arXiv:2304.00607v2 [math.GR] 8 Oct 2023

经典型复李群的三次有界上同调

Carlos de la Cruz Mengual

摘要。我们证明了 Monod 同构猜想对每个经典型复单李群的三次有界上同调均成立。我们的主要工具是一条三次情形下具有最优范围的有界上同调稳定性定理，该定理由作者和 Hartnick 此前的稳定性结果逐步推广而来。这一推广过程依赖于我们的研究框架中出现的一种变体；这种现象类似于 Galatius–Kupers–Randal-Williams 意义下近期发现的次级稳定性现象。

1. 引言

1.1. **主要结果的陈述**。 本文是通过稳定化技术显式计算李群连续有界上同调系列论文中的第三篇（参见前作 [11, 12]）。连续有界上同调理论由 Burger 和 Monod 在 21 世纪初发展起来 [6, 28]，是著名的离散群概念的一种拓扑精化（由 Johnson、Trauber 和 Gromov [19] 独立提出），并在几何、动力系统和刚性理论中有强大的应用 [8, 14, 28]。

尽管连续有界上同调威力强大，其计算仍然是一个公认的难题。在李群的情形下，这个问题可以归结为连通半单情形；其性质由著名的

同构猜想。 对于任意有限中心的连通半单李群 G，比较映射 $c^*: \mathrm{H}^*_{\mathrm{b}}(G) \to \mathrm{H}^*(G)$ 在每个次数上都是同构。

这里，我们用 $\mathrm{H}^*(G)$ 表示 G 的连续群上同调，其系数取在平凡的 G-模 $\mathbb{R}$中；用 $\mathrm{H}^*_{\mathrm{b}}(G)$ 表示相应的连续有界上同调。比较映射 c^* 通过遗忘一个上同调类的有界性来定义。同构猜想由 Monod 在 2006 年的 ICM 演讲中以这种形式提出 [27]。此前，Dupont 提出的满射性问题 [9], 已在多种情形下得到肯定回答，例如 [21, 25]。我们强调，借助 van Est 同构（例如参见 [2, Cor. XI.5.6] 或 [33]）以及关于紧对称空间上同调的经典结果（例如参见 [18, 26]），李群的连续上同调已得到充分理解。

除平凡的零次和一次情形外，Burger 和 Monod 已在二次情形下完整证明了同构猜想 [5]。然而，在 ≥ 3 次情形下，过去二十年来，这一猜想鲜有进展。在三次情形下，该猜想已对以下群得到验证：

$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ [7, 30] 和 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ [1, 30, 17, 3]。在更高次情形下，我们对这一猜想的理解仍十分有限；目前仅知它在 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ [20] 的四次情形下成立。

本文旨在为同构猜想提供更多支持证据。

定理 1. 对于每个经典型连通单复李群 G，同构猜想在三次情形下成立。特别地，我们有 $\mathrm{H}^3_{\mathrm{b}}(G) \cong \mathrm{H}^3(G) \cong \mathbb{R}$。

这一陈述涵盖了四个复经典族 $\mathbf{A}_r$, $\mathbf{B}_r$, $\mathbf{C}_r$, $\mathbf{D}_r$，它们由局部同构于以下群的连通李群构成：

$$\mathrm{SL}_{r+1}(\mathbb{C}), \quad \mathrm{SO}_{2r+1}(\mathbb{C}), \quad \mathrm{Sp}_{2r}(\mathbb{C}), \quad \mathrm{SO}_{2r}(\mathbb{C}). \tag{1.1}$$

分别地。在每种情形下，r 表示该群的秩；除 $\mathrm{SO}_2(\mathbb{C})$（阿贝尔群）和 $\mathrm{SO}_4(\mathbb{C})$（含有两个简单因子）外，当$r \geq 1$时，这些群都是简单李群。

关于李群连续有界上同调的非消失性结果，在研究流形基本群表示时有重要应用，尤其是研究其模空间和变形时。现有文献对以厄米目标为值域的曲面群表示进行了广泛研究，是这一论断最突出的例子（参见例如 [4]）。这一情形中相关的上同调依据是：厄米型非紧李群的 $\mathrm{H}^2_{\mathrm{b}}$ 不消失。

有界上同调方法也已成功应用于研究三维流形群到$\mathrm{PSL}_n(\mathbb{C})$的表示——该群具有非消失的$\mathrm{H}^3_{\mathrm{b}}$——并在证明有趣的刚性现象方面发挥了重要作用（例如，参见 [3, 13]）。我们希望定理 1 能成为未来研究三维流形群到更一般复李群的表示簇的基础。

1.2. **有界上同调稳定性的作用**。 以 r 为指标的四列群序列（列于（1.1）中）均可整理为递增的包含链

$$S_0 \overset{\iota_0}{\hookrightarrow} S_1 \overset{\iota_1}{\hookrightarrow} S_2 \overset{\iota_2}{\hookrightarrow} \cdots \hookrightarrow S_r \overset{\iota_r}{\hookrightarrow} S_{r+1} \hookrightarrow \cdots \tag{1.2}$$

其中，S_r 是秩为 r 的群，且嵌入 ι_r 在适当的基下是分块嵌入。关于这些族中各群的三次连续有界上同调的下述定理，在定理 1的证明中起关键作用。

定理 2. 各经典族中的嵌入 ι_r 诱导出同构

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A}_r)\quad & \mathrm{H}^3_{\mathrm{b}}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})) \overset{\cong}{\longleftarrow} \mathrm{H}^3_{\mathrm{b}}(\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})) \overset{\cong}{\longleftarrow} \cdots \overset{\cong}{\longleftarrow} \mathrm{H}^3_{\mathrm{b}}(\mathrm{SL}_{r+1}(\mathbb{C})) \overset{\cong}{\longleftarrow} \cdots \\
(\mathbf{B}_r)\quad & \mathrm{H}^3_{\mathrm{b}}(\mathrm{SO}_3(\mathbb{C})) \overset{\cong}{\longleftarrow} \mathrm{H}^3_{\mathrm{b}}(\mathrm{SO}_5(\mathbb{C})) \overset{\cong}{\longleftarrow} \cdots \overset{\cong}{\longleftarrow} \mathrm{H}^3_{\mathrm{b}}(\mathrm{SO}_{2r+1}(\mathbb{C})) \overset{\cong}{\longleftarrow} \cdots \\
(\mathbf{C}_r)\quad & \mathrm{H}^3_{\mathrm{b}}(\mathrm{Sp}_2(\mathbb{C})) \overset{\cong}{\longleftarrow} \mathrm{H}^3_{\mathrm{b}}(\mathrm{Sp}_4(\mathbb{C})) \overset{\cong}{\longleftarrow} \cdots \overset{\cong}{\longleftarrow} \mathrm{H}^3_{\mathrm{b}}(\mathrm{Sp}_{2r}(\mathbb{C})) \overset{\cong}{\longleftarrow} \cdots \\
(\mathbf{D}_r)\quad & \mathrm{H}^3_{\mathrm{b}}(\mathrm{SO}_6(\mathbb{C})) \overset{\cong}{\longleftarrow} \mathrm{H}^3_{\mathrm{b}}(\mathrm{SO}_8(\mathbb{C})) \overset{\cong}{\longleftarrow} \cdots \overset{\cong}{\longleftarrow} \mathrm{H}^3_{\mathrm{b}}(\mathrm{SO}_{2r}(\mathbb{C})) \overset{\cong}{\longleftarrow} \cdots
\end{aligned}$$

嵌入 ι_r 在如 (1.2) 所示的包含链中诱导同构的性质

$$\mathrm{H}_{\mathrm{b}}^{q}(S_{r_0}) \xleftarrow{\cong} \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^{q}(S_{r_0+1}) \xleftarrow{\cong} \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^{q}(S_{r_0+2}) \xleftarrow{\cong} \cdots \tag{1.3}$$

对每个次数 $q \in \mathbb{N}$，从某个指标 $r_0 = r_0(q)$ 开始均成立，这称为有界上同调稳定性（简称有界上同调稳定性）。上述赋值 $q \mapsto r_0(q)$ 称为有界上同调稳定范围。

定理 2 确定了最优的（即可能的最低）有界上同调稳定范围 $r_0(3)$ 在次数 $q = 3$上对四个复经典族成立。对于 $\mathbf{A}_r$ 族，定理 2 由 Bucher、Burger 和 Iozzi 证明[3, 定理 2], ，其证明依托 Monod 的工作 [30]。为其余三个族建立该结论，正是本文的核心。

同构猜想若成立，便会推出所有经典李群族都具有有界上同调稳定性——而这些李群族的连续上同调已知具有稳定性。我们从定理 1 推出定理 2 ，可视为这一蕴含的某种逆向推论，其依据是以下原理。若经典族 $(S_r)_{r\in\mathbb{N}}$ 具有有界上同调稳定性，稳定范围为 $r_0(q)$，那么在有界上同调稳定范围内，为所有群 q证明次数为 $(S_r \mid r \geq r_0(q))$ 的同构猜想，就可归结为仅需验证 $S_{r_0(q)}$。在我们的情形中，有利于应用这一原理的具体特点是， $r_0(3)$ 定理 2 确立的范围足够低，从而涵盖了$\mathrm{H}_{\mathrm{b}}^3$ 已得到充分理解的群。事实上，各族相应同构链起点处的所有群 $\mathbf{B}_r$、 $\mathbf{C}_r$、 $\mathbf{D}_r$ 都可视为 $\mathbf{A}_r$ 型。

1.3. **次级稳定性现象**。 为了说明我们对以下族的 定理 2的证明结构 $\mathbf{B}_r$， $\mathbf{C}_r$， $\mathbf{D}_r$，我们重新考察 Bucher–Burger–Iozzi [3] 关于 $\mathbf{A}_r$ 情形的论证。在 [30], Monod 证明了族 $\mathbf{A}_r$具有有界上同调稳定性，并补充了一项结果，确保在有界上同调稳定性的范围之外，还存在若干额外的单射（而非同构）。在三次情形下：

$$\mathrm{H}_{\mathrm{b}}^3(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})) \hookleftarrow \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^3(\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})) \hookleftarrow \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^3(\mathrm{SL}_4(\mathbb{C})) \cong \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^3(\mathrm{SL}_5(\mathbb{C})) \cong \cdots \cong \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^3(\mathrm{SL}_{r+1}(\mathbb{C})) \cong \cdots$$

由于 $\mathrm{H}_{\mathrm{b}}^3(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})) \cong \mathbb{R}$ （见 [1, 7]） ，可推知$\mathrm{H}_{\mathrm{b}}^3(\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}))$ 的维数对于 $n \geq 3$至多为一。维数至少为一这一点则由 [3], 给出，其中基于 Goncharov 的构造 [17]展示了 $\mathrm{H}_{\mathrm{b}}^3(\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}))$ 中的一个非零类。

类比（1.3），我们将 弱 有界上同调稳定性定义为以下性质：嵌入 ι_r 在（1.2）中对每个次数 $r_1 = r_1(q)$ ，从某个指标开始诱导单射 $q \in \mathbb{N}$。复形 $\mathbf{B}_r$、 $\mathbf{C}_r$、 $\mathbf{D}_r$以及其他经典族的（弱）有界上同调稳定性，最初由 Hartnick 和作者在 [12, 定理 A、推论 B]中证明。近期，Kastenholz 和 Sroka [22]将 [12] 中这些族的弱有界上同调稳定性范围扩展至 $r_1(q) = 2q + 2$。

与 Monod 关于 [30] 的弱有界上同调稳定性结果相比， $\mathbf{A}_r$， 参考文献 [12, 22] 中关于复经典族 $\mathbf{B}_r$、 $\mathbf{C}_r$、 $\mathbf{D}_r$ 所确立的范围并不能将问题约化到一个$\mathrm{H}_{\mathrm{b}}^3$ 已知的群。因此，我们迈向 定理 2 的第一步，是改进三次情形下的范围。

关键引理。 分块嵌入 ι_r 诱导单射

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & & \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^3(\mathrm{O}_3(\mathbb{C})) & \hookleftarrow & \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^3(\mathrm{O}_5(\mathbb{C})) & \hookleftarrow \cdots \hookleftarrow & \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^3(\mathrm{O}_{2r+1}(\mathbb{C})) & \hookleftarrow \cdots \\ & & & & & & \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^3(\mathrm{Sp}_2(\mathbb{C})) & \hookleftarrow & \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^3(\mathrm{Sp}_4(\mathbb{C})) & \hookleftarrow \cdots \hookleftarrow & \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^3(\mathrm{Sp}_{2r}(\mathbb{C})) & \hookleftarrow \cdots \\ \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^3(\mathrm{O}_4(\mathbb{C})) & \hookleftarrow & \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^3(\mathrm{O}_6(\mathbb{C})) & \hookleftarrow & \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^3(\mathrm{O}_8(\mathbb{C})) & \hookleftarrow \cdots \hookleftarrow & \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^3(\mathrm{O}_{2r}(\mathbb{C})) & \hookleftarrow \cdots & & & \end{array}$$

备注 1.1。 在关键引理 中省略正交群的行列式为一条件是有意为之。将其提升到行列式为一群是一个技术性问题，我们将在稍后处理。现阶段请读者暂且忽略这一点，并为便于介绍而假设关键引理 已经针对特殊正交群得到了证明。

关键引理 的一个显著方面是，下述事实构成了其证明的核心，该事实将在第4节给出。我们将证明，如果分块嵌入中的 ι_r 对于族 $\mathbf{B}_r$、 $\mathbf{C}_r$、 $\mathbf{D}_r$中的任意一个在$\mathrm{H}_{\mathrm{b}}^3$ 层面诱导出单射，那么必然所有的 ι_r，直到关键引理 所给出的范围，都必须诱导出单射。从这个意义上说，任意范围（例如 [12, 22]）都与其他范围同样适用，因为其中任何一个都能让我们事后建立最优范围。

这一引人入胜的事实的证明依赖于一种与 Galatius–Kupers–Randal-Williams 所说的[15]次级稳定性原则相似的原理。次级稳定性是普通同调领域中持续研究的课题，指的是“稳定性的失效本身也是稳定的”这一现象。在我们的情形中，弱 bc-稳定性的失效由嵌入所诱导的映射的核 ι_r来衡量。我们通过对各向同性射影点构形空间的交比进行参数化，证明这些核具有稳定性；该参数化将在第3节中介绍。

1.4. 的非平凡性$\mathrm{H}_{\mathrm{b}}^3$ 与格罗莫夫范数。 与上文给出的 $\mathbf{A}_r$ 的论证类似，接下来需要证明相关群的 $\mathrm{H}_{\mathrm{b}}^3$ 非平凡。我们将证明：

定理 3。 对于任意 $r \in \mathbb{N}$，令 S_r 为 $\mathrm{SO}_{2r+1}(\mathbb{C})$、 $\mathrm{Sp}_{2r}(\mathbb{C})$ 或 $\mathrm{SO}_{2r}(\mathbb{C})$，并令 $n = n(r)$ 为标准 S_r-表示的维数，使得 $S_r < \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$。那么，限制映射

$$\mathrm{res}_r : \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^3(\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})) \to \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^3(S_r) \tag{1.4}$$

是一个同构，除非 $S_r = \mathrm{SO}_{2r}(\mathbb{C})$ 和 $r \in \{1, 2\}$。

由于 $\mathrm{H}_{\mathrm{b}}^3(\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}))$ 对每个 $n \geq 2$都是一维的，映射（1.4）的单射性意味着所需的非平凡性结论。对于类型为 $\mathbf{B}_r$ 和 $\mathbf{C}_r$的群，这可由下一个命题推出。该命题本身也具有独立意义，因为它还阐明了 $\mathrm{H}_{\mathrm{b}}^3$ 的范数结构。

命题 **4.** 对于 $r \in \mathbb{N}$，若 S_r 在 定理 3 中是 $\mathrm{SO}_{2r+1}(\mathbb{C})$ 或 $\mathrm{Sp}_{2r}(\mathbb{C})$，则 res_r 是等距的.

