}$$

定义在 r-球面 ∂B_r 上。为验证这一关系，我们再次利用 G_2-作用在 r-球面上的传递性，这意味着只需在 x_1-轴上的点 $\boldsymbol{x}_0 = (r, 0, ..., 0)$ 处进行计算，其中 $\mathrm{vol}_{\partial B_r} = dx_{234567}$ and $\omega_0|_{\boldsymbol{x}_0} = 1/3 \cdot x_1 (dx_{23} - dx_{45} - dx_{67})$。然后可以用局部坐标写出 α，从而完成计算。由 (5.4) 可得

$$3r^{-4} \int_{\partial B_r} -2n \operatorname{tr}(F_A \wedge F_A) \wedge \omega_0 + r^{-3} \int_{\partial B_r} |F_A|^2 \geq 0.$$

由此，我们得到导数的一个下界

$$\frac{\partial}{\partial r} \hat{\mathcal{E}}(A, B_r(0)) \geq -9r^{-4} \|\pi_7(F_A)\|^2_{L^2(B_r)} \geq const.r \cdot \|\pi_7(F_A)\|^2_{L^{7/2}(\mathbb{B})}.$$

从 r 到 1 积分即可得到该结果。 □

推论 5.5. 设 $(\mathbb{B}, \phi_0)$ 是 $\mathbb{R}^7$ 中的单位球，并配备标准的 G_2-结构。存在常数 $\epsilon_4 > 0$, $\mathfrak{c}_4 > 0$，使得对于每个作用在平凡的 $SU(n)$-丛上的联络 A，只要其满足

$$\|F_A\|_{L^{7/2}(B_r(x))} \leq \epsilon_4,$$

其中 $B_r(x) \Subset B_{1/2}(0)$ 是一个包含在以原点为中心、半径为 $1/2$ 的球内的球，则有

$$\|F_A\|_{L^{7/2}(B_{3r/4}(x))} \leq \mathfrak{c}_4 \left(\|F_A\|_{L^2(\mathbb{B})} + \|\pi_7(F_A)\|_{L^{7/2}(\mathbb{B})} \right).$$

证明。将球 $B_r(x)$ 缩放并平移至单位球 $\mathbb{B}$，并将对应的联络记为 $A' = d + a'$。由于曲率的 $L^{7/2}$-范数和正规化子能量是共形不变的，我们有

$$\|F_A\|_{L^{7/2}(B_r(x))} = \|F_{A'}\|_{L^{7/2}(\mathbb{B})} \quad \text{and} \quad \hat{\mathcal{E}}(A, B_r(x)) = \hat{\mathcal{E}}(A', \mathbb{B}) = \|F_{A'}\|^2_{L^2(\mathbb{B})}.$$

那么定理 5.2 和引理 5.3 告诉我们

$$\|a'\|_{L^{7/2}_1(B_{3/4}(0))} \leq const. \left(\|F_{A'}\|_{L^2(\mathbb{B})} + \|\pi_7(F_{A'})\|_{L^{7/2}(\mathbb{B})} \right) < 1$$

一旦 $\|F_{A'}\|_{L^{7/2}(\mathbb{B})}$ 足够小。利用 Sobolev 乘法 $L^{7/2}_1 \times L^{7/2}_1 \hookrightarrow L^{7/2}$，我们有

$$\|F_{A'}\|_{L^{7/2}(B_{3/4}(0))} \leq const. \left(\|a'\|_{L^{7/2}_1(B_{3/4}(0))} + \|a'\|^2_{L^{7/2}_1(B_{3/4}(0))} \right) \leq const. \|a'\|_{L^{7/2}_1(B_{3/4}(0))}.$$

缩放回 $B_r(x)$，我们得到

$$\|F_A\|_{L^{7/2}(B_{3r/4}(x))} \leq const. \left(r^{-3/2} \| |F_A| \|_{L^2(B_r(x))} + \|\pi_7(F_A)\|_{L^{7/2}(B_r(x))} \right).$$

注意，$B_{r+1/2}(x) \Subset \mathbb{B}$。引理 5.4 给出

$$\begin{aligned} r^{-3} \| |F_A| \|^2_{L^2(B_r(x))} &\leq (r + 1/2)^{-3} \|F_A\|^2_{L^2(B_{r+1/2}(x))} + const. \|\pi_7(F_A)\|^2_{L^{7/2}(B_{r+1/2}(x))} \\ &\leq const. \left(\|F_A\|_{L^2(\mathbb{B})} + \|\pi_7(F_A)\|_{L^{7/2}(\mathbb{B})} \right)^2, \end{aligned}$$

将其代回上述不等式即可完成证明。 □

现在我们可以估计单位球上曲率的 $L^{7/2}$ 范数。

引理 5.6。 设 $(\mathbb{B},\ \phi_0)$ 是 $\mathbb{R}^7$ 中配备标准 G_2-结构的单位球，且 $B' \Subset B_{1/2}(0)$ 是一个内球。存在常数 $\epsilon_5 > 0$、 $\mathfrak{c}_5 > 0$，使得对于平凡 $SU(n)$-丛上的每个满足下列条件的联络 A

$$\|F_A\|_{L^2(\mathbb{B})} \leq \epsilon_5 \quad and \quad \|\pi_7(F_A)\|_{L^{7/2}(\mathbb{B})} \leq \epsilon_5,$$

都有以下界

$$\|F_A\|_{L^{7/2}(B')} \leq \mathfrak{c}_5 \left(\|F_A\|_{L^2(\mathbb{B})} + \|\pi_7(F_A)\|_{L^{7/2}(\mathbb{B})}\right).$$

证明。 给定一点 $x \in B_{1/2}(0)$，记 $D(x) = 1/2 - |x|$ 为 x 到边界 $\partial B_{1/2}(0)$ 之间的距离。考虑

$$r(x) = \sup\{r < D(x) : \|F_A\|_{L^{7/2}(B_r(x))} \leq \epsilon_4\},$$

其中 ϵ_4 是推论 5.5 中的常数。我们断言，当 $\|F_A\|_{L^2(\mathbb{B})}$ 和 $\|\pi_7(F_A)\|_{L^{7/2}(\mathbb{B})}$足够小时，可以找到 $M > 0$，使得对于所有 $x \in B_{1/2}(0)$，$D(x) \leq Mr(x)$ 成立。

让我们暂且假设该断言成立。那么，对于任意内球 $B' \Subset B_{1/2}(0)$，都可以用有限多个形如 $B_{3r/4}(x)$ 的球覆盖 B'，使得 $B_r(x) \Subset B_{1/2}(0)$，并且$\|F_A\|_{L^{7/2}(B_r(x))} \leq \epsilon_4$。然后，对每个球应用推论 5.5，即可得到所需的$\|F_A\|_{L^{7/2}(B')}$ 估计。

现在证明该断言。假设存在一个序列 $x_i \in B_{1/2}(0)$，使得$D(x_i)/r(x_i) \to \infty$。取一个子序列后，不妨设 $x_i \to x_o$。注意到$x_o \in \partial B_{1/2}(0)$，否则就会得到 $r(x_o) = 0$，这是不可能的。现在固定 $r_o > 0$，使得$\|F_A\|_{L^{7/2}(B_{r_o}(x_o))} < \epsilon_4$，并选取 x_k，使得 $B_{r(x_k)}(x_k) \subset B_{3r_o/4}(x_o)$。推论 5.5 告诉我们

$$\|F_A\|_{L^{7/2}(B_{3r_o/4}(x_o))} \leq \mathfrak{c}_4 \left(\|F_A\|_{L^2(\mathbb{B})} + \|\pi_7(F_A)\|_{L^{7/2}(\mathbb{B})}\right). \tag{5.5}$$

