arXiv:2304.00630v1 [math.AT] 2 Apr 2023

适用于 E_∞-代数的扭曲同调运算

CALISTA BERNARD

Abstract. 我们建立了一套关于 E_∞-代数扭曲同调上运算的理论，将 J.P. May 提出的经典理论加以推广。首先，我们描述了一个适用于讨论扭曲系数的框架；这需要在某些函子范畴中处理 E_∞-代数。在此背景下，我们定义了经典 Dyer–Lashof 运算的扭曲版本，以及一种乘积。

此外，我们通过给出一个以这些运算表示的自由 E_∞-代数同调的（非典范）显式基，证明这些特殊运算生成了扭曲同调上的所有运算。我们还证明，自由 E_∞-代数的同调是在适当的、由带有 Dyer–Lashof 运算作用的对象构成的范畴中的自由对象，从而使这一结论具有函子性。

这套理论可应用于研究带局部系数的 E_∞-空间，但本文不作详细讨论。

Contents

1. 引言 1.1. 经典结果概述 1.2. 框架构想 1.3. 运算概述 1.4. 动机示例 致谢 2. 预备知识 3. 扭曲同调 3.1. 系数系统 $\mathbb{F}_\varphi$3.2. $\mathbb{F}_\varphi$上的模 3.3. 一个关于 $\mathbb{F}_\varphi$-同调的 K¨unneth 定理 4. Mod$^{\mathbb{F}_\varphi}$中的 E_∞-代数 4.1. Alg$_{E_\infty}$(Mod$^{\mathbb{F}_\varphi}$)上的幺半结构 5. 同调运算 5.1. 同调运算的多范畴 5.2. 运算的荷与权 5.3. 乘积 6. Dyer–Lashof 运算 6.1. 下标记 6.2. 上标记 7. 自由 E_∞-代数同调基 7.1. 商 7.2. 交换的 $\mathbb{F}_\varphi$-代数

2 2 3 3 5 8 8 10 10 11 15 17 19 22 22 24 27 30 32 47 50 50 51

Date：2023年4月2日。

7.3. Serre 谱序列的类比 53 7.4. 可容许序列 56 7.5. 同调基 58 8. 容许的 Dyer–Lashof 代数 65 8.1. Dyer–Lashof 代数 66 8.2. 容许的 Dyer–Lashof 模 69 8.3. 容许的 Dyer–Lashof 代数 76 附录 A. 谱序列比较定理 79 参考文献 83

1. Introduction

众所周知， E_n-代数的同调具有额外结构，即同调运算。这些运算直接源于 E_n-结构，并且在 E_n-代数的映射下具有自然性。其中最普遍的运算是乘积和括号，但还有一些额外运算仅定义在模 p 同调上，它们展现出非常丰富的理论，并已证明对研究 E_n-代数至关重要。

从经典角度看，这些模 p 同调运算已得到广泛研究，并被用于分类 E_n-代数的模 p 同调上的所有运算[KA56, DL62, CLM76]。然而，这一经典理论仅适用于普通模 p 同调。鉴于带扭曲系数的同调自然出现在许多情形中，建立适用于扭曲系数的这一理论是基础性工作，并且很可能有许多应用。本文旨在为具有某些扭曲系数系统的 E_∞-代数的同调发展这样一种理论。

虽然这里没有详细讨论这一理论的潜在应用，但第 1.4 节简要概述了如何将我们的框架应用于几个具体示例。

1.1. 经典结果概述。正如杯积在链层次上不满足交换性会产生 Steenrod 运算一样， E_∞-乘法不严格交换也会在 E_∞-代数的模 p 同调上产生运算。这些运算通常称为 Dyer–Lashof 运算或 Dyer–Lashof–Kudo–Araki 运算，最初由 Kudo 和 Araki 为 $p = 2$ 定义，由 Dyer 和 Lashof 为 $p > 2$ [KA56、DL62], 定义，其性质与 Steenrod 运算非常相似。

本文主要讨论奇素数，因此在此概述 $p > 2$ 的经典理论。设 $\mathbb{F}_p$ 表示含有 p 个元素的域，设 X 是空间中的一个 E_∞-代数。经典 Dyer–Lashof 运算是线性映射

$$Q^s \colon H_*(X;\mathbb{F}_p) \to H_{*+2s(p-1)}(X;\mathbb{F}_p)$$
$$\beta Q^s \colon H_*(X;\mathbb{F}_p) \to H_{*+2s(p-1)-1}(X;\mathbb{F}_p)$$

对整数 $s \geq 0$ 定义，这些运算对 E_∞代数的映射具有自然性。它们满足若干关系，例如 Adem 关系和 Cartan 公式，并且具有稳定性，即与悬挂可交换。

在 [CLM76], 中，J.P. May 给出了关于自由E_∞-代数的 $\mathbb{F}_p$-同调的完整描述，该描述以 Dyer–Lashof 运算和一个乘积为依据，

这一结果不仅有助于计算，还能用这些特定运算对所有同调运算进行分类。May 给出了这一结果的两个不同版本：一个提供了自由E_∞-代数同调的函子性描述，另一个则给出了一个明确的（非典范）基。

1.2. 构造思路。本文研究皮卡群胚 G 上的函子范畴 Fun(G, $\mathsf{Ch}_\mathbb{F}$) 中的 E_∞-代数，其中函子从 G 取值于域 $\mathbb{F}$ 上的 $\mathbb{Z}$ 分次链复形范畴 $\mathsf{Ch}_\mathbb{F}$ 。第 2 节将更严格地讨论这个函子范畴。此处，G 的一个启发性例子是无限循环空间 Y 的基本群胚$\pi_{\leq 1}(Y)$。

对这类函子在 G 的对象上取值后，我们可以求其同调。也就是说，给定一个函子 $T \in$ Fun(G, $\mathsf{Ch}_\mathbb{F}$)、一个对象 $g \in$ G 和 $m \in \mathbb{Z}$， T 的 (g, m) 同调是如下的 $\mathbb{F}$–向量空间：

$$H_{g,m}(T) \coloneqq H_m(T(g)).$$

因此，我们的同调继承了 G 的对象所赋予的额外分次，并带有 G 的态射作用。这个函子范畴上存在一种称为 Day 卷积的幺半结构，这使我们能够定义带系数的同调。

定义 1.1. 设 $S, T \in$ Fun(G, $\mathsf{Ch}_\mathbb{F}$). 对每个 $g \in$ G， $m \in \mathbb{Z}$， T 的系数取自 S 时，其 (g, m) 同调是一个 $\mathbb{F}$–向量空间

$$H_{g,m}(T; S) \coloneqq H_{g,m}(T \circledast S),$$

其中 $\circledast$ 表示函子的 Day 卷积。

1.2.1. 系数系统的选择。我们不认为能够针对任意扭曲系数的同调，建立一套合理的同调运算理论。即使是 May 提出的经典理论，也只针对 $\mathbb{F}_p$ 系数，而非取值于 $\mathbb{Z}$ 或更一般的阿贝尔群的系数。原因在于计算方面：虽然可以更一般地定义运算，但要以合理的方式对所有运算进行分类，却很困难，甚至不可能。因此，本文首先将讨论范围限制为取值于特征为 p 的域 $\mathbb{F}$ 的系数系统。我们不讨论特征 0 的域上的运算，因为很容易证明，这类运算相当平凡。

我们所考虑的特定系数系统，记作 $\mathbb{F}_\varphi$，在第 3 节中有精确定义。当将系数系统描述为一个函子时

$$\mathbb{F}_\varphi \colon \mathsf{G} \to \mathsf{Ch}_\mathbb{F},$$

系数系统 $\mathbb{F}_\varphi$ 在单位对象的同构类之外均为零；对于单位对象 $\mathbb{1}_\mathsf{G} \in$ G， $\mathbb{F}_\varphi$ 赋予其链复形 $\mathbb{F}[0]$ ，其中包含一个位于 0 次的 $\mathbb{F}$ 副本，而其他次数均为零。最后，$\mathsf{Aut}_\mathsf{G}(\mathbb{1}_\mathsf{G})$ 通过同态 $\varphi\colon \mathsf{Aut}_\mathsf{G}(\mathbb{1}_\mathsf{G}) \to \mathbb{F}^\times$ 作用于 $\mathbb{F}[0]$ ，其作用为乘法。

1.3. 运算概述。如 1.2.1 节所述，我们将考虑系数取自系统 $\mathbb{F}_\varphi$的同调，该系统由域 $\mathbb{F}$ 以及 G 的态射在 $\mathbb{F}$ 上的作用决定。本文描述了 E_∞- 代数的 $\mathbb{F}_\varphi$- 同调上的完备运算理论。这里我们假设 $\mathbb{F}$ 的特征为奇数；正如我们将在第6节中讨论的，在我们的设定下，该理论与特征为2时的经典理论几乎完全相同。

在第6节中，我们定义了 $\mathbb{F}_\varphi$-同调上的 Dyer–Lashof 运算。在文献中，书写这些运算有两种标准方式：使用下标记（强调运算的定义方式），以及使用上标记（使运算具有稳定性）。由于上标运算更为常用，我们在此讨论它们。低指标运算在 6.1 节中定义，而定理 6.5 列出了它们满足的关系。上标运算有两类：

- “未扭曲的”Dyer–Lashof 运算
$$Q^s\colon H_{g,n}(-;\mathbb{F}_\varphi) \to H_{g^p,n+2s(p-1)}(-;\mathbb{F}_\varphi)$$
$$\beta Q^s\colon H_{g,n}(-;\mathbb{F}_\varphi) \to H_{g^p,n+2s(p-1)-1}(-;\mathbb{F}_\varphi),$$
它们定义在 $H_{g,\ n}$ 对于 $g \in \mathsf{G}$，$n \in \mathbb{Z}$，$s \in \mathbb{Z}$ 当编织态射 $g \oplus g \to g \oplus g$ 在 $\mathbb{F}$ 上平凡作用时；
- “扭曲的”Dyer–Lashof 运算
$$Q^{s+\frac{1}{2}}\colon H_{g,n}(-;\mathbb{F}_\varphi) \to H_{g^p,n+(2s+1)(p-1)}(-;\mathbb{F}_\varphi)$$
$$\beta Q^{s+\frac{1}{2}}\colon H_{g,n}(-;\mathbb{F}_\varphi) \to H_{g^p,n+(2s+1)(p-1)-1}(-;\mathbb{F}_\varphi),$$
它们定义在 $H_{g,\ n}$ 对于 $g \in \mathsf{G}$，$n \in \mathbb{Z}$，$s \in \mathbb{Z}$ 当编织态射 $g \oplus g \to g \oplus g$ 非平凡作用时。

这些运算满足通常关系的相应版本，例如 Adem 关系和 Cartan 公式；其完整列表见定理 6.21。

由于在适当定义时，$\mathbb{F}_\varphi$-同调是一个可表函子，我们在命题 5.3 中证明，所有 $\mathbb{F}_\varphi$- 同调运算都由某些自由 E_∞- 代数的同调分类。我们用两种方式证明，自由 E_∞-代数的同调可以用 Dyer–Lashof 运算和乘积来描述。首先，在第 7 节中，我们给出该同调的一个非典范基，它由某些“可容许的”Dyer–Lashof 运算复合构成。

定理 1.2（非正式陈述）。如果 S 是 X的 $\mathbb{F}_\varphi$-同调的一个基，那么以 X 为生成元的自由 E_∞-代数的 $\mathbb{F}_\varphi$-同调作为代数同构于以 $\{Q^I x\}$为生成元的自由交换代数，其中 $x \in S$，而 Q^I 遍历所有满足次数条件的“可容许的”Dyer–Lashof 运算复合。

当然，“基”、“自由交换代数”和“可容许的复合”等概念都必须加以精确定义。这一陈述的严谨版本见定理 7.13。

上述定理并未涵盖自由E_∞-代数同调的全部结构，因为它没有保留运算的作用。此外，鉴于这些运算在 E_∞-代数的映射下具有自然性，这一描述理应有一个函子性版本。在第 8 节，我们将精确定义容许 Dyer–Lashof 代数的概念。非正式地说，这种对象具有乘积以及 Dyer–Lashof 运算的作用，并满足这些运算在 E_∞-代数同调上所满足的全部关系。

我们关于容许的 Dyer–Lashof 代数的概念受到 May [CLM76] 中相应概念的启发。不过，我们做了两处修改。首先，我们用 $\mathbb{F}_\varphi$ 上的模的语言重新表述所有定义，而不是针对 $\mathbb{F}_p$ 上的普通代数来表述。其次，我们的定义适用于任意特征为 p 的域，而不仅限于 $\mathbb{F}_p$。这里的主要区别在于，Dyer–Lashof 运算是弗罗贝尼乌斯线性的，而非线性的。

因此，我们必须在 $\mathbb{F}$-$\mathbb{F}$-双模范畴中定义 Dyer–Lashof 代数，而不是在 $\mathbb{F}$–向量空间范畴中定义，以允许左右向量空间结构有所不同。

定理 1.3（非正式表述）。自由 E_∞-代数在 X 上的 $\mathbb{F}_\varphi$-同调，自然同构于以 $H_{*,*}(X;\mathbb{F}_\varphi)$ 为生成元的自由容许 Dyer–Lashof 代数。

这一表述的严格版本见推论 8.19。由于该定理用 Dyer–Lashof 运算和乘积来描述自由 E_∞-代数的同调，因此我们已经证明，这些运算生成了 E_∞-代数的全部 $\mathbb{F}_\varphi$-同调运算。

1.4. 动机示例。本文余下部分致力于为 E_∞-代数发展一套运算理论；本文不讨论该理论的应用。因此，我们在此简要讨论一些动机示例，以便让读者了解这套理论可以如何应用。

首先，我们必须说明空间的普通扭曲同调与 1.2 中概述的设定之间有何关系。

给定一个具有 E_∞-代数结构的空间 X，我们可以考虑 X 的群完备化，它是一个 E_∞-代数之间的映射 $X \to Y$，其中 Y 是类群（也就是说，$\pi_0(Y)$ 关于从 E_∞-代数结构继承的幺半群结构是一个群）。根据识别原理，Y 具有无限循环空间 [May72] 的同伦类型。令 f 表示诱导映射 $X \to Y_{\leq 1}$ 到 Y 的 1-截断，并令 $T \in \mathsf{Fun}(\pi_{\leq 1}(Y), \mathsf{Ch}_\mathbb{F})$ 满足：对任意 $y \in Y$，

$$T(y) \coloneqq C_*(\mathrm{hofib}_y(f);\mathbb{F}). \tag{1.4}$$

Y 中的路径以通常方式作用于同伦纤维。函子 T 在 $\mathsf{Fun}(\pi_{\leq 1}(Y), \mathsf{Ch}_\mathbb{F})$ 中继承了 E_∞-代数结构，因此我们的结果描述了对于 $\mathbb{F}_\varphi$ 任意如 1.2.1 中所述的系数系统，关于同调 $H_{*,*}(T;\mathbb{F}_\varphi)$ 的运算。

假设我们希望研究空间X 的普通扭曲同调 $H_*(X;\mathcal{A})$，其系数取自一个函子

$$\mathcal{A}\colon \pi_{\leq 1}(X) \to \mathsf{Vect}_\mathbb{F}$$

到范畴$\mathsf{Vect}_\mathbb{F}$ 中的 $\mathbb{F}$–向量空间。为$\mathsf{Vect}_\mathbb{F}$ 赋予张量积幺半结构。若 $\mathcal{A}$ 是一个取值于一维向量空间的强幺半函子（但不一定是对称的！），则 $\mathcal{A}$ 可典范地经由一个强幺半函子 $\mathcal{A}'\colon \pi_{\leq 1}(Y) \to \mathsf{Vect}_\mathbb{F}$分解，并且

$$H_*(X;\mathcal{A}) \cong \bigoplus_{[a]\in\pi_0 X} H_{f(a),*}(T;\mathbb{F}_\varphi) \tag{1.5}$$

