具有非各向同性质量的时空的辐射与渐近行为

Lydia Bieri [1]

*De*密歇根大学数学系，安娜堡，*MI 48109-1120*，美国

谨以此文献给 *Demetrios Christodoulou*

摘要

我们为一大类时空推导出关于辐射、未来零无穷远处的角动量以及剥离的新结果。对于爱因斯坦真空方程的渐近平坦解，若初始数据度规中含有一个次数为 -1 的齐次项（即该项可能包含各向异性质量项），我们证明了辐射场和未来零无穷远处曲率分量的详细新行为。特别地，沿零超曲面 C_u 取极限，当 $t \to \infty$ 时，曲率分量 $\rho = \frac{1}{4}R_{3434}$ 乘以 r^3 趋于函数 $P(u, \theta, \phi)$，其定义在 $\mathbb{R} \times S^2$ 上。取极限 $u \to +\infty$-（这对应于类空无穷远处的极限）时，该函数趋于函数 $P^+(\theta, \phi)$，其定义在 S^2 上。我们证明，后一个极限不含任何 $l = 1$ 模态，但包含所有其他模态，$l = 0$，$l \geq 2$。关键曲率分量的重要导数在 u 中不衰减，这是这些更一般时空的一个特殊特征。我们证明，对于大数据，韦尔曲率分量在未来零无穷远处的剥离在 r^{-3} 阶停止，即 $r^{-4}|u|^{+1}$；对于小数据，则在 $r^{-\frac{7}{2}}$ 阶停止。尽管如此，由于所涉及的 $l = 1$ 模态具有良好行为，我们证明这些时空在未来零无穷远处的角动量是良定义的。

arXiv:2304.00611v1 [gr-qc] 2 Apr 2023

目录

1 引言 21.0.1 新结果.**3****2 设定 5 3 主要结果 7**3.1 时空行为.7 3.1.1 曲率.7 3.1.2 里奇系数.9 3.2 未来零无穷远处的行为.10 3.2.1 记忆效应.10 3.3 比较 (A) 与 (CK) 时空.10 3.4 能量与曲率的控制.11

[1]lbieri@umich.edu

4 比安基方程和结构方程 11
4.1 比安基方程.11 4.2 结构方程.12

5 未来零无穷远处的极限 $\mathcal{I}^+$ 136 通过比安基方程和结构方程进行考察 ρ 146.1 类空无穷远处的极限.157
$\mathcal{I}^+$ **22处的角动量8 未来零无穷远处的 Weyl 曲率行为 $\mathcal{I}^+$** 248.1 剥离停止.249 **结论 25 A 类空无穷远处的积分 25 B 符号说明 26 C 未来零无穷远处的霍奇理论 27**

1 引言

本文推导了关于渐近平坦系统中辐射场及渐近行为的结果，这些系统包含一个随迟滞时间 {v1} 演化的非各向同性质量项。尽管我们关注爱因斯坦真空方程的解，但主要发现同样适用于与其他物质或能量场耦合的爱因斯坦方程系统。一个重要推论是，对于物理系统，未来零无穷远处韦尔曲率分量的剥离在 r^{-3} 阶停止，也就是说$r^{-4}|u|^{+1}$。这超越了 Demetrios Christodoulou 在 $[9]$, 所讨论情形中推导出的 $r^{-4}\log r$ 项，并将该情形扩展到了更一般的设定。因此，对于这些动态情形（依赖于 u），剥离存在一个自然的“屏障”；即便对初始度规和第二基本形式的尾部施加更强的衰减条件，这一屏障也不会改变。此外，我们证明，尽管存在上述性质，零无穷远处的角动量仍然是良好定义的。

我们考虑满足爱因斯坦真空（EV）方程的时空（M， g） ns

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{1}$$

其中 μ， $\nu = 0$，1，2，3，对于渐近平坦的初始数据（H_0， $\bar{g}_{ij}$， k_{ij}），其满足 i, $j = 1$，2，3，其中 $\bar{g}$ 和 k 足够光滑，并且存在一个坐标系

$(x^1,\ x^2,\ x^3)$，在无穷远邻域中满足 $r=(\sum_{i=1}^{3}(x^i)^2)^{\frac{1}{2}}\to\infty$，将这类初始数据及其对应的时空称为 (A)：

$$\begin{aligned}\bar{g}_{ij} &= \delta_{ij}+h_{ij}+o_3\left(r^{-\frac{3}{2}}\right) &(2)\\ k_{ij} &= o_2(r^{-\frac{5}{2}}) &(3)\end{aligned}$$

其中 h_{ij} 是 -1次齐次的。特别是，h 可以包含一个非各向同性质量项 $M(\theta,\ \phi)$，它依赖于角度。时空度规将包含一个由此产生的项，该项是 -1 次齐次的，并且在未来零无穷远处具有相应的极限$M(u,\ \theta,\ \phi)$，该极限依赖于迟滞时间 u。

在他们开创性的成果中，[13], Demetrios Christodoulou 和 Sergiu Klainerman 利用如下类型的初始数据，证明了闵可夫斯基时空的全局非线性稳定性，并将此类初始数据及相应的时空称为 (CK)：

$$\begin{aligned}\bar{g}_{ij} &= (1+\frac{2M}{r})\,\delta_{ij}+o_4\left(r^{-\frac{3}{2}}\right) &(4)\\ k_{ij} &= o_3\left(r^{-\frac{5}{2}}\right), &(5)\end{aligned}$$

其中 M 表示质量，且为常数。

本文作者在 [1, 2] 中证明稳定的最一般时空，其初始数据具有如下类型；本文将此类初始数据及相应的时空称为 (B)：

$$\begin{aligned}\bar{g}_{ij} &= \delta_{ij}+o_3\left(r^{-\frac{1}{2}}\right) &(6)\\ k_{ij} &= o_2\left(r^{-\frac{3}{2}}\right). &(7)\end{aligned}$$

记号： 用 u 表示第 2 节中引入的、对应于闵可夫斯基时空中的负迟滞时间的光学函数；用 u 表示相应的超前时间。按照这一符号约定，我们将 u 称为迟滞时间 。

1.0.1 新结果

小数据：在与 ((2), (3)) 相关的初始数据满足小量假设 的条件下，我们通过一种介于 [1, 2] 中的 (B) 与 [13] 中的 (CK) 之间的稳定性证明途径，证明了 [6]对解时空 (A) 的估计。注意，这些结果 [1, 2]蕴含了 (A) 型解的存在性，但我们需要利用 ((2), (3)) 中的额外结构来证明 (A) 的精确估计，这将在 [6] 中完成。

大数据：对于大数据 和情形 (A)，沿零超曲面的主要估计仍然成立，并且我们推导出精确的渐近行为。

非零线动量及 ρ 对引力波记忆效应的贡献：首先，对于初始数据，我们可以选择一个线动量为零的质心系。在小量假设下，由此得到的

时空在无穷远处趋于闵可夫斯基时空，因此线动量显然为零。考虑大数据时，我们仍可从一个质心系出发，也可以考虑未来的一个质心系，但这些标架通常具有非零相对速度。我们发现，(A) 时空自然呈现非零线动量。特别地，我们可以表述线动量的守恒定律，并将辐射带走的线动量纳入考量。我们还计算了未来零无穷远处相应 ρ 极限$\mathcal{I}^+$ 对记忆效应的贡献。

主要结果 本文对于时空有如下结论 :

- **剥离** 在未来零无穷远处的韦尔曲率分量在阶数 r^{-3}处**停止** ，也就是说，对于大数据有 $r^{-4}|u|^{+1}$ 。对于小数据，这一极限为动力学阶 $r^{-\frac{7}{2}}$，即主导阶项取决于 u。这些阶数分别由大数据和小数据下的曲率分量 β 达到。

- **具有不同性质的动力学行为**：沿用下一节第 2 节中引入的记号，我们发现 在不同层次上存在不同的行为和衰减性质，尤其是在未来零无穷远和类空无穷远处。我们还推导出关键曲率分量及其导数的不同表现。这些包括:

  - 当迟滞时间 $u \to +\infty$时，极限 $\lim_{C_u, t\to\infty} r^3\rho = P(u,\theta,\phi)$ 趋于函数 $P^+(\theta,\phi)$, 该函数定义在 S^2上。在 (CK) 中，相应的极限是一个常数（见第 3.2 节）。（注意，我们对迟滞时间采用相反的符号约定。因此， $u \to +\infty$ 对应于类空无穷远处的极限， $u \to -\infty$ 对应于未来类时无穷远处的极限。）

  - $\rho - \bar{\rho}$，分别地， $P - P$在迟滞时间 u中不衰减。（这里， $\bar{\rho}$表示 ρ 在S_t上的平均值, u，而 $\bar{P}$ 表示 P 在 S^2上的平均值。）

- **极限：** 用 $P_{H_0}(\theta,\phi)$表示 $r^3\rho$ 在类空无穷远处的极限。**以下极限满足**

$$P_{H_0}(\theta,\phi) \;\neq\; P^+(\theta,\phi) \quad \text{in general ,}$$

然而,

$$\int_{S^2} P_{H_0}(\theta,\phi) \;=\; \int_{S^2} P^+(\theta,\phi)\ .$$

- $\mathbf{P_{H_0}}(\theta,\phi)$，以及$\mathbf{P}^+(\theta,\phi)$，都**不含任何** $l=1$ **模态**。

- **能量和动量**在未来零无穷远处是良好定义的。特别是，**角动量**可以被定义，且尽管β及其导数衰减缓慢，它仍然是有限的。原因是 $P^+(\theta,\ \phi)$ 不含任何 $l=1$模态，而相关量的 $l=1$ 模态表现优于这些量本身。

此外，**我们发现**（参见本文第 3 节和 [6]）

- 我们发现，在 (A) 中是 $\not\nabla\rho = O(r^{-4})$，而在 (CK) 中则是 $\not\nabla\rho = O(r^{-4}\tau_-^{-\frac{1}{2}})$。
- $\underline{\beta}_4 = O$ 在 (A) 中是 r^{-4}（$\underline{\beta}_4 = O$），而在 (CK) 中是 $r^{-4}\tau_-^{-2}$()；对于 (A)，我们有 $\beta_3 = O(r^{-4})$，而对于 (CK)，则有 $\beta_3 = O(r^{-4}\tau_-^{-2})$。请注意，“较粗略的能量估计”与比安基方程结合，只能得到 $\not\nabla\rho = O($ $r^{-3}\tau_-^{-2})$、$\bar{\underline{\beta}}_4 = O(r^{-3}\tau_-^{-2})$、$\bar{\beta}_3 = O(r^{-3}\tau_-^{-2})$。第 3.4 节讨论了能量估计。