通过将$\|F_A\|_{L^2(\mathbb{B})}$ 和 $\|\pi_7(F_A)\|_{L^{7/2}(\mathbb{B})}$ 取得充分小，我们可以使 (5.5) 右端小于 ϵ_4。特别地，对于某个 $\epsilon > 0$，我们得到

$$\|F_A\|_{L^{7/2}(B_{r(x_k)+\epsilon}(x(k)))} \leq \|F_A\|_{L^{7/2}(B_{3r_o/4}(x_o))} < \epsilon_4.$$

这与 $r(x_k)$ 的选取相矛盾。 □

现在我们继续控制联络 1-形式的高阶导数。

引理 5.7。 设 $(\mathbb{B}, \phi_0)$ 是 $\mathbb{R}^7$ 中配备标准 G_2-结构的单位球，且 $B' \Subset \mathbb{B}$ 是一个内球。存在常数 $\epsilon_6 > 0$，使得对每个满足以下条件的平凡 $SU(n)$-丛上的联络$A = d + a$

$$d^*a = 0 \quad and \quad \|a\|_{L_1^{7/2}(\mathbb{B})} \leq \epsilon_6$$

有

$$\|a\|_{L_l^{7/2}(B')} \leq p_l \left(\|F_A\|_{L^2(\mathbb{B})} + \|\pi_7(F_A)\|_{L_{l-1}^{7/2}(\mathbb{B})}\right) \quad \forall\, l \geq 2,$$

其中 p_l： $\mathbb{R}$！ $\mathbb{R}$ 是一个具有正系数且没有零阶项的多项式。

证明。令 $\delta := d^* \oplus \pi_7$ 为引理 5.3 的证明中所考虑的算子，并令 β： $\mathbb{B}$! $\mathbb{R}$ 为一个满足 $\beta|_{B'} \equiv 1$ 的截断函数。δ 的椭圆估计给出

$$\|\beta a\|_{L_l^{7/2}} \leq const. \left(\|a\|_{L_{l-1}^{7/2}} + \|\beta a \wedge \beta a\|_{L_{l-1}^{7/2}} + \|\pi_7(F_A)\|_{L_{l-1}^{7/2}} \right).$$

一般而言，莱布尼茨法则给出索伯列夫不等式:

$$\|\beta a \wedge \beta a\|_{L_{l-1}^{7/2}} \leq const. \|\beta a\|_{L_1^{7/2}} \cdot \sum_{k=1}^{l} \|\beta a\|_{L_k^{7/2}}.$$

因此，当 $\|a\|_{L_1^{7/2}}$ 足够小时，可以将含有 $\|\beta a\|_{L_l^{7/2}}$ 的项移到另一边，从而得到所需的估计。为说明常数 ϵ_6 可以选取得与 l 无关，我们注意到，当 $l \geq 4$ 时，索伯列夫乘法不等式变为:

$$\|\beta a \wedge \beta a\|_{L_{l-1}^{7/2}} \leq \|\beta a\|_{L_{l-1}^{7/2}}^2.$$

因此，当 $l \geq 4$ 时，无需进行移项。 □

定理 *5.1* 的证明。设 A 是一个 $\boldsymbol{\pi}$ 扰动的 G_2 瞬子，满足方程 $F_A \wedge \psi + \sigma_{\boldsymbol{\pi}}(A) = 0$。我们固定一个正数 $r_0 > 0$，使得对每个 $x \in X$，都存在 $r_x \geq r_0$，从而测地球 $B_{r_x}(x)$ 包含于某个轨形图 (U_x, G_x, φ_x) 中。令 $\tilde{B}_{r_x}(x) \subset \tilde{U}_x$ 为一个球，其中包含 $\varphi_x^{-1}(B_{r_x}(x))$ 的一个连通分支，并令 $\tilde{A}_x$ 为 U_x 上相应的等变联络。

由于 $\|F_A\|_{L^2}^2 = 3\|\pi_7(F_A)\|_{L^2}^2$，我们知道当 $\|\boldsymbol{\pi}\|$ 足够小时，可以保证

$$\hat{\mathcal{E}}(\tilde{A}_x, \tilde{B}_{r_x}(x)) < \epsilon_5 \text{ and } \|\pi_7(F_A)\|_{L^{7/2}(\tilde{B}_{r_x}(x))} < \epsilon_5,$$

其中 ϵ_5 是引理 5.6 中的常数。接着，引理 5.6 给出了 $\|F_{\tilde{A}_x}\|_{L^{7/2}(\tilde{B}'_x)}$ 在某个内球 $B'_x \Subset B_{r_x}(x)$ 上的界。我们可以将 $\|\boldsymbol{\pi}\|$ 取为足够小，使得定理 5.2 的假设成立。由此可知，经过在 U_x 上进行规范变换后，联络 $A_x = d + \tilde{a}_x$ 满足 $d^* \tilde{a}_x = 0$，并且

$$\|\tilde{a}_x\|_{L_1^{7/2}(\tilde{B}'_x)} \leq const. \left(r_0^{-3} \|F_A\|_{L^2(X)} + \|\pi_7(F_A)\|_{L^{7/2}(X)} \right).$$

现在，引理 5.7 告诉我们

$$\|\tilde{a}_x\|_{L_l^{7/2}(\tilde{B}'_x)} \leq p_l \left(r_0^{-3} \|F_A\|_{L^2(X)} + \|\pi_7(F_A)\|_{L_{l-1}^{7/2}(X)} \right). \tag{5.6}$$

为了控制 $\|\pi_7(F_A)\|_{L_{l-1}^{7/2}(X)}$，我们回顾一下， $\pi_7(F_A) = - \star (\psi \wedge \star \sigma_{\boldsymbol{\pi}}(A))$。接着，引理 4.2 告诉我们

$$\|\pi_7(F_A)\|_{L_{l-1}^{7/2}(X)} \leq const. \|\pi_7(F_A)\|_{L_{l-1}^2(X)} \leq const. \left(1 + \|A^\dagger - A_0^\dagger\|_{L_{l-1}^2(X)}^{l-1} \right) \|\boldsymbol{\pi}\|,$$

其中常数取决于 ψ 以及轨形图 (U_x, G_x, φ_x)。先验地，我们只有 $A^\dagger - A_0^\dagger \in L_1^{7/2}$。递归不等式 (5.6) 告诉我们，经过可能的规范

变换 $(A^\dagger - A_0^\dagger)|_{U_x} \in L_2^{7/2}(U_x)$。 [Weh05 第 7] 章中的规范拼接论证使我们能够找到一个全局规范变换 g，使得 $g \cdot A^\dagger - A_0^\dagger \in L_2^{7/2}(X)$。重复这一过程，我们看到，对于任意 l，经过可能的规范变换后， $A^\dagger - A_0^\dagger \in L_l^{7/2}$。

现在我们已经证明，在假设 $\|\boldsymbol{\pi}\|$ 足够小的条件下，每个 $\boldsymbol{\pi}$ 扰动的 G_2-瞬子在一个小的轨形图上的限制，都存在一个在 $L_l^{7/2}$ 中有界的联络 1-形式，其中任意 l 均成立。因此，对于任意一列 $\boldsymbol{\pi}$ 扰动的 G_2-瞬子，我们可以利用对角化过程找到一个子列，使得该子列在给定小轨形图上的限制，在 C^∞-拓扑下收敛到一个 $\boldsymbol{\pi}$ 扰动的 G_2-瞬子（必要时经过规范变换）。接着，我们用有限多个小轨形图覆盖 X，并在每个图上重复上述论证。最后，我们按照 Weh05 第 7] 章中的做法，将施加于各个图的规范变换拼接起来，从而得到在 X 上所需的收敛性。这证明了 $\mathcal{M}_{\phi,\boldsymbol{\pi}}(X, P^\dagger)$ 的紧性。□