命题 命题 4 以及定理 2 和 3 的证明（针对以下族） $\mathbf{B}_r$ 和 $\mathbf{C}_r$，见第 5节。另一方面，命题 4 在 $\mathbf{D}_r$ 情形下不成立（见命题 6.12）。因此，我们在第 2 节和 3 节中，对该族的定理 6作单独论证。

1.5. **展望**。 在第 8节中，我们讨论经典复李群的 $\mathrm{H}_{\mathrm{b}}^{3}$ 的范数结构，并针对 $\mathbf{D}_{r}$ 情形提出一个尚未解决的猜想。

只需稍加整理抛物子群的各种 Levi 因子的类型，就应该能够运用我们的思路，证明实分裂李群 $\mathrm{SO}_{+}(r+1,r)$、 $\mathrm{Sp}_{2r}(\mathbb{R})$ 和 $\mathrm{SO}_{+}(r,r)$ 的三次同构猜想。一般而言，我们预期经典群在三次情形下的情况完全由秩一情形所决定。

最后，一个令人振奋且可能富有成果的研究方向，是进一步将次级稳定性技术应用于有界上同调。这有助于优化现有的稳定范围，并最终推动高次有界上同调的新计算。

致谢。 我谨向 Marc Burger 致以谢意，感谢他提出了促成本研究的问题。我也感谢 Uri Bader 与我进行了许多有益的讨论。我要感谢 Tobias Hartnick 与我合作完成了两篇前作 [11, 12], ，它们是本文不可或缺的基础；也感谢他在本项目的整个发展过程中给予的宝贵反馈。我感谢 Manuel Krannich 向我介绍次级稳定性的概念，并对本文的早期版本提出意见。最后，我感谢 Nicolas Monod 建议在 引理 6.1 的证明中转而采用离散有界上同调。

本工作包含我的博士论文中的成果[10], ，并于在以色列魏茨曼科学研究所进行博士后研究奖学金期间完成。感谢瑞士国家科学基金会通过编号为 188010 的早期博士后流动资助提供的支持。

2. 记号与基本假设

2.1. **配备双线性型的空间的记号**。在本文其余部分，我们将遵循 [12, §2], 中的记号，现将其概述如下。由于我们只考虑 $\mathbb{C}$上的对称或反对称配备双线性型的空间，因此记号将略作简化。

设 $\varepsilon \in \{\pm 1\}$。一个 ε-对称配备双线性型的空间是一个二元组 (V,ω)，其中包含一个有限维 $\mathbb{C}$-向量空间 V以及一个 ε-对称双线性型 $\omega : V \times V \to \mathbb{C}$。我们用 $q(v) := \omega(v,v)$ 表示该二次型。 (V,ω) 的秩是 V的全各向同性子空间所能达到的最大维数。任何维数为 n 的非退化 ε-对称空间 (V,ω) 都可分解为配备双线性型的空间的直和

$$V \cong \mathcal{H}_{\varepsilon}^{\oplus r} \oplus \mathcal{E}^{\oplus d}, \tag{2.1}$$

其中 r 是 (V,ω)的秩， $\mathcal{H}_{\varepsilon}$ 是 ε-双曲平面， $\mathcal{E}$ 是欧几里得直线，且 $d = n-2r \in \{0,1\}$。此外，如果 $\varepsilon = -1$，那么 $d = 0$。我们将 $(V_r^{\varepsilon,d}, \omega_r^{\varepsilon,d})$ 称为等式（2.1）右侧所形成的空间。一个有序基 $\mathscr{B}^{\varepsilon,d}_{r} = \{e_r, \dots, e_1, dh, f_1, \dots, f_r\}$ 的

$V^{\varepsilon,\ d}_{r}$ 是 $(V_r^{\varepsilon,d},\omega_r^{\varepsilon,d})$ 的适配基，当且仅当 $\langle h\rangle\cong\mathcal{E}$ 且 $\langle e_i,\ f_i\rangle\cong\mathcal{H}$ 对每个 i 都成立。矩阵

$$J_r^{\varepsilon,d}:=\begin{pmatrix}0&0&\varepsilon Q_r\\0&1_d&0\\Q_r&0&0\end{pmatrix}\in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}),$$

在基 $\mathscr{B}^{\varepsilon,\ d}_{r}$ 下表示形式 $\omega^{\varepsilon,\ d}_{r}$，其中 $Q_r\in \mathrm{M}_r(\mathbb{C})$ 是在反对角线上为 1、其余位置为 0 的矩阵（若 $d=0$，则省略中间的行和列）。

令 $G^{\varepsilon,\ d}_{r}$ 为 $(V_r^{\varepsilon,d},\omega_r^{\varepsilon,d})$ 的自同构群，$S^{\varepsilon,\ d}_{r}<G^{\varepsilon,\ d}_{r}$ 为其行列式为一的子群。$G^{\varepsilon,\ d}_{r}$ 和 $S^{\varepsilon,\ d}_{r}$ 都是 $\mathrm{GL}(V_r^{\varepsilon,d})$ 的复李子群。具体而言，

$$G_r^{\varepsilon,d}=\begin{cases}\mathrm{O}_{2r+1}(\mathbb{C}), & (\varepsilon,d)=(+1,1)\\ \mathrm{Sp}_{2r}(\mathbb{C}), & (\varepsilon,d)=(-1,0)\\ \mathrm{O}_{2r}(\mathbb{C}), & (\varepsilon,d)=(+1,0)\end{cases}$$

注意到

$$G_r^{(+1,1)}\cong\{\pm I\}\times S_r^{(+1,1)}\quad\text{and}\quad G_r^{(-1,0)}=S_r^{(-1,0)}. \tag{2.2}$$

固定 d 后，适配基的包含关系 $\mathscr{B}^{\varepsilon,\ d}_{r}\hookrightarrow\mathscr{B}^{\varepsilon,\ d}_{r+1}$ 导出以下嵌入：

$$G_0^{\varepsilon,d}\overset{\iota_0}{\hookrightarrow}G_1^{\varepsilon,d}\overset{\iota_1}{\hookrightarrow}G_2^{\varepsilon,d}\hookrightarrow\cdots\hookrightarrow G_r^{\varepsilon,d}\overset{\iota_r}{\hookrightarrow}G_{r+1}^{\varepsilon,d}\hookrightarrow\cdots \tag{2.3}$$

自同构群及其对应的行列式为一的子群的嵌入 $S^{\varepsilon,\ d}_{r}$。我们稍微滥用一下记号，也用 ι_r 表示嵌入 $S^{\varepsilon,\ d}_{r}\hookrightarrow S^{\varepsilon,\ d}_{r+1}$（另见（1.2））。

2.2. **约定**。在全文中，我们将固定选择一对

$$(\varepsilon,d)\in\{(+1,1),(-1,0),(+1,0)\}, \tag{2.4}$$

这分别等价于选择经典族 $\mathbf{B}_r$、$\mathbf{C}_r$、$\mathbf{D}_r$。在可能的情况下，我们省略指标 ε、d，并分别用 V_r、G_r、S_r 等代替 $V^{\varepsilon,\ d}_{r}$、$G^{\varepsilon,\ d}_{r}$、$S^{\varepsilon,\ d}_{r}$ 等。最后，我们令 $n(r):=\dim(V_r)$，并

$$r_0:=\begin{cases}3, & \text{if } (\varepsilon,d)=(+1,0),\\ 1, & \text{otherwise,}\end{cases}\qquad r_1:=\begin{cases}2, & \text{if } (\varepsilon,d)=(+1,0),\\ 1, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

2.3. **主要结果的重新表述**。在本节固定的记号下，我们的主要结果可以简洁地重新表述如下（省略 $\mathbf{A}_r$ 情形下定理 1 和 2）：

关键引理 *bis*。对于 $r\geq r_1$，所诱导的映射 $\iota_r^*:\mathrm{H}^3_{\mathrm{b}}(G_{r+1})\to\mathrm{H}^3_{\mathrm{b}}(G_r)$ 是单射。

定理 1 *bis*。对于 $r\geq r_0$，比较映射 $c^3:\mathrm{H}^3_{\mathrm{b}}(S_r)\to\mathrm{H}^3(S_r)$ 是一个同构。

定理 2（续）。对于 $r\geq r_0$，诱导映射 $\iota_r^*:\mathrm{H}^3_{\mathrm{b}}(S_{r+1})\to\mathrm{H}^3_{\mathrm{b}}(S_r)$ 是一个同构。

定理 3 之. 对于 $r\geq r_0$，限制映射 $\mathrm{res}_r:\mathrm{H}^3_{\mathrm{b}}(\mathrm{SL}_{n(r)}(\mathbb{C}))\to\mathrm{H}^3_{\mathrm{b}}(S_r)$ 是一个同构。

3. 各向同性点的构形空间

3.1. **该簇　各向同性点簇**。我们将考虑以下广义旗簇 y.

De定义 3.1。对于任意 $r \geq r_1$，我们称不可约复射影簇

$$\mathcal{P}_r = \mathcal{P}_r^{\varepsilon,d} := \{[v] \in \mathbb{P}(V_r) \mid q(v) = 0\}$$

为各向同性点簇，其 V_r。根据维特引理 [35, 定理 7。4], , 赋予其 G_r点集的豪斯多夫拓扑后，它是一个紧致齐性 $\mathbb{C}$空间，且勒贝格类是其唯一的 G_r不变测度类。假设 $r \geq r_1$ 排除了两种病态情形：集合 $\mathcal{P}_0$ 为空，以及$\mathcal{P}_1^{(+1,0)}$ 不是不可约代数集。

令 Q_r 为 $[e_r] \in \mathcal{P}_r$ 的稳定子，它是 G_r 的一个极大抛物子群，具有列维分解 $Q_r = U_r \rtimes R_r$，其中 U_r 是幺幂的， R_r 是约化的。在基 $\mathscr{B}_r$ 下表示时，约化因子 $R_r \cong \mathbb{C}^\times \times G_{r-1}$ 由以下分块对角矩阵组成

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

与 $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ 和 $g \in G_{r-1}$。若 Q_r^- 表示 $[f_r] \in \mathcal{P}_r$的稳定子，则 $Q_r \cap Q_r^- = R_r$。
我们关注如何参数化乘积空间$\mathcal{P}_r^k$ 上对角 G_r-作用的一般轨道，其中 $k \in \{3, 4, 5\}$。一般性按测度论意义理解，因此，乘积 $\mathcal{P}_r^k$ 将被视为勒贝格 G_r-空间范畴中的对象。

定义 3.2. 我们将配备博雷尔概率测度之测度类的标准博雷尔空间 X 称为勒贝格空间 。若 X 具有局部紧第二可数群 G的博雷尔作用，且测度类在 G下不变，则称 X 为勒贝格 G- 空间。勒贝格（ G- ）空间之间的态射，是保持测度类的博雷尔（ G- ）映射按零测集取等价类后所得的等价类。

例 3.3. 若赋予代数群 G 的代数 $\mathbb{C}$-簇 X 以勒贝格测度类，则该群的正则作用使其成为一个勒贝格 G-空间。关于 X 上的豪斯多夫拓扑，轨道集 $G\backslash X$ 的博雷尔 σ-代数是标准的（见 [38, 定理 3.1.3]），因此 $G\backslash X$ 是一个勒贝格空间。

若 $v_0, \ldots, v_k$ 都是 V_r 中的非零向量，我们用 $[v_0, \ldots, v_k]$ 作为 $\mathbb{P}(V_r)$ 中点的元组 $([v_0], \ldots, [v_k])$ 的简写。若向量 $v_0, \ldots, v_k$（或任意选取的提升）处于一般位置，我们就称该元组处于一般位置。我们定义子集

$$\mathcal{P}_r^{(k+1)} := \left\{[v_0, \ldots, v_k] \in \mathcal{P}_r^{k+1} \mid \omega(v_i, v_j) \neq 0 \ \forall\, i \neq j\right\}, \tag{3.1}$$

$$\mathcal{P}_r^{\{k+1\}} := \left\{\vec{v} \in \mathcal{P}_r^{(k+1)} \mid \vec{v} \text{ is in general position}\right\} \tag{3.2}$$

两者都是 G_r-不变的， $\mathfrak{S}_k$-不变的[1], 扎里斯基开子集 $\mathcal{P}_r^{k+1}$。特别地，它们也是豪斯多夫开且余零的。此外，若 $\partial_i : \mathcal{P}_r^{k+1} \to \mathcal{P}_r^k$ 是（G_r-等变的）面映射，且其作用是忘掉第 i 个条目（ $i \in \{0, \dots, k\}$，则 $\partial_i(\mathcal{P}_r^{(k+1)}) = \mathcal{P}_r^{(k)}$ 和 $\partial_i(\mathcal{P}_r^{\{k+1\}}) = \mathcal{P}_r^{\{k\}}$。

我们的第一个观察是，在 $\mathcal{P}_r$ 中，三点组只有一个一般的 G_r-轨道。

引理 3.4. 对于任意 $r \geq r_1$，群 G_r 在 $\mathcal{P}_r^{\{3\}}$ 上传递作用。此外，点稳定子 $M_r < G_r$ 存在一个连续满射 $M_r \twoheadrightarrow M_r'$，其核为可解群，其中

$$M_r' = \begin{cases} G_{r-1}^{(+1,0)} & \text{if } (\varepsilon, d) = (+1, 1), \\ G_{r-2} & \text{if } (\varepsilon, d) = (-1, 0), \\ G_{r-2}^{(+1,1)} & \text{if } (\varepsilon, d) = (+1, 0). \end{cases}$$

证明。 对于 $r \geq r_1$，我们定义

$$\phi_2 := e_r + f_r + x_0 \in \mathcal{P}_r \quad \text{where} \tag{3.3}$$

$$x_0 := \begin{cases} 0 & \text{if } (\varepsilon, d) = (-1, 0) \text{ and } r = 1, \\ \sqrt{-2}\, h & \text{if } (\varepsilon, d) = (+1, 1) \text{ and } r = 1, \\ e_{r-1} - f_{r-1} & \text{otherwise,} \end{cases}$$

我们证明，对于任意 $\mathbf{p} = [v_0, v_1, v_2] \in \mathcal{P}_r^{\{3\}}$， 存在 $g \in G_r$ 使得 $g\,\mathbf{p} = [e_r,\ f_r,\ \phi_2]$。事实上，由于 $\langle v_0,\ v_1\rangle < V_r$ 是双曲的且 $(\mathbb{C}^\times)^2 = \mathbb{C}^\times$，存在 $g_1 \in G_r$ 使得

$$g_1\,[v_0, v_1, v_2] = [e_r, f_r, e_r + f_r + x]$$

对于某个 $x \in V_{r-1} < V_r$。这里， $x = 0$ 当且仅当 $n(r) = 2$，而这只有在 $(\varepsilon, d) = (-1, 0)$ 和 $r = 1$时才成立。如果 $n(r) > 2$，那么 $q(x) = -(1 + \varepsilon) = q(x_0)$。现在，根据维特引理，我们找到 $g_2 \in G_{r-1} < G_r$ 使得 $g_2 x = x_0$，从而证明了该断言。

至指标 t　　wo，稳定子 M_r 与 G_{r-1}-作用的点稳定子同构，作用于

$$\mathcal{Q} = \{x \in V_{r-1} \mid q(x) = -(1 + \varepsilon)\}$$

如果 $\varepsilon = -1$，那么 $e_{r-1} \in \mathcal{Q}$， 因此 M_r 映射到 G_{r-2}， 其核可解。如果 $\varepsilon = +1$且 $x \in \mathcal{Q}$ 任意，那么正交分解 $V_{r-1} = \langle x\rangle \oplus \langle x\rangle^\perp$ 意味着 M_r与 $\mathrm{Aut}(\langle x\rangle^\perp, \omega|_{\langle x\rangle^\perp})$ 同构，指标相差至多为二。这就得出了该断言，因为 $\langle x\rangle^\top$ 是非退化的，且在 V_{r-1}中的余维为一。 □

3.2. **4元组和5元组构型上的交比坐标**。 我们将用 $G_r\backslash\mathcal{P}_r^4$ 和 $G_r\backslash\mathcal{P}_r^5$ 来描述这些商空间的勒贝格空间结构，其表述基于 ω-交比；这些交比由 Korányi 和 Reimann [23] 在复双曲几何领域中引入；例如参见 [16]。

[1]按照同调代数中的惯例，我们采用如下约定： $0 \in \mathbb{N}$。集合$\{0, \dots, k\} \subset \mathbb{N}$ 上的对称群记作 $\mathfrak{S}_k$。

定义 3.5。 对于任意满足 $p_i = [v_i]$ 的 $\mathbf{p} = (p_0, p_1, p_2, p_3) \in \mathcal{P}_r^{(4)}$，这些比值

$$\begin{aligned} \mathrm{cr}_0(\mathbf{p}) &:= \frac{\omega(v_0, v_2) \cdot \omega(v_1, v_3)}{\omega(v_0, v_3) \cdot \omega(v_1, v_2)}, \\ \mathrm{cr}_1(\mathbf{p}) &:= \mathrm{cr}_0(p_1, p_2, p_0, p_3)^{-1}, \\ \mathrm{cr}_2(\mathbf{p}) &:= \mathrm{cr}_0(p_2, p_0, p_1, p_3), \end{aligned}$$

与直线代表元的选取 v_i 无关，因此得到 G_r-不变的全纯函数 $\mathrm{cr}_j : \mathcal{P}_r^{(4)} \to \mathbb{C}^\times$，称为 ω-交比。我们将它们视为 G_r-不变的勒贝格空间态射 $\mathrm{cr}_j : \mathcal{P}_r^4 \to \hat{\mathbb{C}}$。我们也记作 $\mathrm{cr}_j^{-1} := 1/\mathrm{cr}_j$。

下一个引理说明了 ω-交比之间的依赖关系，包括其自变量置换的影响。它表明，与 $\mathcal{P}_r$ 中四个点的一般选取相关联的唯一 ω-交比是 cr_0、cr_1、cr_2，且其中任意两个都能确定第三个。其证明只是一个留作读者练习的验证。

引理 3.6. 以下恒等式在 $\mathcal{P}_r^{(4)}$ 中处处成立：

(i) $\mathrm{cr}_0 \circ (01) = \mathrm{cr}_0 \circ (23) = \mathrm{cr}_1^{-1} \circ (02) = \mathrm{cr}_1^{-1} \circ (13) = \mathrm{cr}_2 \circ (12) = \mathrm{cr}_2 \circ (03) = \mathrm{cr}_0^{-1}$.
(ii) $\mathrm{cr}_1 \circ (12) = \mathrm{cr}_1 \circ (03) = \mathrm{cr}_2^{-1} \circ (01) = \mathrm{cr}_2^{-1} \circ (23) = \mathrm{cr}_1^{-1}$.
(iii) $\mathrm{cr}_2 \circ (02) = \mathrm{cr}_2 \circ (13) = \mathrm{cr}_2^{-1}$.
(iv) $\mathrm{cr}_0 \cdot \mathrm{cr}_1^{-1} \cdot \mathrm{cr}_2 = \varepsilon$.