作为分次向量空间。这里，同态 φ 是将 $\mathcal{A}'$限制到 $\pi_1(Y,y)$后得到的，其中 $y \in Y$是基点。

因此，在给定合适的系数系统时，我们可以使用本文的方法研究扭曲同调。对称群取符号表示为系数，或许是这种情形中最简单的例子。

例 1.6. 设 $X = \bigsqcup BS_n$，其中 S_n 表示作用在 n 个字母上的对称群。那么 X 等价于一点上的自由 E_∞-代数。若要计算对称群取符号表示为系数的同调，我们也可以等价地计算 X 取某些扭曲系数的同调。

根据 Barratt–Priddy–Quillen 定理 [BP72、Qui71] ，或识别原理 [May72], ，我们得知 $Y = QS^0 = \Omega^\infty S^\infty$ 是 X的群完备化。因此，我们在函子范畴 Fun(G, $\mathsf{Ch}_\mathbb{F}$) 中进行研究，其中 G $= \pi_{\leq 1}(Y)$。注意， $\pi_{\leq 1}(Y)$等价于一个骨架范畴，其对象为整数，且每个对象的自同态都同构于 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，因此为简便起见，我们用 G 的骨架代替 G。

我们希望考察的系数系统 $\mathbb{F}_\varphi \in$ Fun(G, $\mathsf{Ch}_\mathbb{F}$) 由同态 $\varphi\colon \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{F}^\times$ 确定；该同态将$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$的非平凡元素映为 -1。具体而言， $\mathbb{F}_\varphi$ 在$\mathbb{Z} =$ obG 中的单位元 0 上取值为 $\mathbb{F}$ ，而 0 的自同构群 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 通过沿φ的乘法作用于 $\mathbb{F}$ 。

若 $T \in$ Fun(G, $\mathsf{Ch}_\mathbb{F}$) 是 1.4 中所述的函子，则 X的同调在符号表示系数下同构于 T的同调在 $\mathbb{F}_\varphi$系数下的同调，如 1.5 所示。也就是说，

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H_*(S_n;\mathbb{F}^{\mathrm{sgn}}) \cong \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H_{n,*}(T;\mathbb{F}_\varphi).$$

此外，这个同调同构于一个自由 E_∞-代数的同调（采用第 3.2.2 节的记号， $H_{*,\ *}(T\circledast\mathbb{F}_\varphi) \cong H_{*,\ *}(E_\infty(\Sigma^{1,\ 0}\mathbb{F}_\varphi))$)。定理 7.13 给出了这个同调的一个显式基，其元素是将若干 Dyer–Lashof 运算复合后作用于单个生成类 x所得的结果；该生成类可视为来自$H_0(S_1;\mathbb{F})$。注意，此例中的所有 Dyer–Lashof 运算都是“扭曲的”，因此，例如我们有如下元素

$$Q^{\frac{1}{2}}(x) \in H_{p-1}(S_p;\mathbb{F}^{\mathrm{sgn}}) \text{ and } \beta Q^{\frac{1}{2}}(x) \in H_{p-2}(S_p;\mathbb{F}^{\mathrm{sgn}}).$$

此外， $x^2 = 0$。

前面关于系数取符号表示的对称群的例子，也可用于研究交错群的同调。

例 1.7. 若 A_n 表示由 n 个元素组成的交错群，则对每个 n，都有一个纤维化

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to BA_n \to BS_n$$

其 Serre 谱序列退化，因此

$$H_*(A_n;\mathbb{F}) \cong H_*(S_n;\mathbb{F}[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]),$$

其中左侧是通常的 $\mathbb{F}$-同调，右侧是取扭曲系数的同调。置换 $\sigma \in S_n$ 在群环 $\mathbb{F}[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]$ 上的作用如下：当 σ 为偶数时，作用为单位元；当 σ 为奇数时，作用为 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的非平凡元素的乘法。特别地，这意味着当 $\mathbb{F}$ 的特征不为 2 时，$\mathbb{F}[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]$ 分裂为两个一维表示的直和：平凡表示和符号表示。因此，

$$H_*(A_n;\mathbb{F}) \cong H_*(S_n;\mathbb{F}) \oplus H_*(S_n;\mathbb{F}^{\mathrm{sgn}}).$$

对称群的普通 $\mathbb{F}$-同调众所周知，尤其可以利用 May 的结果 [CLM76]，将其计算为一点上的自由 E_∞-代数的同调。正如前一个例子所述，利用本工作的方法，可以将取值于符号表示的对称群同调计算为带扭曲系数的自由 E_∞-代数的同调。

由此可以用同调运算完整描述交错群的同调。

例如，经过初等计算可知，$A_3$1和 A_4 的阿贝尔化均为 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$，因此 $H_1(A_3;\mathbb{F}_3) \cong H_1(A_4;\mathbb{F}_3) \cong \mathbb{F}_3$。前一个例子中描述的类 $\beta Q^{\overline{2}}(x)$ 生成 $H_1(A_3;\mathbb{F}_3)$，而 $x\beta Q^{\overline{2}}(x)$ 生成$H_1(A_4;\mathbb{F}_3)$。

注 1.8。在空间范畴中，交错群的分类空间所成的空间 $\bigsqcup BA_n$ 显然不会构成一个 E_∞-代数。不过，如果我们在范畴 $\mathrm{Fun}(G, \mathrm{Ch}_{\mathbb{F}})$ 中工作，其中 G 仍是 $Y = QS^0$ 的基本群胚，那么可以将交错群视为一个 E_∞-代数。也就是说，在这个函子范畴中存在一个自由 E_∞-代数，其同调与交错群的同调同构。因此，我们可以直接研究交错群作为 E_∞-代数时其同调上的运算。不过，这样做需要使用二维系数系统，而这不符合本文所建立的理论，因此我们采用了前一个例子中的方法。尽管如此，值得注意的是，通过在不同的范畴中工作，我们可以得到范围更广的一类 E_∞-代数。

前两个例子都非常接近点上的自由 E_∞-代数。一个风格相似但更复杂的例子，是环 R 的一般线性群和特殊线性群。

例 1.9。空间

$$X \coloneqq \bigsqcup B\mathrm{GL}_k(R)$$

由一般线性群的分类空间构成，具有众所周知的 E_∞-结构，尽管它并非自由 E_∞-代数。Galatius–Kupers–Randal-Williams 利用这种 E_∞-结构研究域 R 上一般线性群的同调稳定性 [GKRW18b, GKRW20], ；而 Kupers–Miller–Patzt 则用类似方法研究了某些其他环 R，包括 $R = \mathbb{Z}$ [KMP21]。这些工作采用的总体策略是构造一个由自由 E_∞-代数组成的模型，以近似 X 的同调。随后，便可以通过经典同调运算轻松理解该模型的同调。

人们很容易想到，可以用类似的方法研究由特殊线性群得到的空间，

$$\bigsqcup B\mathrm{SL}_k(R),$$

但与交错群的例子一样，这个空间并未继承一般线性群上的 E_∞-代数结构。不过，纤维化的 Serre 谱序列再次

$$R^\times \to B\mathrm{SL}_k(R) \to B\mathrm{GL}_k(R)$$

给出一个同构

$$H_*(\mathrm{SL}_k(R);\mathbb{F}) \cong H_*(\mathrm{GL}_k(R);\mathbb{F}[R^\times]).$$

同样，右端是取扭曲系数的同调，其中 $\mathrm{GL}_k(R)$ 通过行列式乘法作用于 $R^\times$ 。

若 $R = \mathbb{Z}$ 且特征不为 2，则 $\mathrm{GL}_k(\mathbb{Z})$-表示 $\mathbb{F}[\mathbb{Z}^\times]$ 分解为两个一维表示的直和：一个平凡表示和一个行列式表示。因此，为了理解同调

$\mathrm{SL}_k(\mathbb{Z})$ 的同调，只需理解 $\mathrm{GL}_k(\mathbb{Z})$ 的普通同调以及以行列式表示为系数的同调。前者已由 Kupers–Miller–Patzt [KMP21] 研究过。后者也可以结合本文所发展的 E_∞-代数扭曲同调运算理论，采用类似方法进行研究。这里应在函子范畴 $\mathrm{Fun}(\pi_{\leq 1}(Y), \mathrm{Ch}_{\mathbb{F}})$ 中开展研究，其中 Y 是 $\sqcup B\mathrm{GL}_k(\mathbb{Z})$ 的群完备化，并采用类似例 1.6 的设置。

致谢。我由衷感谢 Søren Galatius 在整个项目过程中给予的指导。也感谢 Tyler Lawson 与我进行了许多非常有益的交流。通过与 Alexander Kupers、Jeremy Miller 和 Oscar Randal-Williams 的交流，我对细胞 E_n-代数以及这项工作的潜在应用有了更深入的理解。

在本项目进行期间，我在哥本哈根大学访问期间获得了丹麦国家研究基金会（CPH-GEOTOP-DNRF151）的部分资助，并在 Mittag-Leffler 研究所访问期间获得了瑞典研究理事会（资助编号 2016-06596）的部分资助。

2. 预备知识

我们首先回顾有关皮卡群胚和 Day 卷积的一些概念，并引入本文将贯穿使用的函子范畴的关键记号。

设 $\mathsf{G} = (\mathsf{G}, \oplus_{\mathsf{G}}, \mathbb{1}_{\mathsf{G}}, \alpha^{\mathsf{G}}, \beta^{\mathsf{G}})$ 是一个皮卡群胚；也就是说，它是一个对称幺半群群胚，其中 G 的每个对象都是可逆的。这里，α^{G} 表示结合子，β^{G} 表示编织。上下文明确范畴时，我们通常省略 G 上标。

由于 G 是一个皮卡群胚，$\mathrm{Aut}_{\mathsf{G}}(\mathbb{1}_{\mathsf{G}})$ 是一个阿贝尔群，并且对于 G 中的每个对象 g，都存在一个典范同构

$$\mathrm{tr}_g \colon \mathrm{Aut}_{\mathsf{G}}(g) \to \mathrm{Aut}_{\mathsf{G}}(\mathbb{1}_{\mathsf{G}}), \tag{2.1}$$

我们将其称为自同构的迹。此外，映射

$$\mathrm{ob}\,\mathsf{G} \to \mathrm{Aut}_{\mathsf{G}}(\mathbb{1}_{\mathsf{G}})$$

将 $g \mapsto \mathrm{tr}_{g\oplus g}(\beta^{\mathsf{G}}_{g,g})$ 送到群 $\pi_0(\mathsf{G})$ 中 G 的对象的同构类，并且该映射经此因子分解

$$\pi_0(\mathsf{G}) \to \mathrm{Aut}_{\mathsf{G}}(\mathbb{1}_{\mathsf{G}}) \tag{2.2}$$

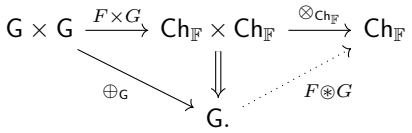
是一个群同态。

在本文余下部分，我们将使用函子范畴

$$\mathrm{Ch}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{G}} \coloneqq \mathrm{Fun}(\mathsf{G}, \mathrm{Ch}_{\mathbb{F}}),$$

其中，G 是如上所述的 Picard 群胚，$\mathrm{Ch}_{\mathbb{F}}$ 表示域 $\mathbb{F}$ 上的 $\mathbb{Z}$-分次链复形范畴。我们赋予这个函子范畴 Day 卷积幺半结构。

定义 2.3。 F、 $G \in \mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{G}}$ 的 Day 卷积，记作 $F \circledast G$，是沿 G 中的乘积对 $\otimes_{\mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}} \circ (F \times G)$ 作出的左 Kan 延拓：



这赋予 $\mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{G}}$ 一个闭对称幺半结构（参见 [Day70]）。注意，在文献中，G 通常被视为富集于 $\mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}$ 中的范畴。这里，区分 G 与其 $\mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}$-富集版本会很有用。

定义 2.4。令 $\mathbb{F}\mathsf{G}$ 表示这样一个范畴：其对象与 G 的对象相同，并且 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}\mathsf{G}}(g,h)$ 是以集合 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{G}}(g,h)$ 为基的自由 $\mathbb{F}$ 向量空间，将其视为集中在 $\mathbb{Z}$-0 次且微分平凡的链复形。

用这一记号，$\mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{G}}$ 上 Day 卷积幺半结构的单位元是函子

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}\mathsf{G}}(\mathbb{I}_{\mathsf{G}}, -).$$

利用 Day 卷积的泛性质，我们可以具体描述 $\mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{G}}$ 的结合子和编织。令 $X, Y, Z \in \mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{G}}$ 且 $g_1, g_2, g_3 \in \mathsf{G}$。$\mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}$ 中的结合子给出一个映射

$$(X(g_1) \otimes Y(g_2)) \otimes Z(g_3) \to X(g_1) \otimes (Y(g_2) \otimes Z(g_3)),$$

而 Day 卷积的泛性质给出一个映射

$$X(g_1) \otimes (Y(g_2) \otimes Z(g_3)) \to (X \circledast (Y \circledast Z))(g_1 \oplus (g_2 \oplus g_3)).$$

将 $X \circledast (Y \circledast Z)$ 后复合到 G 中的逆结合子 $\alpha^{-1}_{g_1,g_2,g_3}$，得到一个映射

$$(X(g_1) \otimes Y(g_2)) \otimes Z(g_3) \to (X \circledast (Y \circledast Z))((g_1 \oplus g_2) \oplus g_3)$$

它给出了结合子

$$(X \circledast Y) \circledast Z \to X \circledast (Y \circledast Z)$$

在 $\mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{G}}$ 中。类似地，编织由映射

$$X(g_1) \otimes Y(g_2) \to Y(g_2) \otimes X(g_1) \to (Y \circledast X)(g_2 \oplus g_1) \to (Y \circledast X)(g_1 \oplus g_2), \tag{2.5}$$

构造，其中第一个映射使用 $\mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}$ 中的编织，而最后一个映射是 $(Y \circledast X)(\beta^{-1}_{g_1,g_2})$。

回顾一下，$\mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}$ 可以赋予一个余纤维生成的幺半模型结构，其中弱等价是拟同构，纤维化是逐次数满态射，并且单位元是余纤维的（例如，参见 [Hov99] 命题 4.2.13）。由于 G 是一个小范畴，这就为 $\mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{G}}$ 赋予了一个余纤维生成的模型结构，其弱等价和纤维化分别是逐对象为弱等价和纤维化的自然变换（定理 11.6.1, [Hir03]）。此外，这是一个幺半模型结构，且单位元是余纤维的（参见引理 7.9, [GKRW18a] 的证明）。

3. Twisted homology

与第 2 节一样，我们固定一个皮卡群胚 G。本节将明确说明在 $\mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{G}}$ 的语境下，我们所说的扭曲同调是什么意思。

利用链复形的普通同调，我们可以定义 $\mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{G}}$ 中函子的扭曲同调。现在，我们的同调还带有来自 G 中对象的额外分次。

定义 3.1. 设 $X, Y \in \mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{G}}$。对于 G 中任意对象 g 和 $n \in \mathbb{Z}$，X 关于系数 Y 的 (g,n) 同调是一个 $\mathbb{F}$– 向量空间

$$H_{g,n}(X) \coloneqq H_n((X \circledast Y)(g)).$$

3.1. 系数系统 $\mathbb{F}_\varphi$。为了得到合理的运算理论，我们只研究一类性质特别良好的系数系统。

固定一个群同态

$$\varphi\colon \mathrm{Aut}_{\mathsf{G}}(\mathbb{1}_{\mathsf{G}}) \to \mathbb{F}^\times.$$