6. 变形不变量

现在，我们将结合上述发展的技术，为 G_2-轨形定义一个计数不变量。我们先明确给出精确的定义，然后计算 Joyce 构造 [Joy96] 中一些轨形的不变量。

6.1. 不变量的定义。

定义 6.1. 设 (X, ϕ) 是一个紧致的 G_2-轨形，且 $P^\dagger$！ X 是一个容许的主 $U(r)$-轨形丛。

(a) 当 (X, ϕ) 是简单的，且 $r = 2$ 或 $c_1(P^\dagger)$ 可被 2 整除时，我们定义

$$n_\phi(X, P^\dagger) := \#\mathcal{M}^*_{\phi,\boldsymbol{\pi}}(X, P^\dagger) \in \mathbb{Z}$$

为相对于一个小的一般扰动 $\boldsymbol{\pi}$ 及定向数据，对不可约 $\boldsymbol{\pi}$-扰动射影 G_2-瞬子进行带符号计数。此外，对于固定的$c \in H^2_{\mathrm{orb}}(X;\mathbb{Z})$，我们记

$$n^c_\phi(X) := \sum_{P^\dagger} n_\phi(X, P^\dagger) \in \mathbb{Z},$$

其中求和遍及所有满足 $c_1(P^\dagger) = c$ 的秩 2 可容许丛 $P^\dagger$。（b）当 (X, ϕ) 不是简单的时，我们定义

$$n_\phi(X, P^\dagger) := \#\mathcal{M}^*_{\phi,\boldsymbol{\pi}}(X, P^\dagger) \in \mathbb{Z}/2$$

为相对于小的一般扰动 $\boldsymbol{\pi}$ 对不可约 $\boldsymbol{\pi}$ 扰动射影 G_2-瞬子进行计数。

(c) 当（X， ϕ）是简单的，并满足 $H^1_{\mathrm{orb}}(X;\ \mathbb{Z}) = 0$，且 $P^\dagger$ 是一个 $SU(2)$-丛，并满足 $c_2(P^\dagger) = 0 \in H^4_{\mathrm{orb}}(X;\ \mathbb{Z})$ 时，我们定义

$$n_\phi(X, P^\dagger) := \#\mathcal{M}^*_{\phi,\boldsymbol{\pi}}(X, P^\dagger) \in \mathbb{Z}$$

为相对于小的一般扰动 $\boldsymbol{\pi}$ 和定向数据，对不可约 $\boldsymbol{\pi}$-扰动（非射影） G_2-瞬子进行带符号计数。此外，记

$$n_\phi(X) := \sum_{P^\dagger} n_\phi(X, P^\dagger) \in \mathbb{Z},$$

其中求和遍历所有满足 c_2 消失条件的、定义在 X 上的 $SU(2)$-丛。

定义 6.1 中的内容需要作一些解释。在 (a) 中，我们将 $n_\phi^c(X)$ 定义为所有满足 $c_1 = c$ 的容许丛之和。条件 $c_1^2 - 4c_2 = 0$ 意味着 c_2 只有有限种选择。注意，若 $4 \le n \le 7$，则高阶同伦群 $\pi_n(U(2))$ 都是有限群。因此，阻碍理论告诉我们，一旦确定了 c_1 和 c_2，定义在 X 上的 $U(2)$-丛就只有有限种。所以，定义 $n_\phi^c(X)$ 的求和是有限的。在 (c) 中，条件 $H^1_{\mathrm{orb}}(X;\mathbb{Z}) = 0$ 意味着不存在非平凡的平坦可约 $SU(2)$-联络，而唯一的可约平坦 $SU(2)$-联络与不可约联络彼此孤立。若扰动 $\boldsymbol{\pi}$ 选取得足够小，这些性质仍然成立。因此，定义 $n_\phi(X)$ 的计数是有意义的。

关于定义 6.1 中提到的定向数据，对于流形情形，我们参阅 Joyce–Upmeier[JU21]，他们将“旗结构”作为额外输入。我们相信，在理清相应的同伦理论后，这项工作也适用于轨形情形。由于缺乏实际应用，我们在此不详细说明定向数据。如果模空间非空，则总可以在一点处固定一个定向，并沿一条路径利用变形算子的谱流为其他点定向。

定理 6.2。 定义 *6.1* 中的所有不变量均与扰动 $\boldsymbol{\pi}$的选取无关，并且在无挠 G_2结构的 C^0-变形下保持不变。

证明。 扰动的选取无关性可由标准论证得出。取两个足够小的一般扰动 $\boldsymbol{\pi}_0$和 $\boldsymbol{\pi}_1$，使得模空间 $\mathcal{M}_{\phi,\boldsymbol{\pi}_i}(X, P^\dagger)$ 均为正则。我们可以选取一条足够小的扰动路径 $\gamma : [0,1] \to \mathrm{P}$，连接 $\boldsymbol{\pi}_0$和 $\boldsymbol{\pi}_1$，并使其与像 $\mathrm{pr}_1(\mathcal{F}^{-1}(0))$ 横截，其中 $\mathcal{F}$ 是式 (4.11) 中定义的映射，而 $\mathrm{pr}_1 : \mathrm{P} \times \mathrm{A}_k \to \mathrm{P}$ 是到第一个因子的投影。于是，横截性告诉我们

$$\mathcal{M}^*_{\phi,\gamma} := \bigcup_{t\in[0,1]} \mathcal{M}^*_{\phi,\gamma(t)}(X, P^\dagger)$$

给出了从 $\mathcal{M}^*_{\phi,\boldsymbol{\pi}_0}(X, P^\dagger)$ 到 $\mathcal{M}^*_{\phi,\boldsymbol{\pi}_1}(X, P^\dagger)$ 的（定向）配边。因此，关于 $\boldsymbol{\pi}_0$-瞬子和 $\boldsymbol{\pi}_1$-瞬子的计数是一致的。

现在假设我们有一条连续路径 $\Phi := (\phi_t)_{t\in[0,1]}$，它由 X 上的无挠 G_2-结构组成。那么我们考虑

$$\mathcal{M}_\Phi(X, P^\dagger) := \bigcup_{t\in[0,1]} \mathcal{M}_{\phi_t}(X, P^\dagger) \subset [0,1] \times \mathscr{A}_k/\mathscr{G}_{k+1}.$$

我们可以考虑与 (4.11) 类似的映射:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\Phi : \mathscr{P} \times \mathscr{A}_k^* \times [0,1] &\longrightarrow \mathcal{K}_{k-1} \\ (\boldsymbol{\pi}, A, t) &\longmapsto \operatorname{grad} \mathrm{cs}_{\phi_t,\boldsymbol{\pi}}(A)\end{aligned}$$

根据我们的假设， $\mathcal{F}_\Phi$ 在前两个连通分支上是光滑的，在第三个连通分支上则仅连续。然而，引理 4.4 告诉我们， $\mathcal{F}_\Phi$ 在前两个连通分支上的偏导数已经横截于 $\mathcal{K}_{k-1}$的零截面。因此，隐函数定理表明，对于一般的 $\boldsymbol{\pi} \in \mathrm{P}$，扰动模空间$\mathcal{M}_{\Phi,\ \boldsymbol{\pi}}(X, P^\dagger)$是一个 C^0 1-流形。由于每个 ϕ_t 都无挠，定理 5.1 告诉我们，当 $\boldsymbol{\pi}$ 充分小时，$\mathcal{M}_{\Phi,\ \boldsymbol{\pi}}(X, P^\dagger)$是紧致的。因此，我们得到从 $\mathcal{M}_{\phi_0}(X, P^\dagger)$到$\mathcal{M}_{\phi_1}(X, P^\dagger)$的（定向）配边，这意味着变形不变性。这里的定向配边是指，在 $[0,1] \times \mathrm{A}_k/\mathrm{G}^{k+1}$中 $\mathcal{M}_\Phi(X, P^\dagger)$的一个邻域上，变形复形的指标丛的行列式线丛被平凡化，使得定向在这个邻域内传递，而不是“沿着 C^0 曲线”传递。□