注记 3.7. 我们来考察秩一例子（即 $r = 1$），它们属于定理 2所讨论的族。如果 $(\varepsilon, d) = (-1, 0)$，那么 ω-交比与复射影直线上的经典交比一致，因为 $G_1 = \mathrm{Sp}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 且 $\mathcal{P}_1 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$。我们将继续把这种情形称为经典情形。 引理 3.4 揭示了一个众所周知的事实：任意三元组 $\mathcal{P}_1^{\{3\}}$ 都属于 $(\infty, 0, 1) \in \hat{\mathbb{C}}^3$的轨道。和往常一样，我们将 $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$ 与 $\hat{\mathbb{C}}$ 通过以下方式对应起来：

$$[f_1] \equiv \infty, \quad \text{and} \quad [e_1 + z \cdot f_1] \equiv z \text{ for any } z \in \mathbb{C}. \tag{3.4}$$

回顾一下，对于每个 $\mathbf{p} \in \mathcal{P}_1^{\{4\}}$，交比 $\mathrm{cr}_0(\mathbf{p})$ 是唯一满足 $G_1 \cdot \mathbf{p} = G_1 \cdot (\infty, 0, 1, a)$的数 $a \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0, 1\}$。用勒贝格空间的语言来说，这意味着映射 cr_0 下降为一个同构 $G_1 \backslash \mathcal{P}_1^4 \cong \hat{\mathbb{C}}$。事实上，由于经典情形下 V_1的维数较低，只需一个 ω-交比就能确定其余两个的值。

另一个秩一示例仅在 $(\varepsilon, d) = (+1, 1)$ 的情形下出现，此时得到 $G_1 = \mathrm{O}_3(\mathbb{C})$。与经典情形一样，我们有一个同构 $G_1 \backslash \mathcal{P}_1^4 \cong \hat{\mathbb{C}}$。

与秩一情形不同，单个 ω-交比不足以参数化高秩情形中的一般 4 元组。不过，两个这样的交比就足够了。

命题 3.8。 对于任意 $r \geq 2$，由 $\pi_3 := (\mathrm{cr}_1, \mathrm{cr}_2)$ 定义的勒贝格空间上的 G_r-不变态射 $\pi_3 : \mathcal{P}_r^4 \to \hat{\mathbb{C}}^2$ 下降为一个同构 $G_r \backslash \mathcal{P}_r^4 \cong \hat{\mathbb{C}}^2$。

现在我们说明， ω-交比如何对 $\mathcal{P}_r$ 中五元点组的一般轨道进行参数化。

定义 3.9。 对于 $j \in \{0,1,2\}$，我们定义态射 α_j， β_j， $\gamma_j : \mathcal{P}_r^5 \to \hat{\mathbb{C}}$

$$\begin{aligned}\alpha_j(\mathbf{p}) &:= \mathrm{cr}_j \circ \partial_4(\mathbf{p}) = \mathrm{cr}_j(p_0,p_1,p_2,p_3),\\ \beta_j(\mathbf{p}) &:= \mathrm{cr}_j \circ \partial_3(\mathbf{p}) = \mathrm{cr}_j(p_0,p_1,p_2,p_4),\\ \gamma_j(\mathbf{p}) &:= \mathrm{cr}_j \circ \partial_2(\mathbf{p}) = \mathrm{cr}_j(p_0,p_1,p_3,p_4),\end{aligned}$$

对于 $\mathbf{p} = (p_0,p_1,p_2,p_3,p_4) \in \mathcal{P}_r^{(5)}$， 其中 $\partial_i : \mathcal{P}_r^5 \to \mathcal{P}_r^4$ 表示通常的面算子。与定义 3.5中一样， 令 $\alpha_j^{-1} := 1/\alpha_j$ 并类似地定义 β_j^{-1}， γ_j^{-1} 。

我们可以用 ω-交比来表示一个 5 元组所关联的其余所有交比，这些交比见定义 3.9 。这一事实记录在下一个引理中，验证起来很直接。

引理 3.10。 以下恒等式在 $\mathcal{P}_r^{(5)}$ 中处处成立：

(i) $\mathrm{cr}_0 \circ \partial_1 = \alpha_2\beta_2^{-1}$ (iv) $\mathrm{cr}_0 \circ \partial_0 = \alpha_1\beta_1^{-1}$ (vii) $\alpha_0\gamma_0 = \beta_0$

(ii) $\mathrm{cr}_1 \circ \partial_1 = \beta_1^{-1}\gamma_1$ (v) $\mathrm{cr}_1 \circ \partial_0 = \varepsilon(\alpha_1\alpha_2^{-1}\beta_1^{-1}\gamma_1)$

(iii) $\mathrm{cr}_2 \circ \partial_1 = \varepsilon(\alpha_2^{-1}\beta_1^{-1}\beta_2\gamma_1)$ (vi) $\mathrm{cr}_2 \circ \partial_0 = \alpha_2^{-1}\gamma_1$

由引理 3.6 和 3.10 可得，至多五个交比就足以描述 5 元组的一般轨道。下一个定理指出，只要$\dim(V_r)$ 足够大，五个交比也是必需的。回忆一下， r_1 是在第 (ε,d) 小节末尾定义为 2.1 的函数。

命题 3.11。 对于任意 $r \geq r_1 + 1$， 由 $\pi_4 := (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1)$ 定义的勒贝格空间之间的 G_r-不变态射 $\pi_4 : \mathcal{P}_r^5 \to \hat{\mathbb{C}}^5$ 可下降为一个同构 $G_r\backslash\mathcal{P}_r^5 \cong \hat{\mathbb{C}}^5$。

注 3.12。 在秩一情形下，同构 $G_1\backslash\mathcal{P}_1^5 \cong \hat{\mathbb{C}}^2$ 对 $(\varepsilon,d) \in \{(+1,1),(-1,0)\}$成立。例如，在经典情形下（见 注 3.7），任意 $\mathbf{p} \in \mathcal{P}_1^{\{5\}}$ 都属于元组 $(\infty,0,1,a,b) \in \hat{\mathbb{C}}^5$ 的 G_1-轨道，其中 $a = \alpha_0(\mathbf{p})$ 且 $b = \beta_0(\mathbf{p})$。对于 $(\varepsilon,d) = (+1,0)$的秩二情形， V_2维数较低会产生一个额外关系，从而迫使同构 $G_2\backslash\mathcal{P}_2^5 \cong \hat{\mathbb{C}}^4$成立。

命题 3.8 和 3.11 对于我们证明 关键引理至关重要。反过来，这些命题的证明需要进行一些初等但相当冗长且技术性较强的计算。为了便于阅读，我们选择将其放在附录 A 中。

4. Proof of Key Lemma

4.1. 的上同调刻画$\ker \iota_r^*$。 对于任意 $r \geq 1$，我们考虑复形

$$0 \to L^\infty(\mathcal{P}_r) \xrightarrow{\mathrm{d}_r^0} L^\infty(\mathcal{P}_r^2) \xrightarrow{\mathrm{d}_r^1} L^\infty(\mathcal{P}_r^3) \to \cdots \tag{4.1}$$

对偶巴拿赫 G_r-模，其 G_r-等变余边界映射由交错和 $\mathrm{d}_r^k := \sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i \cdot \partial^i$定义。这里，$\partial^i$是由面映射 $\partial_i : \mathcal{P}_r^{k+1} \to \mathcal{P}_r^k$诱导的算子。

复形（4.1）是 无环的 ，从这个增广复形的同调的意义上来说

$$0 \to \mathbb{R} \xrightarrow{\mathrm{d}_r^{-1}} L^\infty(\mathcal{P}_r) \xrightarrow{\mathrm{d}_r^{0}} L^\infty(\mathcal{P}_r^2) \xrightarrow{\mathrm{d}_r^{1}} L^\infty(\mathcal{P}_r^3) \to \cdots \tag{4.2}$$

在每个次数上都消失。这是因为，注意到对 $L^\infty(\mathcal{P}_r^{k+1})$ 的第一个变量，关于 $\mathcal{P}_r$ 上的准不变概率测度积分，构成了（4.2）的收缩同伦。我们将 $\mathrm{H}_{\mathrm{b}}^q(G_r \curvearrowright \mathcal{P}_r)$ 记为复形 $L^\infty(\mathcal{P}_r^{\bullet+1})^{G_r}$的 G_r-不变量的 4.1）的 q阶同调，并称之为作用的有界上同调 $G_r \curvearrowright \mathcal{P}_r$。

在秩一情形中，作用 $G_1 \curvearrowright \mathcal{P}_1$ 是可 amen 的，因此存在一个典范同构 $\mathrm{H}_{\mathrm{b}}^*(G_1) \cong \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^*(G_1 \curvearrowright \mathcal{P}_1);$，见 [28, 定理 7.5。3]。秩大于一时，同构未必成立，因为此时作用不再是可 amen 的。然而，该作用的有界上同调——或者任何其他 G_r在无环复形上的作用——仍可能包含关于 $\mathrm{H}_{\mathrm{b}}^*(G_r)$的有趣信息。 $\mathrm{H}_{\mathrm{b}}^*(G_r)$ 与 $\mathrm{H}_{\mathrm{b}}^*(G_r \curvearrowright \mathcal{P}_r)$ 之间的确切关系由谱序列给出[11, 命题 2。15], 借助该谱序列，我们证明如下结果

引理 4.1。 对于任意 $r \in \mathbb{N}$，存在一个线性同构 $\ker \iota_r^* \cong \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^3(G_{r+1} \curvearrowright \mathcal{P}_{r+1})$.

证明。 存在一个谱序列 $\mathrm{E}_{\bullet,\bullet}^{\bullet}$ 其最终收敛到零，其第一页项为

$$\mathrm{E}_1^{p,q} = \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^q(G_{r+1}; L^\infty(\mathcal{P}_{r+1}^p))$$

以及微分 $\mathrm{d}^{p,q}_1 : \mathrm{E}^{p,q}_1 \to \mathrm{E}^{p+1,q}_1$ 由算子 d_{r+1}^{p-1} [11, 命题 2。15]。首先注意到 $\mathrm{E}^{p,0}_2 \cong \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^{p-1}(G_{r+1} \curvearrowright \mathcal{P}_{r+1}^1)$ 对所有 $p \geq 1$。此外，由埃克曼–夏皮罗引理[28, 命题 10.1。3], 引理 3.4，以及 [28, 推论 8.5。2], 我们得到：

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_1^{0,q} &= \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^q(G_{r+1}), \\
\mathrm{E}_1^{1,q} &\cong \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^q(Q_{r+1}) \cong \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^q(G_r), \\
\mathrm{E}_1^{2,q} &\cong \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^q(R_{r+1}) \cong \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^q(G_r),
\end{aligned} \qquad \mathrm{E}_1^{3,q} \cong \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^q(M_{r+1}) \cong \begin{cases} \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^q(G_r^{(+1,0)}) & \text{if } (\varepsilon, d) = (+1, 1), \\ \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^q(G_{r-1}) & \text{if } (\varepsilon, d) = (-1, 0), \\ \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^q(G_{r-1}^{(+1,1)}) & \text{if } (\varepsilon, d) = (+1, 0). \end{cases}$$

这里， Q_{r+1}、 R_{r+1}、 M_{r+1} 如第 3.1 小节中所定义。对于 $p \leq 3$，我们有 $\mathrm{E}^{p,1}_1 = \mathrm{E}^{p,1}_2 = 0$以及 $\mathrm{E}^{p,2}_1 = \mathrm{E}^{p,2}_2 = 0.$。后一个等式由二次次数的同构猜想 [5, Lem. 6.1] 得出。事实上，对于任意如 (2.4) 中所示的 (ε, d) 以及任意 r，群 $G_r^{\varepsilon,d}$ 为非厄米型，因此 $\mathrm{H}_{\mathrm{b}}^2(G_r^{\varepsilon,d}) \cong \mathrm{H}^2(G_r^{\varepsilon,d}) = 0$。最后，映射 $\mathrm{d}^0_1 : \mathrm{E}^{0,1}_1 \to \mathrm{E}^{3,1}_1$ 经由上述同构共轭于映射 ι_r^*（例如通过 [11, Lem. 3.7]），因此 $\mathrm{E}^{0,3}_2 \cong \ker \iota_r^*$。综上，我们证明了第二页 $\mathrm{E}^{\bullet,\bullet}_2$ 各项如下面所示。

3	$\ker \iota_r^*$				
2		0	0		
1			0	0	
0					$\mathrm{H}_{\mathrm{b}}^3(G_{r+1} \curvearrowright \mathcal{P}_{r+1})$
	0	1	2	3	4

空白处表示这些项与我们的计算无关。请注意，所有显示的项在第四页 $\mathrm{E}_4^{\bullet,\bullet}$ 之前都保持不变。接下来，箭头

$$\mathrm{d}_4^{0,3} : \ker \iota_r^* \to \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^3(G_{r+1} \curvearrowright \mathcal{P}_{r+1})$$

必须是同构，否则极限 $\mathrm{E}_\infty^3 \neq 0$ 或 $\mathrm{E}_\infty^4 \neq 0$ 将不为零。 □

4.2. **次级稳定性论证**。 命题3.8 和 3.11 以如下陈述的形式参与关键引理 *bis*证明，这让人联想到 Galatius– Kupers–Randal-Williams 意义下的次级稳定性 [15]。

引理 4.2。 对于每个 $r \geq r_1$，线性同构 $\ker \iota_r^* \cong \ker \iota_{r_1}^*$ 成立。

证明。 根据 引理 4.1，我们必须证明该同构

$$\mathrm{H}_{\mathrm{b}}^3(G_{r+1} \curvearrowright \mathcal{P}_{r+1}) \cong \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^3(G_{r_1+1} \curvearrowright \mathcal{P}_{r_1+1}).$$

根据 引理 3.4，不变量空间 $L^\infty(\mathcal{P}_{r+1}^3)^{G_{r+1}}$ 仅由常数组成，因此，在 $\mathrm{H}_{\mathrm{b}}^3(G_{r+1} \curvearrowright \mathcal{P}_{r+1})$中不存在上边界。现在令 D_{r+1}^3 为由交换图定义的有界算子

$$\begin{array}{ccc} L^\infty(\mathcal{P}_{r+1}^4)^{G_{r+1}} & \xrightarrow{\mathrm{d}_{r+1}^3} & L^\infty(\mathcal{P}_{r+1}^5)^{G_{r+1}} \\ {\scriptstyle \pi_3^*}\uparrow \cong & & \cong \uparrow{\scriptstyle \pi_4^*} \\ L^\infty(\hat{\mathbb{C}}^2) & \xrightarrow{D_{r+1}^3} & L^\infty(\hat{\mathbb{C}}^5) \end{array}$$

这里， π_3^* 和 π_4^* 分别是由命题3.8 和3.11中的勒贝格空间态射诱导的同构。注意到 $\ker \mathrm{d}_{r+1}^3 \cong \ker D_{r+1}^3$。
只需证明D_{r+1}^3 与 $r \geq r_1$无关，即可完成证明。事实上，应用引理 3.10后，映射D_{r+1}^3 可表示为

$$D_{r+1}^3 f(\mathbf{x}) = f\left(\varepsilon \frac{a_1 c_1}{a_2 b_1}, \frac{c_1}{a_2}\right) - f\left(\frac{c_1}{b_1}, \varepsilon \frac{b_2 c_1}{a_2 b_1}\right) + f\left(c_1, \varepsilon \frac{a_1 b_2 c_1}{a_2 b_1}\right) - f(b_1, b_2) + f(a_1, a_2) \tag{4.3}$$

对于任意 $f \in L^\infty(\hat{\mathbb{C}}^2)$ 及几乎处处的 $\mathbf{x} = (a_1, a_2, b_1, b_2, c_1) \in \hat{\mathbb{C}}^5$。 □

关键引理 （续）bis的证明。复经典族的（弱）有界上同调稳定性——已在 [12, 定理 A]中证明——意味着$\ker \iota_r^* = 0$ 当 r足够大时成立。结合引理4.2即可完成证明。□

在经典情形（参见 备注 3.7）中，余边界 d_1^3 根据备注 $D_1^3 : L^\infty(\hat{\mathbb{C}}) \to L^\infty(\hat{\mathbb{C}}^2)$ 中讨论的同构3.7 和 3.12，与算子$D_1^3 f = 0$ 共轭。关于 $f \in L^\infty(\mathbb{C})$ 的函数方程称为斯宾斯–阿贝尔函数方程。在一种特定参数化下，它可表示为

$$f\left(\frac{a(1-b)}{b(1-a)}\right) - f\left(\frac{1-b}{1-a}\right) + f\left(\frac{b}{a}\right) - f(b) + f(a) = 0 \quad \text{for a.e. } (a,b) \in \mathbb{C}^2, \tag{4.4}$$

它除相差一个常数因子外的唯一解是布洛赫–维格纳二对数 D （例如参见 [37,§3]）。对于任意 $D^3_\infty := D^3_r$，由（4.3）给出的 $r \geq r_1 + 1$ 表达式产生了斯宾斯–阿贝尔方程的一个高秩类比。关键引理的证明 还推得该方程不存在非平凡解。

推论 4.3。 设 $\varepsilon \in \{\pm 1\}$。若 $f \in L^\infty(\hat{\mathbb{C}}^2)$ 几乎处处满足函数方程 $D^3_\infty f = 0$，则 f 几乎处处恒等于零。□

5. 复经典族 $\mathbf{B}_r$ 和 $\mathbf{C}_r$的定理 2 和定理 3 的证明

在小节 2.2中，我们将一对 $(\varepsilon, d) \in \{(+1,1),(-1,0),(+1,0)\}$ 固定为一项约定。本节中，我们只考虑 $(+1,1)$ 和 $(-1,0)$这两种情形，它们分别对应两个复经典族 $\mathbf{B}_r$ 和 $\mathbf{C}_r$。在这两种情形下，我们都有 $r_0 = r_1 = 1$。

我们首先证明，对于任意 $\mathrm{res}_r : \mathrm{H}^3_{\mathrm{b}}(\mathrm{SL}_{n(r)}(\mathbb{C})) \to \mathrm{H}^3_{\mathrm{b}}(S_r)$， $r \in \mathbb{N}$都是等距的，这正是命题 4的陈述。我们将依据 [3]中的以下结果。下文中，我们用 $\Pi_n : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ 表示不可约的 n维 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$表示，用 b_n 表示有界博雷尔类，其定义见 [3],，它作为向量空间生成 $\mathrm{H}^3_{\mathrm{b}}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}))$。