在记号 3.2 中，我们将定义一个函子 $\mathbb{F}_\varphi \in \mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{G}}$，它同构于

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}\mathsf{G}}(\mathbb{1}_{\mathsf{G}}, -) \otimes_{\mathrm{Aut}_{\mathsf{G}}(\mathbb{1}_{\mathsf{G}})} \mathbb{F}[0],$$

其中 $\mathbb{F}[0]$ 表示 $\mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}$ 中的单位元（也就是说，$\mathbb{F}[0]$ 是一个链复形，它在 0 次有一个 $\mathbb{F}$ 的副本，其他次数均为零），并且 $\mathsf{Aut}_{\mathsf{G}}(\mathbb{1}_{\mathsf{G}})$ 通过沿着 φ 的乘法作用于 $\mathbb{F}[0]$。接下来，我们将考虑系数取自 $\mathbb{F}_\varphi$ 的同调。

尽管我们可以给出上述对 $\mathbb{F}_\varphi$ 的显式描述，但最好采用更形式化的定义，这样更便于为 $\mathbb{F}_\varphi$ 定义额外结构。

令 B 表示一个只有一个对象 $\mathbb{1}_{\mathsf{B}}$ 的范畴，且

$$\mathrm{End}_{\mathsf{B}}(\mathbb{1}_{\mathsf{B}}, \mathbb{1}_{\mathsf{B}}) = \mathrm{Aut}_{\mathsf{G}}(\mathbb{1}_{\mathsf{G}}).$$

为简化记号，我们有时将 $\mathsf{Aut}_{\mathsf{B}}(\mathbb{1}_{\mathsf{B}})$ 记作 B。包含映射

$$\iota\colon \mathsf{B} \hookrightarrow \mathsf{G}$$

若赋予 B 显然的对称幺半群结构，则该函子是强对称幺半的，因此它诱导出一个松对称幺半群函子

$$\iota^*\colon \mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{G}} \to \mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{B}}$$

如果 $\mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{B}}$ 也配备了 Day 卷积幺半结构。沿着 ι 的左 Kan 延拓定义了一个左伴随

$$\iota_*\colon \mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{B}} \to \mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{G}}$$

到 ι^*，它是强幺半的（参见 [GKRW18a]中的引理 2.12）。

设 $\mathbb{F}_\varphi \in \mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{B}}$ 为满足 $\mathbb{F}_\varphi(\mathbb{1}_{\mathsf{B}}) = \mathbb{1}_{\mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}} = \mathbb{F}[0]$ 的函子。$B = \mathsf{Aut}_{\mathsf{B}}(\mathbb{1}_{\mathsf{B}})$ 中的态射 f 在 $\mathbb{F}_\varphi(\mathbb{1}_{\mathsf{G}})$ 上的作用是乘以 $\varphi(f)$。

记号 3.2。在本节（第 3.1 节）和下一节（第 3.2 节）中，我们将用 $\mathbb{F}_\varphi$ 表示刚刚在 $\mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{B}}$ 中定义的函子，但在本文中，我们希望始终使用函子 $\iota_*(\mathbb{F}_\varphi) \in \mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{G}}$ 作为系数。因此，在这两节之外，我们将稍微滥用记号，用 $\mathbb{F}_\varphi$ 表示 $\iota_*(\mathbb{F}_\varphi)$。

3.2. 关于 $\mathbb{F}_\varphi$ 的模。与其在 $\mathrm{Ch}_{\mathbb{F}}^{G}$ 中处理函子，并在取同调之前与 $\iota_*(\mathbb{F}_\varphi)$ 作 Day 卷积，不如改为处理 $\iota_*(\mathbb{F}_\varphi)$ 上的模。为使这有意义，我们需要赋予 $\iota_*(\mathbb{F}_\varphi)$ 交换幺半群对象的结构。

函子 $\mathrm{B}\to\mathrm{Ch}_{\mathbb{F}}$ 携带的数据与带有群 $B=\mathrm{Aut}_G(\mathbb{I}_G)$ 作用的链复形相同，而 Day 卷积幺半结构与群环 $\mathbb{F}[B]$ 上的张量积 $\otimes_B$ 一致。因此，存在一个规范的乘法映射

$$\mathbb{F}_\varphi(\mathbb{I}_B)\otimes_B\mathbb{F}_\varphi(\mathbb{I}_B)\to\mathbb{F}_\varphi(\mathbb{I}_B)$$

它确定了一个 $\mathbb{F}_\varphi\circledast\mathbb{F}_\varphi\to\mathbb{F}_\varphi$ in $\mathrm{Ch}_{\mathbb{F}}^{B}$ 中的乘法映射。将 $b\in B$ 送到 $\varphi(b)$ 的环商映射 $\mathbb{F}[B]\to\mathbb{F}$ 确定了一个单位映射；该映射与上述乘法映射一起，使 $\mathbb{F}_\varphi$ 成为 $\mathrm{Ch}_{\mathbb{F}}^{B}$ 中的幺半群对象。

此外，我们声称 $\mathbb{F}_\varphi$ 是一个交换幺半群对象。回顾 2.5，Day 卷积上的编织由先应用 $\mathrm{Ch}_{\mathbb{F}}$ 中的编织，再由 B 中的编织态射作用构成。由于 $\mathbb{F}_\varphi(\mathbb{I}_B)$ 集中在 $\mathbb{Z}$-次 0 上，$\mathrm{Ch}_{\mathbb{F}}$ 中的编织是平凡的；此外，$\mathbb{I}_B$ 与自身编织时也是平凡的，因为 B 是一个骨架范畴。因此，编织 $\mathbb{F}_\varphi\circledast\mathbb{F}_\varphi\to\mathbb{F}_\varphi\circledast\mathbb{F}_\varphi$ 是平凡的，所以 $\mathbb{F}_\varphi$ 是交换的。

由于 ι_* 是强对称幺半的，$\iota_*(\mathbb{F}_\varphi)$ 继承了 $\mathrm{Ch}_{\mathbb{F}}^{G}$ 中交换幺半的结构，因此考虑 $\mathrm{Ch}_{\mathbb{F}}^{G}$ 中 $\iota_*(\mathbb{F}_\varphi)$ 上的模范畴 $\mathrm{Mod}_{\iota_*(\mathbb{F}_\varphi)}$ 是有意义的。回顾记号 3.2，在本节之外，我们将 $\mathrm{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}$ 记作 $\mathrm{Mod}_{\iota_*(\mathbb{F}_\varphi)}$。

$\mathrm{Mod}_{\iota_*(\mathbb{F}_\varphi)}$ 上的幺半结构由 $\circledast_{\iota_*(\mathbb{F}_\varphi)}$ 给出，它通过以下余等化子定义

$$X\circledast\mathbb{F}_\varphi\circledast Y\rightrightarrows X\circledast Y\to X\circledast_{\iota_*(\mathbb{F}_\varphi)}Y,$$

其中 $X,Y\in\mathrm{Mod}_{\iota_*(\mathbb{F}_\varphi)}$，两个箭头由$X$ 和 Y上的模结构给出。

事实上，我们声称，成为 $\iota_*(\mathbb{F}_\varphi)$ 上的模是一种性质，而非额外结构。

命题 3.3. 任意 $X\in\mathrm{Ch}_{\mathbb{F}}^{G}$ 都可以赋予一个 $\iota_*(\mathbb{F}_\varphi)$-模结构，当且仅当对于每个对象 $g\in G$ 和 $f\in\mathrm{Aut}_G(g)$，态射

$$X(f)\colon X(g)\to X(g)$$

与乘以 $\varphi(\mathrm{tr}_g(f))$ 相一致，其中 tr_g 是方程 2.1 的同构。如果这样的结构存在，则它是唯一的，并且映射

$$\iota_*(\mathbb{F}_\varphi)\circledast X\to X$$

是一个同构。

证明。注意，单位映射 $\mathbb{I}^{\mathrm{Ch}^B}\to\mathbb{F}_\varphi$ 可以描述为一个商：在$\mathbb{I}_B$上取值后，它是余等化子

$$\bigoplus_{b\in B}\mathbb{F}[B]\rightrightarrows\mathbb{F}[B]\to\mathbb{F},$$

其中和前面一样，$B=\mathrm{Aut}_G(\mathbb{I}_G)$，而由 b 标记的分量上的两个箭头分别是乘以 b 和乘以 $\varphi(b)$。（此余等化子中的向量空间应理解为集中在 $\mathbb{Z}$ 次 0 次的链复形。）

由于左 Kan 延拓保余极限，我们看到类似地，$\iota_*(\mathbb{F}_\varphi)$ 是 ${}_{\mathbb{I}^{\mathsf{Ch}^{\mathsf{G}}}}$ 的一个商。此外，映射

$$ {}_{\mathbb{I}^{\mathsf{Ch}^{\mathsf{G}}}} \circledast X \to \iota_*(\mathbb{F}_\varphi) \circledast X $$

也是一个商，因为 Day 卷积是通过左 Kan 延拓得到的。因此，当图表

$$\begin{array}{ccc} {}_{\mathbb{I}^{\mathsf{Ch}^{\mathsf{G}}_{\mathbb{F}}}} \circledast X & \longrightarrow & \iota_*(\mathbb{F}_\varphi) \circledast X \\ & \searrow & \downarrow \\ & & X \end{array}$$

可交换时，映射 {v1}({v2}){v3} 存在，当且仅当商映射所施加的关系

$$ {}_{\mathbb{I}^{\mathsf{Ch}^{\mathsf{G}}}} \to \iota_*(\mathbb{F}_\varphi) $$

已在 X 中成立。若确实如此，映射 $\iota_*(\mathbb{F}_\varphi) \circledast X \to X$ 必须是一个同构。

具体而言，典范同构

$$ {}_{\mathbb{I}^{\mathsf{Ch}^{\mathsf{G}}}} \circledast X = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}\mathsf{G}}({}_{\mathbb{I}^{\mathsf{G}}}, -) \circledast X \to X $$

由映射定义

$$ \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}\mathsf{G}}({}_{\mathbb{I}^{\mathsf{G}}}, g) \otimes X(h) \to X(g \oplus_{\mathsf{G}} h) $$

对所有 $g, h \in \mathsf{G}$。这些映射将一个态射 ${}_{\mathbb{I}^{\mathsf{G}}} \to g$ 映为 G 中的一个态射 $h \to {}_{\mathbb{I}^{\mathsf{G}}} \oplus_{\mathsf{G}} h \to g \oplus_{\mathsf{G}} h$，进而诱导出一个映射 $X(h) \to X(g \oplus_{\mathsf{G}} h)$。我们可以定义映射

$$ \iota_*(\mathbb{F}_\varphi)(g) \otimes X(h) \cong (\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}\mathsf{G}}({}_{\mathbb{I}^{\mathsf{G}}}, g) \otimes_{\mathrm{Aut}_{\mathsf{G}}({}_{\mathbb{I}^{\mathsf{G}}})} \mathbb{F}[0]) \otimes X(h) \to X(g \oplus_{\mathsf{G}} h) $$

完全以相同的方式，但这类映射良定义当且仅当将态射 ${}_{\mathbb{I}^{\mathsf{G}}} \to g$ 与自同构 $b\colon {}_{\mathbb{I}^{\mathsf{G}}} \to {}_{\mathbb{I}^{\mathsf{G}}}$ 复合后，结果等于乘以 $\varphi(b)$。沿着 tr_h 的定义追踪可知，这等价于说，任意态射 $f\colon h \to h$ 在 $X(h)$ 上的作用都是乘以 $\varphi(\mathrm{tr}_h(f))$。

□

事实上，这个命题意味着自然映射

$$ X \circledast Y \to X \circledast_{\iota_*(\mathbb{F}_\varphi)} Y $$

是一个同构：这两个箭头

$$ X \circledast \iota_*(\mathbb{F}_\varphi) \circledast Y \rightrightarrows X \circledast Y $$

由 X 和 Y 上的模结构给出的映射已经彼此交换，因此 $X \circledast Y$ 满足余等化子的泛性质。鉴于此，我们通常将 $\mathbf{Mod}_{\iota_*(\mathbb{F}_\varphi)}$ 中的幺半结构记作 $\circledast$，而不是 $\circledast_{\iota_*(\mathbb{F}_\varphi)}$。

注意，对于任意的 $X \in$ 模$_{\iota_*(\mathbb{F}_\varphi)}$，同构 $X \circledast \iota_*(\mathbb{F}_\varphi) \to X$ 诱导出一个同构

$$ H_{g,n}(X; \iota_*(\mathbb{F}_\varphi)) \cong H_{g,n}(X). $$

因此，对于任意 $Y \in \mathsf{Ch}^{\mathsf{G}}_{\mathbb{F}}$，我们可以将 $H_{*,\ *}(Y;\ \iota_*(\mathbb{F}_\varphi))$ 表示为自由 $\iota_*(\mathbb{F}_\varphi)$-模在 Y 上的同调。因此，为了讨论 $\iota_*(\mathbb{F}_\varphi)$-同调，我们选择考察范畴 $\mathbf{Mod}_{\iota_*(\mathbb{F}_\varphi)}$。

3.2.1. $\mathsf{Mod}_{\mathbb{F}_\varphi}$ 上的模型结构。我们希望在 $\mathsf{Mod}_{\iota_*(\mathbb{F}_\varphi)}$ 上赋予一个由余纤维生成的幺半模型结构。

令 $\pi_0\mathsf{G}$ 表示 G 中对象的同构类的集合，并为每个类 $[g] \in \pi_0\mathsf{G}$ 选取一个代表元 $g_0 \in \mathsf{G}$。考虑遗忘函子

$$\mathsf{Mod}_{\iota_*(\mathbb{F}_\varphi)} \to \prod_{\pi_0\mathsf{G}} \mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}$$

将函子 X 送至 $\prod X(g_0)$。根据命题 3.3，它有一个左伴随，将 $\prod X_{g_0}$ 送至

$$\bigoplus_{g_0 \in \pi_0\mathsf{G}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}\mathsf{G}}(g_0, -) \otimes_{\mathrm{Aut}_\mathsf{G}(g_0)} X_{g_0},$$

其中，自同构 $b \in \mathrm{Aut}_\mathsf{G}(g_0)$ 在 X_{g_0} 上的作用是乘以 $\varphi(\mathrm{tr}_{g_0}(b))$。

我们断言这实际上是一个范畴等价。容易看出，$\prod \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}\mathsf{G}}(g_0, g_0) \otimes_{\mathrm{Aut}_\mathsf{G}(g_0)} X_{g_0}$ 自然同构于 $\prod X_{g_0}$。对于另一个复合，注意对于任意 $X \in \mathsf{Mod}_{\iota_*(\mathbb{F}_\varphi)}$，存在一个映射

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}\mathsf{G}}(g_0, g) \otimes_{\mathrm{Aut}_\mathsf{G}(g_0)} X(g_0) \to X(g)$$

这是通过使用态射 $g_0 \to g$ 将 $X(g_0)$ 映射到 $\to X(g)$ 得到的。它的逆映射为

$$X(g) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}\mathsf{G}}(g_0, g) \otimes_{\mathrm{Aut}_\mathsf{G}(g_0)} X(g_0)$$