回顾引言部分，如果 $H^1(X, \rho_A) = 0$，则称不可约射影平坦联络 $A^\dagger$ of$P^\dagger$ 是非退化的。其中， ρ_A 是由丛 $\mathfrak{su}(P^\dagger)$ 上的诱导平坦联络给出的表示 $\rho_A : \pi_1^{\mathrm{orb}}(X) \to SO(r^2 - 1)$。等价地，若将由 $\mathfrak{g}_P$ 经 A 扭曲而得到的局部系统记作 ad_A ，则$H^1(X, \mathsf{ad}_A) = H^1(X, \rho_A)$。命题 1.5 可由以下观察得出。

引理 6.3。设 $[A^\dagger]$ 是一个 G_2-轨形(X, ϕ) 上容许丛 $P^\dagger$ 的不可约射影平坦联络的规范等价类。当且仅当 $[A^\dagger]$ 是非退化射影平坦联络时， $[A^\dagger]$ 才是模空间 $\mathcal{M}_\phi^*(X, P^\dagger)$ 中的正则点。

*Pr*呃。回想一下，对于变形复形 $E_A(X)$， A的不可约性意味着

$$H^0(E_A(X)) = H^3(E_A(X)) = 0 \qquad H^1(E_A(X)) \simeq H^2(E_A(X)).$$

为证明该引理，只需证明 $H^1(E_A(X))$ 与 $H^1(X, \mathsf{ad}_A)$ 相同。我们断言$\forall a \in \Omega^1(X, \mathfrak{g}_P)$

$$d_A a \wedge \psi = 0 \Longleftrightarrow d_A a = 0.$$

为证明该断言，设 $d_A a \wedge \psi = 0$，根据引理 3.4，这等价于 $\pi_7(d_A a) = 0$。于是 (2.7) 告诉我们

$$|\pi_{14}(d_A a)|^2 \operatorname{vol} = 2r \operatorname{tr}(d_A a \wedge d_A a) \wedge \phi) = 2rd\left(\operatorname{tr}(a \wedge d_A a) \wedge \phi)\right),$$

其中最后一个等号用到了 A 是平坦的这一事实。在 X 上积分可得$\pi_{14}(d_A a) = 0$。因此 $d_A a = 0$。这就证明了该断言。 $H^1(E_A(X))$ 与 $H^1(X, \mathsf{ad}_A)$ 之间的对应关系可直接由该断言得出。□

命题 *1.5* 的证明。引理 6.3 告诉我们，在给定假设下，对于任意无挠 G_2-结构 ϕ， $\mathcal{M}_\phi(X, P^\dagger)$ 都是正则的。因此，我们可以选择 $\boldsymbol{\pi} = 0$ 来定义$n_\phi(X, P^\dagger)$。在这种情况下，根据引理 6.3，所有无挠 G_2-结构的变形复形的上同调都被典范地识别。因此，不同无挠 G_2-结构的带符号计数一致。□

当 G_2-轨形是平坦的时，Walpuski [Wal13] 通过诉诸狄拉克算子的 Weitzenböck 公式，给出了一个更简单的判据来验证非退化性。设 $A^\dagger$ 是一个射影平坦联络。于是， X 上的平坦 Levi–Civita 联络与 $\mathfrak{g}_E$ 上的平坦联络 ad_A 耦合，给出一个表示 $\rho_A^{\mathrm{LC}}\colon \pi_1^{\mathrm{orb}}(X) \to \mathrm{Aut}((\Lambda^1 \otimes \mathfrak{g}_P)|_{x_o})$，其参考点为非奇异点 $x_o \in X$。

引理 6.4 ([Wal13, 命题 9。2])。 设(X,ϕ) 是一个平坦的 G_2-轨形，且 $A^\dagger$ 是 $U(r)$-丛 $P^\dagger$上的射影平坦联络 X。当且仅当表示ρ_A^{LC}在$(\Lambda^1 \otimes \mathfrak{g}_P)|_{x_o}$中不固定任何非零向量时， $A^\dagger$才是非退化的。

推论 6.5。 设 $P^\dagger$是平坦无挠 G_2-轨形(X,ϕ)上的一个容许丛。那么，不可约射影瞬子模空间 $\mathcal{M}^*_\phi(X,P^\dagger)$ 是正则的。

证明。 由于每个不可约射影 G_2-瞬子 $A^\dagger$ 都会在 $\mathfrak{g}_P$上诱导一个平坦联络 A，我们知道，将其与平坦的 Levi–Civita 联络耦合后， ρ_A^{LC}不固定任何非零向量。□

6.2. 不变量的计算。

在本小节中，我们计算若干例子的 不变量 $n_\phi(X,P^\dagger)$。

例 6.1. 我们考虑的第一个例子是流形 $X = T^3 \times K3$，其 G_2-结构由度量诱导而来；该度量是 T^3 上的平坦度量与 $K3$上的超凯勒度量的乘积。我们可以将 $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$识别，并将分别代表三个因子的 T^3 中的嵌入曲线记为 α、β、γ。令 $Q^\dagger$！T^3 为 T^3上的$U(2)$-丛，其 $c_1(Q^\dagger) = \mathrm{PD}[\gamma]$且 $c_2(Q^\dagger) = 0$，并令 $P^\dagger = \mathrm{pr}_1^* Q^\dagger$为通过投影映射将 $Q^\dagger$拉回到 X 所得的丛。丛 $P^\dagger$是容许的，因为 $\langle c_1(P^\dagger)\ \alpha \times \beta\rangle = 1$。那么 un

$$\text{p扰动模空间} \qquad \text{p对应于} \quad \text{p}^{\text{对应于重 彩神争霸大发}} \quad \text{p簇:}$$
$$\mathcal{R}(P^\dagger) = \{\rho : \pi_1(T^3 \backslash \gamma) \to SU(2) : \rho([\alpha,\beta]) = -1\}/\operatorname{Ad}.$$

将 $SU(2)$ 与单位四元数对应起来后，很容易求得 $\rho(\alpha) = i$、 $\rho(\beta) = j$，以及 $\rho(\gamma) = \pm 1$，且它们在伴随作用下视为等价。因此，未扰动模空间 $\mathcal{M}_\phi(X,P^\dagger)$ 由两个点组成，记作 $\rho_\pm$，它们分别对应于 $\rho_\pm(\gamma) = \pm 1$。为说明这两个 $\rho_\pm$都是正则的，注意到 $P^\dagger$是从 $Q^\dagger$上的对象拉回而来，因此 Künneth公式告诉我们

$$H^1(X, \mathrm{ad}_{\rho_\pm}) \simeq H^1(T^3, \mathrm{ad}_{\rho_\pm}) = 0.$$

于是，运用引理 6.3，我们得到 $\rho_\pm$ 的非退化性。 [Kro05 的引理 6.3] 告诉我们，可以在 $Q^\dagger$ 上找到一条联络路径，将 $\rho_\pm$ 连接起来，使得平坦性方程的变形算子在 $Q^\dagger$ 上的谱流为 4。在 $T^3 \times K3$ 上，变形复形 $E_A(X)$ 分解为 T^3 上平坦联络的变形复形与 ASD 在 $K3$ 上联络的变形复形之和，其中联络为拉回联络。由于 $K3$ 是复的，若将上述路径拉回，则连接 $\rho_\pm$ 的 G_2-瞬子变形算子的谱流仍为偶数。固定 $\rho_\pm$ 中任意一个的定向后，我们得出

$$n_\phi(T^3 \times K3, P^\dagger) = 2.$$

一般而言，按照 Kronheimer [Kro05 第 6.2], 节的构造，可以找到 $U(r)$-丛 $P_r^\dagger$，它们位于 $T^3 \times K3$ 上，使得 ${}^n\phi(T^3 \times K3, P_r^\dagger) = r$，这可由上述论证得到。