定理 5.1 (参见 [3, 定理 2])。 对于任意 $n \geq 2$，由 Π_n 诱导的映射 $\Pi_n^* : \mathrm{H}^3_{\mathrm{b}}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})) \to \mathrm{H}^3_{\mathrm{b}}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$是一个等距同构，它将有界博雷尔类 b_n 映射到

$$\Pi_n^*(b_n) = \frac{n(n^2-1)}{6} \cdot b_2.$$

特别地， b_n 的格罗莫夫范数为 $\|b_n\| = n(n^2-1)/6 \cdot v_3$，其中 $v_{\mathbb{H}^3} \approx 1.0149...$ 是 $\mathbb{H}^3$中理想四面体的最大体积。

现在考虑 $r \geq 1$的不可约表示 $\Pi_{n(r)} : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{SL}(V_r) \cong \mathrm{SL}_{n(r)}(\mathbb{C})$。 $n(r)$ 的奇偶性取决于 $(\varepsilon, d) \in \{(+1,1),(-1,0)\}$的选择。需要注意的是，(在共轭意义下) $\Pi_{n(r)}$ 保持了 V_r上的形式 ω_r，这意味着其像包含于 S_r中。我们将用记号 $\Pi_r : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to S_r$ 表示 $\Pi_{n(r)}$的余限制映射。

命题 *命题 4* 的证明。 注意 $\Pi^*_{n(r)} = \bar{\Pi}^*_r \circ \mathrm{res}_r$。由于 $\mathrm{H}^3_{\mathrm{b}}(\mathrm{SL}_{n(r)}(\mathbb{C}))$ 由有界博雷尔类 $b_{n(r)}$ 生成，只需证明等式 $\|\mathrm{res}_r(b_{n(r)})\| = \|b_{n(r)}\|$。事实上，根据 定理 5.1 以及 res_r 和 Π^*_r 均为范数不增映射这一事实，我们有

$$\|b_{n(r)}\| = \|\Pi^*_{n(r)}(b_{n(r)})\| = \|\bar{\Pi}^*_r(\mathrm{res}_r(b_{n(r)}))\| \leq \|\mathrm{res}_r(b_{n(r)})\| \leq \|b_{n(r)}\|,$$

完成证明。 □

对于 (ε, d) 如本节所述，限制映射 $\mathrm{H}_{\mathrm{b}}^{*}(G_r) \to \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^{*}(S_r)$ 由（2.2）和 [28, 推论 8.52]可知是一个同构。这立即意味着关键引理*b*在以下两种情况下原样适用于 S_r 而非 G_r：

Le引理 5.2. 对于 $r \geq r_1 = 1$，诱导映射 $\iota_r^* : \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^{3}(S_{r+1}) \to \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^{3}(S_r)$ 是单射的 . □

还要注意，取决于 (ε, d)，群 S_1 等于 $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{C})$ 或 $\mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$。前一个群等于 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$，后一个群则存在一个等oreн $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \twoheadrightarrow \mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$，例如可见[36, 34]。因此，$S_1$ 属于 $\mathbf{A}_1$型，特别是 $\dim \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^{3}(S_1) = 1$。

关于 定理 *3* 的另一证明 对于 $\mathbf{B}_r$，$\mathbf{C}_r$。若 $r \geq r_0 = 1$，则 $n(r) \geq 2$，因此 $\|b_{n(r)}\| > 0$。结合 命题 4，这证明了 res_r的单射性。满射性则由以下事实得出：对于所有 $r \geq 1$，都有 $\dim \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^{3}(S_r) \leq 1$。而这又是 引理 5.2 以及等式 $\dim \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^{3}(S_1) = 1$的推论。 □

定理 *2* 的证明之二适用于 $\mathbf{B}_r$，$\mathbf{C}_r$。定理 3 之二推出$\dim \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^{3}(S_r) = 1$ 对所有 $r \geq 1$。因此，诱导映射$\iota_r^* : \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^{3}(S_{r+1}) \to \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^{3}(S_r)$——由引理 5.2可知是单射——是同构。□

6. Proof of Theorems 2 and 3 for the complex family $\mathbf{D}_r$

本节中，我们考虑 $(\varepsilon, d) = (+1, 0)$的情形，这对应于 $\mathbf{D}_r$族，并回顾 $n(r) = 2r$，$r_0 = 3$ 和 $r_1 = 2$。请注意，不可约表示的像 $\Pi_{2r} : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{SL}_{2r}(\mathbb{C})$ 不包含于 $S_r = \mathrm{SO}_{2r}(\mathbb{C})$ 对任意 r均如此。这一限制使得无法将第5 节中的论证改编到 $\mathbf{D}_r$ 族的情形。

我们将通过对秩 r 作归纳法来证明定理 3 之二，且不依赖于范数考量。归纳过程基于以下命题。

L引理 6.1。 限制映射$\mathrm{res}_2 : \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^{3}(\mathrm{SL}_4(\mathbb{C})) \to \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^{3}(\mathrm{SO}_4(\mathbb{C}))$ 是单射 *e.*

为了证明 引理 6.1，我们将在相关群的富斯滕贝格边界上实现 res_2。第 6.1 小节汇集了 Goncharov–Bucher–Burger–Iozzi体积余循环 的相关背景知识 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$，它代表有界博雷尔类 $b_n \in \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^{3}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}))$。接着，在第 6.2小节中，我们将讨论 $\mathrm{SO}_4(\mathbb{C})$的富斯滕贝格边界。

6.1. **Goncharov–Bucher–Burger–Iozzi 体积余循环**。本小节内容完全摘自参考文献 [17, 3]。我们将 $\mathbb{P}$ 复射影直线 $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$（与双曲三维空间的边界同构） $\mathbb{H}^3$记为 $\mathrm{Vol}_{\mathbb{P}}$ $\mathbb{P}^4 \to \mathbb{R}$，它是一个函数，将一个 4 元组 $(p_0, p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{P}^4$ 映射为 $\mathbb{H}^3$ 中以 p_i 为顶点的理想四面体的有向体积。除比例因子外，$\mathrm{Vol}_{\mathbb{P}}$ 它是唯一的交错$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$不变连续有界余循环 $\mathbb{P}^4 \to \mathbb{R}$；参见 [1, 7]。

我们可以用布洛赫–维格纳二对数 $\mathrm{Vol}_{\mathbb{P}}$ 来表示 $\mathcal{D}:\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ （参见 [37, §3]），即

$$\mathrm{Vol}_{\mathbb{P}} = \mathcal{D}\circ \mathrm{cr}_0, \tag{6.1}$$

其中 cr_0 是 $\mathbb{P}$ 上的经典交比（参见定义 3.5 和注 3.7）。在识别 $\mathbb{P}\cong\mathbb{C}$ 下，来自（3.4）的等式（6.1）对应于 $\mathrm{Vol}_{\mathbb{P}}(\infty,0,1,z)=\mathcal{D}(z)$.因此， $\mathrm{Vol}_{\mathbb{P}}$ 的余循环方程意味着 $\mathcal{D}$ 满足 Spence–Abel 函数方程（4.4），而 $\mathrm{Vol}_{\mathbb{P}}$ 的交替性转化为以下对称性

$$\mathcal{D}(z)=\mathcal{D}\left(1-\frac{1}{z}\right)=\mathcal{D}\left(\frac{1}{1-z}\right)=-\mathcal{D}\left(\frac{1}{z}\right)=-\mathcal{D}(1-z)=-\mathcal{D}\left(\frac{-z}{1-z}\right). \tag{6.2}$$

在 $\mathbb{C}^n$中，完全旗是满足$\dim(F^j)=j$的子空间序列 $F^0\subset F^1\subset\cdots\subset F^{n-1}\subset F^n$ $F^j\subset\mathbb{C}^n$。群 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ 在 $\mathbb{C}^n$中完全旗的簇 $\mathbb{F}_n$ 上作用传递，标准旗 $\{0\}\subset\langle e_1\rangle\subset\cdots\subset\langle e_1$、 …、 $e_{n-1}\rangle\subset\mathbb{C}^n$ 的稳定子是上三角子群 $P_n<\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$，这是一个极小抛物子群。这将 $\mathbb{F}_n$ 识别为 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$的Furstenberg边界。现在，一个完全仿射旗 $(F,\vec{v})$ 是由一个完全旗 F和一个张成向量元组 $\vec{v}=(v^1,\dots,v^n)$ 组成的对，其满足

$$F^j = F^{j-1}\oplus\langle v^j\rangle \quad \text{for } j=1,\dots,n.$$

我们记 $\mathbb{F}_{n\ ,\mathrm{aff}}$ 表示仿射旗的集合，该集合带有一个投影 $\mathbb{F}_{n,\ \mathrm{aff}}\twoheadrightarrow\mathbb{F}_n$.

定义 6.2。 令 σ_3 表示等价类 $[V;(v^0,\dots,v^3)]$的集合，其中V是一个 $\mathbb{C}$-向量空间， v^0, …， $v^3\in V$是张成 V的向量。如果存在一个线性同构，则等价关系 $[V,(v^j)]\sim[W,(w^j)]$ 成立

$$\phi: V\xrightarrow{\cong} W \text{ with } \phi(v^j)=w^j \text{ for all } j\in\{0,1,2,3\}.$$

注意，由于每个类 $[V;(v^j)]$ 都有一个关于 $0\le m\le 4$的代表元 $[\mathbb{C}^m;(\bar{v}^j)]$，因此 σ_3是一个集合。现在，对于任意 $J=(j_0,\dots,j_3)\in\{0,\dots,n-1\}^4$，我们将 $T_J:\mathbb{F}_{\mathrm{aff}}(\mathbb{C}^n)^4\to\sigma_3$ 设为

$$T_J\big((F_0,\vec{v}_0),\dots,(F_3,\vec{v}_3)\big) := \left[\frac{\langle F_0^{j_0+1},\dots,F_3^{j_3+1}\rangle}{\langle F_0^{j_0},\dots,F_3^{j_3}\rangle};\left(v_0^{j_0+1},\dots,v_3^{j_3+1}\right)\right], \tag{6.3}$$

其中每个$(F_i,\vec{v}_i)\in\mathbb{F}_{n,\ \mathrm{aff}}$满足 $F_i=(F_i^0\subset\cdots\subset F_i^n)$且 $\vec{v}_i=(v_i^1,\dots,v_i^n)$，右侧（6.3）中的向量均视为模 $\langle F_0^{j_0}$的等价类， …以及 $F_3^{j_3}\rangle$。

定义 6.3. 设 $n\ge 2$，并设 $\mathrm{Vol}:\sigma_3\to\mathbb{R}$ 为如下定义的映射

$$\mathrm{Vol}\left[\mathbb{C}^m;(v^0,\dots,v^3)\right] := \begin{cases}\mathrm{Vol}_{\mathbb{P}}[v^0,\dots,v^3] & \text{if } m=2 \text{ and all } v^i\neq 0,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

我们令 $\tilde{B}_n^J:\mathbb{F}^4_{n\ ,\ \mathrm{aff}}\to\mathbb{R}$为任意 $J\in\{0,\dots,n-1\}^4$ 的复合 $\mathrm{Vol}\circ T_J$。该函数与张成向量的选取无关，因此可下降为一个有界博雷尔函数 $B_n^J:\mathbb{F}_n^4\to\mathbb{R}$。此外，求和

$$B_n := \sum_J B_n^J$$

下降为交错的、 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$-不变的有界严格博雷尔余循环 $B_n : \mathbb{F}_n^4 \to \mathbb{R}$ （见[3, 推论 13]）。注意到 $B_2 = \mathrm{Vol}_{\mathbb{P}}$，因此类比地，我们将 B_n 称为（Goncharov–Bucher– Burger–Iozzi）体积余循环。上述有界博雷尔类$b_n \in \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^3(\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})) \cong \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^3(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$，在上文定理 5.1 中提及，其定义为 $b_n := [B_n]$。

尽管 B_n 并非处处连续，但它在以下一般位置集合上连续。

定义 6.4. 我们称一个 4 元组 $(F_0, F_1, F_2, F_3) \in \mathbb{F}_n^4$ 处于一般位置 ，如果

$$\dim\langle F_0^{j_0}, \dots, F_3^{j_3}\rangle = j_0 + \cdots + j_3$$

只要右侧不大于 n即可。我们将 $\mathbb{F}_n^4$ 中处于一般位置的 4 元组所构成的扎里斯基开（因而也是豪斯多夫开且余零）子集记为 $\mathbb{F}_n^{\{4\}}$ 。

引理 6.5. 对于任意 $n \geq 2$和 $J = (j_0, \dots, j_3) \in \{0, \dots, n-1\}^4$， B_n^J在开子集 $\mathbb{F}_n^{\{4\}}$ 上的限制映射是连续的；除非等式

$$\|J\|_1 = j_0 + \ldots + j_3 = n - 2 \tag{6.4}$$

成立，否则它恒等于零。特别地，体积余循环 $B_n : \mathbb{F}_n^4 \to \mathbb{R}$ 在 $\mathbb{F}_n^{\{4\}}$ 上连续。

证明。 参见 [3, 引理 16]之前的讨论。限制映射 $B_n^J|_{\mathbb{F}_n^{\{4\}}}$化为双曲体积函数 $\mathrm{Vol}_{\mathbb{P}}$ 当（6.4）成立时，否则为零。这意味着连续性结论。注意，恰有 $n(n^2-1)/6$ 个元组 J 满足（6.4）。 □

6.2. **的 Furstenberg边界**。 本小节的内容是经典的，例如可见于 [36, §I.7]。我们继续将 $\mathbb{P} := \mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$简记为 $\mathrm{SO}_4(\mathbb{C})$ 作用于全各向同性 射影直线 上 $\mathbb{P}(\mathbb{C}^4)$ （即 $\mathbb{C}^4$ 中的二维线性子空间），并有两个轨道： O^+ 以及 O^-。相应地，这些轨道由如下元素组成

$$l_a^+ := \left\{[1, -t, a, at]^\top \in \mathbb{P}(\mathbb{C}^4) \mid t \in \hat{\mathbb{C}}\right\} \in O^+,$$
$$l_a^- := \left\{[1, a, -t, at]^\top \in \mathbb{P}(\mathbb{C}^4) \mid t \in \hat{\mathbb{C}}\right\} \in O^-,$$

其中 $a \in \hat{\mathbb{C}} \cong \mathbb{P}$ 是相对于基底 $\mathscr{B}_2^{(+1,0)} = \{e_1, e_2, f_2, e_1\}$ 给出的坐标表示。这些直线满足以下性质

$$\begin{cases} l_a^+ \cap l_b^+ = l_a^- \cap l_b^- = \emptyset \quad \text{for } a \neq b, \\ l_a^+ \cap l_b^- = [1, b, -a, ab]^\top. \end{cases}$$

$\mathrm{SO}_4(\mathbb{C})$在乘积 $\mathcal{F} := O^+ \times O^-$ 上的作用是传递的，而点对$(l_0^+, l_0^-) \in \mathcal{F}$的稳定子等于上三角正交矩阵构成的子群。因此，我们将 $\mathrm{SO}_4(\mathbb{C})$ 的Furstenberg边界识别为 $\mathcal{F}$。

存在一个例外等ogeny $\theta : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \twoheadrightarrow \mathrm{SO}_4(\mathbb{C})$，它下降为勒贝格 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$-空间之间的同构，

$$\partial\theta : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \to \mathcal{F}, \quad \partial\theta(a,b) := (l_a^+, l_b^-), \quad a,b \in \hat{\mathbb{C}}. \tag{6.5}$$

以下将 Furstenberg边界嵌入 $\mathcal{F}$ 的完全旗簇中 $\mathbb{C}^4$ 在我们的引理 6.1证明中发挥了关键作用。

De定义 6.6。令 $\rho : \mathcal{F} \to \mathbb{F}_4$ 为如下定义的 $\mathrm{SO}_4(\mathbb{C})$-等变嵌入

$$\rho(l^+, l^-) := \big(\{0\} \subset l^+ \cap l^- \subset l^+ \subset l^+ + l^- \subset \mathbb{C}^4\big).$$

可以得到一个类似的 如果我们选择 l^- 而不是 l^+ 作为这个二维子空间，也可以得到映射 .