2 设定

接下来，我们将介绍本文所采用的主要叶状分解和标架。记 t 为极大时间函数，它将时空分解为类空超曲面 H_t。在此框架中，第零坐标为时间坐标，指标 1、2、3 表示空间坐标。记 u 为光学函数（按照上述符号约定的迟滞时间），记 C_u 为 u 叶状结构的出射零超曲面。对应的交集记为 $S_{t,u} = H_t \cap C_u$。$S_{t,u}$ 与球面 S^2 微分同胚；我们将定义在 $S_{t,u}$ 上的 θ, ϕ 称为球面变量。特别地，光学函数 u 满足程函方程 $g^{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x^\alpha}\frac{\partial u}{\partial x^\beta} = 0$。我们有 $l^\alpha = -g^{\alpha\beta}\partial_\beta u$，且 l 的积分曲线是零测地线。零超曲面 C_u 由零测地线段生成。带上划线的量表示 H_t。时空 M 上的协变微分记为 D 或 ∇，而类空超曲面 H 上的协变微分记为 ∇ 或 ∇。根据上下文即可明确 ∇ 所指的对象。现在，我们引入 $u := 2r - u$，其中 $r = r(t,u)$ 由 $4\pi r^2$ 定义，用以表示 $S_{t,u}$ 的曲面面积。记 C_u 为入射零超曲面。定义 $\tau_- := \sqrt{1+u^2}$，以及 $\tau_+ := \sqrt{1+u^2}$。

我们还使用零标架 e_4，e_3，e_2，e_1，其中 e_4（出射零方向）和 e_3（入射零方向）构成一对零向量，并由 e_A，$A = 12$ 补充；后者是 $S_{t,u} = H_t \cap C_u$ 的局部标架场。我们有 $g(e_4, e_3) = -2$。给定这对零向量 e_3 和 e_4，我们可以定义从 M 的切空间到 $S_{t,u}$ 的投影张量。

$$\Pi^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(e_4^\nu e_3^\mu + e_3^\nu e_4^\mu).$$

记 N 为 $S_{t,u}$ 在 H_t 中的向外单位法向量，并记 T 为 H_t 的未来指向单位法向量，即 $T = \frac{1}{\Phi}\frac{\partial}{\partial t}$，其中 Φ 为间隔函数。于是可见，$e_3 = T - N$ 是入射零向量场，而 $e_4 = T + N$ 是出射零向量场。我们使用间隔函数为 $a = |\nabla u|^{-1}$ 时的表达式 $N = a^{-1}\frac{\partial}{\partial u}$。曲面 $S_{t,u}$ 上的算子用斜线标记，因此 $d\!\!\!/iv$、$c\!\!\!/url$ 分别为相应的散度算子和旋度算子。对于与 S 相切的 p 阶协变张量场 t，我们分别用 $\not\!\!D_4 t$ 和 $\not\!\!D_3 t$ 表示其在 S 上的投影 $D_4 t$ 和 $D_3 t$。

接下来，我们定义相对于零叶状结构的 Weyl 曲率分量。

定义 1 我们将 *Weyl* 曲率的零分量 W 定义如下:

$$\underline{\alpha}_{\mu\nu}\,(W) = \Pi_{\mu}{}^{\rho}\;\Pi_{\nu}{}^{\sigma}\;W_{\rho\gamma\sigma\delta}\;e_3^{\gamma}\;e_3^{\delta} \tag{8}$$

$$\underline{\beta}_{\mu}\,(W) = \frac{1}{2}\;\Pi_{\mu}{}^{\rho}\;W_{\rho\sigma\gamma\delta}\;e_3^{\sigma}\;e_3^{\gamma}\;e_4^{\delta} \tag{9}$$

$$\rho\,(W) = \frac{1}{4}\;W_{\alpha\beta\gamma\delta}\;e_3^{\alpha}\;e_4^{\beta}\;e_3^{\gamma}\;e_4^{\delta} \tag{10}$$

$$\sigma\,(W) = \frac{1}{4}\;{}^{*}W_{\alpha\beta\gamma\delta}\;e_3^{\alpha}\;e_4^{\beta}\;e_3^{\gamma}\;e_4^{\delta} \tag{11}$$

$$\beta_{\mu}\,(W) = \frac{1}{2}\;\Pi_{\mu}{}^{\rho}\;W_{\rho\sigma\gamma\delta}\;e_4^{\sigma}\;e_3^{\gamma}\;e_4^{\delta} \tag{12}$$

$$\alpha_{\mu\nu}\,(W) = \Pi_{\mu}{}^{\rho}\;\Pi_{\nu}{}^{\sigma}\;W_{\rho\gamma\sigma\delta}\;e_4^{\gamma}\;e_4^{\delta}\;. \tag{13}$$

因此，大写指标取值为 1、2，我们有:

$$W_{A3B3} = \underline{\alpha}_{AB} \tag{14}$$

$$W_{A334} = 2\;\underline{\beta}_{A} \tag{15}$$

$$W_{3434} = 4\;\rho \tag{16}$$

$${}^{*}W_{3434} = 4\;\sigma \tag{17}$$

$$W_{A434} = 2\;\beta_{A} \tag{18}$$

$$W_{A4B4} = \alpha_{AB} \tag{19}$$

with
α, $\underline{\alpha}$： S-切向、对称、无迹张量β, $\underline{\beta}$： S-切向
1-形式ρ, σ ： 标量。

Weyl 张量 $W_{\alpha\beta\gamma\delta}$ 分解为其电部分和磁部分，定义如下:

$$E_{ab} := W_{aTbT} \tag{20}$$

$$H_{ab} := \tfrac{1}{2}\epsilon^{ef}{}_{a}W_{efbT} \tag{21}$$

这里， ϵ_{abc} 为空间体积元，并且与时空体积元的关系为 $\epsilon_{abc} = \epsilon_{Tabc}$。

特别地，用我们的记号表示为

$$E_{NN} \;=\; \rho \qquad , \qquad H_{NN} \;=\; \sigma\;.$$

我们使用极大时间函数。因此，考虑由极大时间函数给出的叶状结构（极大叶丛）:

极大叶丛的约束方程:

$$trk = 0 \tag{22}$$

$$\nabla^{i}k_{ij} = 0 \tag{23}$$

$$\bar{R} = |k|^{2}\;. \tag{24}$$

极大叶丛的演化方程：

$$\frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial t} = -2\Phi k_{ij} \tag{25}$$

$$\frac{\partial k_{ij}}{\partial t} = -\nabla_i \nabla_j \Phi + (\bar{R}_{ij} - 2k_{im}k^m_j)\,\Phi \ . \tag{26}$$

鉴于极大性条件，对二阶变分方程(26)取迹，可得切片函数方程：

$$\triangle\, \Phi = |\, k\,|^2\ \Phi \ . \tag{27}$$

由(3)和(24)可得

$$\bar{R} = |k|^2 = o(r^{-5}) \ . \tag{28}$$

度规(2)只能给出 $\bar{R} = O(r^{-3})$。因此， $\bar{R}$ 的 r^{-3} 部分必须消失。这给出了关于 h_{ij} 的方程，即

$$\bar{R} = \frac{1}{2}\big(\partial_i\partial_j h_{ij} - \partial_j\partial_j h_{ii}\big) + o(|\, x\,|^{-\frac{7}{2}}) \ . \tag{29}$$

因此，(29)右端的第一项必须单独为零：

$$\partial_i\partial_j h_{ij} - \partial_j\partial_j h_{ii} = 0 \ . \tag{30}$$

此外，在我们的设定中，时空 M 的每个类空 H_t 上都有以下方程

$$curl\ k = H \tag{31}$$

$$\bar{R}_{ij} = k_{im}k^m_j + E_{ij} \ . \tag{32}$$

涉及所有分量的详细方程呈现出有趣的结构。

3 主要结果

3.1 时空行为

3.1.1 曲率

为了将我们的新结果置于背景中，我们回顾以下两组结果。由 [1, 2] 可知，对于 (B) 型时空

$$\underline{\alpha} = O\,(r^{-1}\ \tau_-^{-\frac{3}{2}}) \tag{33}$$

$$\underline{\beta} = O\,(r^{-2}\ \tau_-^{-\frac{1}{2}}) \tag{34}$$

$$\rho,\ \sigma,\ \alpha,\ \beta = o\,(r^{-\frac{5}{2}}) \tag{35}$$

由 [13] 可知，对于 (CK) 型时空

$$\begin{aligned}
\underline{\alpha} &= O\left(r^{-1}\,\tau_-^{-\frac{5}{2}}\right) && (36)\\
\underline{\beta} &= O\left(r^{-2}\,\tau_-^{-\frac{3}{2}}\right) && (37)\\
\rho &= O\left(r^{-3}\right) && (38)\\
\rho-\bar{\rho} &= O\left(r^{-3}\,\tau_-^{-\frac{1}{2}}\right) && (39)\\
\sigma &= O\left(r^{-3}\,\tau_-^{-\frac{1}{2}}\right) && (40)\\
\sigma-\bar{\sigma} &= O\left(r^{-3}\,\tau_-^{-\frac{1}{2}}\right) && (41)\\
\beta &= o\left(r^{-\frac{7}{2}}\right) && (42)\\
\alpha &= o\left(r^{-\frac{7}{2}}\right) && (43)
\end{aligned}$$