例 6.2. 我们考虑的第二个例子源自 Joyce列表[Joy96]中的例 3。令 T^7 为将标准的 $\mathbb{R}^7$ 按轴向平移取商得到的环面。记 $\mathbb{R}^7$上的坐标为 $(x_1, x_2, ..., x_7)$。我们将 x_i-平移记作τ_i：$x_i \mapsto x_i + 1$，并考虑 $\mathbb{R}^7$ 上的三个保持平坦结构的对合：

$$\begin{aligned} \alpha &: (x_1, ..., x_7) \longmapsto (x_1, x_2, x_3, -x_4, -x_5, -x_6, -x_7) \\ \beta &: (x_1, ..., x_7) \longmapsto (x_1, -x_2, -x_3, x_4, x_5, \frac{1}{2} - x_6, -x_7) \\ \gamma &: (x_1, ..., x_7) \longmapsto (-x_1, x_2, -x_3, x_4, \frac{1}{2} - x_5, x_6, \frac{1}{2} - x_7) \end{aligned} \tag{6.1}$$

记 Γ 为由 $\tau_1, ..., \tau_7$ 以及 α, β, γ生成的群。令 $X = \mathbb{R}^7/\Gamma$ 带有平坦度量。根据 [Joy00, 引理 12.2.2], ，我们知道 X 是一个简单轨形，其奇异集由 12 个互不相交的 T^3副本组成。由于 $\mathbb{R}^7$ 是 X的万有覆盖，我们知道轨形基本群 $\pi_1^{\mathrm{orb}}(X) = \Gamma$。$\Gamma$ 中生成元的关系由以下关系生成：

（1）$[\tau_i, \tau_j] = 1$ $\forall i$、$j = 1$、.....、7。（2）$\alpha^2 = 1$、$\beta^2 = 1$、$\gamma^2 = 1$。（3）$[\alpha, \beta] = \tau_6^{-1}$、$[\alpha, \gamma] = \tau_7^{-1}$、$[\beta, \gamma] = \tau_7^{-1}$。（4）$\alpha\tau_i\alpha = \tau_i$对于 $i = 1$、2、3、$\alpha\tau_j\alpha = \tau_j^{-1}$，对于 $j = 4$、5、6、7。（5）$\beta\tau_i\beta = \tau_i$对于 $i = 1$、4、5、$\beta\tau_j\beta = \tau_j^{-1}$，对于 $j = 2$、3、6、7。（6）$\gamma\tau_i\gamma = \tau_i$，对于 $i = 2$、4、6、$\gamma\tau_j\gamma = \tau_j^{-1}$，对于 $j = 1$、3、5、7。

现在，我们根据上述关系，确定所有 $SO(3)$-表示 $\mathrm{Hom}(\pi_1^{\mathrm{orb}}(X), SO(3))$ 在共轭意义下的分类。将由下式给出的克莱因四元群记作 $V_4 = \{1, a, b, c\} \subset SO(3)$：

$$a = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

我们先回顾线性代数中的一个基本事实，并将其留作读者的练习。

引理 6.6. 对于非平凡元素 $1 \neq g \in SO(3)$，记 L_g 为 g的旋转轴。则

(1) 若 $aga = g$，则 $g \in O(2)$ 具有以下形式：

$$g = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos\theta & \sin\theta \\ & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & & \\ & \cos\theta & \sin\theta \\ & \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

(2) 若 $aga = g^{-1}$，则要么 $g = a$，要么 $g = ar$，且 $r \in SO(3)$ 为一个 π-旋转。在后一种情形下，我们用 $\vec{o}_r$ 和 $\vec{o}_a$ 定向 L_r 和 L_a，使它们之间的夹角满足 $\theta_{ar} \in [0, \pi/2]$。于是，$g$ 是绕由 $L_{ar} \perp L_a$ 和 $L_{ar} \perp L_r$ 确定的轴 L_{ar} 进行的逆时针 $2\theta_{ar}$-旋转。此处的逆时针旋转是相对于定向基 $(\vec{o}_r, \vec{o}_a)$ 定义的。

此外，令 $S(2) \subset SO(3)$ 表示由满足 *(2)* 的元素构成的 $SO(3)$ 子集。$O(2)$、$S(2)$ 和 V_4之间满足以下关系。

(a) 若 $g^2 = 1$ 和 $g \in O(2)\backslash\{1, a\}$，则 $\{1, a, g, ag\}$ 构成 V_4的一个副本。*(b)* 若 $g^2 = 1$ 和 $g \in S(2)\backslash\{1, a\}$，则 $\{1, a, g, ag\}$ 构成 V_4的一个副本。*(c)* 若 $g \in O(2) \cap S(2)\backslash\{1, a\}$，则 $\{1, a, g, ag\}$ 构成 V_4的一个副本。

特别地，若 $g \in SO(3)$ 满足 *(a)–(c)* 中的一项，则 g 与 b 在 $SO(2)$中的某个元素作用下共轭。

对于一般表示，我们写作 $\rho : \pi_1^{\mathrm{orb}}(X) \to SO(3)$。

情形（1）假设 $\rho(\alpha) = \rho(\beta) = \rho(\gamma) = 1$。由关系式（3），我们知道 $\rho(\tau_6) = \rho(\tau_7) = 1$。那么，关系式（1）和（4）–（6）推出，在共轭意义下，$\rho(\tau_i) \in V_4, i = 1, ..., 5$。

情形（2）假设 $\rho(\alpha) = \rho(\beta) = 1$ 且 $\rho(\gamma) \neq 1$。在共轭意义下，我们可以取 $\rho(\gamma) = a$。和之前一样，我们知道 $\rho(\tau_6) = \rho(\tau_7) = 1$。再通过克莱因四元群 (2) 中的一个元素进行共轭后，关系式（4）和（5）推出，对于 $i = 2$，$\rho(\tau_i) \in V_4$，其中 $i = 2, 3, 4, 5$。

情形 *(2.1)* 如果对所有 $i \in \{2, 3, 4, 5\}$，$\rho(\tau_i) = 1$，那么 $\rho(\tau_1) \in S(2)$。情形 *(2.2)* 如果 $\rho(\tau_i)$、$i \in \{2, 3, 4, 5\}$ 并非全都平凡，那么 $\rho(\tau_1) \in V_4$。

情形 (3) 设 $\rho(\alpha) = \rho(\gamma) = 1$，且 $\rho(\beta) \neq 1$。在共轭意义下，不妨取$\rho(\beta) = a$。于是我们知道 $\rho(\tau_6) = \rho(\tau_7) = 1$。再用 $SO(2)$ 中的一个元素进行共轭后，关系 (4)–(6) 表明，对于 $i = 1, 3, 4, 5$，$\rho(\tau_i) \in V_4$。

情形 *(3.1)* 若对所有 $i \in \{1, 3, 4, 5\}$，$\rho(\tau_i) = 1$，则 $\rho(\tau_2) \in S(2)$。情形 *(3.2)* 若 $\rho(\tau_i)$、$i \in \{1, 3, 4, 5\}$ 并非全都平凡，则 $\rho(\tau_2) \in V_4$。

情形 (4) 设 $\rho(\beta) = \rho(\gamma) = 1$，且 $\rho(\alpha) \neq 1$。在共轭意义下，可取 $\rho(\alpha) = a$。由此可知 $\rho(\tau_6) = \rho(\tau_7) = 1$。再用 $SO(2)$ 中的一个元素进行共轭后，关系 (4)–(6) 蕴含：对 $i = 1, 2, 3, 5$，$\rho(\tau_i) \in V_4$。