注释 6.7。 ρ 的像是一个零测集。特别地， ρ 不保持测度类。

6.3. **的体积余循环的一般值** $\mathrm{SO}_4(\mathbb{C})$。 我们为 Furstenberg边界 $\mathcal{F}$中的点元组引入一般性的概念。

定义 6.8. 对于任意 $k \in \mathbb{N}$，我们定义

$$\mathcal{F}^{\{k+1\}} := \partial\theta^{\times(k+1)}\big(\mathbb{P}^{\{k+1\}} \times \mathbb{P}^{\{k+1\}}\big) \subset \mathcal{F}^{k+1},$$

其中， $\mathbb{P}$ 上标中的括号表示经典情形下的一般子集（3.2）。乘积 $\mathbb{P}^{\{k+1\}} \times \mathbb{P}^{\{k+1\}}$ 按显然的方式视为 $(\mathbb{P} \times \mathbb{P})^{k+1}$ 的子集。

引理 6.9。 以下陈述成立：

(i) 集合 $\mathcal{F}^{\{k+1\}}$ 是 $\mathrm{SO}_4(\mathbb{C})$-不变的余零测博雷尔子集，且等式$\partial_i(\mathcal{F}^{\{k+1\}}) = \mathcal{F}^{\{k\}}$ 对每个 $i \in \{0, \dots, k+1\}$均成立。(ii) 作用 $\mathrm{SO}_4(\mathbb{C}) \curvearrowright \mathcal{F}^{\{3\}}$ 是传递的。(iii)像 $\rho^{\times 4}(\mathcal{F}^{\{4\}})$ 包含于一般位置四元组的集合 $\mathbb{F}_4^{\{4\}}$ 中。

证明。 **(i)** 项由以下事实得出： $\partial\theta$是勒贝格 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 空间的一个同构，且 $\mathbb{P}^{\{k+1\}} \times \mathbb{P}^{\{k+1\}}$ 在 $(\mathbb{P} \times \mathbb{P})^{k+1}$ 中是不变的、博雷尔的且余零的。**(ii)** 项是由作用 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \curvearrowright \mathbb{P}^{\{3\}}$ 的传递性得出的。对于 **(iii)**，令 $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_3)$ 和 $\mathbf{b} = (b_0, \dots, b_3) \in \mathbb{P}^{\{4\}}$。这些元组的一般性意味着，在识别 $\mathbb{P} \cong \hat{\mathbb{C}}$下，它们的各个分量两两不同。设 $l_i^+ := l_{a_i}^+$ 和 $l_i^- := l_{b_i}^-$， 于是

$$\big((l_0^+, l_0^-), \dots, (l_3^+, l_3^-)\big) = (\partial\theta_0)^4(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathcal{F}^4.$$

我们断言，元组 $((l_0^+, l_0^-), \dots, (l_3^+, l_3^-))$ 在 $\rho^{\times 4}$ 下的像处于一般位置。事实上，若令 $p_i := l_i^+ \cap l_i^- \in \mathcal{P}_2$，那么例如，对于互不相同的 i， $j \in \{0,1,2,3\}$，有

$$\dim(p_i + p_j) = 1 + 1 - \dim(l_i^+ \cap l_i^- \cap l_j^+ \cap l_j^-) = 2,$$
$$\dim(p_i + l_j^+) = 1 + 2 - \dim(l_i^+ \cap l_i^- \cap l_j^+) = 3,$$

$$\dim(p_i + (l_j^+ + l_j^-)) = 1 + 3 - \dim(l_i^+ \cap l_i^- \cap (l_j^+ + l_j^-)) = 4,$$

其中我们用到了 $l_i^+ \cap l_j^+ = l_i^- \cap l_j^- = \{0\}$ 和

$$l_i^+ \cap l_i^- \cap (l_j^+ + l_j^-) \subset (l_i^+ \cap l_i^- \cap l_j^+) + (l_i^+ \cap l_i^- \cap l_j^-) = \{0\}.$$

其余验证与上述三个验证完全类似。 □

在下面的引理中，我们考察体积余循环 B_n 在一般位置集 $\mathcal{F}^{\{4\}}$ 经包含映射 $\rho^{\times 4} : \mathcal{F}^4 \to \mathbb{F}_4^4$ 的像上的取值。为简便起见，在证明中，我们将指标的四元组 $(j_0, \dots, j_3)$ 记作 $j_0 \cdots j_3$，省略括号和逗号。

引理 6.10。 对任意 $(a, b) \in \hat{\mathbb{C}}^2$，设 $F_{(a,b)} := \rho\big(\partial\theta(a, b)\big)$ 和 $F_a := F_{(a,a)}$。那么对所有 $(a, b) \in (\mathbb{C} \smallsetminus \{0, 1\})^2$，等式

$$B_4(F_\infty, F_0, F_1, F_{(a,b)}) = 2\,(\mathcal{D}(a) + \mathcal{D}(b))$$

成立。特别地，映射 $B_4 \circ \rho^{\times 4}|_{\mathcal{F}^{\{4\}}} : \mathcal{F}^{\{4\}} \to \mathbb{R}$ 非零。

证明。 我们断言，以下是非零求和项 B_4^J 的 B_4（参见 引理 6.5）：

$$B_4^J(F_\infty, F_0, F_1, F_{(a,b)}) = \begin{cases} \mathcal{D}(b) & \text{if } J \in \{2000, 0200, 0020, 0002\}, \\ -\mathcal{D}(b/a) & \text{if } J \in \{1100, 0011\}, \\ \mathcal{D}\left(\frac{1-b}{1-a}\right) & \text{if } J \in \{1010, 0101\}, \\ -\mathcal{D}\left(\frac{a(1-b)}{b(1-a)}\right) & \text{if } J \in \{1001, 0110\}. \end{cases} \tag{6.6}$$

首先，若我们令 $\phi_{ab} := e_1 + b\,e_2 - a\,f_2 + ab\,f_1$ 对任意 $a,\ b \in \mathbb{C}$，则

$$l_a^+ = \langle e_1 - a\,f_2,\ e_2 + a\,f_1 \rangle, \quad l_b^- = \langle e_1 + b\,e_2,\ b\,f_1 - f_2 \rangle, \quad \text{and} \quad l_a^+ \cap l_b^- = \langle \phi_{ab} \rangle,$$

因此，对于 $a,\ b \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0, 1\}$，

$$\begin{aligned} F_\infty &= \big(\{0\} \subset \langle f_1 \rangle \subset \langle f_1, f_2 \rangle \subset \langle f_1, f_2, e_2 \rangle \subset \mathbb{C}^4\big), \\ F_0 &= \big(\{0\} \subset \langle e_1 \rangle \subset \langle e_1, e_2 \rangle \subset \langle e_1, e_2, f_2 \rangle \subset \mathbb{C}^4\big), \\ F_{(a,b)} &= \big(\{0\} \subset \langle \phi_{ab} \rangle \subset \langle \phi_{ab}, e_1 - a\,f_2 \rangle \subset \langle \phi_{ab}, e_1 - a\,f_2, e_1 + b\,e_2 \rangle \subset \mathbb{C}^4\big). \end{aligned}$$

现在，我们有：

$$\begin{aligned} B_4^{2000}(F_\infty, F_0, F_1, F_{(a,b)}) &= \mathrm{Vol}\left[\frac{\langle f_1, f_2, e_2 \rangle + \langle e_1 \rangle + \langle \phi_{11} \rangle + \langle \phi_{ab} \rangle}{\langle f_1, f_2 \rangle + \{0\} + \{0\} + \{0\}}; \big(e_2, e_1, \phi_{11}, \phi_{ab}\big)\right] \\ &= \mathrm{Vol}\left[V_2^{(+1,0)}/\langle f_1, f_2 \rangle; \big(e_2, e_1, \phi_{11}, \phi_{ab}\big)\right] \\ &\overset{(*)}{=} \mathrm{Vol}\left[\mathbb{C}^2; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & b \end{pmatrix}\right] \\ &= \mathrm{Vol}_{\mathbb{P}}(\infty, 0, 1, b) = \mathcal{D}(b), \quad \text{and} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&B_4^{0011}(F_\infty, F_0, F_1, F_{(a,b)}) = \\
&\quad = \mathrm{Vol}\left[\frac{\langle f_1\rangle + \langle e_1\rangle + \langle \phi_{11}, e_1 - f_2\rangle + \langle \phi_{ab}, e_1 - a f_2\rangle}{\{0\} + \{0\} + \langle \phi_{11}\rangle + \langle \phi_{ab}\rangle}; \left(f_1, e_1, e_1 - f_2, e_1 - a f_2\right)\right] \\
&\quad = \mathrm{Vol}\left[V_2/\langle \phi_{11}, \phi_{ab}\rangle; \left(f_1, e_1, e_1 - f_2, e_1 - a f_2\right)\right] \\
&\quad \overset{(**)}{=} \mathrm{Vol}\left[\mathbb{C}^2; \begin{pmatrix} 0 & \frac{a-b}{a-1} & 1 & b \\ -b^{-1} & 0 & 1 & a \end{pmatrix}\right] \\
&\quad = \mathrm{Vol}_{\mathbb{P}}(\infty, 0, 1, a/b) = \mathcal{D}(a/b) = -\mathcal{D}(b/a).
\end{aligned}
$$

在情形 $J = 0011$ 下的最后一个等式，来自（6.2）中的一个对称性。等式 $(*)$ 和 $(**)$ 则源自 σ_3中的等价概念，并分别由以下满同态实现：T_1，$T_2 : V_2 \twoheadrightarrow \mathbb{C}^2$ 定义如下：

$$
\begin{aligned}
&T_1 : e_1 \mapsto (1,0)^\top, \quad e_2 \mapsto (0,1)^\top, \quad f_2 \mapsto (0,0)^\top, \quad f_1 \mapsto (0,0)^\top; \\
&T_2 : e_1 \mapsto \left(\tfrac{a-b}{a-1}, 0\right)^\top, \ e_2 \mapsto \left(-1, \tfrac{1-b}{b}\right)^\top, \ f_2 \mapsto \left(\tfrac{1-b}{a-1}, -1\right)^\top, \ f_1 \mapsto \left(0, -b^{-1}\right)^\top.
\end{aligned}
$$

注意 $\ker T_1 = \langle f_1, f_2\rangle$ 和 $\ker T_2 = \langle \phi_{11}, \phi_{ab}\rangle$。最后，将 (6.6) 中的各项相加，并利用 $\mathcal{D}$ 满足斯宾斯–阿贝尔方程 (4.4) 这一事实：

$$
\begin{aligned}
B_4(F_\infty, F_0, F_1, F_{(a,b)}) &= 4\,\mathcal{D}(b) + 2\left(-\mathcal{D}\left(\tfrac{a(1-b)}{b(1-a)}\right) + \mathcal{D}\left(\tfrac{1-b}{1-a}\right) - \mathcal{D}\left(\tfrac{b}{a}\right)\right) \\
&= 4\,\mathcal{D}(b) + 2\big(\mathcal{D}(a) - \mathcal{D}(b)\big) = 2\big(\mathcal{D}(a) + \mathcal{D}(b)\big). \qquad \square
\end{aligned}
$$

6.4. **引理 引理 6.1的证明**。若 $\rho : \mathcal{F} \to \mathbb{F}_4$ 诱导了一个 L^∞-复形之间的态射，那么根据函子性 [28, 命题 8.4，2], 便会在余循环层面实现 res_2 引理 6.1中的映射，而 的单射性将由 res_2 推出，引理 6.10。然而，由于 ρ 不保持测度类，因此不可能诱导出 L^∞-空间之间的映射。

为绕开这一测度论上的困难，我们将考虑如下交换图

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{H}^3_{\mathrm{b}}(\mathrm{SL}_4(\mathbb{C})) & \xrightarrow{\mathrm{res}_2} & \mathrm{H}^3_{\mathrm{b}}(\mathrm{SO}_4(\mathbb{C})) \\
{\scriptstyle \mathrm{id}^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}^*} \\
\mathrm{H}^3_{\mathrm{b}}(\mathrm{SL}_4(\mathbb{C})^\delta) & \xrightarrow{\mathrm{res}_2^\delta} & \mathrm{H}^3_{\mathrm{b}}(\mathrm{SO}_4(\mathbb{C})^\delta)
\end{array} \tag{6.7}
$$

其中，群上的上标 $(-)^\delta$ 表示将这些群视为离散群。换言之，映射 res_2 “分解”到其离散对应映射 res_2^δ 上。这个观察对我们很有帮助，因为在余循环层面，后一个映射比前一个更容易处理。

作为离散群的作用，$\mathrm{SL}_4(\mathbb{C})^\delta \curvearrowright \mathbb{F}_4$ 和 $\mathrm{SO}_4(\mathbb{C})^\delta \curvearrowright \mathcal{F}$ 是可 amen 的。事实上，它们的点稳定子同构于上三角子群，因此在抽象意义上是可解的。

因此，我们有典范同构

$$\mathrm{H}_{\mathrm{b}}^{*}(\mathrm{SL}_4(\mathbb{C})^{\delta}) \cong \mathrm{H}^{*}(\ell^{\infty}(\mathbb{F}_n^{\bullet+1})^{\mathrm{SL}_4(\mathbb{C})}) \quad \text{and} \quad \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^{*}(\mathrm{SO}_4(\mathbb{C})^{\delta}) \cong \mathrm{H}^{*}(\ell^{\infty}(\mathcal{F}^{\bullet+1})^{\mathrm{SO}_4(\mathbb{C})}).$$

此外，现在定义良好的复形态射

$$\rho^{*} : \ell^{\infty}(\mathbb{F}_4^{\bullet+1}) \to \ell^{\infty}(\mathcal{F}^{\bullet+1}) \tag{6.8}$$

实现了限制映射 $\mathrm{res}_2^{\delta} : \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^{*}(\mathrm{SL}_4(\mathbb{C})^{\delta}) \to \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^{*}(\mathrm{SO}_4(\mathbb{C})^{\delta})$（见 [14, 定理 4.23、4.15]）。

证明 引理 6.1 的最后一个要素是 Monod 提出的“等变提升”定理 [29], ，该定理将使得图（6.7）中的映射能够在上循环层面实现。对于任意测度空间 X，我们将有界可测函数组成的巴拿赫空间 $X \to \mathbb{R}$ （不对零测集取模）记为 $\mathscr{L}^{\infty}(X)$。若 $\varphi \in \mathscr{L}^{\infty}(X)$，我们记 $[\varphi]$ 为其在 $L^{\infty}(X)$中的等价类。

定理 6.11 （见 [29]）。 设 G 是一个局部紧群，并在可微流形 C^1上具有一个可 *amen* 的 X-作用。那么对于每个 $k \in \mathbb{N}$，存在一个 G-等变提升

$$s^{k} : L^{\infty}(X^{k+1}) \to \mathscr{L}^{\infty}(X^{k+1})$$

典范投影 $\mathscr{L}^{\infty}(X^{k+1}) \twoheadrightarrow L^{\infty}(X^{k+1})$ 的，使得：

（i） $s^{\bullet}$ 是复形态射，且（ii）若 $x \in X^{k+1}$ 是函数 $\varphi \in \mathscr{L}^{\infty}(X^{k+1})$的连续点，则 $(s[\varphi])(x) = \varphi(x)$。

关于证明。 s^k 的存在性见 [29, 定理 A]。 （i）见 [29, 注 1]。 （ii）见 [29, 定理 B]证明末尾的说明。□

固定一个复形态射 s ，它由如下等变提升与满射复合而得：定理 6.11以及满射 $\mathscr{L}^{\infty} \twoheadrightarrow \ell^{\infty}$:

$$L^{\infty}(\mathbb{F}_4^{\bullet+1}) \underset{s}{\rightsquigarrow} \mathscr{L}^{\infty}(\mathbb{F}_4^{\bullet+1}) \twoheadrightarrow \ell^{\infty}(\mathbb{F}_4^{\bullet+1}) \tag{6.9}$$

同样由函子性，态射 s 在 $\mathrm{id}^{*} : \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^{*}(\mathrm{SL}_4(\mathbb{C})) \to \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^{*}(\mathrm{SL}_4(\mathbb{C})^{\delta})$ 的上循环层面实现。注意，根据 $s[B_4] = B_4$ 在$\mathbb{F}_4^{\{4\}}$ 由引理 6.5。

引理 *6.1*的证明。由于 $\mathrm{H}_{\mathrm{b}}^{3}(\mathrm{SL}_4(\mathbb{C})) \cong \mathbb{R}$，只需证明复合映射$\mathrm{res}^{\delta} \circ \mathrm{id}^{*}$在图式（6.7）中不是零映射。为此，只需在 $\rho^{*} \circ s$的像中展示一个非平凡的 3-余循环，其中 ρ^{*} 和 s 分别如（6.8）和（6.9）所引入。

令 $[B_4]$ 表示体积余循环 $B_4 \in \mathscr{L}^{\infty}(\mathbb{F}_4^4)$在相差零测集意义下的等价类，并设 $\mathcal{B}_2 := (\rho^{*} \circ s)[B_4] \in \ell^{\infty}(\mathcal{F}^4)$。注意， $\mathcal{B}_2$ 是一个 $\mathrm{SO}_4(\mathbb{C})$-不变的有界 3-余循环。此外，

$$\mathcal{B}_2(x) = s[B_4]\big(\rho^{\times 4}(x)\big) = B_4\big(\rho^{\times 4}(x)\big) \quad \text{for all } x \in \mathcal{F}^{\{4\}},$$

由于 引理 6.5 和 引理 6.9 (iii)。因此，由 引理 6.10 可知 $\mathcal{B}_2$在 $\mathcal{F}^{\{4\}}$上并非恒等于零，这意味着 $\mathcal{B}_2$ 不是余边界。事实上，根据引理 6.9 (ii)，任意 $\mathrm{SO}_4(\mathbb{C})$-不变函数 $\varphi \in \ell^\infty(\mathcal{F}^3)$ 都必须在$\mathcal{F}^{\{3\}}$上取常数值 c，因此，对于每个 $x \in \mathcal{F}^{\{4\}}$，任意余边界 $\mathrm{d}\varphi$都必须满足等式

$$\mathrm{d}\varphi(x) = \textstyle\sum_{i=0}^{3}(-1)^i\,\varphi(\partial_i(x)) = c - c + c - c = 0. \qquad \square$$

我们通过计算限制类 $\mathrm{res}_2(b_4) \in \mathrm{H}^3_{\mathrm{b}}(\mathrm{SO}_4(\mathbb{C}))$ 的范数来结束本小节。特别地，这证明在 $\mathbf{D}_r$ 情形下，限制映射 res_r 不一定是等距的。

命题 6.12。 限制类 $\mathrm{res}_2(b_4) \in \mathrm{H}^3_{\mathrm{b}}(\mathrm{SO}_4(\mathbb{C}))$ 的 *Gromov* 范数等于 $4\,v_{\mathbb{H}^3}$，而映射 $\mathrm{res}_2 : \mathrm{H}^3_{\mathrm{b}}(\mathrm{SL}_4(\mathbb{C})) \hookrightarrow \mathrm{H}^3_{\mathrm{b}}(\mathrm{SO}_4(\mathbb{C}))$ 的算子范数等于 $2/5$。

证明。 令 $\mathcal{B}_2 \in \ell^\infty(\mathcal{F}^4)$ 为在 引理 6.1 的证明中定义的余循环。由于 $\mathcal{B}_2$ 是博雷尔余循环的限制，其类 $[\mathcal{B}_2] \in L^\infty(\mathcal{F}^4)$ 定义良好。现在，如（6.9）中所示，令