通过任意选择 $\gamma\colon\ g_0 \to g$ 并将 $x \in X(g)$ 发送到 $\gamma \otimes \gamma^{-1}(x)$ 得到。此映射与 γ 的选择无关，而这些映射构成了 X 与 $\bigoplus_{\pi_0\mathsf{G}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}\mathsf{G}}(g_0, -) \otimes_{\mathrm{Aut}_\mathsf{G}(g_0)} X(g_0)$ 之间的自然同构的一部分。

由于范畴 $\mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}$ 具有余纤维生成的模型结构，其弱等价为拟同构，纤维化为逐层满射（见[Hov99] 第 2 节.3），因此 $\prod\mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}$ 可以赋予“乘积”模型结构。也就是说，只有当 f_g 在 $\mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}$ 中对所有 $g \in \mathsf{G}$ 都是弱等价/纤维化/余纤维化时，映射 $f \in \prod \mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}$ 才是弱等价/纤维化/余纤维化。因此，$\mathsf{Mod}_{\iota_*(\mathbb{F}_\varphi)}$ 继承了余纤维生成的模型结构，其中弱等价和纤维化恰好是对每个对象 $g \in \mathsf{G}$ 求值后，在 $\mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}$ 中成为弱等价/纤维化的那些映射。注意，在此模型结构中，所有对象都是纤维的。由于我们是在一个域上工作，$\mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}$ 中的每个链复形都是余纤维的，因此 $\mathsf{Mod}_{\iota_*(\mathbb{F}_\varphi)}$ 中的每个对象也都是余纤维的。

验证这是一个幺半模型结构，等价于验证推出积公理成立且单位元是余纤维的（见 [Hov99] 第4.2节）。在我们的情形中，单位元 $\iota_*(\mathbb{F}_\varphi)$ 显然是余纤维的，因为 $\mathsf{Mod}_{\iota_*(\mathbb{F}_\varphi)}$ 中的所有对象都是余纤维的。验证推出积公理成立，只需验证 $\mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}$ 中的推出积公理成立，因为 $\mathsf{Mod}_{\iota_*(\mathbb{F}_\varphi)}$ 中的推出是逐层计算的。这很容易手动验证（见 [Hov99] 命题 4.2.13）。因此，我们证明了以下结论。

命题 3.4. 在 $\mathsf{Mod}_{\iota_*(\mathbb{F}_\varphi)}$ 上存在一个余纤维生成的幺半模型结构，其纤维化是链复形的逐层满射，弱等价是逐层拟同构。

将这一模型结构与 $\mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{G}}$ 的模型结构联系起来会很有用。这里有一个自由—遗忘伴随

$$\iota_*(\mathbb{F}_\varphi) \circledast -\colon\ \mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{G}} \rightleftarrows \mathsf{Mod}_{\iota_*(\mathbb{F}_\varphi)}\colon U.$$

如果 $\mathsf{Mod}_{\iota_*(\mathbb{F}_\varphi)}$ 中的一个态射是纤维化，因而逐级满射，那么它在 U 下的像也逐级满射，因此是 $\mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{G}}$ 中的一个纤维化。同样，U 保持拟同构。因此，这是一个Quillen伴随。

注3.5. 我们也可以通过沿此伴随对进行右转移来定义 $\mathsf{Mod}_{\iota_*(\mathbb{F}_\varphi)}$ 上的模型结构。然而，由于 $\iota_*(\mathbb{F}_\varphi)$ 在 $\mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{G}}$ 中不是余纤维的，要验证这确实构成模型结构，还需要做更多工作。虽然这并非不可能，但像上面那样使用 $\prod\mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}$ 更快。

3.2.2. 函子的双分次悬挂。现在我们定义 $\Sigma^{g,n}$ 上模的双分次悬挂，因为稍后讨论同调时会用到它们。在对象层面，

$$(\Sigma^{g,n}X)(h) = \Sigma^n X(h \oplus g^{-1}), \tag{3.6}$$

但我们需要将其表述得更精确（另请注意，我们并未为每个对象 $g \in \mathsf{G}$ 选定唯一的逆，因此右侧的表达式没有意义）。

对于 $n \in \mathbb{Z}$，令 $\Sigma^n\colon \mathsf{Ch} \to \mathsf{Ch}$ 表示通常的第 n 次悬挂函子。给定一个到 Ch 的函子范畴，与 Σ^n 后复合会定义一个自函子。根据命题 3.3，我们看到，也可以将 Σ^n 视为 $\mathsf{Mod}_{\iota_*(\mathbb{F}_\varphi)}$ 的自函子。

我们还希望考虑沿 G方向的“悬挂”。对每个 $g \in \mathsf{G}$，我们可以考虑函子

$$\iota_g\colon \mathsf{B} \to \mathsf{G}$$

取 $\mathbb{1}^{\mathsf{B}} \mapsto g$。自同构 $\mathbb{1}^{\mathsf{B}}$ 被映射到其在

$$\mathrm{tr}_g^{-1}\colon \mathrm{Aut}_{\mathsf{G}}(\mathbb{1}^{\mathsf{G}}) \to \mathrm{Aut}_{\mathsf{G}}(g).$$

和 ι_g 前复合会诱导一个函子

$$\iota_g^*\colon \mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{G}} \to \mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{B}}$$

它有一个左伴随

$$(\iota_g)_*\colon \mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{B}} \to \mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{G}}.$$

定义3.7. 对于 $g \in \mathsf{G}$ 和 $n \in \mathbb{Z}$，令 $\Sigma^{g,n}\iota_*(\mathbb{F}_\varphi) \coloneqq (\iota_g)_*(\mathbb{F}_\varphi)$。若 X 是 $\mathsf{Mod}_{\iota_*(\mathbb{F}_\varphi)}$ 的一个对象，则令

$$\Sigma^{g,n}X \coloneqq \Sigma^{g,n}\iota_*(\mathbb{F}_\varphi) \circledast X \in \mathsf{Mod}_{\iota_*(\mathbb{F}_\varphi)}.$$

注意，当 $g = \mathbb{1}^{\mathsf{G}}$ 时，$\Sigma^{g,0}\iota_*(\mathbb{F}_\varphi) = \iota_*(\mathbb{F}_\varphi)$。此外，

$$\Sigma^{g,n}\iota_*(\mathbb{F}_\varphi) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}\mathsf{G}}(g, -) \otimes_{\mathrm{Aut}_{\mathsf{G}}(g)} \mathbb{F}[n],$$

其中，$\mathsf{Aut}_{\mathsf{G}}(g)$在应用迹同态后，沿着 φ 对 $\mathbb{F}[n] = \Sigma^n\mathbb{F}[0]$ 进行乘法作用。结合这一描述与命题 3.3，我们看到 $\Sigma^{g,\,n}X$ 确实是 $\iota_*(\mathbb{F}_\varphi)$上的一个模，而且这个定义与3.6的非正式描述一致。

我们指出，这里的 Σ 记号存在歧义；当上标是一个元素 $n \in \mathbb{Z}$时，Σ^n 总表示相对于链复形分次的悬挂；当上标是双分次时，$\Sigma^{g,\,n}$ 则如定义3.7所述。

我们声称，这种双分次悬挂与两个分次上的幺半结构相容。

命题 3.8. 令 $\mathsf{G}\times\mathbb{Z}$ 表示 G 与一个范畴的乘积，该范畴的对象为整数，且除单位态射外没有其他态射。函子

$$\mathsf{G}\times\mathbb{Z}\to \mathsf{Mod}_{\iota_*(\mathbb{F}_\varphi)}$$

将 $(g,n)\mapsto \Sigma^{g,\ n}\iota_*(\mathbb{F}_\varphi)$ 发送为.....是强幺半的。特别地，

$$\Sigma^{g,n}\iota_*(\mathbb{F}_\varphi)\circledast\Sigma^{h,m}\iota_*(\mathbb{F}_\varphi)\cong\Sigma^{g\oplus h,n+m}\iota_*(\mathbb{F}_\varphi).$$

证明。由于 $(\iota_g)_*$ 和 $(\iota_h)_*$ 是左 Kan 延拓，我们有一个映射

$$\Sigma^n\mathbb{F}_\varphi(\mathbb{I}_{\mathsf{B}})\otimes\Sigma^m\mathbb{F}_\varphi(\mathbb{I}_{\mathsf{B}})\to\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi(g)\otimes\Sigma^{h,m}\mathbb{F}_\varphi(h)$$

容易看出这是一个同构。利用该同构的逆，我们得到复合

$$\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi(g)\otimes\Sigma^{h,m}\mathbb{F}_\varphi(h)\ \to\Sigma^n\mathbb{F}_\varphi(\mathbb{I}_{\mathsf{B}})\otimes\Sigma^m\mathbb{F}_\varphi(\mathbb{I}_{\mathsf{B}})\ \to\Sigma^{n+m}\mathbb{F}_\varphi(\mathbb{I}_{\mathsf{B}})\to\Sigma^{g\oplus h,n+m}\mathbb{F}_\varphi(g\oplus h)\quad .$$

给定任意态射 $\gamma\colon g\to k$ 和 $\delta\colon h\to\ell$，我们得到复合

$$\begin{array}{ccc}\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi(k)\otimes\Sigma^{h,m}\mathbb{F}_\varphi(\ell) & \xrightarrow{\gamma^{-1}\otimes\delta^{-1}} & \Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi(g)\otimes\Sigma^{h,m}\mathbb{F}_\varphi(h)\\ \downarrow & & \downarrow\\ \Sigma^{g\oplus h,n+m}\mathbb{F}_\varphi(k\oplus\ell) & \xleftarrow[\gamma\oplus\delta]{} & \Sigma^{g\oplus h,n+m}\mathbb{F}_\varphi(g\oplus h)\end{array}$$

命题 3.3 表明，此映射与态射γ,δ的选取无关，因此它关于 G 中的态射是自然的。注意到当 $k\ncong g$ 或 $\ell\ncong h$时，左侧为零，由此得到映射

$$(\Sigma^{g,n}\iota_*(\mathbb{F}_\varphi))(k)\otimes(\Sigma^{h,m}\iota_*(\mathbb{F}_\varphi))(l)\to(\Sigma^{g\oplus h,n+m}\iota_*(\mathbb{F}_\varphi))(k\oplus l)$$

对所有 $k,\ell\in\mathsf{G}$ 都成立，它们共同构成一个自然变换

$$\Sigma^{g,n}\iota_*(\mathbb{F}_\varphi)\circledast\Sigma^{h,m}\iota_*(\mathbb{F}_\varphi)\to\Sigma^{g\oplus h,n+m}\iota_*(\mathbb{F}_\varphi).$$

验证此映射是同构是很简单的。 □

3.3. 一个关于 $\mathbb{F}_\varphi$-同调的 K¨unneth 定理。本节及后续所有各节中，我们将 $\mathbb{F}_\varphi$ 记作 $\iota_*(\mathbb{F}_\varphi)\in\mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{G}}$，如记号 3.2 所述。

注意，对于任意 $X\in\mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}(\mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{G}})$，我们可以将 $H_{*,\ *}(X)$ 视为一个函子

$$H_{*,*}(X)\colon\mathsf{G}\to\mathsf{GrVect}_{\mathbb{F}}$$

其值属于 $\mathbb{Z}$-分次的 $\mathbb{F}$–向量空间范畴。稍微滥用一下记号，我们仍将 $\mathbb{F}_\varphi$ 记作 $H_{*,\ *}(\mathbb{F}_\varphi)\in\mathsf{GrVect}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{G}}$。

我们可以利用 Day 卷积以及 G 和 $\mathsf{GrVect}_{\mathbb{F}}$ 中的对称性，将 $\mathsf{GrVect}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{G}}$ 赋予对称幺半范畴结构。再次，$\mathbb{F}_\varphi$ 是 $\mathsf{GrVect}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{G}}$ 中的交换幺半群对象，而作为 $\mathbb{F}_\varphi$ 上的幺半群对象是一种性质，而非如命题 3.3 中那样的额外结构。此外，$\mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}(\mathsf{GrVect}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{G}})$ 的幺半结构 $\circledast_{\mathbb{F}_\varphi}$ 再次与 $\mathsf{GrVect}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{G}}$ 的幺半结构 $\circledast$ 重合。注意，$\mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}(\mathsf{GrVect}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{G}})$ 中的单位对象是 $\mathbb{F}_\varphi$。

注 3.9。我们也可以选择在等价范畴 $\mathsf{Vect}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{G}\times\mathbb{Z}}$ 中进行研究，其中 $\mathbb{Z}$ 表示自然数在加法运算下构成的对称幺半范畴，且没有非单位态射。无论采用哪种方式，我们实质上研究的都是带有额外结构的 $(\mathrm{ob}\,\mathsf{G}\times\mathbb{Z})$-分次向量空间。

我们通过证明一个关于 $\mathbb{F}_\varphi$-同调的 K¨unneth 定理来结束这段讨论。

命题 3.10. 设 $X, Y \in \mathrm{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}(\mathrm{Ch}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{G}})$。那么

$$H_{*,*}(X \circledast Y) \cong H_{*,*}(X) \circledast H_{*,*}(Y)$$

在 $\mathrm{GrVect}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{G}}$ 中。特别是,

$$H_{*,*}(X) \cong H_{*,*}(\mathbb{F}_\varphi \circledast X) \cong \mathbb{F}_\varphi \circledast H_{*,*}(X),$$

因此 $H_{*,\,*}(X)$ 继承了 $\mathrm{GrVect}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{G}}$ 中一个 $\mathbb{F}_\varphi$-模的结构。

鉴于此，将同调视为一个函子更为自然,

$$H_{*,*}\colon \mathsf{Mod}_{\mathbb{F}_\varphi}(\mathrm{Ch}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{G}}) \to \mathsf{Mod}_{\mathbb{F}_\varphi}(\mathrm{GrVect}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{G}})$$

其值落在 $\mathbb{F}_\varphi$ 在 $\mathrm{GrVect}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{G}}$ 上的模范畴中。

证明。回忆第 3.2 节， $X \circledast_{\mathbb{F}_\varphi} Y \cong X \circledast Y$. 对于 G 的一个对象 k ，Day 卷积可以描述为 $\mathsf{G} \times \mathsf{G}/k$ 上的一个余极限，其对象为三元组 (g, h, f)，其中 $g, h \in \mathsf{G}$ 且 $f\colon g \oplus h \to k$，而其态射

$$(g, h, f) \to (g', h', f')$$

由态射 $\alpha\colon g \to g'$ 和 $\beta\colon h \to h'$ 组成，使得 $f = f' \circ (\alpha \oplus \beta)$。明确地,

$$(X \circledast Y)(k) \cong \mathrm{colim}_{\mathsf{G}\times\mathsf{G}/k}\, X(g) \otimes Y(h),$$

其中，从 $(g, h, f) \to (g', h', f')$ 的态射 (α, β) 诱导出映射

$$X(\alpha) \otimes Y(\beta)\colon X(g) \otimes Y(h) \to X(g') \otimes Y(h').$$

如果我们在 $\pi_0\mathsf{G}$ 的每个同构类中选取一个代表元 g_0 ，就可以将其表示为 这个余极限为

$$\mathrm{colim}_{\mathsf{G}\times\mathsf{G}/k}\, X(g) \otimes Y(h) \cong \bigoplus_{[g_0]\in\pi_0\mathsf{G}} \mathrm{colim}_{\{(g,h,f)\,|\,g\cong g_0\}}\, X(g) \otimes Y(h).$$