我们在这一新情形中发现了有趣的动力学，它们不同于 [13] 中研究的情形 (CK)。具体而言，在**当前情形**下，对于**A 型时空**，可以推出

$$\begin{aligned}
\underline{\alpha} &= O\left(r^{-1}\,\tau_-^{-\frac{5}{2}}\right) && (44)\\
\underline{\beta} &= O\left(r^{-2}\,\tau_-^{-\frac{3}{2}}\right) && (45)\\
\rho &= O\left(r^{-3}\right) && (46)\\
\rho-\bar{\rho} &= O\left(r^{-3}\right) && (47)\\
\sigma &= O\left(r^{-3}\,\tau_-^{-\frac{1}{2}}\right) && (48)\\
\sigma-\bar{\sigma} &= O\left(r^{-3}\,\tau_-^{-\frac{1}{2}}\right) && (49)\\
\beta &= o\left(r^{-\frac{7}{2}}\right) && (50)\\
\alpha &= o\left(r^{-\frac{7}{2}}\right) && (51)
\end{aligned}$$

特别是，我们还推导出，对于 (A),

$$\nabla\!\!\!/\,\rho = O\left(r^{-4}\right) \qquad (52)$$

而在 [13] 中，对于 Christodoulou 和 Klainerman 的 (CK)，则有

$$\nabla\!\!\!/\,\rho = O\left(r^{-4}\tau_-^{-\frac{1}{2}}\right). \qquad (53)$$

在 [9] 中，Christodoulou 考虑了比 [13], 衰减稍强的数据；具体来说，初始数据度规的尾部多出一个 $r^{-\frac{1}{2}}$。随后他证明，β 曲率分量含有一个对数项，特别是其中包含一个阶为 $1/(r^4\log r)$ 的项。随后，他从物理角度讨论了这一情形。Christodoulou 发现

$$\nabla\!\!\!/\,\rho = O\left(r^{-4}\tau_-^{-1}\right). \qquad (54)$$

请注意，在具有更强衰减的纽曼–彭罗斯图景中，β 会像r^{-4} 一样发生剥离，而 α 会像 r^{-5}一样发生剥离。Christodoulou 的文章 [9] 表明，对于

物理数据而言，情况并非如此。本文以及本文作者即将发表的一篇论文进一步表明，动力时空不一定表现出完整剥离；相反，“球对称性”会带来更强的衰减（就 (39) 的意义而言，参见 (47)），而对于更一般的数据，时空中的曲率及其导数趋向于更缓慢地衰减（(52)、(53)）。

我们指出，（39）与（47）之间的差异至关重要。因此，虽然在 (CK) 时空中，$\rho - \bar{\rho}$ 在 τ_-中具有额外的衰减，但 (A) 时空并非如此。后者的原因在于，质量依赖于角度，而在前一种情况下质量是常数。

(CK) 时空的渐近球对称性源于 (CK) 数据（4），即 M 为常数；这使得在 [13] 中，可以利用涉及旋转向量场的能量来控制曲率分量的衰减率。特别地，可分别得到如（39）中 $\rho - \bar{\rho}$ 以及如（53）中 $\not{\nabla}\rho$ 的额外衰减。(A) 时空缺乏这种对称性，更准确地说，公式（2）中的质量项依赖于角度，导致这些项在 (A) 中衰减得更慢。注意，邦迪质量方面函数 $M(\theta, \phi, u)$ 在 (A) 中更为一般。我们可以将 (A) 时空视为动力学情形，而将另一类解视为具有“非动力学”主导阶行为的解。

3.1.2 里奇系数

用 $\widehat{\chi}$、$\underline{\widehat{\chi}}$ 表示剪切，它们定义为相对于生成相应出射和入射零超曲面的零向量场 L 和 $\underline{L}$ 的第二基本形式的无迹部分。此外，ζ 是挠率一形式。设 X, Y 是点 $S_{t,u}$ 处的任意切向量。则第二基本形式定义为

$$\chi(X,Y) = g(\nabla_X L, Y) \quad \underline{\chi}(X,Y) = g(\nabla_X \underline{L}, Y).$$

我们分别用 $tr\chi$ 和 $tr\underline{\chi}$ 表示这些张量的迹。一般而言，我们将里奇系数定义如下

$$\begin{aligned}
\chi_{AB} &= g(D_A e_4, e_B) \\
\underline{\chi}_{AB} &= g(D_A e_3, e_B) \\
\underline{\xi}_A &= \frac{1}{2} g(D_3 e_3, e_A) \\
\zeta_A &= \frac{1}{2} g(D_3 e_4, e_A) \\
\underline{\zeta}_A &= \frac{1}{2} g(D_4 e_3, e_A) \\
\nu &= \frac{1}{2} g(D_4 e_4, e_3) \\
\underline{\nu} &= \frac{1}{2} g(D_3 e_3, e_4) \\
\epsilon_A &= \frac{1}{2} g(D_A e_4, e_3)
\end{aligned}$$

3.2 未来零无穷远处的行为

对于 (A) 时空，我们在未来零无穷远处推导出以下结果 $\mathcal{I}^+$：

$$\begin{aligned}
\lim_{C_u, t\to\infty} r^3\rho &= P(u,\theta,\phi) \\
\bar{P} &= \bar{P}(u) \\
(P-\bar{P})(u,\theta,\phi) &: \text{ does not decay in } \mid u \mid \text{ as } \mid u \mid \to \infty, \\
&\quad \text{leading order term is dynamical, i.e. depends on } u, \\
&\quad \text{and also depends on the angles } \theta,\, \phi \\
\lim_{u\to+\infty} P(u,\theta,\phi) &= P^+(\theta,\phi)
\end{aligned}$$

我们看到，$P = P(u,\ \theta,\ \phi)$ 是定义在 $R\times S^2$ 上的函数，而 $P^+ = P^+(\theta,\ \phi)$ 是定义在 S^2 上的函数。因此，特别是当 $u\to+\infty$ 时，量 $P(u,\ \theta,\ \phi)$ 趋于 S^2 上的一个函数$P^+(\theta,\ \phi)$，而非常数。

请注意，对于 [13] 中的 (CK) 时空，

$$\begin{aligned}
P-\bar{P} &= O(\mid u \mid^{-\frac{1}{2}}) \\
\lim_{u\to+\infty} P &= P^+ = \lim_{u\to+\infty}\bar{P} = \bar{P}^+ = -2M^+ = constant \\
\lim_{u\to-\infty} P &= P^- = \lim_{u\to-\infty}\bar{P} = \bar{P}^- = 0
\end{aligned}$$

因此，P 当 $u\to+\infty$ 时的主导阶项是角度 $\theta,\ \phi$ 上的常数，且在 $P-P$ 中抵消。这里，M 表示邦迪质量，其在 $u\to+\infty$ 时的极限 M^+ 即为 ADM 质量。

3.2.1 记忆效应

记忆效应。($P-P$) 对引力波记忆效应有一个自然贡献。可以使用 Christodoulou 论文 [8] 中的记忆效应公式，也可以使用本文作者推导的任一记忆效应公式，例如 [3, 4], ，但需采用 (A) 数据。

3.3 比较 (A) 与 (CK) 时空

	(A)	(CK)
ρ	$\lim_{C_u,t\to\infty} r^3\rho = P(u,\theta,\phi)$	”

($P-\bar{P}$) 在 $\mid u \mid$ 中不会衰减；当 $\mid u \mid\to\infty$ 时，$O(\mid u \mid^{-\frac{1}{2}})$ 趋于 ($\theta,\ \phi$) 的一个非零函数；当 $u\to+\infty$ 时，对于 $u\to+\infty$，它为零

$\not\nabla\rho$	$O\ (r^{-4})$	$O\ (r^{-4}\tau_-^{-\frac{1}{2}})$

β	$o(r^{-\frac{7}{2}})$	$o(r^{-\frac{7}{2}})$
β_3	$O\ (r^{-4})$	$O\ (r^{-4}\tau^{-\frac{1}{2}})$
$\underline{\beta}_4$	$O\ (r^{-4})$	$O\ (r^{-4}\tau^{-\frac{1}{2}})$

3.4 能量与曲率控制

在 [6] 中，我们使用能量来控制那些介于 $[1, 2]$ 的临界情形与 [13] 的强渐近平坦情形之间的曲率分量。前一种证明中，本文作者已经必须直接处理比安基方程，并结合与较少向量场相关的“较粗糙”能量，以及数据非常缓慢的衰减（临界衰减）；而 Christodoulou 和 Klainerman 的后一项结果则利用了旋转向量场，从而获得了额外的衰减。

¯相比之下，在 $[13],$ 中，向量场 T， S， K， K， O_i 起着关键作用；而在 $[1, 2],$、 [6]以及本文所讨论的情形中，只有前四个向量场会发挥作用，没有可用的旋转向量场 O_i 。鉴于本文中初始数据的衰减，以及与能量相关的向量场，更准确地说，鉴于缺乏对称性（尤其是与 [13]中的情形相比），我们直接依赖比安基方程。本文研究的设定要求引入并控制不同的能量。通过平衡能量估计与比安基方程，并利用结构方程提供的额外信息，估计得以在最优阶闭合。特别是，为了确立曲率项 ρ 及其导数，以及 β_3 和β_4 的最优行为，我们利用了这些方程的额外结构。