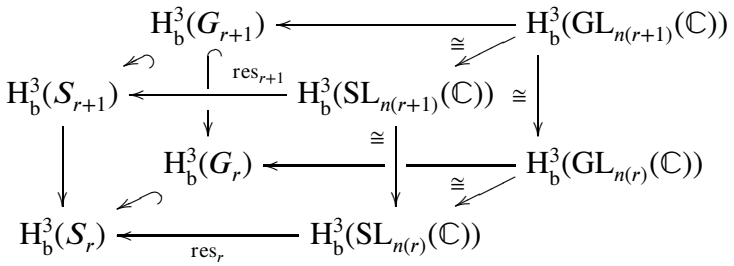
$$s' : L^\infty(\mathcal{F}^{\bullet+1}) \to \ell^\infty(\mathcal{F}^{\bullet+1})$$

是 $\mathrm{SO}_4(\mathbb{C})$-等变复形态射，由按照 定理 6.11 所述的提升与满射 $\mathscr{L}^\infty \twoheadrightarrow \ell^\infty$复合而成。此外，等式 $s'[\mathcal{B}_2] = \mathcal{B}_2$成立，因为 $\mathcal{B}_2$在余零集 $\mathcal{F}^{\{4\}} \subset \mathcal{F}^4$上连续。根据 [28, 定理 7.5。3] 以及图（6.7）的交换性，我们推得 $\mathrm{res}_2(b_4)$ 的范数必等于由 $[\mathcal{B}_2]$定义的上同调类的范数。

现在，根据作用 $\mathrm{SO}_4(\mathbb{C}) \curvearrowright \mathcal{F}^3$ 的本质传递性（见 引理 6.9 （ii））， 在 $L^\infty(\mathcal{F}^{\bullet+1})$中不存在非平凡的不变 3-余边界。因此， $\|\mathrm{res}_2(b_4)\| = \|[\mathcal{B}_2]\|_\infty = 4 \cdot v_3$根据 引理 6.10。关于 res_2的算子范数，只需注意 $\|b_4\| = 10 \cdot v_3$。 $\square$

6.5. **定理 2 和3 的证明结束**。 对于任何 $r \geq r_1 = 2$，考虑交换立方体

(6.10)



其中水平箭头对应于限制映射

$$\mathrm{res}_s : \mathrm{H}^3_{\mathrm{b}}(\mathrm{SL}_{n(s)}(\mathbb{C})) \to \mathrm{H}^3_{\mathrm{b}}(S_s) \quad \text{and} \quad \mathrm{H}^3_{\mathrm{b}}(\mathrm{GL}_{n(s)}(\mathbb{C})) \to \mathrm{H}^3_{\mathrm{b}}(G_s),$$

指向前方的限制映射箭头

$$\sigma_{n(s)} : \mathrm{H}^3_{\mathrm{b}}(\mathrm{GL}_{n(s)}(\mathbb{C})) \to \mathrm{H}^3_{\mathrm{b}}(\mathrm{SL}_{n(s)}(\mathbb{C})) \quad \text{and} \quad \tau_s : \mathrm{H}^3_{\mathrm{b}}(G_s) \to \mathrm{H}^3_{\mathrm{b}}(S_s)$$

对于 $s \in \{r, r+1\}$，而竖直箭头表示由分块嵌入诱导的映射

$$\begin{aligned} \iota_r &: S_r \hookrightarrow S_{r+1}, \qquad j_r : \mathrm{SL}_{n(r)}(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathrm{SL}_{n(r+1)}(\mathbb{C}), \\ \iota_r &: G_r \hookrightarrow G_{r+1}, \qquad j_r : \mathrm{GL}_{n(r)}(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathrm{GL}_{n(r+1)}(\mathbb{C}), \end{aligned}$$

注意，$\sigma_{n(s)}$ 根据 [28, 推论 8.55]，而 τ_s 根据 [28, 命题 8.62]，对这两种 $s \in \{r, r+1\}$，$S_s < G_s$ 都是有限指数正规子群。此外，由 j_r^* 诱导的三次上同调映射 j_r，无论对于 GL 还是 SL，根据定理 2的 $\mathbf{A}_r$ 情形，都是同构。根据关键引理*bis*，映射 $\iota_r^* : \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^3(G_{r+1}) \to \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^3(G_r)$ 是单射。
下一个引理将作为定理2 *bis* 和3 *bis*的证明中的归纳步骤。

引理 6.13。如果对于任意 $r \geq 1$，映射$\mathrm{res}_r : \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^3(\mathrm{SL}_{n(r)}(\mathbb{C})) \to \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^3(S_r)$ 是同构，那么图（（6.10））中的所有箭头都是同构。

证明。 注意，通过考察立方体的底面可知，若 res_r 是同构，则τ_r 是满射。进而，这意味着底面中的所有箭头都是同构。利用这些同构，对（6.10）的后面、左面以及最后的前面依次进行类似分析，即可完成该引理的证明。 □

定理 *3 bis* 关于 $\mathbf{D}_r$的证明。 我们通过归纳法证明，对于每个 $\mathrm{res}_r : \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^3(\mathrm{SL}_{n(r)}(\mathbb{C})) \to \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^3(S_r)$， $r \geq r_0 = 3$都是同构。根据引理 6.13，若对于任意 res_r， $r \geq 3$是同构，则 res_{r+1}也是同构。因此，只要证明

$$\mathrm{res}_{r_0} = \mathrm{res}_3 : \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^3(\mathrm{SL}_6(\mathbb{C})) \to \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^3(\mathrm{SO}_6(\mathbb{C}))$$

是同构。群 $\mathrm{SO}_6(\mathbb{C})$ 具有一个例外等ogeny $\mathrm{SL}_4(\mathbb{C}) \twoheadrightarrow \mathrm{SO}_6(\mathbb{C})$，例如见 [36, 34], ，该等ogeny 在有界上同调中诱导出一个同构 [28, 推论 8.5。2]。应用定理 2 于 $\mathbf{A}_r$，我们得到同构链

$$\mathrm{H}_{\mathrm{b}}^3(\mathrm{SO}_6(\mathbb{C})) \cong \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^3(\mathrm{SL}_4(\mathbb{C})) \cong \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^3(\mathrm{SL}_6(\mathbb{C})) \cong \mathbb{R}.$$

因此，只需证明 res_3 不恒为零。为此，考虑交换立方体（6.10）的前面，其中 $r = 2$。由于底部箭头 res_2 由引理 6.1可知是单射，因此得证。 □

定理 *2* 的证明（*bis* 适用于 $\mathbf{D}_r$。 根据 引理 6.13，若 res_r 对任意 $r \geq r_0 = 3$都是同构，则映射 $\iota_r^* : \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^3(S_{r+1}) \to \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^3(S_r)$也是同构。 定理 3 *bis* 即可完成证明。 □

注 6.14。 我们注意到，$\mathrm{res}_2 : \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^3(\mathrm{SL}_4(\mathbb{C})) \hookrightarrow \mathrm{H}_{\mathrm{b}}^3(\mathrm{SO}_4(\mathbb{C}))$ 并非同构，因为 $\mathrm{H}_{\mathrm{b}}^3(\mathrm{SL}_4(\mathbb{C})) \cong \mathbb{R}$，且 $\mathrm{SO}_4(\mathbb{C})$ 与 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$同源，而后者具有二维的$\mathrm{H}_{\mathrm{b}}^3$。

7. 定理 1 的证明

设 $(\varepsilon, d) \in \{(+1,1),(-1,0),(+1,0)\}$。我们将通过对 r 进行归纳法，证明 定理 1 *bis*，即比较映射 $c^3 : \mathrm{H}^3_{\mathrm{b}}(S_r) \to \mathrm{H}^3(S_r)$ 对所有 $r \geq r_0$ 都是同构。
由于低秩情形下的例外李代数同构，使得 S_{r_0} 属于 $\mathbf{A}_r$ 族，因此基例 $r = r_0$ 成立。对于归纳步骤，考虑以下交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^3_{\mathrm{b}}(S_{r+1}) & \xrightarrow{c^3} & \mathrm{H}^3(S_{r+1}) \\ {\scriptstyle i_r^*}\downarrow{\scriptstyle \cong} & & {\scriptstyle \cong}\downarrow{\scriptstyle i_r^*} \\ \mathrm{H}^3_{\mathrm{b}}(S_r) & \xrightarrow[c^3]{\cong} & \mathrm{H}^3(S_r) \end{array}$$

归纳假设是指底部箭头为同构这一事实。左侧箭头是同构这一点由定理 2得出。右侧箭头为同构，则源于经典族在连续上同调中的稳定性，论证如下。对于任意非紧半单李群 G，连续上同调 $\mathrm{H}^*(G)$ 与其紧对称空间的上同调同构（例如参见 [33, §5]）。在定理 1所涉及的情形中，这些紧对称空间与紧经典群微分同胚。这些群的（空间）上同调的稳定性见[26, 定理 III.6。5]。□

8. 关于复经典群上 $\mathrm{H}^{3\mathrm{b}}$ 的格罗莫夫范数

在本节最后部分，我们调整第 2 节中引入的记号，使其也涵盖复族 $\mathbf{A}_r$。具体如下。对于 $\mathscr{F} \in \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$，令 $S_{\mathscr{F}_r}$ 分别表示群

$$\mathrm{SL}_{r+1}(\mathbb{C}), \quad \mathrm{SO}_{2r+1}(\mathbb{C}), \quad \mathrm{Sp}_{2r}(\mathbb{C}), \quad \mathrm{SO}_{2r}(\mathbb{C}),$$

在复族 $\mathscr{F}_r$中。如第 2.2 小节所述，选择 $\mathscr{F} \in \{\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$分别对应于选择 $(\varepsilon, d) \in \{(+1,1),(-1,0),(+1,0)\}$；对于这些情形，我们将沿用第 2 节中引入的记号。

令 $b_{\mathscr{F}_r} \in \mathrm{H}^3_{\mathrm{b}}(S_{\mathscr{F}_r})$ 为连续有界上同调类，其定义如下：

$$b_{\mathscr{F}_r} := \begin{cases} b_{r+1} & \text{if } \mathcal{F} = \mathbf{A}, \\ \frac{1}{2}\,\mathrm{res}_r(b_{2r+1}) & \text{if } \mathcal{F} = \mathbf{B}, \\ \mathrm{res}_r(b_{2r}) & \text{if } \mathcal{F} = \mathbf{C}, \\ \frac{1}{2}\,\mathrm{res}_r(b_{2r}) & \text{if } \mathcal{F} = \mathbf{D}, \end{cases}$$

其中，$b_n \in \mathrm{H}^3_{\mathrm{b}}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}))$ 是有界博雷尔类，$\mathrm{res}_r : \mathrm{H}^3_{\mathrm{b}}(\mathrm{SL}_{n(r)}(\mathbb{C})) \to \mathrm{H}^3_{\mathrm{b}}(S_{\mathscr{F}_r})$ 是限制映射。

下一结论直接推论自 Bucher–Burger–Iozzi [3, 定理 2] (参见 定理 5.1)，该定理给出了有界博雷尔类的 Gromov 范数的计算，以及 命题 4。

推论 8.1。对于 $\mathscr{F} \in \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$ 和 $r \geq 1$，$b_{\mathscr{F}_r} \in \mathrm{H}^3_{\mathrm{b}}(S_{\mathscr{F}_r})$ 的格罗莫夫范数为

$$\|b_{\mathscr{F}_r}\| = \mathcal{I}(\mathscr{F}_r) \cdot v_{\mathbb{H}^3},$$

其中，$v_{\mathbb{H}^3}$ 是 $\mathbb{H}^3$中理想四面体的最大体积，而数字 $\mathcal{I}(\mathscr{F}_r) \in \mathbb{Z}$ 列于下表

$\mathscr{F}_r$	$\mathbf{A}_r$	$\mathbf{B}_r$	$\mathbf{C}_r$
$\mathcal{I}(\mathscr{F}_r)$	$\frac{r(r+1)(r+2)}{6}$	$\frac{r(r+1)(2r+1)}{3}$	$\frac{r(4r^2-1)}{3}$

Marc Burger 告知我们，数值 $\mathcal{I}(\mathscr{F}_r)$ 等于主 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$-同态 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to S_{\mathscr{F}_r}$的 Dynkin 指数。关于 Dynkin 指数的定义，读者可参阅 [31]；关于主 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$-同态的理论，可参阅 [24]。所有复单李群（包括例外型）的主 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$-同态的 Dynkin 指数均已计算得出。对于 [32],，其公式为 $\mathscr{F} = \mathbf{D}$

$$\mathcal{I}(\mathbf{D}_r) = \frac{r(r-1)(2r-1)}{3}.$$

依据等式 $\|b_{\mathbf{D}_2}\| = 2\, v_{\mathbb{H}^3} = \mathcal{I}(\mathbf{D}_2)\, v_{\mathbb{H}^3}$（该等式已在 命题 6.12中确立），我们猜想 推论 8.1 对 $\mathscr{F} = \mathbf{D}$ 也成立。

附录 A. 交比参数化陈述的证明

本附录旨在证明通过 ω-交比对簇 $\mathcal{P}_r$ 中四点和五点构形空间的参数化。这些参数化在正文中分别表述为 命题 3.8 和 命题 3.11。我们继续沿用第 2.1 节和 2.2节中的记号及既定假设。

A.1. 命题 3.8 的证明。

假设 $r \geq 2$。我们考虑以下 Borel 函数Γ， Δ， $\Delta^{1/2}$， φ_-，$\varphi_+ : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$，定义如下:

$$\Gamma(z_1, z_2) := 1 - z_1 - z_2, \tag{A.1}$$

$$\Delta(z_1, z_2) := \Gamma(z_1, z_2)^2 - 2(1+\varepsilon) \cdot z_1 z_2, \tag{A.2}$$

$$\Delta^{1/2}(z_1, z_2) := \begin{cases} \Gamma(z_1, z_2) & \text{if } \varepsilon = -1, \\ \sqrt{\Delta(z_1, z_2)} & \text{if } \varepsilon = +1, \end{cases} \tag{A.3}$$

$$\varphi_\eta(z_1, z_2) := \left(\frac{\Delta^{1/2} + \eta\, \Gamma}{2} \right)(z_1, z_2), \quad \eta \in \{\pm 1\}, \tag{A.4}$$

其中 $\sqrt{-}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 是复平方根的一个 Borel 选取。为方便起见，我们将使用相同的符号表示 Borel 函数 $\mathcal{P}_r^4\to\mathbb{C}$，它们几乎处处由与$\pi_3=(\mathrm{cr}_1,\mathrm{cr}_2)$复合定义。

定义 A.1. 令 $\mathcal{P}_r^{\{\{4\}\}}$ 为 $\mathcal{P}_r^{\{4\}}$ 中由满足以下条件的元组构成的子集：(p_0,p_1,p_2,p_3) 子空间 $\langle p_0,p_1,p_2,p_3\rangle<V_r$ 非退化（定义见（3.2）中的 $\mathcal{P}_r^{\{4\}}$）。

引理 A.2. 元组 $[v_0,v_1,v_2,v_3]\in\mathcal{P}_r^{(4)}$ 属于 $\mathcal{P}_r^{\{\{4\}\}}$，当且仅当相应的格拉姆矩阵 $(\omega(v_i,v_j))_{i,j}$ 非奇异。此外，

$$\mathcal{P}_r^{\{\{4\}\}}=\{(p_0,p_1,p_2,p_3)\in\mathcal{P}_r^{(4)}\mid\Delta(p_0,p_1,p_2,p_3)\neq0\},$$

特别地，$\mathcal{P}_r^{\{\{4\}\}}$ 是 $\mathcal{P}_r^4$ 的一个 G_r不变的余零测博雷尔子集。

证明. 矩阵 $(\omega(v_i,v_j))_{i,j}$ 奇异，当且仅当存在一个非平凡线性组合 $v=\sum_i\alpha_iv_i$，使得对每个 $k\in\{0,\dots,3\}$都有 $\omega(v_k,v)=0$。这恰好意味着以下二者之一成立：$v=0$ 且向量 $v_0,\dots,v_3$ 线性相关，或者 $\langle v_0,\dots,v_3\rangle$ 退化。引理的第二部分由以下事实推出：$\{v_0,v_1,v_2,v_3\}$的格拉姆行列式等于商 $\Delta[v_0,v_1,v_2,v_3]/(\omega(v_0,v_1)\,\omega(v_2,v_3))^2$. □

子空间 $L<V_r$ 由任意四条直线生成 $(p_0,p_1,p_2,p_3)\in\mathcal{P}_r^{\{\{4\}\}}$ 同构于直和 $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$。在下文的引理 A.5 中，我们将根据任意这样的点 L 构造一组 p_0、p_1、p_2、p_3的适配基。为此，我们引入相对于 ω 到双曲平面的正交投影，并列出相关性质。

定义 A.3. 设 $\mathcal{H}_0<V_r$ 为一个双曲平面，$\{v_0,v_1\}$ 为$\mathcal{H}_0$的一组各向同性向量基。正交投影$\mathrm{proj}=\mathrm{proj}_{\mathcal{H}_0}:V_r\twoheadrightarrow\mathcal{H}_0$ 到 $\mathcal{H}_0$ 定义为

$$\mathrm{proj}(v):=\frac{\omega(v_1,v)}{\omega(v_1,v_0)}\,v_0+\frac{\omega(v_0,v)}{\omega(v_0,v_1)}\,v_1,$$

其核为 $\mathcal{H}_0^\perp$。我们还令 $\widehat{\ }:V_r\to\mathcal{H}_0^\perp$ 为补映射，定义为 $\widehat{v}:=v-\mathrm{proj}(v)$。

引理 A.4. 设 $[v_0,v_1,v_2,v_3]\in\mathcal{P}_r^{(4)}$，令 $\widehat{\ }$表示到 $\langle v_0,v_1\rangle$ 的补映射，令$v,w\in V_r$ 为任意两个向量，并设 $u\in V_r$ 为各向同性的。那么以下恒等式成立：

(i) $\omega(\widehat{v},\widehat{w})=\omega(\widehat{v},w)=\omega(v,\widehat{w})$.
(ii) $q(\widehat{u})=-(1+\varepsilon)\left(\omega(v_1,u)\,\omega(u,v_0)/\omega(v_0,v_1)\right)$.
(iii) $\omega(\widehat{v_2},\widehat{v_3})=\omega(v_2,v_3)\cdot\Gamma[v_0,v_1,v_2,v_3]$.
(iv) $\omega(\widehat{v_2},\widehat{v_3})^2-q(\widehat{v_2})\,q(\widehat{v_3})=\omega(v_2,v_3)^2\cdot\Delta[v_0,v_1,v_2,v_3]$.