情形（*4.1*）若对所有 $i \in \{1, 2, 3, 5\}$，均有 $\rho(\tau_i) = 1$，则 $\rho(\tau_4) \in S(2)$。

情形（*4.2*）若 $\rho(\tau_i)$、$i \in \{1, 2, 3, 5\}$并非全都为平凡，则 $\rho(\tau_4) \in V_4$。

情形（5）设 $\rho(\alpha) = 1$，且 $\rho(\beta)\ \rho(\gamma) \neq 1$。在共轭意义下，我们可取 $\rho(\beta) = a$。则已知 $\rho(\tau_6) = \rho(\tau_7) = 1$。再由 $SO(2)$中的一个元素作共轭后，关系式（3）推出 $\rho(\gamma) \in V_4$。关系式（4）和（5）推出，对$i = 4, 5$，有 $\rho(\tau_i) \in V_4$。

情形 *(5.1)* 若 $\rho(\gamma) = \rho(\tau_i) = 1$ 对所有 $i \in \{4, 5\}$ 都成立，则关系式（6）意味着 $\rho(\tau_j) \in V_4$ 对 $j = 1$ 成立，3。若 $\rho(\tau_1) = \rho(\tau_3) = 1$，则 $\rho(\tau_2) \in S(2)$。否则 $\rho(\tau_2) \in V_4$。

情形（*5.2*）如果 $\rho(\gamma) \neq 1$，那么关系式（6）推出 $\rho(\tau_2)\ \rho(\tau_1) \in V_4$。如果 $\rho(\tau_2) = \rho(\tau_1) = 1$ 且 $\rho(\gamma) = a$，那么 $\rho(\tau_3) \in S(2)$。否则 $\rho(\tau_3) \in V_4$。

情形（*5.3*）如果 $\rho(\gamma)=1$，并且 $\rho(\tau_4)$、$\rho(\tau_5)$ 中至少有一个是非平凡的，那么关系式（6）推出 $\rho(\tau_1)\ \rho(\tau_3)\in V_4$。如果对所有 $i=1$,3,4,5 都有 $\rho(\tau_i)\in\{1,a\}$，那么 $\rho(\tau_2)\in S(2)$。否则 $\rho(\tau_2)\in V_4$。

情形（6）设 $\rho(\beta)=1$，且 $\rho(\alpha)\ \rho(\gamma)\neq 1$。在共轭意义下，可取 $\rho(\alpha)=a$。于是我们知道 $\rho(\tau_6)=\rho(\tau_7)=1$。进一步用 $SO(2)$ 中的一个元素进行共轭后，关系式（3）表明 $\rho(\gamma)\in V_4$。关系式（4）和（5）表明 $\rho(\tau_i)\in V_4$ for$i=2$,3。

情形（*6.1*）若对所有 $i\in\{2,3\}$，均有 $\rho(\gamma)=\rho(\tau_i)=1$，则关系式（6）表明 $\rho(\tau_j)\in V_4$ for $j=1,4$。若 $\rho(\tau_1)=\rho(\tau_4)=1$，则 $\rho(\tau_5)\in S(2)$。否则 $\rho(\tau_5)\in V_4$。

情形（*6.2*）若 $\rho(\gamma)\neq 1$，则关系式（6）意味着 $\rho(\tau_1)\ \rho(\tau_4)\in V_4$。若 $\rho(\tau_1)=\rho(\tau_4)=1$ 且 $\rho(\gamma)=a$，则 $\rho(\tau_5)\in S(2)$。否则 $\rho(\tau_5)\in V_4$。

情形（*6.3*）若 $\rho(\gamma)=1$，且 $\rho(\tau_2)$、$\rho(\tau_3)$ 中至少一个是非平凡的，则关系式（6）意味着 $\rho(\tau_1)\ \rho(\tau_4)\in V_4$。若对所有 $i=1$、2、3、4，均有 $\rho(\tau_i)\in\{1,a\}$，则 $\rho(\tau_5)\in S(2)$。否则 $\rho(\tau_5)\in V_4$。

情形（7）假设 $\rho(\gamma)=1$，且 $\rho(\alpha)\ \rho(\beta)\neq 1$。在共轭意义下，我们可以取 $\rho(\alpha)=a$。于是可知 $\rho(\tau_7)=1$。再用 $SO(2)$ 中的一个元素进行共轭后，关系式（1）和（6）推出，对于 $i=1$、3、5，$\rho(\tau_i)\in V_4$。

情形（*7.1*）如果对所有 $i\in\{1,3,5\}$，$\rho(\tau_i)=1$，且 $\rho(\beta)=a$，那么可知 $\rho(\tau_6)=1$。用 $SO(2)$ 中的一个元素进行共轭后（由于 $\rho(\tau_i)=1$ 对于 $i=1$、3、5 成立，因此可以做到这一点），关系式（4）和（5）推出 $\rho(\tau_2)\ \rho(\tau_4)\in V_4$。

情形 *(7.2)* 若对所有 $i\in\{1,3,5\}$，$\rho(\tau_i)=1$，且 $\rho(\beta)\neq a$，则我们知道 $L_{\alpha\beta}\perp L_\alpha, L_\beta$，其中 L 表示在 ρ下对应元素在 $SO(3)$中的旋转轴。注意，

$$\beta\tau_2\beta=\tau_2^{-1}\qquad \alpha\tau_2\alpha=\tau_2. \tag{6.2}$$

我们知道 $\rho(\tau_2)$ 是绕 $L_{\alpha\beta}$ 的 π-旋转。τ_4 的类似关系意味着 $\rho(\tau_4)$ 也是绕 $L_{\alpha\beta}$ 的 π-旋转。通过用 $SO(2)$ 中的元素作共轭，我们可以安排使得 $\rho(\tau_2)=\rho(\tau_4)=b$。于是关系 (5) 意味着 $\rho(\beta)\in V_4$，从而 $\rho(\tau_6)=1$。

情形 *(7.3)* 若对所有 $i\in\{1,3,5\}$，$\rho(\tau_i)\in\{1,a\}$，且它们并非全都平凡，则关系 (5) 意味着 $\rho(\beta)\in V_4$，从而 $\rho(\tau_6)=1$。根据 $\rho(\beta)=a$ 与否，上述两种情形中的论证表明 $\rho(\tau_2)\ \rho(\tau_4)\in V_4$。

情形 (8) 假设 $\rho(\alpha)\ \rho(\beta)\ \rho(\gamma)\neq 1$。在共轭意义下，我们可以取 $\rho(\alpha)=a$。

情形 *(8.1)* 若 $\rho(\beta)=\rho(\gamma)=a$，则关系式（4）和（5）–（6）表明，经过用 $SO(2)$ 中的一个元素进一步共轭后，对所有 $i=1$，.....，5，均有 $\rho(\tau_i)\in V_4$；且 $\rho(\tau_6)=\rho(\tau_7)=1$。

情形 *(8.2)* 若 $\rho(\beta)=a$, $\rho(\gamma)\neq a$，则关系式（4）和（5）表明，经过用 $SO(2)$ 中的一个元素进一步共轭后，对 $i=2$、3、4、5，有 $\rho(\tau_i)\in V_4$。关系式（3）表明，$\rho(\tau_6)=1$。注意，

$$\alpha\tau_1\alpha=\tau_1\qquad \gamma\tau_1\gamma=\tau_1^{-1}.$$

我们知道，$\rho(\tau_1)$ 是绕 $L_{\alpha\gamma}$ 的 π 旋转。如果 $\rho(\tau_i)=1$ 对于 $i=2$,3,4,5，则可在此处应用 $SO(2)$-共轭，使 $\rho(\tau_1)=b$。否则，关系式（1）表明$\rho(\tau_1)\in\{b,c\}\subset V_4$。然后，关系式（6）表明 $\rho(\gamma)\in\{b,c\}$，因此 $\rho(\tau_7)=1$。