–

4 比安基方程与结构方程

4.1 比安基方程

比安基方程如下所示。

相对于零叶状结构，比安基方程的形式如下：

$$\not{D}_3\alpha + \frac{1}{2}tr\underline{\chi}\alpha = -2\not{D}^*_2\beta - 3\hat{}\chi\rho - 3^*\hat{}\chi\sigma + 2\nu\underline{\alpha} + (\epsilon+4\zeta)\hat{}\otimes\beta \tag{55}$$

$$\not{D}_3\beta + tr\underline{\chi}\beta = \not{D}^*_1(-\rho,\sigma) + 2\hat{\chi}\underline{\beta} + 3\zeta\rho + 3^*\zeta\sigma + \underline{\nu}\beta + \underline{\xi}\alpha \tag{56}$$

$$\not{D}_4\beta + 2tr\chi\beta = di\not{v}\,\alpha - \nu\beta + (2\epsilon+\zeta)\alpha \tag{57}$$

$$\not{D}_3\rho + \frac{3}{2}tr\underline{\chi}\rho = -di\not{v}\,\underline{\beta} - \frac{1}{2}\hat{\chi}\underline{\alpha} + (\epsilon-\zeta)\underline{\beta} + 2\underline{\xi}\beta \tag{58}$$

$$\not{D}_4\rho + \frac{3}{2}tr\chi\rho = di\not{v}\,\beta - \frac{1}{2}\hat{\underline{\chi}}\alpha + \epsilon\beta + 2\underline{\zeta}\beta \tag{59}$$

$$\not{D}_3\sigma + \frac{3}{2}tr\underline{\chi}\sigma = -c\not{u}rl\,\underline{\beta} - \frac{1}{2}\hat{\chi}^*\underline{\alpha} + \epsilon^*\underline{\beta} - 2\zeta^*\underline{\beta} - 2\underline{\xi}^*\beta \tag{60}$$

$$\not{D}_4\sigma + \frac{3}{2}tr\chi\sigma = -c\not{u}rl\,\beta + \frac{1}{2}\hat{\underline{\chi}}^*\alpha + -\epsilon^*\beta - 2\underline{\zeta}^*\beta \tag{61}$$

$$\not{D}_3\underline{\beta} + 2tr\underline{\chi}\underline{\beta} = -di\not{v}\,\underline{\alpha} - (\zeta-2\epsilon)\underline{\alpha} - \underline{\nu}\underline{\beta} - 3\underline{\xi}\rho + 3^*\underline{\xi}\sigma \tag{62}$$

$$\not{D}_4\underline{\beta} + tr\chi\underline{\beta} = \not{D}^*_1(\rho,\sigma) + \nu\underline{\beta} + 2\hat{\underline{\chi}}\beta - 3(\underline{\zeta}\rho - ^*\,\underline{\zeta}\sigma) \tag{63}$$

$$\not{D}_4\underline{\alpha} + \frac{1}{2}tr\chi\underline{\alpha} = 2\not{D}^*_2\underline{\beta} + 2\nu\underline{\alpha} + (\epsilon-4\underline{\zeta})\hat{\otimes}\underline{\beta} - 3(\hat{\underline{\chi}}\rho - ^*\,\hat{\underline{\chi}}\sigma) \tag{64}$$

4.2 结构方程

$$di\not{v}\,\hat{\underline{\chi}} = \underline{\beta} + \hat{\underline{\chi}}\cdot\zeta + \frac{1}{2}(\nabla\!\!\!/\,tr\underline{\chi} - tr\underline{\chi}\zeta) = \underline{\beta} + l.o.t. \tag{65}$$

$$di\not{v}\,\hat{\chi} = -\beta - \hat{\chi}\cdot\zeta + \frac{1}{2}(\nabla\!\!\!/\,tr\chi + tr\chi\zeta) \tag{66}$$

回顾一下，ζ 是挠率一形式，已在上文第 3.1.2 小节中引入。

这些剪切之间满足以下方程

$$\frac{\partial}{\partial u}\hat{\chi} = \frac{1}{4}tr\chi\cdot\hat{\underline{\chi}} + l.o.t. \tag{67}$$

此外，它

$$\frac{\partial}{\partial u}\hat{\underline{\chi}} = \frac{1}{2}\underline{\alpha} + l.o.t. \tag{68}$$

5 未来零无穷远处的极限 $\mathscr{I}^+$

根据上文 [6], 参见第 3 节所确立的行为，我们直接得到以下定理。

定理 1 对于 *(A)* 时空，归一化曲率分量 $r\alpha$, $r^2\beta$, $r^3\rho$,$r^3\sigma$ 在 C_u 上当 $t\to\infty$ 时存在极限：

$$\begin{aligned}\lim_{C_u,t\to\infty} r\underline{\alpha} &= A(u,\cdot), & \lim_{C_u,t\to\infty} r^2\underline{\beta} &= \underline{B}(u,\cdot),\\ \lim_{C_u,t\to\infty} r^3\rho &= P(u,\cdot), & \lim_{C_u,t\to\infty} r^3\sigma &= Q(u,\cdot)\end{aligned}$$

其中，极限定义在 S^2 上，并依赖于 u。这些极限满足

$$\begin{aligned}|A(u,\cdot)| &\le C(1+|u|)^{-5/2}, & |\underline{B}(u,\cdot)| &\le C(1+|u|)^{-3/2}\\ |Q(u,\cdot)| &\le C(1+|u|)^{-1/2}\end{aligned}$$

而 $P(u,\cdot)$、$(P(u,\cdot)-P(u))$ 在 $|u|$ 中不衰减。

此外，以下极限存在

$$\lim_{C_u,t\to\infty} r^2\widehat{\chi} =: \Sigma(u,\cdot) \tag{69}$$

$$-\frac{1}{2}\lim_{C_u,t\to\infty} r\widehat{\underline{\chi}} = \lim_{C_u,t\to\infty} r\hat{\eta} =: \Xi(u,\cdot) \tag{70}$$

进一步地，分别由 (68)、(67) 和 (65) 可得

$$\frac{\partial\Xi}{\partial u} = -\frac{1}{4}A \tag{71}$$

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial u} = -\Xi \tag{72}$$

$$\underline{B} = -2d\!\!\!/v\,\Xi \tag{73}$$

另一个结果是其行为

$$|\Xi(u,\cdot)| \le C(1+|u|)^{-3/2} \tag{74}$$

我们引入 $F/4\pi$，即沿给定方向每单位角度辐射的能量，其中

$$F(\cdot) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} |\Xi(u,\cdot)|^2 du\ . \tag{75}$$

并且我们用 $F(u)$ 表示

$$F(u,\cdot) = \frac{1}{2}\int_{u}^{+\infty} |\Xi(u',\cdot)|^2 du'\ . \tag{76}$$

Behaviors of ρ and P versus σ and Q: 而曲率项 ρ, $\bar{}$($\rho-\rho$) 及其极限 $P(u,$ ·)、($\bar{P}(u,$ ·) $-P(u)$) 在 $|u|$ 中不会随 $|u|\to\infty$ 衰减，但曲率项 σ、($\sigma-\sigma$) 及相应的极限 $Q(u,$ ·)、($Q(u,$ ·) $\bar{}$ $-Q(u)$) 会衰减。为此，我们注意到以下事实：在 Christodoulou-Klainerman 对 (CK) 时空的证明中，这些项的衰减源于使用旋转向量场得到的能量估计；但在当前这个非对称情形下，旋转向量场并不可用。相反，σ 的衰减源于它与 k 的关系。特别地，对于爱因斯坦真空时空，在每个类空超曲面上都有 H_t

$$(curl\ k)_{lm} = H_{lm} \tag{77}$$

其中，H 是按（21）定义的 Weyl 曲率的磁部分，而 k 的行为如（3）所述。将此方程分解为沿曲面 $S_{t,u}$的切向部分和正交部分，方程（77）的 NN-分量为

$$(curl\ k)_{NN} = \sigma\ . \tag{78}$$

考虑（A）时空的初始数据，并观察（3）中 k 的衰减情况。如 [6], 所示，这种行为在爱因斯坦方程的演化下得以保持。因此，由（3）和（78）可知，σ，其极限 Q 也因此在 $|u|$中随 $|u|\to\infty$衰减。

6 通过 Bianchi 方程和结构方程研究 ρ

回顾一下，我们有 $T=\frac{1}{\Phi}\frac{\partial}{\partial t}$ 令 $T=E_0$ 以及（E_1,E_2,E_3）为 H_t的标准正交标架场。因此，我们得到时空 M的标架场（E_0,E_1,E_2,E_3）。

我们将在不同层次上使用比安基方程和结构方程。Bianchi 恒等式（包括其本身及其缩并形式）广泛应用于时空（M，g），也应用于类空超曲面（H_t，$\bar{g}_{ij}(t)$ $k_{ij}(t)$）。

方程 (22)-(27) 可轻易推出。我们回顾一下，Codazzi 方程为

$$\bar{\nabla}_i k_{jm}-\bar{\nabla}_j k_{im}=R_{m0ij} \tag{79}$$

而 Gauss 方程的形式为

$$\bar{R}_{imjn}+k_{ij}k_{mn}-k_{in}k_{mj}=R_{imjn}\ . \tag{80}$$

$\bar{}$上划线表示 H_t上的相应诱导量。因此，R_{imjn} 是（H_t，$\bar{g}(t)$)的曲率张量的分量。

现在，我们考虑初始超曲面（H_0，$\bar{g}_{ij}$，k_{ij}）。对 Gauss 方程取迹可得

$$\bar{R}_{ij}+trk\ k_{ij}-k_{im}k^m_{\ j}=R_{ij}+R_{i0j0}\ . \tag{81}$$

因此，由（81）结合 EV方程（1）和约束方程（22）可得
(32)

$$\bar{R}_{ij} \;=\; k_{im}k^m_j \;+\; E_{ij}\ .$$

结合约束方程 (24) 以及关于第二基本形式 k 在 H_0上的假设 (3)，由 (32) 可得

$$\bar{R}_{AB} \;=\; \frac{1}{4}\underline{\alpha}_{AB} + \frac{1}{4}\alpha_{AB} - \frac{1}{2}\rho\delta_{AB} + l.o.t. \tag{82}$$

$$\bar{R}_{NN} \;=\; \rho + l.o.t. \tag{83}$$

$$\bar{R}_{AN} \;=\; -\frac{1}{2}(\underline{\beta}_A + \beta_A) + l.o.t. \tag{84}$$

由缩并比安基恒等式可得

$$\bar{\nabla}_m \bar{R}^m_l = \frac{1}{2}\bar{\nabla}_l \bar{R}\ , \tag{85}$$

并由 (28) 可得

$$\bar{\nabla}_m \bar{R}^m_l = \frac{1}{2}\bar{\nabla}_l \bar{R} = o(r^{-6})\ . \tag{86}$$

因此，在主导阶上有

$$\bar{\nabla}_m \bar{R}^m_l = 0\ . \tag{87}$$

由 (87) 和分量 (82)-(84)，我们可推出以下方程

$$tr\overline{Ric} \;=\; \bar{R} \;=\; \overline{R}^N_{\ N} + \overline{R}^A_{\ A} \tag{88}$$

$$\;=\; 0_{\text{leading order curvature terms}} + l.o.t. \;=\; o(r^{-5}) \tag{89}$$