注意，如果 $g \cong g_0$，这就迫使 $h \cong g_0^{-1} \oplus k$，其中 g_0^{-1} 是 g_0 的任意逆元。这个余积的 g_0 项同构于

$$X(g_0) \otimes_{\mathrm{Aut}_{\mathsf{G}}(\mathbb{I}^{\mathsf{G}})} Y(h_0),$$

其中 h_0 是类 $[g_0^{-1} \oplus k]$ 的任意代表元。这里，$\mathsf{Aut}_{\mathsf{G}}(\mathbb{I}^{\mathsf{G}})$ 在 $X(g_0)$ 和 $Y(h_0)$ 上分别通过沿 φ 的乘法作用，这与 g_0 和 h_0 的自同构所产生的作用一致，这一点由命题 3.3 可知。由于 $\mathsf{Aut}_{\mathsf{G}}(\mathbb{I}^{\mathsf{G}})$ 的作用通过 $\mathbb{F}^\times$ 分解,

$$X(g_0) \otimes_{\mathrm{Aut}_{\mathsf{G}}(\mathbb{I}^{\mathsf{G}})} Y(h_0) \cong X(g_0) \otimes_{\mathbb{F}} Y(h_0).$$

由于我们是在一个域上工作的,

$$H_*(X(g_0) \otimes_{\mathbb{F}} Y(h_0)) \cong H_*(X(g_0)) \otimes_{\mathbb{F}} H_*(Y(h_0)).$$

类似于上述论证可知,

$$(H_{*,*}(X) \circledast H_{*,*}(Y))(k) \cong \bigoplus_{\substack{[g_0],[h_0]\in\pi_0\mathsf{G} \\ [g_0\oplus h_0]=[k]}} H_*(X(g_0)) \otimes_{\mathbb{F}} H_*(Y(h_0)).$$

这表明所需的同构在抽象意义下成立。

对于任意 $g, h \in \mathsf{G}$，通常的 K¨unneth 同构与 Day 卷积的泛性质共同给出一个映射

$$H_*(X(g)) \otimes_{\mathbb{F}} H_*(Y(h)) \to H_*(X(g) \otimes_{\mathbb{F}} Y(h)) \to H_*((X \circledast Y)(g \oplus h))$$

它诱导出一个映射

$$H_{*,*}(X) \circledast H_{*,*}(Y) \to H_{*,*}(X \circledast Y).$$

此映射与上述同构相容，因此它是一个同构。 □

注意，K¨unneth 定理对于 $\mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{G}}$ 中任意函子未必成立；必须要求 X 和 Y 是 $\mathbb{F}_\varphi$ 上的模，这样 G 中自同构的作用才能表示为乘以 $\mathbb{F}$ 中某个元素。

4. E_∞-ALGEBRAS IN $\mathsf{Mod}_{\mathbb{F}_\varphi}$

给定一个函子 $F \in \mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{G}}$，我们可以将链复形 V 与 F 作张量积，从而得到一个函子 $V \otimes F$。具体而言，

$$(V \otimes F)(g) = V \otimes_{\mathbb{F}} F(g),$$

且态射 $b \in \mathsf{Aut}(g)$ 在 $V \otimes F(g)$ 上的作用为 $\mathrm{id}_V \otimes b$。这定义了一个函子$- \otimes -$: $\mathsf{Ch}_{\mathbb{F}} \times \mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{G}} \to \mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{G}}$，并满足单位元和结合性公理，因此 $\mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{G}}$ 是 $\mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}$ 上的张量对象。这会导出一个逐级张量积

$$- \otimes -\colon \mathsf{Ch}_{\mathbb{F}} \times \mathsf{Mod}_{\mathbb{F}_\varphi} \to \mathsf{Mod}_{\mathbb{F}_\varphi}$$

因此 $\mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}$ 也是 $\mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}$ 上的张量对象，而由与单位元 $\mathbb{F}_\varphi$ 作张量积给出的诱导映射 $\mathsf{Ch}_{\mathbb{F}} \to \mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}$ 是强对称幺半映射。

对于链复形中的任意余运算子 $\mathscr{O}$，现在我们可以定义 $\mathsf{Mod}^{\mathscr{O}}_{\mathbb{F}_\varphi}$ 中的代数。

定义 4.1。设 $\mathscr{O}$ 是链复形中的一个余运算子。$\mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}$ 中的 $\mathscr{O}$-代数由一个对象 $X \in \mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}$ 以及一组映射组成：

$$\mathscr{O}(n) \otimes X^{\circledast n} \to X$$

对每个 n，这些映射满足通常的结合性、单位元和等变性关系。这里，$\mathscr{O}(n)$ 表示该余运算子的 n 元数部分。

$\mathscr{O}$-代数之间的态射是 $\mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}$ 中保持 $\mathscr{O}$ 作用的映射。我们用 $\mathsf{Alg}_{\mathscr{O}}(\mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi})$ 表示 $\mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}$ 中 $\mathscr{O}$-代数构成的范畴。

当然，我们关注的是 $\mathscr{O}$ 为一个 E_∞-余运算子的情形。为了给 E_∞-代数建立合理的同伦理论，我们需要对 E_∞-余运算子作出一些技术性假设。

首先，$\mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}$ 中对称序列的范畴继承了一种模型结构，其中，当且仅当某个映射的 n 元数映射对所有 n 都是 $\mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}$ 中的弱等价（分别为纤维化）时，该映射才是弱等价（分别为纤维化）（例如参见 [Fre09]）。若一个余运算子的底层对称序列关于此模型结构是余纤维的，我们就称该余运算子是 Σ-余纤维的。

当余运算子 $\mathscr{O}$ 是 Σ-余纤维时，范畴 $\mathsf{Alg}_{\mathscr{O}}(\mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi})$ 继承一种“半模型”结构（按 [Fre09] 的定义），其中，$\mathscr{O}$-代数之间的映射是弱等价（分别是纤维化），当且仅当它在 $\mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}$ 中的底层映射是弱等价（分别是纤维化）（定理 12.3.A，[Fre09]）。此外，Σ-余纤维余运算子之间的弱等价会诱导代数范畴之间的（半模型）Quillen 等价（定理 12.5.A，[Fre09]）。因此，我们考虑以下 E_∞-余运算子的定义。

定义 4.2. 一个 E_∞-余运算子由链复形中的一个 Σ-余纤维余运算子 $\mathcal{C}_\infty$ 以及一串通向小∞-圆盘余运算子奇异链的弱等价组成。一个 E_∞-代数是一个 E_∞-余运算子上的代数。

特别是，这意味着对于任意 E_∞-余运算子 $\mathcal{C}_\infty$，范畴 $\mathsf{Alg}_{\mathcal{C}_\infty}(\mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi})$ 都继承了一个（半）模型结构，并且任意两个 E_∞-代数都有 Quillen 等价的代数范畴。

我们可以将 $X \in \mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}$ 上的自由 $\mathcal{C}_\infty$-代数描述为

$$\mathcal{C}_\infty(X) \coloneqq \bigoplus_{k\geq 0} \mathcal{C}_\infty(k) \otimes_{\Sigma_k} X^{\circledast k},$$

并记作

$$\mathrm{Sym}^k_{\mathcal{C}_\infty}(X) \coloneqq \mathcal{C}_\infty(k) \otimes_{\Sigma_k} X^{\circledast k}$$

X 的第 k 个对称幂。函子 $\mathcal{C}_\infty(-)$ 是遗忘函子的左伴随

$$\mathsf{Alg}_{\mathcal{C}_\infty}(\mathsf{Mod}_{\mathbb{F}_\varphi}) \to \mathsf{Mod}_{\mathbb{F}_\varphi}.$$

下面的引理将使我们能够通过用同调替换 $\mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}$ 中的函子来简化一些计算。

引理 4.3. 若 $\mathcal{C}_\infty$ 是任意的 E_∞-余运算子，则函子 $\mathcal{C}_\infty(-)$ 和 $\mathrm{Sym}^k_{\mathcal{C}_\infty}(-)$ 保持 $\mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}$中的弱等价。

证明. 由于

$$\mathcal{C}_\infty(X) \cong \bigoplus \mathrm{Sym}^k_{\mathcal{C}_\infty}(X),$$

我们有：若对所有 k，$\mathrm{Sym}^k_{\mathcal{C}_\infty}(-)$ 保持弱等价，则 $\mathcal{C}_\infty(-)$ 也保持弱等价。第 k 幂函子 $(-)^{\circledast k}\colon \mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi} \to \mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}$ 根据 K¨unneth 定理 3.10 保持弱等价。由于余运算子 $\mathcal{C}_\infty$ 是 Σ-余纤维的，特别地，$\mathcal{C}_\infty(k)$ 作为带有 Σ_k 作用的链复形是余纤维的；也就是说，$\mathcal{C}_\infty(k)$ 是由投射 $\mathbb{F}[\Sigma_k]$-模组成的链复形。因此，$\mathcal{C}_\infty(k)\otimes_{\Sigma_k} -\colon \mathsf{Ch}^{\mathbb{F}[\Sigma_k]} \to \mathsf{Ch}^{\mathbb{F}[\Sigma_k]}$ 保持拟同构。

由于 $\mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}$ 中的映射是弱等价，当且仅当在 G 中的对象处求值后，所有底层链复形映射都是拟同构，因此 $\mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}$ 中的弱等价 $X \to Y$ 会给出拟同构

$$X^{\circledast k}(g) \to Y^{\circledast k}(g).$$

我们可以将其视为 $\mathsf{Ch}^{\mathbb{F}[\Sigma_k]}$ 中的一个拟同构，使用从编织继承而来的 Σ_k-作用，因此，在对每个 $g \in \mathsf{G}$ 求值后，$\mathrm{Sym}^k(X) \to \mathrm{Sym}^k(Y)$ 是一个拟同构，这等价于它在 $\mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}$中是一个弱等价。□

在构造同调运算时，选取一个E_∞-余运算子会更方便，因此我们通过证明同调运算理论与 $\mathcal{C}_\infty$的选取无关，来结束这段讨论。

引理 4.4. 若 $\mathcal{C}_\infty$ 和 $\mathcal{D}_\infty$ 是两个配备了弱等价$\mathcal{C}_\infty \to \mathcal{D}_\infty$的 E_∞-余运算子，则对任意 $X \in \mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}$,

$$H_{*,*}(\mathcal{C}_\infty(X)) \cong H_{*,*}(\mathcal{D}_\infty(X))$$

作为 $\mathsf{GrVect}^{\mathsf{G}}_{\mathbb{F}}$ 中的对象。

证明。弱等价 $\mathcal{C}_\infty \to \mathcal{D}_\infty$ 诱导出一个映射

$$\mathsf{Alg}_{\mathcal{D}_\infty}(\mathsf{Mod}_{\mathbb{F}_\varphi}) \to \mathsf{Alg}_{\mathcal{C}_\infty}(\mathsf{Mod}_{\mathbb{F}_\varphi})$$

该函子在底层对象上是单位元，并且 $\mathcal{D}_\infty$-代数 X 上的 $\mathcal{C}_\infty$-结构由以下复合给出

$$\mathrm{Sym}^k_{\mathcal{C}_\infty}(X) \to \mathrm{Sym}^k_{\mathcal{D}_\infty}(X) \to X.$$

此函子有一个左伴随，它将自由的 $\mathcal{C}_\infty$-代数映射为自由的 $\mathcal{D}_\infty$-代数。特别地，我们声称这会在同调上诱导一个同构

$$H_{*,*}(\mathcal{C}_\infty(X)) \to H_{*,*}(\mathcal{D}_\infty(X)).$$

只需分别对每个 k 检查 Sym^k。由于 $\mathcal{C}_\infty(k) \to \mathcal{D}_\infty(k)$ 是拟同构，且 $X^{\circledast k}$ 在 $\mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}$ 中是余纤维（因为 $\mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}$ 中所有对象都是余纤维），因此我们有一个拟同构

$$\mathcal{C}_\infty(k) \otimes_{\Sigma_k} X^{\circledast k} \to \mathcal{D}_\infty(k) \otimes_{\Sigma_k} X^{\circledast k}.$$

□

我们稍后将看到，E_∞-余运算子 $\mathcal{C}_\infty$ 上的代数的 $\mathbb{F}_\varphi$-同调运算由自由 $\mathcal{C}_\infty$-代数的同调分类。因此，鉴于上述命题，同调运算理论不依赖于所选的 E_∞-余运算子。（另见注 5.4。）为方便起见，我们固定 $\mathcal{C}_\infty$ 为小 ∞-圆盘余运算子的奇异链，并记作

$$\mathsf{Alg}_{E_\infty}(\mathsf{Mod}_{\mathbb{F}_\varphi}),\ E_\infty(X),\ \text{and}\ \mathrm{Sym}^k(X)$$

分别为 $\mathsf{Alg}_{\mathcal{C}_\infty}(\mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi})$、$\mathcal{C}_\infty(X)$ 和 $\mathrm{Sym}^k_{\mathcal{C}_\infty}(X)$。

4.1. $\mathsf{Alg}_{E_\infty}(\mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi})$ 上的幺半结构。由于小 ∞-圆盘余运算子 $\mathcal{C}_\infty$ 是空间中一个余运算子的奇异链，因此它继承了一个余积

$$\mathcal{C}_\infty(k) \to \mathcal{C}_\infty(k) \otimes_{\mathbb{F}} \mathcal{C}_\infty(k)$$

该余积在每个元数上都来自底空间的对角映射。利用这一结构，我们可以在 E_∞-代数上定义幺半结构。

若 $X, Y \in \mathsf{Alg}_{E_\infty}(\mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi})$，则我们可以在 $\mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}$ 中的乘积 $X \circledast Y$ 上赋予一个E_∞-代数结构。首先，我们使用 $\mathcal{C}_\infty$ 上的余积来得到

$$\mathcal{C}_\infty(k) \otimes (X \circledast Y)^{\circledast k} \to (\mathcal{C}_\infty(k) \otimes \mathcal{C}_\infty(k)) \otimes (X \circledast Y)^{\circledast k}.$$

由对称幺半范畴公理的相干性（例如，参见 [Mac71] 第 VII.1 节，其中讨论了不同加括号方式之间的相干性；参见 [JS93] 第 4 节，其中讨论了编织的相干性），存在唯一的洗牌映射

$$(X \circledast Y)^{\circledast k} \to X^{\circledast k} \circledast Y^{\circledast k}$$

保持每个 X 因子和每个 Y 因子的顺序。（在幺半范畴中的所有张量幂中，都隐含着对 k重乘积进行括号化的选择；例如，我们可以取 $X^{\circledast k} = X \circledast (X \circledast (\ldots \circledast X))$.）利用 $\mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}$ 中的这一洗牌映射，以及函子 $\mathsf{Ch}_{\mathbb{F}} \to \mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}$的松幺半性，我们得到一个映射

$$(\mathcal{C}_\infty(k) \otimes \mathcal{C}_\infty(k)) \otimes (X \circledast Y)^{\circledast k} \to (\mathcal{C}_\infty(k) \otimes X^{\circledast k}) \circledast (\mathcal{C}_\infty(k) \otimes Y^{\circledast k}).$$

将这些映射组合起来，并利用 X 和 Y 上的 E_∞-结构，我们由此得到一个映射

$$\mathcal{C}_\infty(k) \otimes (X \circledast Y)^{\circledast k} \to X \circledast Y. \tag{4.5}$$

标准的验证表明，这些映射与拟 operad 复合及对称群作用相容。

交换幺半群 $\mathbb{F}_\varphi$ 可以赋予一个 E_∞-代数结构：照例，存在一个从 $\mathcal{C}_\infty$ 到交换拟 operad 的拟 operad 映射（在 $\mathsf{Ch}_\mathbb{F}$ 中，该交换拟 operad 的每个元数上都由 $\mathbb{F}[0]$ 构成，并配有平凡对称群作用），而 $\mathbb{F}_\varphi$ 上的交换幺半群结构赋予它一个交换拟 operad 上的代数结构。对于这个 E_∞-代数结构，$\mathbb{F}_\varphi$ 是 E_∞-代数乘积的幺半群单位。