情形 *(8.3)* 如果 $\rho(\beta) \neq a$, $\rho(\gamma) = a$，那么关系式（4）和（6）表明，在进一步通过克莱因四元群(2)中的一个元素作共轭后，$\rho(\tau_i) \in V_4$ 对于$i = 1, 3, 4, 6$。关系式（3）表明$\rho(\tau_7) = 1$。注意，

$$\alpha\tau_2\alpha = \tau_2 \qquad \beta\tau_2\beta = \tau_2^{-1}.$$

我们知道 $\rho(\tau_2)$ 是绕 $L_{\alpha\beta}$ 的 π-旋转。对情形（8.2）使用相同的论证可知，$\rho(\tau_2) \in \{b, c\}$。于是，关系式（5）蕴含 $\rho(\beta) \in \{b, c\}$，因此 $\rho(\tau_6) = 1$。

情形（*8.4*）如果 $\rho(\beta)$ 和 $\rho(\gamma)$ 都不等于 a，我们考虑

$$\alpha\tau_1\alpha = \tau_1 \qquad \beta\tau_1\beta = \tau_1 \qquad \gamma\tau_1\gamma = \tau_1^{-1}. \tag{6.3}$$

我们知道 $\rho(\tau_1)$ 是绕 $L_{\alpha\gamma}$ 的 π-旋转。如果 $\rho(\beta) \neq \rho(\gamma)$，我们知道 $L_{\alpha\gamma} = L_{\beta\gamma} \perp L_\alpha, L_\beta, L_\gamma$，这与此矛盾。因此 $\rho(\beta) = \rho(\gamma)$。通过 $SO(2)$ 中的一个元素进行共轭，我们可以使 $\rho(\tau_1) = b$。接着，$[\beta, \tau_1] = 1$ 告诉我们 $\rho(\beta) = \rho(\gamma) \in V_4$。然后，关系式（3）告诉我们 $\rho(\tau_6) = \rho(\tau_7) = 1$。这一论证可应用于 τ_i for$i = 2, 3, 4, 5$，从而得出 $\rho(\tau_i)$ 是绕 $L_{\alpha\beta}$ 的 π-旋转。现在我们知道

$$[b, \rho(\tau_i)] = [\rho(\tau_1), \rho(\tau_i)] = 1 = [\rho(\alpha), \rho(\tau_i)] = [a, \rho(\tau_i)].$$

这意味着，对于 $i = 2$，3、4、5，$\rho(\tau_i) \in V_4$。

舍去上述可约表示后，我们得到如下关于不可约表示的刻画。

推论 6.7。在共轭意义下，每个不可约表示 $\rho : \pi_1^{\mathrm{orb}}(X)$！ $SO(3)$均具有如下形式

$$\rho(\alpha), \rho(\beta), \rho(\gamma) \in V_4, \quad \rho(\tau_i) \in V_4,\ i = 1, ..., 5, \quad \rho(\tau_6) = \rho(\tau_7) = 1$$

其中 像$\rho = V_4$。

我们的下一个任务是确定与这些不可约表示相对应的容许丛。我们不穷举所有可能性，而是列举几个在共轭意义下具有唯一不可约表示的例子。记 ϖ:T^7！ X 为商映射，并设 P 是由容许丛 $P^\dagger$诱导的、在 X 上的一个 $SO(3)$-丛。于是我们得到一个在 T^7上的 $SO(3)$-丛 $\varpi^* P$。[GM93，命题 11.1] 表明，在 T^7 上的每个非平凡平坦 $SO(3)$-丛都由其第二 Stiefel–Whitney 类 $w_2 \in H^2(T^7; \mathbb{Z}/2)$ 分类，并且每个这样的丛在规范变换意义下存在唯一的平坦联络。在我们的情形中，我们要求 $\rho(\tau_6) = \rho(\tau_7) = 1$。因此，若 $\varpi^* P$ 非平凡，则它由取值 $\rho(\tau_i) \in V_4$, $i = 1, ...,5$ 决定，除去对非平凡元素 $\{a, b, c\} \subset V_4$的置换。

为确定 P 在 X上的丛，我们考虑由 12 个 T^3副本组成的奇异集 S_X。具体而言，对合 α、β、γ各自贡献 4 个 T^3副本，它们是其在 T^7中的不动点集的像。每个 T^3 的法丛纤维都是以 $\mathbb{R}P^3$为底的锥，因此贡献一个链接圆，对应于 $\pi_1(\mathbb{R}P^3)$中的非平凡元素。我们可以在 $\Gamma = \pi_1^{\mathrm{orb}}(X)$中将这些链接圆所代表的元素显式写出如下。

(a) α-环面的链接圆：α, $\tau_4\alpha$, $\tau_5\alpha$, $\tau_7\alpha$。(b) β-环面的链接圆：β, $\tau_2\beta$, $\tau_3\beta$, $\tau_2\tau_3\beta$。

(c) γ环面的链接圆： γ、 $\tau_1\gamma$、 $\tau_3\gamma$、 $\tau_1\tau_3\gamma$。

我们用 $\Xi \subset \Gamma$ 表示由对应于这些链接圆的 12 个元素组成的子集。两个表示 ρ_1, ρ_2： $\pi_1^{\mathrm{orb}}(X)$! $SO(3)$ 产生相同平坦丛 P 的必要条件是 $\ker \rho_i \cap \Xi$ 必须相同。由于对于某个 $g \in \Xi$， $\rho(g) \neq 1 \in V_4$ 意味着将 $w_2(P)$ 限制在对应于 g 的 T^3 的一个链接 $\mathbb{R}P^3$ 上是非平凡的。

现在我们写出几个表示，其对应的丛各自都存在一个平坦联络，且在 $SO(3)$-规范变换下唯一。我们当然可以写出更多表示，以呼应上文的讨论。只要考虑 T^7 在对合下的商空间，Joyce列表中的其他例子也可以进行类似计算。

	α	β	γ	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5
ρ_1	1	1	1	c	b	1	a	1
ρ_2	a	1	1	c	b	1	a	a
ρ_3	a	b	1	c	b	b	a	a
ρ_4	a	b	c	c	b	b	a	a

表 1. V_4-表示

命题 *1.6* 的证明。 设 ρ： $\pi_1^{\mathrm{orb}}(X)$! $SO(3)$ 是表 1 中的一个表示。结合上文的讨论，可以容易地验证， ρ 给出一个 $SO(3)$-丛 P，其不可约平坦联络 A 在 $SO(3)$-规范变换下唯一。记 G′ 为 $SO(3)$-规范变换群。双覆盖η： $SU(2)$! $SO(3)$ 给出正合列（参见 [AMR95，第 66] 页）：

$$1 \to \mathrm{Map}_{\mathrm{orb}}(X, \mathbb{Z}/2) \to \mathscr{G} \xrightarrow{\eta_*} \mathscr{G}' \to H^1_{\mathrm{orb}}(X; \mathbb{Z}/2) \to 1.$$

由于 A 在 G′ 中的稳定子为 V_4，且 η_* 将 G 的中心映射到 1，我们知道在 P上，模去行列式为1的规范变换后，不可约联络的数量为

$$\mathrm{rank}(H^1(X; \mathbb{Z}/2))/|V_4| = 2^6.$$

对于每个 G-代表 $A' \in \mathsf{G}' \cdot A$，引理 6.3 告诉我们，模空间 $\mathcal{M}_\phi(X, P^\dagger)$ 在 A'处的切空间为 $H^1(X, \mathrm{ad}_{A'})$；通过任意将 A' 映射到 A的 $SO(3)$-规范变换，它与 $H^1(X, \mathrm{ad}_A)$ $= 0$规范地同构。因此，所有 2^6点的定向一致，这说明 $n_\phi(X, P^\dagger) = 2^6$。我们注意到，该论证也与例 6.1 中的计算一致：一个 V_4-表示会产生两个符号相同的射影平坦联络（模去行列式为1的规范变换）。□