因此，在主导阶上有

$$\bar{\nabla}^i \bar{R}_{iB} \;=\; \bar{\nabla}^A \bar{R}_{AB} + \bar{\nabla}^N \bar{R}_{NB} \;=\; 0 \tag{90}$$

with

$$\bar{\nabla}^A \bar{R}_{AB} \;=\; \frac{1}{4}\bar{\nabla}^A \underline{\alpha}_{AB} + \frac{1}{4}\bar{\nabla}^A \alpha_{AB} - \frac{1}{2}\bar{\nabla}^A \rho \cdot \delta_{AB} \tag{91}$$

and

$$\bar{\nabla}^N \bar{R}_{NB} \;=\; -\frac{1}{2}\bar{\nabla}^N \underline{\beta}_B - \frac{1}{2}\bar{\nabla}^N \beta_B\ . \tag{92}$$

6.1 类空无穷远处的极限

下文中，低阶项（l.o.t.）将为 $o(r^{-\frac{11}{2}})$ 或具有更快的衰减。

定理 2 以下方程成立：

$$\frac{1}{2}\nabla\!\!\!/^{A}\alpha_{AB}+\frac{1}{2}\nabla\!\!\!/^{A}\underline{\alpha}_{AB}-\nabla\!\!\!/_{B}\rho-(\nabla\!\!\!/^{N}\underline{\beta}_{B}+\nabla\!\!\!/^{N}\beta_{B})+F_{\beta,\underline{\beta}}+G(\Phi,\Psi)\ =\ 0\ ,\quad(93)$$

其中 $F_{\beta,\ \underline{\beta}}$ 表示类型为 $\{$常数 $\cdot\frac{1}{r}\cdot\beta_B\}$ 和 $\{$常数 $\cdot\frac{1}{r}\cdot\underline{\beta}_B\}$的项；而 G（Φ、Ψ）表示类型为 $\{\Phi\cdot\Psi\}$ 的项，其中 Ψ 表示韦尔曲率分量，Φ 表示旋转系数，但不包括 $tr\chi$ 中的最高阶项和 $tr\underline{\chi}$中的最高阶项。

备注：$F_{\beta,\ \underline{\beta}}$ 来自一侧的 $tr\chi$ 与$tr\underline{\chi}$ 以及另一侧的 β 与 $\underline{\beta}$ 之间乘积的最高阶项。此类乘积的所有其他项阶数较低，并被吸收到 $G(\Phi,\ \Psi)$ 中。

接下来，我们考虑 H_0，于是得到 $t=0$。我们用 S_r 表示 H_0 中的曲面，这些曲面与 S^2 微分同胚。设 ξ^B 表示 S_r的一个共形 Killing 向量场。关于 S_r 的结果适用于任意拓扑球面。在我们的情形中，我们将处理由 $H_0\cap C_u$ 在 $t=0$处的交集诱导的 S_r，其中 $u=r=u$。

定理 3 *(a)* $F_{\beta_B,\underline{\beta}_B}\cdot\xi^B$ 上的积分为零 $\forall\underline{\xi}^B$，

$$\int_{S_r}F_{\beta_B,\underline{\beta}_B}\cdot\xi^B=0\ .$$

(b) $G(\Phi,\Psi)\cdot\xi^B$ 上的积分为低阶项 $\forall\xi^B$，

$$\int_{S_r}G(\Phi,\Psi)\cdot\xi^B=o(r^{-2})\ ,$$

and

$$\lim_{r\to\infty}\int_{S_r}G(\Phi,\Psi)\cdot\xi^B=0\ .$$

由定理 2 和定理 3 可立即得到下一个结果：

定理 4 将方程 *(93)* 乘以 ξ^B，并在 S_r 上积分，得到其主导阶项：

$$\frac{1}{2}\int_{S_r}\nabla\!\!\!/^{A}\alpha_{AB}\cdot\xi^B+\frac{1}{2}\int_{S_r}\nabla\!\!\!/^{A}\underline{\alpha}_{AB}\cdot\xi^B-\int_{S_r}\nabla\!\!\!/_{B}\rho\cdot\xi^B\ =\ 0\quad\forall\ \xi^B\ .\qquad(94)$$

定理 5 我们有其主导阶项

$$\int_{S_r}\nabla\!\!\!/_{B}\rho\cdot\xi^B\ =\ 0\quad\forall\ \xi^B\ .\qquad(95)$$

证明： 这由以下关于任意与标准球面 S^2 微分同胚的 S_r 上散度算子的标准结果得出：散度算子作用于一个 2 阶协变、对称、无迹张量 t，其像因此为 1-形式 $di\!\!\!/v\,t$；该算子是单射，且其值域由 S_r 上所有 L^2-可积、与 S_r 的共形群李代数 L^2-正交的 1-形式构成。因此，(94) 中的前两个积分为零，从而证明了该定理。

接下来，对 (95) 分部积分，得到

$$\int_{S_r} \rho \cdot \not{\nabla}_B \xi^B \;=\; 0 \quad \forall\, \xi^B \;. \tag{96}$$

我们希望研究无穷远处的极限，因此取极限

$$\lim_{H_0, r\to\infty} r \int_{S_r} \rho \cdot \not{\nabla}_B \xi^B \;=\; 0 \tag{97}$$

$$=\; \int_{S^2} P_{H_0}(\theta,\phi) \cdot \not{\nabla}_B \xi^B \quad \forall\, \xi^B \;, \tag{98}$$

其中 $P_{H_0}(\theta,\ \phi)$ 表示 $r^3\rho$ 在类空无穷远处的极限。

我们回顾球面 S^2 上拉普拉斯算子的一个众所周知的事实：对于每个共形 Killing 向量场 ξ^B

$$\not{\triangle}\, d\!\!\!/v\, \xi + 2 d\!\!\!/v\, \xi = 0 \;. \tag{99}$$

换言之， $d\!\!\!/v\, \xi$ 对于每个 ξ^B 都属于一阶特征空间，因此 $l = 1$，对于$\not{\triangle}$。此外，每个 $l = 1$ 球谐函数都是球面 S^2上唯一的共形 Killing 向量场 ξ^B 的散度。

因此，我们得出以下定理。

定理 6 $P_{H_0}(\theta, \phi)$ 不含任何 $l = 1$ 模态。

接下来，我们研究未来零无穷远 $\mathcal{I}^+$ 处的行为。考虑

$$\lim_{C_u, r\to\infty} r \int_{S_r} \rho \cdot \not{\nabla}_B \xi^B \;=\; \int_{S^2} P(u,\theta,\phi) \cdot \not{\nabla}_B \xi^B \;=:\; \mathcal{A}(u) \;. \tag{100}$$

显然,

$$\lim_{u\to\infty} \int_{S^2} P(u,\theta,\phi) \cdot \not{\nabla}_B \xi^B \;=\; \int_{S^2} P^+(\theta,\phi) \cdot \not{\nabla}_B \xi^B \;. \tag{101}$$

现在，尽管在这一一般设定下，分别在类空切片 H_0 上取 ρ （针对 $r \to \infty$）的极限，以及在 $\mathcal{I}^+$ 处取 P_{H_0}（θ，ϕ）针对 $u \to \infty$ 的极限，即 P^+（θ，ϕ），二者并不相同，但相应的球面积分却相同。后者的原因是这些极限积分不依赖于穷竭。参见附录 A。因此，我们有

$$P_{H_0}(\theta,\phi) \;\neq\; P^+(\theta,\phi) \tag{102}$$

然而

$$\int_{S^2} P_{H_0}(\theta,\phi) \cdot d\!\!\!/v\, \xi \;=\; \int_{S^2} P^+(\theta,\phi) \cdot d\!\!\!/v\, \xi \;. \tag{103}$$

由定理 6 可知

$$\int_{S^2} P^+(\theta,\phi) \cdot \not{\nabla}_B \xi^B \;=\; 0 \quad \forall\, \xi^B \tag{104}$$

证明下一个定理。

定理 7 $P^+(\theta,\phi)$ 不具有任何 $l=1$ 模态。

接下来的问题是，对于一般的 u 以及 $u\to-\infty$，在 $\mathcal{I}^+$ 处会发生什么。我们将证明下一个定理。

定理 8

(a) 关于 P：对于有限的 u，我们有

$$\int_{S^2} P(u)\cdot \not\nabla_A \xi^A \;=\; +2\int_{S^2} F(u)\cdot \not\nabla_A \xi^A \;-\; \int_{S^2}\Sigma(u)\Xi(u)\cdot \not\nabla_A \xi^A\ . \quad (105)$$

(b) 关于 P：对于 $u\to-\infty$，有

$$\int_{S^2} P^-\cdot \not\nabla_A \xi^A \;=\; +2\int_{S^2} F\cdot \not\nabla_A \xi^A\ . \quad (106)$$

(c) 关于 Q：对于 $u\to-\infty$，以及 $u\to+\infty$，有

$$Q^-=Q^+=0\ \ ,\ \ \textit{therefore trivially}\ \ Q^-_{l=1}=Q^+_{l=1}=0 \quad (107)$$

(d) 关于 Q：对于有限的 u，我们有

$$\int_{S^2} Q(u)\cdot \not\nabla_A \xi^A \;=\; -\int_{S^2}(\Sigma(u)\wedge\Xi(u))\cdot \not\nabla_A \xi^A\ . \quad (108)$$

证明： 首先，我们在 S^2 上推导出一个霍奇方程组。然后，我们应用霍奇理论（见附录 C）来证明这些结论。

关于 ρ 和 P的方程：回顾一下关于 $\not D_3\rho$ 的比安基方程 (58)

$$\not D_3\rho\ +\ \frac{3}{2}tr\underline{\chi}\rho\ =\ -d\!\!\!/v\,\underline{\beta}-\frac{1}{2}\hat{\chi}\underline{\alpha}\ +\ (\epsilon-\zeta)\underline{\beta}\ +\ 2\underline{\xi}\beta\ =\ -d\!\!\!/v\,\underline{\beta}-\frac{1}{2}\hat{\chi}\underline{\alpha}\ +\ l.o.t.$$

将其写作

$$\rho_3\ =\ -d\!\!\!/v\,\underline{\beta}-\frac{\partial}{\partial u}(\hat{\chi}\cdot\underline{\hat{\chi}})+\frac{1}{4}tr\chi|\underline{\hat{\chi}}|^2+\ l.o.t. \quad (109)$$