命题 4.6。Day 卷积 4.5 上的 E_∞-代数结构赋予 $\mathsf{Alg}_{E_\infty}(\mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi})$一个幺半结构，其中 $\mathbb{F}_\varphi$ 是幺半群单位。此外，遗忘函子 $\mathsf{Alg}_{E_\infty}(\mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}) \to \mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}$ 是强幺半的。

该命题的证明是标准的，因此略去。

若我们选取一个来自小圆盘拟 operad 的元数 2 空间中某点的 0-链 $\mu \in \mathcal{C}_\infty(2)$，则可得到一个诱导映射

$$X \circledast X \to \mathbb{F}[0] \otimes X \circledast X \to \mathcal{C}_\infty(2) \otimes X \circledast X \to X,$$

其中 $\mathbb{F}[0] \to \mathcal{C}_\infty(2)$ 选出 μ。我们将这种映射称为链级乘积，因为在同调层面上，它给出通常的乘积。尽管这种映射并非严格意义上的 E_∞-代数映射，但在取同调后便是如此。

引理 4.7。设 $X \in \mathsf{Alg}_{E_\infty}(\mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi})$。图表

$$\begin{array}{ccc} H_{*,*}(E_\infty(X \circledast X)) & \longrightarrow & H_{*,*}(X \circledast X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_{*,*}(E_\infty(X)) & \longrightarrow & H_{*,*}(X) \end{array}$$

由任意链级乘积 $X \circledast X \to X$ 诱导的映射可交换。

证明。这是 May72, 中引理 1.9 的推广，该引理证明了空间中的 E_∞-代数也有类似结论。我们定义两个映射

$$f, g \colon \mathcal{C}_\infty(k) \to \mathcal{C}_\infty(2k)$$

对每个 k。令 θ 表示余运算子的复合映射。映射 f 由$\theta(-\otimes\mu^k)$给出。映射 g 由 $\theta(\mu\otimes\psi(-))\sigma$给出，其中 ψ 是 $\mathcal{C}_\infty(k)$上的余积，而 σ 表示 Σ_{2k} 中的洗牌置换，它将 $(S \times T)^k \to S^k \times T^k$ 映为集合 S、T。

令 Σ_k 通过置换二元组作用于 $\mathcal{C}_\infty(2k)$；也就是说，将 $\{1, 2, 3, 4, \ldots, 2k\}$划分为 k 个二元集合，如 $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \ldots, \{2k-1, 2k\}\}$所示，然后 Σ_k中的一个元素置换这些二元集合。于是，f 和 g 都是 Σ_k-等变的。注意，f和 g 都保持 $\mathcal{C}_\infty(k)$ 和 $\mathcal{C}_\infty(2k)$ 的典范增广映射 —— 要使这一点对 f 成立，μ 是底层空间中的点类这一点至关重要。因此，由于 f和 g 都是 $\mathbb{F}[\Sigma_k]$ 复形的映射，并且在 $\mathbb{F}$ （次数 -1）上延拓恒等映射；又由于 $\mathcal{C}_\infty(k)$ 在 $\mathbb{F}[\Sigma_k]$上是自由的，且 $\mathcal{C}_\infty(2k)$ 作为增广复形考虑时是无圈的，所以 f 和 g 在同调上相同。

利用 E_∞-乘法映射在 X 上的结合性，以及 E_∞结构在 $X \circledast X$上的定义，很容易验证映射

$$\mathrm{Sym}^k(X \circledast X) \to X \circledast X \to X$$

等于

$$\mathrm{Sym}^k(X \circledast X) \xrightarrow{g\otimes \mathrm{id}} \mathcal{C}_\infty(2k) \otimes_{\Sigma_k} (X \circledast X)^{\circledast k} \to X,$$

而映射 $\mathrm{Sym}^k(X \circledast X) \to \mathrm{Sym}^k(X) \to X$ 等于

$$\mathrm{Sym}^k(X \circledast X) \xrightarrow{f\otimes \mathrm{id}} \mathcal{C}_\infty(2k) \otimes_{\Sigma_k} (X \circledast X)^{\circledast k} \to X.$$

由于 f 和 g 在同调中诱导相同的映射，我们得出所需的图表是交换的。□

另请注意，对于 $X \in \mathrm{Alg}_{E_\infty}(\mathrm{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi})$，乘法映射 E_∞

$$E_\infty(X) \to X$$

特别地，限制后得到一个映射

$$\mathcal{C}_\infty(0) \otimes \mathbb{F}_\varphi \cong \mathrm{Sym}^0(X) \to X$$

这意味着显然的映射

$$\mathbb{F}_\varphi \to \mathrm{Sym}^0(X) \to E_\infty(X)$$

是 E_∞-代数的映射，因此每个 $X \in \mathrm{Alg}_{E_\infty}(\mathrm{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi})$ 都配备了一个单位映射

$$\mathbb{F}_\varphi \to X \tag{4.8}$$

E_∞-代数的。因此，对于任意 $X, Y \in \mathrm{Alg}_{E_\infty}(\mathrm{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi})$，都存在典范映射

$$X \cong X \circledast \mathbb{F}_\varphi \to X \circledast Y$$

and

$$Y \cong \mathbb{F}_\varphi \circledast Y \to X \circledast Y$$

它们共同诱导出一个自然映射

$$X \sqcup_{E_\infty} Y \to X \circledast Y$$

E_∞-代数，其中 $\sqcup_{E_\infty}$ 表示 $\mathrm{Alg}_{E_\infty}(\mathrm{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi})$ 中的余积。

特别地，当 X 和 Y 是自由的 E_∞-代数时，设它们分别为 $X = E_\infty(U)$、$Y = E_\infty(V)$，我们得到一个自然映射

$$E_\infty(U) \sqcup_{E_\infty} E_\infty(V) \cong E_\infty(U \oplus V) \to E_\infty(U) \circledast E_\infty(V).$$

这里我们用到了左伴随 $E_\infty(-)$ 保持余积这一事实。事实上，这个映射是弱等价。以下陈述出现在 [GKRW18a] 中命题 16.5 的证明里。请注意，在那里要求 X 和 Y 是余纤维的，但我们可以省略这一假设，因为每个 $\mathbb{F}_\varphi$ 上的模都是余纤维的。

命题 4.9. 对任意 $X, Y \in \mathrm{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}$，映射

$$E_\infty(X \oplus Y) \to E_\infty(X) \circledast E_\infty(Y)$$

诱导出一个同构

$$H_{*,*}(E_\infty(X \oplus Y)) \cong H_{*,*}(E_\infty(X)) \circledast H_{*,*}(E_\infty(Y))$$

GrVect 中对象的$^{\mathsf{G}}_{\mathbb{F}}$.

5. Homology operations

现在我们说明如何构造作用于 $\mathbb{F}_\varphi$-同调的运算。本质上，同调运算应当是同调函子的自然变换。在前面的章节中，我们将 (g,n) 同调视为一个函子

$$H_{g,n}\colon \mathsf{Mod}_{\mathbb{F}_\varphi} \to \mathsf{Vect}_{\mathbb{F}},$$

但在这里我们需要进行两项修改。首先，我们希望考虑关于 E_∞-代数映射自然的运算。其次，我们不希望要求这些运算是线性的。因此，在本节中，我们考虑以下复合

$$\mathsf{Alg}_{E_\infty}(\mathsf{Mod}_{\mathbb{F}_\varphi}) \to \mathsf{Mod}_{\mathbb{F}_\varphi} \xrightarrow{H_{g,n}} \mathsf{Vect}_{\mathbb{F}} \to \mathsf{Set},$$

其中 Set 是集合范畴，最后一个映射是遗忘函子。该映射经过同伦范畴 $\mathsf{Ho}(\mathsf{Alg}_{E_\infty}(\mathsf{Mod}_{\mathbb{F}_\varphi}))$ 分解，因此我们将考虑以下函子

$$H_{g,n}\colon \mathsf{Ho}(\mathsf{Alg}_{E_\infty}(\mathsf{Mod}_{\mathbb{F}_\varphi})) \to \mathsf{Set}$$

对于每个 $(g,n) \in \mathsf{ob}\mathsf{G} \times \mathbb{Z}$。稍微滥用记号，我们继续将这些函子称为 $H_{g,n}$。当我们考虑取值于 Set 的函子的自然变换时，我们总会明确说明。

注意，逐层取笛卡尔积定义了范畴 $\mathsf{Fun}(\mathsf{Ho}(\mathsf{Alg}_{E_\infty}(\mathsf{Mod}_{\mathbb{F}_\varphi}), \mathsf{Set}))$ 上的一个乘积 $\prod$。

定义 5.1。一个 j 元 $\mathbb{F}_\varphi$ 同调运算是一个自然变换

$$\prod_{i=1}^{j} H_{g_i,n_i} \to H_{h,m}$$

从函子 $\mathsf{Ho}(\mathsf{Alg}_{E_\infty}(\mathsf{Mod}_{\mathbb{F}_\varphi}))$ 到集合的函子，其中 (g_i,n_i)、$(h,m) \in \mathsf{ob}\,\mathsf{G} \times \mathbb{Z}$ and $j \in \mathbb{N}$。

注 5.2。请注意，这一定义及以下讨论并不要求 E_∞ 余运算子具备任何特殊性质。事实上，对于链复形中的任意余运算子 $\mathscr{O}$，我们可以将 $\mathscr{O}$ 代数的 $\mathbb{F}_\varphi$ 同调运算定义为从 $\mathsf{Ho}(\mathsf{Alg}_{\mathscr{O}}(\mathsf{Mod}_{\mathbb{F}_\varphi}))$ 到集合的同调函子的自然变换。关于类似讨论（但针对的是谱而非链复形），参见 [Law20]。然而，对于一般的余运算子，我们不太可能合理地对所有运算进行分类。E_∞ 代数的理论既可计算，又有实用价值。

5.1. 同调运算的多范畴。事实上，$\mathbb{F}_\varphi$ 同调运算共同构成一个集合富化的对称多范畴 $\mathsf{Op}^{\mathbb{F}_\varphi}$。$\mathsf{Op}^{\mathbb{F}_\varphi}$ 的对象是 $\mathsf{ob}\,\mathsf{G}\times\mathbb{Z}$ 中的元素。对于对象 (g_i,n_i)、$(h,m) \in \mathsf{ob}\,\mathsf{G}\times\mathbb{Z}$，从 $(g_1,n_1)\ldots,(g_j,n_j)$ 到 (h,m) 的态射由以下给出

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Op}_{\mathbb{F}_\varphi}}((g_1,n_1),\ldots,(g_j,n_j);(h,m)) = \mathrm{Nat}\left(\prod_{i=1}^{j} H_{g_i,n_i}, H_{h,m}\right),$$

其中，自然变换取自函子范畴，即从 $\mathsf{Ho}(\mathsf{Alg}_{\mathrm{E}_\infty}(\mathsf{Mod}_{\mathbb{F}_\varphi}))$ 到集合的函子范畴。该多范畴中的复合由自然变换的复合给出。对称群 Σ_j 通过输入置换作用于态射

$$\mathrm{Hom}((g_1,n_1),\ldots,(g_j,n_j);(h,m))$$

。具体而言，我们与同调函子的自然变换作复合，该自然变换在集合中逐级施加相应的置换。

现在我们可以利用 Yoneda 引理，得到所有 $\mathbb{F}_\varphi$-同调运算与自由 E_∞-代数的同调之间的关系。

命题 5.3. 同调运算的集合

$$\mathrm{Nat}\left(\prod_{i=1}^{j} H_{g_i,n_i}, H_{h,m}\right)$$

从 $\mathsf{Ho}(\mathsf{Alg}_{E_\infty}(\mathsf{Mod}_{\mathbb{F}_\varphi}))$ 到 Set 的函子之间存在双射对应关系

$$H_{h,m}\left(E_\infty(\oplus_{i=1}^{j}\Sigma^{g_i,n_i}\mathbb{F}_\varphi)\right).$$

这里，记号 $\Sigma^{g_i,\ n_i}\mathbb{F}_\varphi$ 表示 3.2.2 的双分次悬挂。

证明。我们已经描述了自由-遗忘 Quillen 伴随

$$\mathsf{Alg}_{E_\infty}(\mathsf{Mod}_{\mathbb{F}_\varphi}) \rightleftarrows \mathsf{Mod}_{\mathbb{F}_\varphi} \rightleftarrows \mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{G}}.$$

给定 $g \in \mathsf{G}$，函子 $\mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{G}} \to \mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}$ 将函子在 g 上的取值作为结果，它有一个由左 Kan 延拓定义的左伴随，该左伴随将链复形 D 映射为

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}\mathsf{G}}(g,-)\otimes_{\mathbb{F}} D.$$

这也是一个 Quillen伴随（事实上，$\mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{G}}$ 上的模型结构是沿着这些映射在所有 $g \in \mathsf{G}$ 上的乘积传递定义的）。此外，$\mathbb{F}[n] = \Sigma^n\mathbb{F}[0]$ 在左伴随复合 $\mathsf{Ch}_{\mathbb{F}} \to \mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{G}} \to \mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}$ 下的像同构于 $\Sigma^{g,\ n}\mathbb{F}_\varphi$。

同调函子

$$H_{g,n}\colon \mathsf{Ho}(\mathsf{Alg}_{\mathrm{E}_\infty}(\mathsf{Mod}_{\mathbb{F}_\varphi})) \to \mathsf{Set}$$

分解为一个复合

$$\mathsf{Ho}(\mathsf{Alg}_{\mathrm{E}_\infty}(\mathsf{Mod}_{\mathbb{F}_\varphi})) \to \mathsf{Ho}(\mathsf{Mod}_{\mathbb{F}_\varphi}) \to \mathsf{Ho}(\mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{G}}) \to \mathsf{Ho}(\mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}) \to \mathsf{Set},$$

其中最后一个函子由链复形的第 n 个同调诱导。令$X \in \mathsf{Alg}_{E_\infty}(\mathsf{Mod}_{\mathbb{F}_\varphi})$。采用记号 $[-,-]_{\mathsf{D}}$ 表示范畴 D 的同伦范畴中的态射，则有如下同构链（这里略去遗忘函子，属于记号上的滥用）：

$$\begin{aligned}[\mathbb{F}[n], X(g)]_{\mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}} &\cong [\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi, X]_{\mathsf{Mod}_{\mathbb{F}_\varphi}} \\ &\cong [E_\infty(\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi), X]_{\mathsf{Alg}_{E_\infty}(\mathsf{Mod}_{\mathbb{F}_\varphi})}.\end{aligned}$$

由于

$$H_{g,n}(X) \cong H_n(X(g)) \cong [\mathbb{F}[n], X(g)]_{\mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}},$$

我们看到，$H_{g,\ n}$ 是可表示的，其表示对象为 $E_\infty(\Sigma^{g,\ n}\mathbb{F}_\varphi)$。类似地，我们可以将 $\prod_{i=1}^{j} H_{g_i,\ n_i}$ 分解为

$$\mathsf{Ho}(\mathsf{Alg}_{\mathrm{E}_\infty}(\mathsf{Mod}_{\mathbb{F}_\varphi})) \to \mathsf{Ho}(\mathsf{Mod}_{\mathbb{F}_\varphi}) \to \mathsf{Ho}(\mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{G}}) \to \prod_{i=1}^{j}\mathsf{Ho}(\mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}) \to \mathsf{Set}.$$