参考文献

[AB68] M. F. Atiyah 和 R. Bott。椭圆复形的 Lefschetz 不动点公式。II. 应用。《数学年刊》（第 *2* 辑），88:451–491，1968年。

[ALR07] Alejandro Adem、Johann Leida 和 Yongbin Ruan。《轨形与弦式拓扑》，剑桥数学丛书第 171 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2007年。[AMR95] Selman Akbulut、Tom Mrowka 和 Yongbin Ruan。奇流形上的挠类与 Donaldson 不变量的一个普适约束。《美国数学会汇刊》，347(1):63–76，1995年。[APS76] M. F. Atiyah、V. K. Patodi 和 I. M. Singer。谱不对称性与黎曼几何。III。《剑桥哲学学会数学学报》，79(1):71–99，1976年。[BGV92] Nicole Berline、Ezra Getzler 和 Michèle Vergne。热核与狄拉克算子，数学科学基础原理第 298 卷 /数学科学基础原理/。施普林格出版社，柏林，1992年。[CN15] Diarmuid Crowley 和 Johannes Nordström。 G_2-结构的新不变量。《几何与拓扑》，19(5):2949–2992，2015年。[CW83] Arjeh M. Cohen 和 David B. Wales。 G_2(C) 的有限子群。《通信代数》，11(4):441–459，1983年。[DK90] S. K. Donaldson 和 P. B. Kronheimer。《四维流形的几何》。牛津数学专著丛书。克莱伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，1990年。牛津科学出版物丛书。[Don87] S. K. Donaldson。杨–米尔斯模空间的定向与四维流形拓扑。《微分几何杂志》，26(3):397–428，1987年。[Don02] S. K. Donaldson。杨–米尔斯理论中的 Floer 同调群，剑桥数学丛书第 147 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2002年。在 M. Furuta 和 D. Kotschick 协助下完成。[Don22] S. K. Donaldson。一次穿越 Karem Uhlenbeck 数学世界的旅程。arXiv:2205.08970，2022年。[DS11] Simon Donaldson 和 Ed Segal。高维规范理论，II。载于《微分几何综述》。第十六卷。特殊整体性几何及相关主题，《微分几何综述》第 16 卷，第 1–41 页。国际出版社，萨默维尔，马萨诸塞州，2011年。[DT98] S. K. Donaldson 和 R. P. Thomas。高维规范理论。载于《几何宇宙》（牛津，1996年），第 31–47 页。牛津大学出版社，牛津，1998年。[DW19] Aleksander Doan 和 Thomas Walpuski。关于结合子流形与 Seiberg–Witten 磁单极子的计数。《纯数学与应用数学季刊》，15(4):1047–1133，2019年。[Flo88] Andreas Floer。三维流形的不变量。《数学物理通讯》，240(2):215–118，1988年。[GM93] Robert E. Gompf 和 Tomasz S. Mrowka。不可约四维流形未必是复流形。《数学年刊》（第 2 辑），138(1):61–111，1993年。[GM23] Dylan Galt 和 Langte Ma。平坦丛族上的 G_2-瞬子与超辛四维流形。准备中，2023年。[Gri95] Robert L. Griess, Jr.。关于 G_2 的基本共轭定理。《发明数学》，121(2):257–277，1995年。[Hae90] André Haefliger。轨形空间。载于《根据 Mikhael Gromov 的双曲群论》（伯尔尼，1988年），数学进展第 83 卷，第 203–213 页。Birkhäuser 波士顿，波士顿，马萨诸塞州，1990年。[Joy96] Dominic D. Joyce。具有 G_2 全纯的紧致黎曼七维流形。I、II。《微分几何杂志》，43(2):291–328，329–375，1996年。[Joy00] Dominic D. Joyce。具有特殊整体性的紧致流形。牛津数学专著丛书。牛津大学出版社，牛津，2000年。[JU21] D. Joyce 和 M. Upmeier。具有规范群 $SU(m)$ 或 $U(m)$ 的 G_2-瞬子模空间的典范定向。《微分几何杂志》，待刊，2021年。[Kaw81] Tetsuro Kawasaki。 V-流形上椭圆算子的指标。《名古屋数学杂志》，84:135–157，1981年。[KM07] Peter Kronheimer 和 Tomasz Mrowka。《磁单极子与三维流形》，新数学专著丛书第 10 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2007年。

[KM11] P. B. Kronheimer 和 T. S. Mrowka。Khovanov 同调是一个平凡结检测器。《数学研究所高等研究院公报》，(113):97–208，2011年。[KN63] Shoshichi Kobayashi 和 Katsumi Nomizu。《微分几何基础》。第 I 卷。Interscience Publishers（John Wiley & Sons, Inc. 的一个分部），纽约-伦敦，1963年。[Kro91] P. B. Kronheimer。库默尔曲面上的瞬子不变量和平坦联络。《杜克数学杂志》，64(2):229–241，1991年。[Kro05] P. B. Kronheimer。由高秩丛得到的四维流形不变量。《微分几何杂志》，70(1):59–112，2005年。[LGTX07] Camille Laurent-Gengoux、Jean-Louis Tu 和 Ping Xu。群胚上主丛的切恩-韦伊映射。《数学杂志》，255(3):451–491，2007年。[LM89] H. Blaine Lawson, Jr. 和 Marie-Louise Michelsohn。《自旋几何》，普林斯顿数学丛书第38卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1989年。[Ma20] Langte Ma。同调 $S^1 \times S^3$上的古田-大田不变量的外科手术与切除。《微分几何杂志》，即将出版，2020年。[Moe02] Ieke Moerdijk。作为群胚的轨形：导论。载于《数学与物理中的轨形》（威斯康星州麦迪逊，2001年），《当代数学》第310卷，第205–222页。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2002年。[Nak88] Hiraku Nakajima。高维中杨-米尔斯联络模空间的紧性。《日本数学会杂志》，40(3):383–392，1988年。[Sat56] I. Satake。关于流形概念的一种推广。《美国国家科学院院刊》，42:359–363，1956年。[Sca20] Christopher Scaduto。计算 Joyce 紧致G_2流形的ν不变量。arXiv:2008.07239，2020年。[SE09] Henrique N. Sá Earp。 G_2流形上的瞬子。伦敦帝国理工学院博士论文，2009年。[Seg74] Graeme Segal。范畴与上同调理论。《拓扑学》，13:293–312，1974年。[SW17] Dietmar A. Salamon 和 Thomas Walpuski。八元数札记。载于《2016年格科瓦几何与拓扑会议论文集》，第1–85页。格科瓦几何/拓扑会议（GGT），格科瓦，2017年。[SY17] Shu Shen 和 Jianqing Yu。轨形上的平坦向量丛与解析挠率。《分析与几何通讯》，即将出版，2017年。[Tau11] Clifford Henry Taubes。《微分几何》，牛津研究生数学教材第23卷。牛津大学出版社，牛津，2011年。丛、联络、度量与曲率。[Thu97] William P. Thurston。《三维几何与拓扑》。第1卷，普林斯顿数学丛书第35卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1997年。Silvio Levy 编。[Uhl82] Karen K. Uhlenbeck。曲率有 L^p 界的联络。《数学物理通讯》，83(1):31–42，1982年。[Wal13] Thomas Walpuski。 G_2流形上的瞬子。2013年。博士论文——伦敦帝国理工学院。[Weh05] Katrin Wehrheim。带拉格朗日边界条件的反自对偶瞬子。I. 椭圆理论。《数学物理通讯》，254(1):45–89，2005年。

西蒙斯几何与物理中心，尼科尔斯路100号，石溪，纽约州11790电子邮箱地址：
lma@scgp.stonybrook.edu