其中 $\rho_3:=\not D_3\rho\ +\ \frac{3}{2}tr\chi\rho$，利用 (67) 和 (68)。将方程 (109) 乘以 r^3，并沿 C_u 取极限，当 $t\to\infty$ 时得到

$$-2\frac{\partial}{\partial u}P\ =\ -d\!\!\!/v\,\underline{B}+2\frac{\partial}{\partial u}(\Sigma\cdot\Xi)+2|\Xi|^2\ +\ l.o.t. \quad (110)$$

同样利用 (73) 以及 (72)，并对 u 积分，得到

$$\begin{aligned}(P(u)-P^+) &= \not{div}\,\not{div}\,(\Sigma(u)-\Sigma^+)+\int_u^{+\infty}|\Xi(u')|^2du' \\ &\quad -(\Sigma(u)\cdot\Xi(u)-\underbrace{\Sigma^+\cdot\Xi^+}_{=0}) \\ &= \not{div}\,\not{div}\,(\Sigma(u)-\Sigma^+)+\int_u^{+\infty}|\Xi(u')|^2du'-\Sigma(u)\cdot\Xi(u) \quad (111)\\ (P^--P^+) &= \not{div}\,\not{div}\,(\Sigma^--\Sigma^+)+\int_{-\infty}^{+\infty}|\Xi(u)|^2du \\ &\quad -(\underbrace{\Sigma^-\cdot\Xi^-}_{=0}-\underbrace{\Sigma^+\cdot\Xi^+}_{=0}) \\ &= \not{div}\,\not{div}\,(\Sigma^--\Sigma^+)+\int_{-\infty}^{+\infty}|\Xi(u)|^2du\ . \quad (112)\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}(P(u)-P^+) &= \not{div}\,\not{div}\,(\Sigma(u)-\Sigma^+)+2F(u)-\Sigma(u)\cdot\Xi(u) \quad (113)\\ (P^--P^+) &= \not{div}\,\not{div}\,(\Sigma^--\Sigma^+)+2F\ . \quad (114)\end{aligned}$$

关于 σ 和 Q: 接下来，我们考虑比安基方程（60）

$$\not{D}_3\sigma+\frac{3}{2}tr\underline{\chi}\sigma=-c\not{curl}\,\underline{\beta}-\frac{1}{2}\hat{\chi}^*\underline{\alpha}+\epsilon^*\underline{\beta}-2\zeta^*\underline{\beta}-2\underline{\xi}^*\beta$$

将其写作

$$\sigma_3=-c\not{curl}\,\underline{\beta}-\frac{\partial}{\partial u}(\hat{\chi}\wedge\underline{\hat{\chi}})+\ l.o.t. \quad (115)$$

其中 $\sigma_3:=\not{D}_3\sigma+\frac{3}{2}tr\chi\sigma$，利用（67）和（68）。将（115）乘以 r^3，并令 C_u 趋于 $r\to\infty$，取极限可得

$$Q_3=-c\not{curl}\,\underline{B}+2\frac{\partial}{\partial u}(\Sigma\wedge\Xi) \quad (116)$$

即

$$\frac{\partial Q}{\partial u}=\frac{1}{2}c\not{curl}\,\underline{B}-\frac{\partial}{\partial u}(\Sigma\wedge\Xi)\ . \quad (117)$$

由此可知

$$\begin{aligned}Q(u)-Q^+ &= c\not{curl}\,\not{div}\,(\Sigma(u)-\Sigma^+)-\Sigma(u)\wedge\Xi(u) \quad (118)\\ Q^--Q^+ &= c\not{curl}\,\not{div}\,(\Sigma^--\Sigma^+) \quad (119)\end{aligned}$$

此时，我们利用附录 C 中的霍奇理论。

由上文可知，$Q=O(|u|^{-\frac{1}{2}})$。注意，Q 在S^2 上的平均值 $\bar{Q}$ 满足 $\bar{Q}=O(|u|^{-\frac{3}{2}})$。然而，$P$对应的平均值 P 并不存在幂律衰减（也不会增长），。

Derivation of equation (106): 考虑方程 (114) 和独立推导出的方程 (119)。对于

$$\mathcal{Z} = div(\Sigma^- - \Sigma^+) \tag{120}$$

我们推导出霍奇方程组

$$\begin{aligned} div\,\mathcal{Z} &= (P-\bar{P})^- - (P-\bar{P})^+ - 2(F-\bar{F}) \,, & (121)\\ curl\,\mathcal{Z} &= 0 \,. & (122) \end{aligned}$$

On S^2，定义函数 φ 为该方程的零均值解

$$\triangle\varphi = (P-\bar{P})^- - (P-\bar{P})^+ - 2(F-\bar{F}) \,. \tag{123}$$

于是我们有

$$\mathcal{Z} = \nabla\varphi \,. \tag{124}$$

方程 (120)、(123)、(124) 唯一确定解 $(\Sigma^- - \Sigma^+)$。可积条件是 φ 在 $\triangle$的一阶特征空间上的投影为零，即 $\varphi_{l=1} = 0$。现在，我们计算 $l = 1$模态，注意到 $l = 1$ 特征空间中的元素与常数正交，并将定理 7 纳入考虑。于是断言 106 得证。

Equation (107): 方程 (107) 显然成立。

Derivation of equation (108): 此时，我们考虑方程 (117):

$$\frac{\partial Q}{\partial u} = \frac{1}{2} curl\,\underline{B} - \frac{\partial}{\partial u}(\Sigma \wedge \Xi) \,.$$

由定理 1 可知，右侧第一项的阶为 $O(|u|^{-\frac{3}{2}})$，而右侧最后一项的阶为 $O(|u|^{-\frac{5}{2}})$。现在，我们考察 $l = 1$ 模态，其中 $Q(u)$。注意，$(curl\ B)_{l=1} = 0$。因此，$l = 1$分量的形式为 $Q_{l=1}(u) = a_i\xi^i + O(|u|^{-\frac{3}{2}})$，其中 a_i是与 u无关的常数。回想 $Q = O(|u|^{-\frac{1}{2}})$ 和 $\bar{Q} = O(|u|^{-\frac{3}{2}})$；因此它也为 $(Q - \bar{Q}) = O(|u|^{-\frac{1}{2}})$。由此可得 $a_i = 0$，即 $Q_{l=1}(u) = O(|u|^{-\frac{3}{2}})$。由式 (117) 可知

$$\int_{S^2} Q(u)\cdot\nabla_A\xi^A = -\int_{S^2}(\Sigma(u)\wedge\Xi(u))\cdot\nabla_A\xi^A \,,$$

这就是方程（108）。

Derivation of equation (105): 考虑方程（113）以及独立推导得到的方程（118）。对于

$$\mathcal{Z} = div(\Sigma(u) - \Sigma^+) \tag{125}$$

我们推导出霍奇方程组

$$\begin{aligned} div\,\mathcal{Z} &= (\mathcal{P}-\bar{\mathcal{P}})(u) - (\mathcal{P}-\bar{\mathcal{P}})^+ - 2(F(u)-\bar{F}(u)) \\ &\quad -(\Sigma\cdot\Xi(u) - \overline{\Sigma\cdot\Xi(u)}) \,, & (126)\\ curl\,\mathcal{Z} &= (\mathcal{Q}-\bar{\mathcal{Q}})(u) + (\Sigma\wedge\Xi(u) - \overline{\Sigma\wedge\Xi(u)}) \,. & (127) \end{aligned}$$

在 S^2 上，我们定义函数 φ 为该方程的零均值解

$$\triangleq\varphi = (\mathcal{P}-\bar{\mathcal{P}})(u) - (\mathcal{P}-\bar{\mathcal{P}})^+ - 2(F(u)-\bar{F}(u)) - (\Sigma\cdot\Xi(u) - \overline{\Sigma\cdot\Xi(u)}) \tag{128}$$

并令函数 ψ 为该方程的零均值解

$$\triangleq\psi = (\mathcal{Q}-\bar{\mathcal{Q}})(u) + (\Sigma\wedge\Xi(u) - \overline{\Sigma\wedge\Xi(u)}) \ . \tag{129}$$

于是我们有

$$\mathcal{Z} = \nabla\!\!\!/\,\varphi + \nabla\!\!\!/^{\perp}\psi \ . \tag{130}$$

它是

$$\int_{S^2} d\!\!\!/v\,(\Sigma(u)-\Sigma^+)\cdot\xi = 0 \ . \tag{131}$$

也就是说

$$\int_{S^2}(\Sigma(u)-\Sigma^+)\cdot d\!\!\!/v\,\xi = (\Sigma(u)-\Sigma^+)_{l=1} = 0 \ . \tag{132}$$

因此，结合（125）和（130），我们写为

$$\begin{aligned}
\int_{S^2} Z\cdot\xi &= 0 && (133)\\
&= \int_{S^2}(\nabla\!\!\!/\,\varphi)\cdot\xi \ + \ \int_{S^2}(\nabla\!\!\!/^{\perp}\psi)\cdot\xi && (134)\\
&= -\int_{S^2}\varphi\cdot d\!\!\!/v\,\xi - \int_{S^2}\psi\cdot\underbrace{c\!\!\!/url\,\xi}_{=-d\!\!\!/v\,\xi^{\perp}} && (135)\\
&= -\int_{S^2}\varphi\cdot d\!\!\!/v\,\xi + \int_{S^2}\psi\cdot d\!\!\!/v\,\xi^{\perp} && (136)
\end{aligned}$$

利用

$$\triangleq d\!\!\!/v\,\xi = -2d\!\!\!/v\,\xi$$

我们进一步计算

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{S^2}\varphi\cdot\triangleq d\!\!\!/v\,\xi - \int_{S^2}\psi\cdot\triangleq d\!\!\!/v\,\xi^{\perp} && (137)\\
&= \int_{S^2}\triangleq\varphi\cdot d\!\!\!/v\,\xi - \int_{S^2}\triangleq\psi\cdot d\!\!\!/v\,\xi^{\perp} && (138)
\end{aligned}$$