这里我们有

$$\prod_{i=1}^{j} H_{g_i,n_j}(X) \cong \prod_{i=1}^{n} H_{n_i}(X(g_i)) \cong \prod_{i=1}^{j} [\mathbb{F}[n_i], X(g_i)]_{\mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}},$$

因此，使用与之前相同的论证，我们看到 $\prod_{i=1}^{j} H_{g_i,\ n_i}$ 可表示，其表示对象为 $E_\infty(\oplus_{i=1}^{j}\Sigma^{g_i,\ n_i}\mathbb{F}_\varphi)$。结论随即由 Yoneda 引理得出。

□

注 5.4. $\mathcal{C}_\infty \to \mathcal{D}_\infty$ 上的弱等价 E_∞-余运算子诱导一个（半）Quillen 等价

$$\mathsf{Alg}_{\mathcal{D}_\infty}(\mathsf{Mod}_{\mathbb{F}_\varphi}) \to \mathsf{Alg}_{\mathcal{C}_\infty}(\mathsf{Mod}_{\mathbb{F}_\varphi}),$$

这又诱导一个多函子 $\mathsf{Op}^{\mathcal{C}_\infty}_{\mathbb{F}_\varphi} \to \mathsf{Op}^{\mathcal{D}_\infty}_{\mathbb{F}_\varphi}$. 。根据命题 5.3 和引理 4.4，这是多范畴的等价。这就是同调运算理论不依赖于所选 E_∞-余运算子的含义。

尽管这是标准结果，但鉴于这种双射对应关系在本文中无处不在，值得明确说明一个同调类如何确定一个同调运算。设 $X \in \mathsf{Alg}_{E_\infty}(\mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi})$。类 $x_i \in H_{g_i,\ n_i}(X)$ 可由 $\mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}$ 中的映射 $\Sigma^{g_i,\ n_i}\mathbb{F}_\varphi \to X$ 表示，它们共同确定一个映射

$$\bigoplus \Sigma^{g_i,n_i}\mathbb{F}_\varphi \to X.$$

应用函子 $E_\infty(-)$，这样的映射便给出一个映射

$$E_\infty(\oplus\Sigma^{g_i,n_i}\mathbb{F}_\varphi) \to E_\infty(X) \to X.$$

因此，类 $\gamma \in H_{b,\ m}(E_\infty(\oplus\Sigma^{g_i,\ n_i}\mathbb{F}_\varphi))$ 在此映射下的像确定了 $H_{b,\ m}(X)$ 中的一个类；将同调运算 γ 应用于元组 $(x_i) \in \prod H_{g_i,\ n_i}(X)$，所得结果就是此类。

5.2. 运算的荷与权。利用自由 E_∞-代数的显式构造，我们可以建立一套术语，更明确地描述一个运算是如何产生的。首先，我们在所有自由 E_∞-代数上定义一种分次，在描述自由 E_∞-代数的同调时将广泛使用它。这套术语受到 [KM18], 的启发，不过定义略有不同。

定义 5.5. 同构

$$E_\infty(X) \cong \bigoplus_{k\geq 0} \mathrm{Sym}^k(X)$$

赋予 $E_\infty(X)$ 一个 $\mathbb{N}$ 分次，我们称之为电荷分次。

因此，命题 5.3 也为同调运算赋予了电荷分次。

定义 5.6. 由一个类所确定的同调运算

$$H_{h,m}(\mathrm{Sym}^k(\oplus_{i=1}^{j}\Sigma^{g_i,n_i}\mathbb{F}_\varphi))$$

具有荷 k。

对运算的荷这一概念作进一步细化是很方便的（对于有限 n 的 E_n-代数上的运算来说，或许更是如此）。注意，还可以进一步分解

$$\begin{aligned}\mathrm{Sym}^k(\oplus_{i=1}^j \Sigma^{g_i,n_i}\mathbb{F}_\varphi) &= \mathcal{C}_\infty(k)\otimes_{\Sigma_k}\left(\oplus_{i=1}^j \Sigma^{g_i,n_i}\mathbb{F}_\varphi\right)^{\circledast k}\\ &\cong \bigoplus_{\substack{(r_1,\dots,r_j)\\ \sum r_i=k}} \mathcal{C}_\infty(k)\otimes_{\Sigma_{r_1}\times\cdots\times\Sigma_{r_j}} \overset{j}{\underset{i=1}{\circledast}}(\Sigma^{g_i,n_i}\mathbb{F}_\varphi)^{\circledast r_i}.\end{aligned}$$

定义 5.7. 对任意自然数元组 $(r_1,\dots,r_j)$，一个权为 $(r_1,\dots,r_j)$ 的同调运算由以下中的一个类决定

$$H_{h,m}\left(\mathcal{C}_\infty(k)\otimes_{\Sigma_{r_1}\times\cdots\times\Sigma_{r_j}} \overset{j}{\underset{i=1}{\circledast}}(\Sigma^{g_i,n_i}\mathbb{F}_\varphi)^{\circledast r_i}\right),$$

其中 $k=\sum r_i$。

直观地说，权告诉我们在该运算中每个输入取几次“幂”。注意，对于一元运算，权和荷的概念相同；一般来说，荷可以通过对权的指标求和得出r_i。下面的引理说明权（因此荷也如此）在运算复合下如何变化。

引理 5.8. 设 $\gamma\in\mathrm{Nat}(\prod_{i=1}^j H_{g_i,n_i},H_{h,m})$ 的权为 $(r_1,..,r_j)$，并设

$$\eta_i\in\mathrm{Nat}(\prod_{\ell=1}^{k_i} H_{c_\ell^{(i)},q_\ell^{(i)}},H_{g_i,n_i})$$

其权为 $(s_1^{(i)},...,s_{k_i}^{(i)})$。那么复合

$$\gamma\circ(\eta_1,\dots,\eta_j)\in\mathrm{Nat}(\prod_{i,\ell} H_{c_\ell^{(i)},q_\ell^{(i)}},H_{h,m})$$

具有权（$r_1s_1^{(1)},\dots,r_1s_{k_1}^{(1)},\dots,r_js_1^{(j)},\dots,r_js_{k_j}^{(j)}$）。

证明。由于 γ具有权（$r_1,\dots,r_j$），它是

$$H_{h,m}(\mathcal{C}_\infty(\sum r_i)\otimes_{\Sigma_{r_1}\times\cdots\times\Sigma_{r_j}} \overset{j}{\underset{i=1}{\circledast}}(\Sigma^{g_i,n_i}\mathbb{F}_\varphi)^{\circledast r_i}).$$

我们可以将每个 η_i 表示为映射的同伦类

$$\Sigma^{g_i,n_i}\mathbb{F}_\varphi\to\mathcal{C}_\infty(s^{(i)})\otimes_{\Sigma_{s_1^{(i)}}\times\cdots\times\Sigma_{s_{k_i}^{(i)}}} \underset{\ell}{\circledast}(\Sigma^{c_\ell^{(i)},q_\ell^{(i)}}\mathbb{F}_\varphi)^{\circledast s_\ell^{(i)}},$$

其中，$s^{(i)}=\sum s_\ell^{(i)}$. 沿着米田对应进行追踪，我们看到这些运算的复合是通过取 γ 在映射下的像得到的

$$E_\infty(\oplus_i\Sigma^{g_i,n_i}\mathbb{F}_\varphi)\to E_\infty(E_\infty(\oplus_{i,\ell}\Sigma^{c_\ell^{(i)},q_\ell^{(i)}}\mathbb{F}_\varphi))\to E_\infty(\oplus_{i,\ell}\Sigma^{c_\ell^{(i)},q_\ell^{(i)}}\mathbb{F}_\varphi).$$

根据我们对 γ 和 η_i的权所作的假设，限制到相应的直和项后，我们可以将第一个映射替换为

$$\mathcal{C}_\infty(\sum r_i) \otimes_{\Sigma_{r_1}\times\cdots\times\Sigma_{r_j}} \circledast_{i=1}^{j} (\Sigma^{g_i,n_i}\mathbb{F}_\varphi)^{\circledast r_i}$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{C}_\infty(\sum r_i) \otimes_{\Sigma_{r_1}\times\cdots\times\Sigma_{r_j}} \circledast_i \left(\mathcal{C}_\infty(s^{(i)}) \otimes_{\Sigma_{s_1^{(i)}}\times\cdots\times\Sigma_{s_{k_i}^{(i)}}} \circledast_\ell (\Sigma^{c_\ell^{(i)},q_\ell^{(i)}}\mathbb{F}_\varphi)^{\circledast s_\ell^{(i)}}\right)^{\circledast r_i}.$$

然而，在 E_∞ 复合下，第二个映射现在的目标是

$$\mathcal{C}_\infty(\sum_{i,\ell} r_i s_\ell^{(i)}) \otimes_{\Sigma_{s_1^{(1)}}\times\cdots\times\Sigma_{s_{k_j}^{(j)}}} \circledast_{i,\ell} (\Sigma^{c_\ell^{(i)},q_\ell^{(i)}}\mathbb{F}_\varphi)^{\circledast s_\ell^{(i)} r_i}.$$

因此，复合 $\gamma\circ(\eta_1,\dots,\eta_j)$ 落在权 $(r_1 s_\ell^{(1)},\dots,r_j s_{k_j}^{(j)})$ 的和模上。□

特别地，荷在一元运算的复合下具有乘法性。此外，如果某个输入的权为 1，那么该运算关于该输入是线性的。

引理 5.9. 设 $\gamma\in\mathsf{Nat}(\prod_{i=1}^{j} H_{g_i,\ n_i}, H_{h,\ m})$ 是一个权为 $(r_1,\dots,r_j)$ 的运算。若 $r_i = 1$ 对某个 i 成立，则运算 γ 关于第 i 个输入是线性的。也就是说，若$X\in\mathsf{Alg}_{E_\infty}(\mathsf{Mod}_{\mathbb{F}_\varphi})$，$x_k\in H_{g_k,\ n_k}(X)$ 对于 $1\le k\le j$, $x_i'\in H_{g_i,\ n_i}(X)$ 成立，且 $\alpha\in\mathbb{F}$，则

$$\gamma(x_1,\dots,\alpha x_i + x_i',\dots,x_k) = \alpha\gamma(x_1,\dots,x_i,\dots,x_k) + \gamma(x_1,\dots,x_i',\dots,x_k).$$

证明。设 $x_k\colon\ \Sigma^{g_k,\ n_k}\mathbb{F}_\varphi \to X$ 是表示类 $x_k\in H_{g_k,\ n_k}(X)$ 的映射。回想一下，我们可以通过取其在复合下的像，在 $(x_1,\dots,x_j)$ 上计算 γ

$$E_\infty(\oplus\Sigma^{g_k,n_k}\mathbb{F}_\varphi) \xrightarrow{E_\infty(\sum x_k)} E_\infty(X)\to X.$$

由于 γ 的权为 $(r_1,\dots,r_j)$，它是

$$H_{h,m}(\mathcal{C}_\infty(r)\otimes_{\Sigma_{r_1}\times\cdots\times\Sigma_{r_j}} \circledast_k (\Sigma^{g_k,n_k}\mathbb{F}_\varphi)^{\circledast r_k}),$$

其中 $r=\sum r_k$。将上述复合限制到这个直和项上，我们得到复合

$$\mathcal{C}_\infty(r)\otimes_{\Sigma_{r_1}\times\cdots\times\Sigma_{r_j}} \circledast_k (\Sigma^{g_k,n_k}\mathbb{F}_\varphi)^{\circledast r_k} \xrightarrow{id\otimes(\circledast x_k^{\circledast r_k})} \mathcal{C}_\infty(r)\otimes_{\Sigma_{r_1}\times\cdots\times\Sigma_{r_k}} \circledast X^{\circledast r_k}\to X.$$

Day 卷积映射是线性的；也就是说，

$$y\circledast(\alpha x_i + x_i')\circledast y' = \alpha y\circledast x_i\circledast y' + y\circledast x_i'\circledast y'$$

对于任意映射 y、y'。因此，若 $r_i=1$，则 γ 在由 $(x_1,\dots,\alpha x_i+x_i',\dots,x_j)$ 确定的映射下的像，与其在由

$$\alpha(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j) + (x_1,\dots,x_i',\dots,x_j).$$

□

命题 5.3 告诉我们，要对所有 $\mathbb{F}_\varphi$-同调运算进行分类，只需了解自由 E_∞-代数的同调及其权重分次。在定理 7.13 中，我们将证明，自由 E_∞-代数的同调完全可以用某些一元荷为 p 的运算来表示，这些运算称为

Dyer–Lashof 运算，以及一个二元权重为 (1,1) 的乘积。因此，这些运算生成了所有 $\mathbb{F}_\varphi$-同调运算。

5.3. 乘积。我们简要说明一下乘积，它是 $\mathrm{Hom}^{\mathsf{Op}_{\mathbb{F}_\varphi}}((g_1,n_1),(g_2,n_2);(g_1\oplus g_2,n_1+n_2))$ 中一族二元、权为 (1, 1) 的运算。根据引理 5.9，这类运算对两个输入都是线性的，因此可以视为运算

$$H_{g_1,n_1}\otimes H_{g_2,n_2}\to H_{g_1\oplus g_2,n_1+n_2}$$

这些运算是从 $\mathrm{Ho}(\mathrm{Alg}_{E_\infty}(\mathrm{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}))$ 到 $\mathrm{Vect}_{\mathbb{F}}$ 的函子的自然变换。此外，这类运算与以下空间中的类一一对应

$$H_{g_1\oplus g_2,n_1+n_2}(\mathcal{C}_\infty(2)\otimes_{\Sigma_1\times\Sigma_1}\Sigma^{g_1,n_1}\mathbb{F}_\varphi\circledast\Sigma^{g_2,n_2}\mathbb{F}_\varphi).$$

由于 $\Sigma^{g_1,\ n_1}\mathbb{F}_\varphi\circledast\Sigma^{g_2,\ n_2}\mathbb{F}_\varphi\cong\Sigma^{g_1\oplus g_2,\ n_1+n_2}\mathbb{F}_\varphi$，我们有

$$\begin{aligned}H_{g,n}(\mathcal{C}_\infty(2)\otimes\Sigma^{g_1,n_1}\mathbb{F}_\varphi\circledast\Sigma^{g_2,n_2}\mathbb{F}_\varphi)&\cong H_{g,n}(\mathcal{C}_\infty(2)\otimes\Sigma^{g_1\oplus g_2,n_1+n_2}\mathbb{F}_\varphi)\\&\cong H_{n_1+n_2}(\mathcal{C}_\infty(2)\otimes\mathbb{F}[n_1+n_2])\\&\cong H_0(\mathcal{C}_\infty(2))\\&\cong\mathbb{F},\end{aligned}$$

其中 $g=g_1\oplus g_2$ 和 $n=n_1+n_2$。因此，定义一个乘积相当于选择这个一维向量空间的一个生成元。$H_0(\mathcal{C}_\infty(2))$ 中有一个典范的生成元，即由小圆盘余运算子的二元空间中任意一点所确定的同调类。我们用这个特选的类来定义乘积。

命题5.10。乘积是结合的且交换的。也就是说，对于同调类$x_i\in H_{g_i,\ n_i}(X)$，典范映射

$$H_{(g_1\oplus g_2)\oplus g_3,n_1+n_2+n_3}(X)\to H_{g_1\oplus(g_2\oplus g_3),n_1+n_2+n_3}(X)$$