证明。 由于 $\omega(\widehat{v},\mathrm{proj}(w))=0$，我们有 $\omega(\widehat{v},\widehat{w})=\omega(\widehat{v},w)-\omega(\widehat{v},\mathrm{proj}(w))=\omega(\widehat{v},w)$，这就是 (i) 中的第一个等式。第二个等式类似。由

(i) 和补映射的定义，(ii) 和 (iii) 立即得出。对于 $\varepsilon=-1$，恒等式 (iv) 成立，因为 $\Delta=\Gamma^2$and $q(\widehat{v}_2)\,q(\widehat{v}_3)=0$。若 $\varepsilon=+1$，则由 (iii) 和以下计算可得 (iv)：

$$\begin{aligned} q(\widehat{v}_2)\,q(\widehat{v}_3) &= 4\cdot\frac{\omega(v_1,v_2)\,\omega(v_2,v_0)}{\omega(v_0,v_1)}\cdot\frac{\omega(v_1,v_3)\,\omega(v_3,v_0)}{\omega(v_0,v_1)}\\ &= 4\cdot\omega(v_2,v_3)^2\cdot\frac{\omega(v_1,v_3)\,\omega(v_2,v_0)}{\omega(v_1,v_0)\,\omega(v_2,v_3)}\cdot\frac{\omega(v_2,v_1)\,\omega(v_0,v_3)}{\omega(v_2,v_3)\,\omega(v_0,v_1)}\\ &= 4\cdot\omega(v_2,v_3)^2\cdot(\mathrm{cr}_1^{-1}\cdot\mathrm{cr}_2)[v_0,v_1,v_2,v_3]. \end{aligned}$$

□

以下技术引理在命题 3.8的证明中起着关键作用。

引理 A.5. 设 $\mathbf{p}=[v_0,v_1,v_2,v_3]\in\mathcal{P}_r^{\{\{4\}\}}$，令 $\mathcal{H}_0:=\langle v_0,v_1\rangle$ 为由前两个向量生成的双曲平面，并令 $\widehat{\cdot}$ 表示到 $\mathcal{H}_0$ 的补映射。我们还将 $\Pi=\Pi(v_0,v_1,v_2)$、$\lambda=\lambda(v_0,v_1,v_2)$、$\mu=\mu(v_0,v_1,v_2,v_3)$ 定义为

$$\Pi:=\omega(v_0,v_1)\,\omega(v_1,v_2)\,\omega(v_2,v_0), \tag{A.5}$$

$$\lambda:=\frac{\sqrt{\Pi}}{\omega(v_1,v_0)}=\frac{\omega(v_1,v_2)\,\omega(v_0,v_2)}{\sqrt{\Pi}}, \tag{A.6}$$

$$\mu:=\lambda^{-1}\cdot\omega(v_3,v_2). \tag{A.7}$$

那么 $\mathcal{H}_0':=\mathcal{H}_0^{\perp}\cap\langle v_0,v_1,v_2,v_3\rangle=\langle\widehat{v}_2,\widehat{v}_3\rangle$ 是一个双曲平面，而下列线性方程组的唯一解 $e',f'\in\mathcal{H}_0'$ 构成 $\mathcal{H}_0'$ 的一个适配基：

$$\left\{\begin{array}{ll}\omega(e',v_2) &= \lambda\\ \omega(e',v_3) &= \mu\,\varphi_-(\mathbf{p})\end{array}\right\}\quad\text{and}\quad\left\{\begin{array}{ll}\omega(f',v_2) &= -\lambda,\\ \omega(f',v_3) &= \varepsilon\mu\,\varphi_+(\mathbf{p}),\end{array}\right\} \tag{A.8}$$

证明。将 e'和 f'表示为基 $\{\widehat{v}_2,\widehat{v}_3\}$的 $\mathcal{H}'$的线性组合后，可得（A.8）中两个方程组的系数矩阵的行列式为

$$q(\widehat{v}_2)\,q(\widehat{v}_3)-\omega(\widehat{v}_2,\widehat{v}_3)^2=-\omega(v_2,v_3)^2\cdot\Delta(\mathbf{p}).$$

根据 引理 A.2，该量非零。它们的显式解为：

$$\text{For }\varepsilon=-1:\quad\left\{\begin{array}{ll}e' &= (\lambda/\omega(\widehat{v}_3,\widehat{v}_2))\cdot\widehat{v}_3,\\ f' &= (-\mu/\omega(v_2,v_3))\cdot\widehat{v}_2-(\lambda/\omega(\widehat{v}_3,\widehat{v}_2))\cdot\widehat{v}_3.\end{array}\right. \tag{A.9}$$

$$\text{For }\varepsilon=+1:\quad\left\{\begin{array}{ll}e' &= \lambda/q(\widehat{v}_2)\cdot(\widehat{v}_2-r),\\ f' &= -\lambda/q(\widehat{v}_2)\cdot(\widehat{v}_2+r),\end{array}\right. \tag{A.10}$$

其中

$$r:=\frac{\omega(\widehat{v}_2,\widehat{v}_3)\cdot\widehat{v}_2-q(\widehat{v}_2)\cdot\widehat{v}_3}{\omega(v_2,v_3)\cdot\Delta^{1/2}(\mathbf{p})}\in\mathcal{H}'.$$

下面的恒等式由 引理 A.4 推出，并有助于验证 e' 和 f' 如上所述确实是方程（A.8）的解，并且构成 $\mathcal{H}_0'$ 的适配基：

$$\begin{aligned}(\varepsilon=-1)\quad & \omega(\widehat{v_2},v_2)=q(\widehat{v_2})=0,\quad \omega(\widehat{v_3},v_3)=q(\widehat{v_3})=0,\\ & \omega(\widehat{v_2},v_3)=\omega(v_2,\widehat{v_3})=\omega(\widehat{v_2},\widehat{v_3})=\omega(v_2,v_3)\cdot\Gamma(\mathbf{p})\\ & \qquad =\omega(v_2,v_3)\cdot\Delta^{1/2}(\mathbf{p})\neq 0.\\ (\varepsilon=+1)\quad & \omega(r,v_2)=\omega(r,\widehat{v_2})=0,\quad q(r)=-q(\widehat{v_2})=2\lambda^2\neq 0,\\ & \omega(r,v_3)=\omega(r,\widehat{v_3})=\omega(v_2,v_3)\cdot\Delta^{1/2}(\mathbf{p})\neq 0.\end{aligned}$$

□

命题 *3.8* 的证明。令 $r\geq 2$。一旦证明存在余零测子集 $\Omega_3\subset\mathbb{C}^2$ 和一个博雷尔映射 $\Phi_3:\Omega_3\to\mathcal{P}_r^4$ 满足以下三个性质，定理便得证：

(i) $\pi_3(\mathcal{P}_r^{\{\{4\}\}})\subset\Omega_3$。(ii) $\Phi_3(\Omega_3)\subset\mathcal{P}_r^{\{\{4\}\}}$ 和 $\pi_3\circ\Phi_3=\mathrm{id}$。
(iii) 对所有 $\mathbf{p}\in\mathcal{P}_r^{\{\{4\}\}}$，存在 $g\in G_r$ 使得 $\Phi_3\circ\pi_3(\mathbf{p})=g\,\mathbf{p}$。

现在我们开始构造它们。定义

$$\Omega_3:=\left\{(a_1,a_2)\in(\mathbb{C}^\times)^2\mid\ \Delta(a_1,a_2)\neq 0\right\}. \tag{A.11}$$

注意 Ω_3 是 $\mathbb{C}^2$的一个非空扎里斯基开子集，因此是余零测集，性质 (i) 由引理 A.2立即得到。我们定义各向同性向量 ϕ_2 和博雷尔映射$\phi_3:\Omega_3\to\langle e_r,\ e_{r-1},\ f_{r-1},\ f_r\rangle$ 如下：

$$\begin{aligned}\phi_2&:=e_r+e_{r-1}-f_{r-1}+f_r,\\ \phi_3(a_1,a_2)&:=a_1\,e_r+\varphi_-(a_1,a_2)\,e_{r-1}+\varepsilon\,\varphi_+(a_1,a_2)\,f_{r-1}+\varepsilon\,a_2\,f_r.\end{aligned}$$

对于任意 $(a_1,a_2)\in\Omega_3$，向量 $\phi_3(a_1,a_2)$ 都是各向同性的。现在我们令 $\Phi_3:\Omega_3\to\mathcal{P}_r^4$ 为映射

$$\Phi_3(a_1,a_2):=\left[e_r,\ f_r,\ \phi_2,\ \phi_3(a_1,a_2)\right]. \tag{A.12}$$

三元组中的前三个点恰好是证明 引理 3.4 时所用的一般三元组的代表。将 $\phi_3\equiv\phi_3(a_1,a_2)$ 简记为 Φ_3，则下列恒等式成立，这意味着这些量均不为零，因此 $\mathcal{P}_r^{(4)}$ 满射到。

$$\begin{aligned}&\omega(e_r,f_r)=1,\quad &&\omega(e_r,\phi_2)=1,\quad &&\omega(e_r,\phi_3)=\varepsilon a_2,\\ &\omega(f_r,\phi_2)=\varepsilon,\quad &&\omega(f_r,\phi_3)=\varepsilon a_1,\quad &&\omega(\phi_2,\phi_3)=\varepsilon.\end{aligned} \tag{A.13}$$

由（A.13）还可推出，$\mathrm{cr}_i\left(\Phi_3(a_1,a_2)\right)=a_i$ 对于 $i=1$、2 也成立。结合 引理 A.2，可知 $\Phi_3(a_1,a_2)$ 属于 $\mathcal{P}_r^{\{\{4\}\}}$，且 $\pi_4\circ\Phi_3(a_1,a_2)=(a_1,a_2)$，从而证明了（ii）。

对于 (iii)，我们固定任意一个 $\mathbf{p}=[v_0,v_1,v_2,v_3]\in\mathcal{P}_r^{\{\{4\}\}}$。与 引理 A.5 中一样，我们令 λ，Π，μ为根据 (v_0,v_1,v_2,v_3) 由（A.5）–（A.7）定义的量，并令 e'，f' 为

系统（A.8）的解。然后我们设

$$e'_r := \frac{\lambda\, v_1}{\omega(v_1, v_2)}, \quad e'_{r-1} := e', \quad f'_{r-1} := f', \quad f'_r := \frac{\omega(v_1, v_2)\, v_0}{\sqrt{\Pi}}. \tag{A.14}$$

注意，$\{e'_r, f'_r\}$是双曲平面 $\mathcal{H}_r := \langle v_0, v_1\rangle < V_r$的一组适配基，而 $\{e'_{r-1}, f'_{r-1}\}$是 $\mathcal{H}_{r-1} := \mathcal{H}_r^{\perp} \cap \langle v_0, v_1, v_2, v_3\rangle$的一组适配基。根据维特引理，我们将 $\{e'_r, e'_{r-1}, f'_{r-1}, f'_r\}$扩展为 V_r的一组完整适配基 $\mathscr{B}'_r$。将标准适配基 $\mathscr{B}_r$ 映射到 $\mathscr{B}'_r$ 的自同构 $T \in \mathrm{GL}(V_r)$属于 G_r，因此它也属于

$$g = g(v_0, v_1, v_2, v_3) := T^{\top} J_r. \tag{A.15}$$

注意，对于每个 $i \in \{0, \dots, 3\}$，我们都有

$$g \cdot v_i = \omega(e'_r, v_i)\, e_r + \omega(e'_{r-1}, v_i)\, e_{r-1} + \omega(f'_{r-1}, v_i)\, f_{r-1} + \omega(f'_r, v_i)\, f_r.$$

相对于标准适配基 $\mathscr{B}_r$，用坐标表示后，我们得到以下等式，其中第二个等式是在将第四个向量乘以 μ^{-1} 后得到的：

$$g \cdot \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \lambda & \lambda\, \omega(v_1, v_3)/\omega(v_1, v_2) \\ 0 & 0 & \lambda & \mu\, \varphi_-(\mathbf{p}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & -\lambda & \varepsilon\, \mu\, \varphi_+(\mathbf{p}) \\ 0 & 1 & \lambda & \omega(v_1, v_2)\, \omega(v_0, v_3)/\sqrt{\Pi} \end{bmatrix} = \Phi_3 \circ \pi_3(\mathbf{p}).$$

□

A.2. **命题 3.11 的证明**。回顾交比 α_j, β_j, $\gamma_j : \mathcal{P}_r^5 \to \mathbb{C}$，它们来自定义 3.9。采用 (A.1)–(A.4) 中建立的记号，我们令 ψ_-, $\psi_+ : \mathbb{C}^6 \to \mathbb{C}$ 几乎处处定义为

$$\psi_\eta(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) := \eta\, \varphi_\eta(\mathbf{a}) \cdot \Gamma(\mathbf{b}) \;+\; a_2 b_1 c_1^{-1} \cdot \Gamma(\mathbf{c}), \quad \eta \in \{\pm 1\}, \tag{A.16}$$

对 $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$。另令 Γ_α, Γ_β, $\Gamma_\gamma : \mathcal{P}_r^5 \to \mathbb{C}$为几乎处处定义的函数，其定义如下

$$\Gamma_\alpha := \Gamma \circ (\alpha_1, \alpha_2), \quad \Gamma_\beta := \Gamma \circ (\beta_1, \beta_2), \quad \Gamma_\gamma := \Gamma \circ (\gamma_1, \gamma_2).$$

在本小节中，我们将考虑 Δ, $\Delta^{1/2}$, φ_η, ψ_η 这些几乎处处定义的函数 $\mathcal{P}_r^5 \to \mathbb{C}$，它们作用于 5 元组，并由 (A.2)–(A.4) 中的表达式与函数 (α_1, α_2)复合而成，而 (A.16) 中的表达式则与 $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2)$复合而成。

命题 3.11 的证明建立在上一小节的计算之上。下面的引理给出了将 e'、f' 与第五个向量 v_4配对的结果；前两个向量是从元组 $[v_0, v_1, v_2, v_3] \in \mathcal{P}_r^{\{\{4\}\}}$ 中通过引理 A.5 得到的。其证明是直接计算，我们将略去，所依据的是式（A.9）和（A.10）中给出的 e' 和 f' 的显式表达式。

引理 A.6。设 $[v_0, v_1, v_2, v_3] \in \mathcal{P}_r^{\{\{4\}\}}$，设 $\widehat{\ }$ 是到双曲平面 $\langle v_0, v_1\rangle$ 上的补映射，该平面由前两个向量张成；再设 λ、μ、e'、f' 如引理 *A.5*所述。若各向同性向量 $v_4 \in V_r \smallsetminus \{0\}$ 满足 $\mathbf{p} := [v_0, v_1, v_2, v_3, v_4]$ 属于 $\mathcal{P}_r^{(5)}$，则

$$\omega(e', v_4) = \varepsilon \frac{\omega(v_2, v_4)}{\lambda} \cdot \frac{\psi_-(\mathbf{p})}{\Delta^{1/2}(\mathbf{p})} \quad \text{and} \quad \omega(f', v_4) = \frac{\omega(v_2, v_4)}{\lambda} \cdot \frac{\psi_+(\mathbf{p})}{\Delta^{1/2}(\mathbf{p})}.$$

在此我们给出 5 元组一般性的定义，随后证明命题 3.11。

定义 A.7. 我们令 $\mathcal{P}_r^{\{\{5\}\}}$ 为满足以下条件的 5 元组集合：$(p_0, p_1, p_2, p_3, p_4) \in \mathcal{P}_r^{\{5\}}$ 每个 4 元子组都属于 $\mathcal{P}_r^{\{\{4\}\}}$。由引理 3.10可知，此元组属于 $\mathcal{P}_r^{\{\{5\}\}}$ 当且仅当

$$(p_0, p_1, p_i, p_j) \in \mathcal{P}_r^{\{\{4\}\}} \quad \text{for } i, j \in \{2, 3, 4\} \text{ with } i < j.$$

可以验证，$\mathcal{P}_5^{\{\{5\}\}}$ 是 $\mathcal{P}_r^5$ 的一个 G_r-不变余零测子集。

命题 *3.11* 的证明命题 *3.11*。对于每个 $r \geq r_1 + 1$，我们必须定义一个余零测子集 $\Omega_4 \subset \mathbb{C}^5$ 以及一个博雷尔映射 $\Phi_4 : \Omega_4 \to \mathcal{P}_r^5$，使得：

(i) $\pi_4(\mathcal{P}_r^{\{\{5\}\}}) \subset \Omega_4$。(ii) $\Phi_4(\Omega_4) \subset \mathcal{P}_r^{\{\{5\}\}}$ 和 $\pi_4 \circ \Phi_4 = \mathrm{id}$。
(iii) 对所有 $\mathbf{p} \in \mathcal{P}_r^{\{\{5\}\}}$，都存在 $g \in G_r$，使得 $\Phi_4 \circ \pi_4(\mathbf{p}) = g\,\mathbf{p}$。

我们将情况 $(\varepsilon, d) = (+1, 1)$、$r = 2$ 留待单独讨论，并假设

$$r \geq \begin{cases} 3 & \text{if } \varepsilon = +1, \\ 2 & \text{if } \varepsilon = -1, \end{cases}$$