我们利用 $d\!\!\!/v\,\mathcal{Z} = \triangleq\varphi$ 和 $c\!\!\!/url\ \mathcal{Z} = \triangleq\psi$。参见方程（128）—（129）。根据推导方程（108）时的前述论证，可知（138）中的第二个积分为零。接着，根据（138）中的第一个积分并利用（128），我们计算出 $l=1$ 模态；注意到 $l=1$ 特征空间中的元素与常数正交，并将定理 7 纳入考虑。于是，断言（105）得证。我们得出 $(P(u))_{l=1} = O(|u|^{-\frac{3}{2}})$。至此，定理 8 的证明完成。

7 $\mathcal{I}^+$处的角动量

本节我们证明，对于（A）时空，未来零无穷远处的角动量 $\mathcal{I}^+$ 是良定义的。鉴于曲率分量在$\mathcal{I}^+$处的行为，似乎其衰减不足以使 $\mathcal{I}^+$ 处的角动量良定义。然而，定义中涉及的关键分量所对应的 $l=1$ 模态表现较好，尤其是在 u上可积。

我们回顾 $\mathcal{I}^+$处角动量的经典定义：

$$J^k := \int_{S^2} \epsilon^{AB}\nabla_B\tilde{X}^k(N_A - \frac{1}{4}C_A{}^D\nabla^B C_{DB}) \quad , \quad k=1,2,3. \tag{139}$$

大多数物理学文献使用 Bondi-Sachs 坐标。在（139）中， $\tilde{X}^k$ 对于 k =1，2，3 表示限制在 S^2上的 $\mathbb{R}^3$ 中的标准坐标函数， N_A 是角动量方面， C_{AB} 是剪切张量， ϵ_{AB} 是 S^2的标准圆度量 σ_{AB} 的体积形式。此外，在上述记号中， N_{AB} 是新闻张量， m 是质量方面。在此记号下，（139）中的 ∇_A 是关于 σ_{AB}的协变导数。指标的升降和缩并通过度规 σ_{AB}进行。例如参见 [14], [15]。另请参见 [7] ，其中讨论了经典角动量，以及他们在不同于本文所研究的设定中提出的新角动量定义。注意，（139）也是 [16]中的定义，但采用的是 Christodoulou-Klainerman 记号 [13]。

对于 (CK) 时空，角动量 J^k 在 $\mathcal{I}^+$ 处定义良好且守恒；而对于 (A) 时空，这一点此前尚不明确。我们现在将证明，这一结论确实适用于更一般的 (A) 时空。

第9定理 设(M, g) 是一个 *(A)* 时空。那么角动量 J^k 在 $\mathcal{I}^+$ 处定义良好且守恒。

注： 为了证明该定理，我们将探究 (139) 中的各个要素及其在 (A) 时空的 $\mathcal{I}^+$ 处的表现。此外，我们采用 [13] 和 [1], [2] 中的记号。为方便读者，我们在附录 B 中给出这些记号之间的“转换”。

第9定理的证明： 由于在 (A) 时空中，(139) 里与 N_A 对应的量沿 C_u 在未来零无穷远处可能不存在极限，或者衰减不足（也就是说， β_A 沿 C_u 在未来零无穷远处的极限乘以 r 中相应的权重），我们现在对此进行详细考察。对$\not{D}_3\beta$使用比安基方程 (56)

$$\begin{aligned} \not{D}_3\beta + tr\underline{\chi}\beta &= \not{D}^*_1(-\rho,\sigma) + 2\hat{\underline{\chi}}\underline{\beta} + 3\zeta\rho + 3^*\zeta\sigma + \underline{\nu}\beta + \underline{\xi}\alpha \\ &= \not{\nabla}\rho + \epsilon_{AB}\not{\nabla}^B\sigma + 2\hat{\underline{\chi}}\underline{\beta} + l.o.t. \end{aligned} \tag{140}$$

由于（140）的右侧具有良好的衰减行为（见第 3 节），我们将其乘以 r^4 ，并在给定的 C_u 上令 $r\to\infty$趋于极限。右侧各分量

在 $\mathcal{I}^+$处都有良定义极限。因此，左侧在 $\mathcal{I}^+$处也趋于良定义极限。我们将此极限记为 $R(u,\ \theta,\ \phi)$:

$$\lim_{C_u, r\to\infty} r^4(\not{D}_3\beta + tr\underline{\chi}\beta) =: R(u,\theta,\phi)\ .$$

由（140）可得 $\mathcal{I}^+$ 处的极限方程

$$R = \not{\nabla} P + {}^*\not{\nabla} Q + 2\Sigma\cdot\underline{B}\ . \tag{141}$$

请注意，方程（141）是在 [9] 中推导出来并在 [7] 中使用的，但针对的是不同的时空。具体而言，在那些论文中，ρ 的主导阶项表现不同，正如上文所述；此外，$\not{\nabla}\rho$ 在 u 中衰减。对于 (A) 时空，情况并非如此，因为后者更为一般。尤其是，ρ 的主导阶项包含更一般的项，而且 $\not{\nabla}\rho$ 在 u 中不会衰减。进一步地，我们指出了本文第一部分所概述的这一时空的不同表现。[9] 和 [7] 中研究的流形的几何量，要么直接受到 [13] 中结果的控制，要么可通过一项计算与受 [13], 控制的量联系起来；而对于 (A) 时空，情况并非如此。后者可由 [6] 的结果控制。尤其是，各种几何量表现得更为粗糙，而且在 (A) 的设定下，式（139）中涉及 $\mathcal{I}^+$ 处各量的积分之被积项是否有定义尚不明确。事实上，由于上述原因，[9] 或 [7] 中类似的估计在此处并不适用。这里，我们采用不同的方法，证明式（139）中的积分之被积项对 (A) 时空是有定义的。

下文中，对于定义在 S^2 上的函数 f，我们将 f 在 $\triangle$ 的零阶与一阶特征空间之和上的投影记为 $f_{[1]}$，并用 $f_{l=0}$、$f_{l=1}$ 分别表示其在零阶和一阶特征空间上的相应投影。因此，$f_{[1]} = f_{l=0} + f_{l=1}$。此外，对于 1-形式 $r_A = \not{\nabla}_A f + \epsilon_{AB}\not{\nabla}^B g$，记作 $r_{A[1]} = \not{\nabla}_A f_{l=1} + \epsilon_{AB}\not{\nabla}^B g_{l=1}$。

由 (141) 计算，取 $l=1$ 模态并积分，得到

$$\int_{u_1}^{u_2} R_{[1]}du \ = \ \int_{u_1}^{u_2}\not{\nabla} P_{l=1}du \int_{u_1}^{u_2} {}^*\not{\nabla} Q_{l=1}du + 2\int_{u_1}^{u_2}(\Sigma\cdot\underline{B})_{[1]}du \tag{142}$$

Let

$$\tilde{R}_{[1]} \ := \ -\frac{1}{2}\int R_{[1]}(u)du\ . \tag{143}$$

那么（按我们对 u 的符号约定）它是

$$\tilde{R}_{[1]}(u) - \tilde{R}^+_{[1]} \ = \ -\frac{1}{2}\int_{+\infty}^{u} R_{[1]}(u')du' \tag{144}$$

断言：在 (142) 中，右端项 (RHS) 的每一项都可积。最后两项显然如此。

根据 (142) 右端项的最后一项，由定理 1 及其后的陈述可知 $\Sigma\cdot B = O(|u|^{-\frac{3}{2}})$。

对于 (142) 右端项的第二项，由定理 8 可知 $Q_{l=1}(u) = O(|u|^{-\frac{3}{2}})$。

(142) 右端项第一项的可积性直接来自上文的定理 8，该定理给出 $P_{l=1}(u) = O(|u|^{-\frac{3}{2}})$。注意，这是因为 $l=1$ 模态的表现远好于 P 本身。特别是，乍看之下，依赖于 u 但在 $|u|$ 中不衰减的 $\eth P$ 似乎会导致积分发散。然而，利用定理 8 中的 (74) 和 (76) 可立即看出，$P_{l=1}$ 在 u中可积。定理 9 的证明至此完成。

趋向于角动量守恒律的一个公式：我们可以直接由上文推导出以下公式：

$$\begin{aligned}&\lim_{u\to+\infty}(\tilde{R}_{[1]}(u)-(\Sigma\cdot d\!\!\!/\Sigma)_{[1]})-\lim_{u\to-\infty}(\tilde{R}_{[1]}(u)-(\Sigma\cdot d\!\!\!/\Sigma)_{[1]})\\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}-\eth_A P_{l=1}-\eth^* Q_{l=1}+2(\Xi\cdot d\!\!\!/\Sigma-\Sigma\cdot d\!\!\!/\Xi)_{[1]}\,du \quad (145)\end{aligned}$$

8 未来零无穷远处的 Weyl 曲率行为 $\mathscr{I}^+$

8.1 剥离停止

由比安基方程（58）和（60），我们推导出未来零无穷远 $\mathscr{I}^+$ 处关于极限 P 和 Q 的极限方程。它们为

$$\frac{\partial P}{\partial u} = \frac{1}{2}d\!\!\!/\underline{B}-\Sigma\cdot\frac{\partial\Xi}{\partial u} \quad (146)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial u} = \frac{1}{2}c\!\!\!/rl\,\underline{B}-\Sigma\wedge\frac{\partial\Xi}{\partial u} \quad (147)$$

我们注意到，最高阶的 P（θ，ϕ，u）在 $|u|\to\infty$ 时既不随 u 幂律衰减，也不增长，而是取决于 u，并随 u 变化。因此，由这些方程可知

$$\frac{\partial P}{\partial u} = o(|u|^{-\frac{3}{2}})\,. \quad (148)$$

如果我们假设衰减更快，那么还可以得到

$$\frac{\partial P}{\partial u} = O(|u|^{-2})\,. \quad (149)$$

回顾上文中的方程（141）

$$R=\eth P+\ {}^*\eth Q+2\Sigma\cdot\underline{B}\,.$$

我们得到 uR 呈现类似 $r^{-4}|u|^{+1}$ 的行为，相应地，β 也呈现类似 $r^{-4}|u|^{+1}$ 的行为。因此，β 的衰减较慢，且主导阶项是动力学的。

9 结论

关于 $P(u,\ \theta,\ \phi)$：虽然当 $|u| \to \infty$ 时，$\sigma \to 0$ 如此，但 ρ 并非如此。这有以下深远影响。初始度量中齐次次数为 -1 的部分，除了约束方程之外不受其他约束，这意味着 ρ 的主导阶 $O(r^{-3})$ 部分是动力学的，也就是说，它取决于 $u_\circ$ 具体而言，约束方程 (24) 和初始数据条件给出 (28)

$$\bar{R} \ = \ |k|^2 \ = \ o(r^{-5}) \ ,$$

从而得到式 (30) 所述的事实：

$$\partial_i \partial_j h_{ij} - \partial_j \partial_j h_{ii} \ = \ 0 \ \ .$$

¯因此，R 的 -3 次齐次部分消失。参见第 2 章中的公式 (28)–(30)。

一般而言，当 $u \to +\infty$ 时，ρ 这一动力学项在 $\mathcal{I}^+$ 处和 $u \to -\infty$ 处分别取不同的极限。这些结果给出式 (150)。

$$P(u,\theta,\phi) \to P^+(\theta,\phi) \quad \text{as} \quad u \to +\infty \ . \tag{150}$$

特别地，极限 $P^+(\theta,\ \phi)$ 不是常数，而是定义在 S 上的函数 [2].