仿照 Ω_3 在（A.11）中的定义，我们令

$$\Omega_4 := \left\{(a_1, a_2, b_1, b_2, c_1) \in (\mathbb{C}^\times)^5 \mid \Delta(a_1, a_2),\ \Delta(b_1, b_2),\ \Delta(c_1, c_2) \neq 0\right\}, \tag{A.17}$$

其中 $c_2 := \varepsilon(a_1 b_2 c_1)/(a_2 b_1)$。由于它是 $\mathbb{C}^5$ 中有限个非空扎里斯基开子集的交集，集合 Ω_4 本身也非空且为扎里斯基开，因此特别是余零的。定义 A.7 和 引理 A.2 推出 $\Delta(\alpha_1(\mathbf{p}), \alpha_2(\mathbf{p}))$，$\Delta(\beta_1(\mathbf{p}), \beta_2(\mathbf{p}))$，$\Delta(\gamma_1(\mathbf{p}), \gamma_2(\mathbf{p})) \neq 0$ 对每个 $\mathbf{p} \in \mathcal{P}_r^{\{\{5\}\}}$ 均成立，从而证明了（i）。

我们将函数 $\tilde{\phi}_4 : \Omega_4 \to \langle e_r, e_{r-1}, f_{r-1}, f_r\rangle$ 和 $\phi_4 : \Omega_4 \to V_r$ 定义为

$$\tilde{\phi}_4(\mathbf{a}, \mathbf{b}, c_1) := b_1\, e_r + \frac{\psi_-(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}{\Delta^{1/2}(\mathbf{a})}\, e_{r-1} + \varepsilon \frac{\psi_+(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}{\Delta^{1/2}(\mathbf{a})}\, f_{r-1} + \varepsilon\, b_2\, f_r,$$

$$\phi_4(\mathbf{a}, \mathbf{b}, c_1) := \tilde{\phi}_4(\mathbf{a}, \mathbf{b}, c_1) + \left\{ e_{r-2} - \left(\frac{q\big(\tilde{\phi}_4(\mathbf{a}, \mathbf{b}, c_1)\big)}{2} \right) \cdot f_{r-2} \right\}, \tag{A.18}$$

取 $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$，$\mathbf{c}$ 如（A.16）所示，且 $c_2 := \varepsilon(a_1 b_2 c_1)/(a_2 b_1)$。注意，若 $\varepsilon = +1$，向量 $\phi_4(\mathbf{a}, \mathbf{b}, c_1)$ 不一定是各向同性的。根据 $r \geq 3$ 在该情形下的假设，我们能够在 $\phi_4(\mathbf{a}, \mathbf{b}, c_1)$ 中加入一个修正项，使其对任意 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, c_1)$都各向同性。

我们定义 $\Phi_4 : \Omega_4 \to \mathcal{P}_r^5$，

$$\Phi_4(\mathbf{a}, \mathbf{b}, c_1) := \left[e_r,\ f_r,\ \phi_2,\ \phi_3(\mathbf{a}),\ \phi_4(\mathbf{a}, \mathbf{b}, c_1)\right].$$

注意，中的前四条直线 $\Phi_4(\mathbf{a}, \mathbf{b}, c_1)$ 对应于元组 $\Phi_3(\mathbf{a})$，该元组在（A.12）中引入。将 $\phi_3 \equiv \phi_3(\mathbf{a})$ 和 $\phi_4 \equiv \phi_4(\mathbf{a}, \mathbf{b}, c_1)$简记为，除了（A.13）之外，我们还得到以下恒等式

(A.19) $$\omega(e_r, \phi_4) = \varepsilon b_2, \quad \omega(f_r, \phi_4) = \varepsilon b_1, \quad \omega(\phi_2, \phi_4) = \varepsilon, \quad \omega(\phi_3, \phi_4) = a_2 b_1 c_1^{-1}.$$

特别地，这证明了 Φ_4 取值于 $\mathcal{P}_r^{(5)}$。由（A.13）和（A.19），可推出

$$\alpha_1\big(\Phi_4(\mathbf{a}, \mathbf{b}, c_1)\big) = a_1, \qquad \beta_1\big(\Phi_4(\mathbf{a}, \mathbf{b}, c_1)\big) = b_1, \qquad \gamma_1\big(\Phi_4(\mathbf{a}, \mathbf{b}, c_1)\big) = c_1,$$
$$\alpha_2\big(\Phi_4(\mathbf{a}, \mathbf{b}, c_1)\big) = a_2, \qquad \beta_2\big(\Phi_4(\mathbf{a}, \mathbf{b}, c_1)\big) = b_2.$$

这意味着 $\pi_4 \circ \Phi_4 = \mathrm{id}$，并且的每个 4 元子组 $\Phi_4(\mathbf{a}, \mathbf{b}, c_1)$ 都属于 $\mathcal{P}_r^{\{\{4\}\}}$。为了得出 $\Phi_4(\mathbf{a}, \mathbf{b}, c_1) \in \mathcal{P}_r^{\{\{5\}\}}$ 成立，只需注意到，若 $\dim(V_r) = 2r + d \geq 5$，则必然有 $r > 2$，因此（A.18）中的修正项非零，故中的直线 $\Phi_4(\mathbf{a}, \mathbf{b}, c_1)$ 线性无关。这就证明了命题（ii）。

对于 (iii)，固定任意的 $\mathbf{p} = [v_0, v_1, v_2, v_3, v_4] \in \mathcal{P}_r^{\{\{5\}\}}$，并令 $\{e'_r, e'_{r-1}, f'_{r-1}, f'_r\}$ 为子空间 $\langle v_0,\ v_1,\ v_2,\ v_3\rangle$ 的适配基，

$$e'_r := \frac{\lambda\, v_1}{\omega(v_1, v_2)}, \quad e'_{r-1} := e', \quad f'_{r-1} := f', \quad f'_r := \frac{\omega(v_1, v_2)\, v_0}{\sqrt{\Pi}},$$

定义如 (A.14) 中所示，其中 $\Pi,\ \lambda,\ \mu,\ e',\ f'$ 是 (v_0, v_1, v_2, v_3) 的函数，如 引理 A.5 中所示。再令 $g = g(v_0, v_1, v_2, v_3) \in G_r$ 为 (A.15) 中的元素，使得

$$g \cdot [v_0, v_1, v_2, v_3] = \Phi_3(\pi_3(\mathbf{p})).$$

令 $x_0 \in \langle v_0,\ v_1,\ v_2,\ v_3\rangle^{\perp}$ 为满足下式的向量

$$g \cdot v_4 = x_0 + \omega(e'_r, v_4)\, e_r + \omega(e'_{r-1}, v_4)\, e_{r-1} + \omega(f'_{r-1}, v_4)\, f_{r-1} + \omega(f'_r, v_4)\, f_r.$$

由于 $g[v_0, v_1, v_2, v_3]$ 中各直线的张成空间等于 $\langle e_r,\ e_{r-1},\ f_{r-1},\ f_r\rangle$，因此当 $r > 2$ 时有 $x_0 \neq 0$。相对于 $\mathscr{B}_r$ 的坐标为

$$g \cdot [v_4] = \begin{bmatrix} \omega(e'_r, v_4) \\ \omega(e'_{r-1}, v_4) \\ x_0 \\ \omega(f'_{r-1}, v_4) \\ \omega(f'_r, v_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\, \omega(v_1, v_4)/\omega(v_1, v_2) \\ \varepsilon \frac{\omega(v_2, v_4)}{\lambda} \cdot \frac{\psi_-(\mathbf{p})}{\Delta^{1/2}(\mathbf{p})} \\ x_0 \\ \frac{\omega(v_2, v_4)}{\lambda} \cdot \frac{\psi_+(\mathbf{p})}{\Delta^{1/2}(\mathbf{p})} \\ \omega(v_1, v_2)\, \omega(v_0, v_4)/\sqrt{\Pi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1(\mathbf{p}) \\ \frac{\psi_-(\mathbf{p})}{\Delta^{1/2}(\mathbf{p})} \\ x'_0 \\ \varepsilon \frac{\psi_+(\mathbf{p})}{\Delta^{1/2}(\mathbf{p})} \\ \varepsilon\, \beta_2(\mathbf{p}) \end{bmatrix} = \left[\tilde{\phi}_4\left(\pi_4(\mathbf{p})\right) + x'_0\right]$$

其中 $x'_0 := \varepsilon\lambda/\omega(v_2, v_4) \cdot x_0 \neq 0$。事实上，最后一个等式由 引理 3.10得出，该引理意味着 $\gamma_2(\mathbf{p}) = \varepsilon(\alpha_1 \alpha_2^{-1} \beta_1^{-1} \beta_2 \gamma_1)(\mathbf{p})$。

注意，存在一个元素 $g' \in G_{r-2} < G_r$ 使得 $g' x_0 = e_{r-2} + (q(x_0')/2)\, f_{r-2}$，并且

$$q(x_0') = -q\big(\tilde{\phi}_4(\pi_4(\mathbf{p}))\big).$$

因此，$(g'g)\cdot \mathbf{p} = \Phi_4 \circ \pi_4(\mathbf{p})$，完成了 (iii) 的证明。

情形 $(\varepsilon, d) = (+1, 1)$，$r = 2$ 的证明是类似的，但需要做一些修改。我们必须在上述论证中将集合 Ω_4（见（A.17））替换为其下文定义的余零测子集$\Omega_4' \subset \Omega_4$，并将映射 ϕ_4（见（A.18））替换为 $\phi_4' : \Omega_4' \to V_r$:

$$\Omega_4' := \left\{ (\mathbf{a}, \mathbf{b}, c_1) \in \Omega_4 \,\middle|\, q\big(\tilde{\phi}_4(\mathbf{a}, \mathbf{b}, c_1)\big) \neq 0 \right\},$$

$$\phi_4'(\mathbf{a}, \mathbf{b}, c_1) := \tilde{\phi}_4(\mathbf{a}, \mathbf{b}, c_1) + \sqrt{-q\big(\tilde{\phi}_4(\mathbf{a}, \mathbf{b}, c_1)\big)} \cdot h. \qquad \square$$

注 A.8. 勒贝格空间的同构 $G_1 \setminus \mathcal{P}_1^5 \cong \mathbb{C}^2$ 对参数$(\varepsilon, d) \in \{(+1, 1), (-1, 0)\}$成立。事实上，在经典情形下（见 注 3.7），任意一个五元组$\mathbf{p} \in \mathcal{P}_1^{\{\{5\}\}}$ 都属于元组 G_1的 $(\infty, 0, 1, a, b) \in \widehat{\mathbb{C}}^5$-轨道，其中 $a = \alpha_0(\mathbf{p})$ 且 $b = \beta_0(\mathbf{p})$。

在命题 3.11未涵盖的另一种情形中，即 $(\varepsilon, d) = (+1, 0)$ 和 $r = 2$，低维性迫使出现额外关系 $q(\tilde{\phi}_4(\pi_4(\mathbf{p}))) = 0$，这导致$G_2 \setminus \mathcal{P}_2^5 \cong \mathbb{C}^4$。

参考文献

[1] S.J. Bloch. 椭圆曲线的高阶调节子、代数 K 理论与 ζ 函数。CRM 专著丛书，11。美国数学会，普罗维登斯，罗德岛州，2000年。（第2、3和14页引用。）[2] A. Borel, N. Wallach. 约化群的连续上同调、离散子群与表示。第二版。数学调查与专著，67。美国数学会，普罗维登斯，罗德岛州，2000年。（第1页引用。）[3] M. Bucher, M. Burger, A. Iozzi. 有界博雷尔类与三维流形群。《杜克数学杂志》167卷，第17期（2018年），3129–3169。（第2、3、13、14、16和24页引用。）[4] M. Burger, A. Iozzi, A. Wienhard. 具有最大 Toledo 不变量的曲面群表示。《数学年刊》172卷（2010年），第1期，517–566。（第2页引用。）[5] M. Burger, N. Monod. 高秩李群中格的有界上同调。《欧洲数学会杂志》1卷（1999年），第2期，199–235。（第1和11页引用。）[6] M. Burger, N. Monod. 连续有界上同调及其在刚性理论中的应用。《几何与泛函分析》12卷（2002年），第2期，219–280。（第1页引用。）[7] M. Burger, N. Monod. 关于 SL_2的有界上同调及其相关问题。《动力系统与几何中的刚性》，19–37，Springer，柏林，2002年。（第2、3和14页引用。）[8] C. Campagnolo, F. Fournier-Facio, N. Heuer, M. Moraschini. 有界上同调与单纯体积。伦敦数学会讲义系列，剑桥大学出版社，剑桥，2022年。（第1页引用。）[9] J. L. Dupont. 平坦丛的特征数界。代数拓扑，奥胡斯1978年（奥胡斯大学奥胡斯研讨会论文集），第109–119页，《数学讲义》763，Springer，柏林，1979年。（第1页引用。）

[10] C. De la Cruz Mengual, 《经典群有界上同调稳定性》。苏黎世联邦理工学院（2019年），苏黎世。（第5页引用。）[11] C. De la Cruz Mengual, T. Hartnick. 有界上同调的 Quillen 稳定性判据。arXiv 预印本（2023年），arXiv:2307.12808。（第1、5和11页引用。）[12] C. De la Cruz Mengual, T. Hartnick. 经典群有界上同调的稳定化。arXiv 预印本（2022年），arXiv:2201.03879。（第1、3、4、5和12页引用。）[13] J. Farre. 有界上同调中的关系。《拓扑学杂志》13卷（2020年），第3期，1084–1118。（第2页引用。）[14] R. Frigerio. 离散群的有界上同调。数学调查与专著，227。美国数学会，普罗维登斯，罗德岛州，2017年。（第1和20页引用。）[15] S. Galatius, A. Kupers, O. Randal-Williams. E_2-胞腔与映射类群。《高等科学研究所数学出版物》130卷（2019年），1–61。（第4和12页引用。）[16] W. M. Goldman. 复双曲几何。牛津数学专著。牛津科学出版社。克拉伦登出版社。xx，316页。牛津，1999年。（第8页引用。）[17] A.B. Goncharov. 特征类的显式构造。I. M. Gel’fand 研讨会，169–210，《苏联数学进展》16卷（1993年），第1部分，美国数学会，普罗维登斯，罗德岛州。（第2、3和14页引用。）[18] W. Greub, S. Halperin, R. Vanstone. 联络、曲率与上同调，第三卷：主丛与齐性空间的上同调。《纯粹与应用数学》，第47-III卷。学术出版社 [Harcourt Brace Jovanovich 出版社], 纽约–伦敦，1976年。（第1页引用。）[19] M. Gromov. 体积与有界上同调。高等科学研究所数学出版物56卷（1982年），5–99。（第1页引用。）[20] T. Hartnick, A. Ott. 通过偏微分方程研究有界上同调，I。《几何与拓扑》19卷（2015年），第6期，3603–3643。（第2页引用。）[21] T. Hartnick, A. Ott. Hermitian 李群有界上同调中比较映射的满射性。《国际数学研究通知》IMRN 2012卷（2012年），第9期，2068–2093。（第1页引用。）[22] T. Kastenholz, R. J. Sroka. 单纯有界上同调与稳定性。arXiv 预印本（2023年），arXiv:2309.05024。（第3和4页引用。）[23] A. Korányi, H. M. Reimann. 海森堡群上的复交比。《数学教学》第二辑（1987年），第33期，291–300。（第8页引用。）[24] B. Kostant. 复单李群的主三维子群与贝蒂数。《美国数学杂志》81卷（1959年），973–1032。（第24页引用。）[25] J-F. Lafont, B. Schmidt. 非紧型闭局部对称空间的单纯体积。《数学学报》197卷（2006年），第1期，129–143。（第1页引用。）[26] M. Mimura, H. Toda. 李群的拓扑。I、II。作者根据1978年日文版译出。数学专著译丛，91。美国数学会，普罗维登斯，罗德岛州，1991年。（第1和23页引用。）[27] N. Monod. 有界上同调导论。国际数学家大会，第二卷，1183–1211，欧洲数学会，苏黎世，2006年。（第1页引用。）[28] N. Monod. 局部紧群的连续有界上同调。《数学讲义》1758。Springer 出版社，柏林，2001年。（第1、11、14、19、21和22页引用。）[29] N. Monod. 等变可测提升。《基础数学》230卷（2015年），第2期，149–165。（第20页引用。）[30] N. Monod. SL_n 在有界上同调中的稳定化。《当代数学》347卷（2004年），191–202。（第2和3页引用。）

[31] A. L. Onishchik。《传递变换群的拓扑》。Johann Ambrosius Barth Verlag GmbH，莱比锡（1994年）。（见第24页。）[32] D. I. Panyushev。关于主 $\mathfrak{sl}_2$-子代数的 Dynkin 指数。《Adv. Math.》221（2009年），第4期，1115–1121。（见第24页。）[33] J. D. Stasheff。群与分类空间的连续上同调。《Bull. Amer. Math. Soc.》84（1978年），第4期，513–530。（见第1页和第23页。）[34] T. Tao。经典群之间的特殊等源。博客文章，发表于“What’s new”（2011年3月11日）
h
tt
ps://terrytao.wordpress.com/2011/03/11/exceptional-isogenies-between-the-classical-lie-groups/。（见第14页和第22页。）[35] D.E. Taylor。《经典群的几何》。纯数学西格玛丛书，9。Heldermann Verlag，柏林，1992年。（见第7页。）[36] B. L. van der Waerden。《线性变换群》。Springer 出版社，柏林，1935年。（见第14、16和22页。）[37] D. Zagier。二重对数函数。《数论、物理与几何前沿》II，3–65，Springer，柏林，2007年。（见第13页和第15页。）[38] R. J. Zimmer。遍历理论与半单群。数学专著，第81卷。Birkhäuser，波士顿—巴塞尔—斯图加特，1984年。（见第7页。）

电气与计算机工程学院，以色列理工学院，海法，以色列电子邮件地址：
c.delacruz@technion.ac.il