致谢

作者感谢美国国家科学基金会，并感谢美国国家科学基金会项目 DMS- 2204182 和 DMS-1811819 提供的资助。

A 类空无穷远处的积分

在本附录中，我们证明：以下极限积分与穷竭无关，因此彼此相等

$$\int_{S^2} P^+(\theta,\phi) \cdot \not{\nabla}_A \xi^A \ = \ \int_{S^2} P_{H_0}(\theta,\phi) \cdot \not{\nabla}_A \xi^A \quad \forall\ \xi^A \ . \tag{151}$$

首先，考虑 $H_{0\circ}$ 设 B_n 是 H_0 中的区域，使得 $B_{n+1} \supset B_n$ 且 $\cup_n B_n = H_0$ ，其中 $S_n = \partial B_{n\circ}$ （自然，S_n 是 $C^1{}_\circ$ ）那么，由 (97)–(98) 可知

$$\lim_{H_0, n\to\infty} r \int_{S_n} \rho \cdot \not{\nabla}_B \xi^B \ = \ \int_{S^2} P_{H_0}(\theta,\phi) \cdot \not{\nabla}_B \xi^B \quad \forall\ \xi^B$$

现在，我们考虑两个区域 $B_2 \supset B_1$ in H_0 ，且 B_1 包含半径为 R 的坐标球。我们得到

$$\int_{S_2} \rho \cdot \not{\nabla}_B \xi^B - \int_{S_1} \rho \cdot \not{\nabla}_B \xi^B \ = \ \int_{B_2 \setminus B_1} \partial_i (\rho \cdot \not{\nabla}_B \xi^B) \ . \tag{152}$$

由上文可知，右侧的被积函数为 $O(r^{-4})$。因此，我们得出结论：

$$\int_{B_2\setminus B_1} \partial_i(\rho \cdot \not\nabla_B \xi^B) \;\leq\; CR^{-1} \;\to\; 0 \;\text{ as }\; R\to\infty \,. \tag{153}$$

因此，该极限不依赖于穷竭。

接下来，考虑 $\mathcal{I}^+$。由 (100) - (101) 可知

$$\lim_{C_u, r\to\infty} r\int_{S_r} \rho\cdot \not\nabla_B \xi^B \;=\; \int_{S^2} P(u,\theta,\phi)\cdot \not\nabla_B \xi^B \;=:\; \mathcal{A}(u) \,.$$

$$\lim_{u\to\infty} \int_{S^2} P(u,\theta,\phi)\cdot \not\nabla_B \xi^B \;=\; \int_{S^2} P^+(\theta,\phi)\cdot \not\nabla_B \xi^B \,.$$

令 $u_2 > u_1$。最终，我们将令 u_1，$u_2 \to +\infty$。经过简短计算可知，它是

$$\mathcal{A}(u_2) - \mathcal{A}(u_1) \;=\; \int_{u_1}^{u_2}\int_{S^2} \frac{\partial}{\partial u} P\cdot \not\nabla_B \xi^B \,. \tag{154}$$

And 由上文可知，当 $|u|\to\infty$时，$\frac{\partial}{\partial u}P = O(|u|^{-\frac{3}{2}})$。因此，我们得出 at

$$\int_{u_1}^{u_2}\int_{S^2} \frac{\partial}{\partial u} P\cdot \not\nabla_B \xi^B \;\to\; 0 \;\text{ as }\; u\to\infty \,. \tag{155}$$

因此，该极限也不依赖于穷竭。

接下来，在 (154) 中固定 u_1，并令 $u_2\to\infty$。然后在 H_0 中，曲面 $S_{0,\,u_2}$趋于无穷大。因此，由于 H_0 中 (97) - (98) 的极限不依赖于叶状结构 $\{S_r\}$，我们可以选取由 $S_{0,\,u_2} = C_{u_2}\cap H_0$ 给出的叶状结构，其中 $u_2\to\infty$。于是，方程 (151) 可由方程 (154) 和 (155) 推出。

B 记号

我们将 Christodoulou-Klainerman 记号与 Bondi-Sachs坐标系联系起来。有关其他分量的详细推导，请参见 [7]。但请注意，本文采用的约定与后者略有不同。下文中，左侧采用 Christodoulou-Klainerman 记号表示：

$$\begin{aligned}
B_A &= -N_A = -I_A \\
\underline{B}_A &= \not\nabla^B N_{AB} \\
\underline{A}_{AB} &= -2\partial_u N_{AB} \\
\Sigma_{AB} &= -\frac{1}{2} C_{AB} \\
\Xi_{AB} &= -\frac{1}{2} N_{AB} \,.
\end{aligned}$$

FutureNull Infinity 上的 C 霍奇理论

本文经常用到以下霍奇系统和霍奇理论中的结果。特别是，这些内容与方程 (113) 和 (118)，以及 (114) 和 (119) 有关。

设 Z 是 S^2 上充分光滑的向量场。存在标量场 φ 和 ψ，使得

$$Z = \not\nabla \varphi + \not\nabla^{\perp} \psi \ .$$

于是我们有

$$di\not v\, Z = \not\triangle \varphi \quad , \quad c\not url\, Z = \not\triangle \psi \ .$$

现在考虑 S^2 上的方程

$$\not\triangle \varphi = f \ , \tag{156}$$

$$\not\triangle \psi = g \ , \tag{157}$$

对于在 S^2 上具有零均值的充分光滑函数 f，g，由霍奇定理，分别存在方程 (156) 和 (157) 的光滑解，且解在加上一个常数的意义下唯一。在本文中，我们考虑方程 (156) 中具有零均值的函数 φ。对于 ψ 和方程 (157)，在适用的情况下同理。

在本文中，我们考虑以下情形

$$\mathcal{Z} = di\not v\, (\Sigma^- - \Sigma^+) \tag{158}$$

以及

$$\mathcal{Z} = di\not v\, (\Sigma(u) - \Sigma^+) \ . \tag{159}$$

上述方程分别确定了 $(\Sigma^- - \Sigma^+)$、$(\Sigma(u) - \Sigma^+)$ 个唯一的 ly.

参考文献

[1] L. Bieri。 广义相对论中闵可夫斯基空间稳定性定理的推广。 ETHZurich，博士论文。 17178。苏黎世。（2007年）。

[2] L.Bieri。 广义相对论中闵可夫斯基空间稳定性定理的推广。爱因斯坦真空方程的解。 AMS-IP。《高等数学研究》。剑桥。马萨诸塞州。（2009年）。

[3] L. Bieri. 引力波与记忆效应中的新现象。《物理评论 D》103. 024043. (2021年)

[4] L. Bieri. 引力辐射中的新结构。《理论与数学物理进展》**26**. 3. (2022年). 531-594. 另见 arXiv (2020年)。最新版本 https://arxiv.org/pdf/2010.07418.pdf[5] L. Bieri, D. Garfinkle. 引力波记忆效应的电磁类比。《经典与量子引力》30. 19. (2013年) 195009.[6] L. Bieri. 具有*-1*次齐次动力学项的爱因斯坦真空方程的全局解。预印本。(2022年).[7] P.-N. Chen, J. Keller, M.-T. Wang, Y.-K. Wang, AND S.-T. Yau. 零无穷远处角动量与质心的演化。《数学物理通讯》386, 551588 (2021年).[8] D. Christodoulou. 引力的非线性本质与引力波实验。《物理评论通讯》**67**. (1991年). no.12. 1486-1489.[9] D. Christodoulou. 广义相对论中的全局初值问题。第九届马塞尔·格罗斯曼广义相对论会议论文集。罗马。意大利。(2000年).[10] D. Christodoulou. 广义相对论中黑洞的形成。EMS出版社 ETH 苏黎世¨。(2009年).[11] 三维流体中的激波形成。EMS数学专著丛书。EMS出版社。(2007年).[12] 激波发展问题。EMS数学专著丛书。EMS出版社。(2019年).[13]D. Christodoulou, S. Klainerman. 闵可夫斯基时空的全局非线性稳定性。普林斯顿数学丛书**41**。普林斯顿大学出版社。普林斯顿。新泽西州。(1993年).[14] T. Dray and M. Streubel. 零无穷远处的角动量。《经典与量子引力》1 (1984年), no. 1, 1526.[15] ˋE. ˋE. Flanagan and D. A. Nichols. 扩展的邦迪–梅茨纳–萨克斯代数的守恒荷。《物理评论 D》95, 044002 (2017年).[16] A. Rizzi. 广义相对论中的角动量：一种新定义。《物理评论通讯》81 (1998年), no. 6, 11501153.[17] Ya.B. Zel'dovich and A.G. Polnarev, Sov. Astron. 18, 17 (1974年)[18] N. Zipser. 爱因斯坦–麦克斯韦方程平凡解的全局非线性稳定性。博士论文。哈佛大学。剑桥，马萨诸塞州。(2000年).[19] N. Zipser. 广义相对论中闵可夫斯基时空稳定性定理的推广——爱因斯坦–麦克斯韦方程的解。AMS-IP。《高等数学研究》。剑桥，马萨诸塞州。(2009年)。