由结合子$(g_1\oplus g_2)\oplus g_3\to g_1\oplus(g_2\oplus g_3)$诱导，发送

$$(x_1x_2)x_3\mapsto x_1(x_2x_3),$$

以及映射

$$H_{g_1\oplus g_2,n_1+n_2}(X)\to H_{g_2\oplus g_1,n_1+n_2}(X)$$

由编织 $g_1\oplus g_2\to g_2\oplus g_1$ 诱导，发送

$$x_1x_2\mapsto(-1)^{n_1n_2}x_2x_1.$$

注5.11。一般来说，询问$(x_1x_2)x_3$ 是否等于$x_1(x_2x_3)$，或询问 x_1x_2 是否等于 x_2x_1 的某个倍数，是没有意义的，因为这些类属于不同的同调群。

然而，如果 $g_1=g_2=g$，我们可以使用第2节中给出的编织描述来得到

$$x_1x_2=(-1)^{n_1n_2}\varphi(\mathrm{tr}_{g\oplus g}(\beta_{g,g}^{-1}))x_2x_1\in H_{g\oplus g,n_1+n_2}(X),$$

其中 $\beta_{g,\ g}$ 是编织 $g\oplus g\to g\oplus g$。特别地，若 $x_1=x_2=x$，这表明 $x^2=0$ 当 $(-1)^{n_1}\varphi(\mathrm{tr}_{g\oplus g}(\beta_{g\ g}^{-1}))=-1$。

证明。注意，$x_1(x_2x_3)$ 可以描述为将恒等运算作用于 x_1 后，再与将乘积运算作用于 $x_2\otimes x_3$所得的结果相乘。$H_{g_1,\ n_1}$ 上的恒等运算由一个映射表示

$$\Sigma^{g_1,n_1}\mathbb{F}_\varphi\to\mathcal{C}_\infty(1)\otimes\Sigma^{g_1,n_1}\mathbb{F}_\varphi,$$

$H_{g_2,\ n_2} \otimes H_{g_3,\ n_3}$ 上的乘积由一个映射表示

$$\Sigma^{g_2 \oplus g_3, n_2+n_3}\mathbb{F}_\varphi \to \mathcal{C}_\infty(2) \otimes \Sigma^{g_2,n_2}\mathbb{F}_\varphi \circledast \Sigma^{g_3,n_3}\mathbb{F}_\varphi.$$

因此，$H_{g_1,\ n_1} \otimes H_{g_2 \oplus g_3,\ n_2+n_3}$ 上的乘积由以下内容中乘积类的像给出：

$$H_{g_{1(23)},n}(\mathcal{C}_\infty(2) \otimes \Sigma^{g_1,n_1}\mathbb{F}_\varphi \circledast \Sigma^{g_2\oplus g_3, n_2+n_3}\mathbb{F}_\varphi),$$

其中 $g_{1(23)} = g_1 \oplus (g_2 \oplus g_3)$ 和 $n = n_1 + n_2 + n_3$，在复合下

$$\begin{array}{c} \mathcal{C}_\infty(2) \otimes \Sigma^{g_1,n_1}\mathbb{F}_\varphi \circledast \Sigma^{g_2\oplus g_3, n_2+n_3}\mathbb{F}_\varphi \\ \downarrow \\ \mathcal{C}_\infty(2) \otimes (\mathcal{C}_\infty(1) \otimes \Sigma^{g_1,n_1}\mathbb{F}_\varphi) \circledast (\mathcal{C}_\infty(2) \otimes \Sigma^{g_2,n_2}\mathbb{F}_\varphi \circledast \Sigma^{g_3,n_3}\mathbb{F}_\varphi) \\ \downarrow \\ \mathcal{C}_\infty(3) \otimes \Sigma^{g_1,n_1}\mathbb{F}_\varphi \circledast (\Sigma^{g_2,n_2}\mathbb{F}_\varphi \circledast \Sigma^{g_3,n_3}\mathbb{F}_\varphi). \end{array}$$

具体而言，若 $c \in \mathcal{C}_\infty(2)$ 是由小圆盘余运算子的 2 元数部分中的一个点确定的任意链，并且记 ι_i 为 $1 \in \Sigma^{g_i,\ n_i}\mathbb{F}_\varphi(g_i)_{n_i}$，则 $H_{g_1,\ n_1} \otimes (H_{g_2,\ n_2} \otimes H_{g_3,\ n_3})$ 上的乘积运算由以下链表示：

$$\theta(c; e, c) \otimes \iota_1 \otimes (\iota_2 \otimes \iota_3).$$

这里，e 是小圆盘余运算子的 1 元数空间中任意一点的类，而θ 表示余运算子的复合。

类似地，$(H_{g_1,\ n_1} \otimes H_{g_2,\ n_2}) \otimes H_{g_3,\ n_3}$ 上的乘积由以下链表示：

$$\theta(c; c, e) \otimes (\iota_1 \otimes \iota_2) \otimes \iota_3$$

in

$$\mathcal{C}_\infty(3) \otimes (\Sigma^{g_1,n_1}\mathbb{F}_\varphi \circledast \Sigma^{g_2,n_2}\mathbb{F}_\varphi) \circledast \Sigma^{g_3,n_3}\mathbb{F}_\varphi.$$

由于 c 和 e 都来自某个空间中的点，因此类 $\theta(c;\ e, c)$ 和 $\theta(c;\ c, e)$ 都来自余运算子的元数 3 空间中的点，故由于该空间是连通的，它们同调等价。

比较这两种加括号方式的典范映射由以下复合得到

$$\begin{array}{c} H_{g_{(12)3},n}(\mathcal{C}_\infty(3) \otimes (\Sigma^{g_1,n_1}\mathbb{F}_\varphi \circledast \Sigma^{g_2,n_2}\mathbb{F}_\varphi) \circledast \Sigma^{g_3,n_3}\mathbb{F}_\varphi) \\ \downarrow \\ H_{g_{(12)3},n}(\mathcal{C}_\infty(3) \otimes \Sigma^{g_1,n_1}\mathbb{F}_\varphi \circledast (\Sigma^{g_2,n_2}\mathbb{F}_\varphi \circledast \Sigma^{g_3,n_3}\mathbb{F}_\varphi)) \\ \downarrow \\ H_{g_{1(23)},n}(\mathcal{C}_\infty(3) \otimes \Sigma^{g_1,n_1}\mathbb{F}_\varphi \circledast (\Sigma^{g_2,n_2}\mathbb{F}_\varphi \circledast \Sigma^{g_3,n_3}\mathbb{F}_\varphi)), \end{array}$$

其中，第一个映射来自在 $\mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}$ 中应用结合子，第二个映射则由 G 中的结合子 $\alpha_{g_1,\ g_2,\ g_3}$ 诱导。回想第 2 节中的描述，$\mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}$ 中的结合子是通过一种复合定义的，其最终映射由 $\alpha^{-1}_{g_1,\ g_2,\ g_3}$ 诱导，因此这些结合子彼此抵消。由于 $\mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}$ 中的结合子是平凡的，我们看到这一复合将

$$\theta(c; c, e) \otimes ((\iota_1 \otimes \iota_2) \otimes \iota_3) \mapsto \theta(c; c, e) \otimes (\iota_1 \otimes (\iota_2 \otimes \iota_3))$$

映射到链层次。转到同调，并利用 $\theta(c;\ e,c)$ 与 $\theta(c;\ c,e)$ 同调等价这一事实，即可证明结论。

将 $H_{g_1,n_1}\otimes H_{g_2,n_2}$ 上的乘积与 $H_{g_2,n_2}\otimes H_{g_1,n_1}$ 上的乘积进行比较，相当于考察类 $c\otimes\iota_1\otimes\iota_2$ 在以下复合映射下的像

$$\begin{array}{c} H_{g_1\oplus g_2,n_1+n_2}(\mathcal{C}_\infty(2)\otimes\Sigma^{g_1,n_1}\mathbb{F}_\varphi\circledast\Sigma^{g_2,n_2}\mathbb{F}_\varphi)\\ \downarrow\\ H_{g_1\oplus g_2,n_1+n_2}(\mathcal{C}_\infty(2)\otimes\Sigma^{g_2,n_2}\mathbb{F}_\varphi\circledast\Sigma^{g_1,n_1}\mathbb{F}_\varphi)\\ \downarrow\\ H_{g_2\oplus g_1,n_1+n_2}(\mathcal{C}_\infty(2)\otimes\Sigma^{g_2,n_2}\mathbb{F}_\varphi\circledast\Sigma^{g_1,n_1}\mathbb{F}_\varphi), \end{array}$$

其中，第一个映射是通过应用编织得到的

$$\Sigma^{g_1,n_1}\mathbb{F}_\varphi\circledast\Sigma^{g_2,n_2}\mathbb{F}_\varphi\to\Sigma^{g_2,n_2}\mathbb{F}_\varphi\circledast\Sigma^{g_1,n_1}\mathbb{F}_\varphi$$

在 $\mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}$ 中，而第二个映射由 G 中的编织 β_{g_1,g_2} 诱导。根据第 2 节的讨论，我们知道前一个编织态射乘以 $(-1)^{n_1n_2}$，并作用于 $\beta^{-1}_{g_1,g_2}$。因此，在取同调之前，该复合将

$$c\otimes\iota_1\otimes\iota_2\mapsto(-1)^{n_1n_2}c\otimes\iota_2\otimes\iota_1.$$

取同调后，我们看到 $H_{g_1,n_1}\otimes H_{g_2,n_2}$ 上的乘积被映到 $H_{g_2,n_2}\otimes H_{g_1,n_1}$ 上的乘积的 $(-1)^{n_1n_2}$ 倍。□

回想 4.8，任何 $X\in\mathsf{Alg}_{E_\infty}(\mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi})$ 都附带一个 E_∞-代数的单位映射 $\mathbb{F}_\varphi\to X$。于是，典范生成元 $1\in H_{\mathbb{I}^{\mathsf{G}},0}(\mathbb{F}_\varphi)$ 确定了一个类 $\mathbb{I}\in H_{\mathbb{I}^{\mathsf{G}},0}(X)$，我们断言它是乘积的单位元。

命题 5.12. 若 $X\in\mathsf{Alg}_{E_\infty}(\mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi})$，则 $\mathbb{I}\in H_{\mathbb{I}^{\mathsf{G}},0}(X)$ 是 $H_{*,*}(X)$ 上乘积的单位元。

证明。设 $x\colon\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi\to X$ 表示 $H_{g,n}(X)$ 中的一个类。我们可以用作用于该类的恒等运算替换任意类，这相当于改为考虑如下复合

$$\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi\to\mathcal{C}_\infty(1)\otimes\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi\to\mathrm{Sym}^1(X)\to X.$$

类 $\mathbb{I}$ 可以由一个映射表示

$$\Sigma_{\mathbb{I}^{\mathsf{G}},0}\mathbb{F}_\varphi\to\mathcal{C}_\infty(0)\otimes\Sigma_{\mathbb{I}^{\mathsf{G}},0}\mathbb{F}_\varphi\to\mathrm{Sym}^0(X)\to X.$$

因此，x 与 $\mathbb{I}$ 的乘积由乘积运算与恒等运算和单位元复合得到，即由如下复合给出

$$\begin{array}{c} \mathcal{C}_\infty(2)\otimes\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi\circledast\Sigma_{\mathbb{I}^{\mathsf{G}},0}\mathbb{F}_\varphi\\ \downarrow\\ \mathcal{C}_\infty(2)\otimes(\mathcal{C}_\infty(1)\otimes\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi)\otimes(\mathcal{C}_\infty(0)\otimes\Sigma_{\mathbb{I}^{\mathsf{G}},0}\mathbb{F}_\varphi)\\ \downarrow\\ \mathcal{C}_\infty(1)\otimes\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi. \end{array}$$

我们得到的运算由余运算子的拟 operad 复合给出

$$\mathcal{C}_\infty(2)\otimes\mathcal{C}_\infty(1)\otimes\mathcal{C}_\infty(0)\to\mathcal{C}_\infty(1).$$

由于 $\mathcal{C}_\infty(2)$ 中的乘积类、 $\mathcal{C}_\infty(1)$ 中的恒等类以及 $\mathcal{C}_\infty(0)$ 中的单位类都来自某个空间中的点类，它们的复合也来自 $\mathcal{C}_\infty(1)$ 中的一个点类。任何这样的点都与 $\mathcal{C}_\infty(1)$ 的“那个”恒等元同调等价；也就是说，它是由单个圆盘到其自身的恒等嵌入所确定的链，因此任何点都确定同调上的恒等映射。

同样，按相反顺序相乘也会得到单位元。 □

6. Dyer–Lashof operations

我们构造了一些运算，它们是经典 Dyer–Lashof 运算的推广。在下一节中，我们将证明，这些运算与乘积一起生成所有 $\mathbb{F}_\varphi$-同调运算。

p 上的特征 p Dyer–Lashof 运算源自带有 $\mathbb{F}$ 扭曲系数的 p 次对称群的同调 $H_*(\Sigma_p;\mathbb{F})$ 中的某些类。这里， Σ_p 通过映射作用于 $\mathbb{F}$ ，其作用为乘以一个单位元

$$\Sigma_p \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{F}^\times,$$

其中， $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 中的非恒等元映射到 $(-1)^n\varphi(\mathrm{tr}_{g\oplus g}(\beta_{g\ g,}^{-1}))$。对于常系数同调，假定 $\varphi(\mathrm{tr}_{g\oplus g}(\beta_{g\ g,}^{-1}))$ 的值为 1；但在我们的情形中，也可能有 $\varphi(\mathrm{tr}_{g\oplus g}(\beta_{g\ g,}^{-1})) = -1$。因此，若 $p = 2$，运算的经典定义与我们构造的扭曲运算并无区别。所以，在本文余下部分中，我们假设$p > 2$。

令 C_p 表示一个阶为 p 、生成元为 α 的循环群，并令 W 表示由自由 $\mathbb{F}[C_p]$-模对 $\mathbb{F}$ 作的分解，其中每个次数中都有一个生成元 e_i，并且满足

$$d(e_{2i}) = (1+\alpha+\cdots+\alpha^{p-1})e_{2i-1} \text{ and } d(e_{2i-1}) = (\alpha-1)e_{2i-2} \text{ for } i>0.$$

由于 $\mathcal{C}_\infty(p)$ 在赋予通常的到 $\mathbb{F}$ 的增广映射后，是一个无圈的 $\mathbb{F}[\Sigma_p]$-复形（因而也是一个无圈的 $\mathbb{F}[C_p]$-复形），我们得到一个 $\mathbb{F}[C_p]$-复形的映射 $W \to \mathcal{C}_\infty(p)$，且该映射在同伦意义下唯一。特别地，给定任意 $X \in \mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}$，我们得到一个唯一映射

$$H_{*,*}(W \otimes_{C_p} X^{\circledast p}) \to H_{*,*}(\mathrm{Sym}^p(X)).$$

我们还在 W 上定义一个余积 ψ （参见 May 的定义 1.2 [70]）：

$$\psi(e_{2i+1}) = \sum_{j+k=i} e_{2j}\otimes e_{2k+1} + e_{2j+1}\otimes \alpha e_{2k} \tag{6.1}$$

and

$$\psi(e_{2i}) = \sum_{j+k=i} e_{2j}\otimes e_{2k} + \sum_{j+k=i-1}\ \sum_{0\le r<s<p} \alpha^r e_{2j+1}\otimes \alpha^s e_{2k+1}.$$

这个余积是一个链映射，并且实现了典范同构

$$\mathbb{F} \to \mathbb{F}\otimes_{\mathbb{F}}\mathbb{F}.$$

由于 $\mathcal{C}_\infty$ 源自一个空间拟 operad，因此我们有一个链级余乘法$\mathcal{C}_\infty(p) \to \mathcal{C}_\infty(p) \otimes \mathcal{C}_\infty(p)$，我们断言该图表

$$\begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & \mathcal{C}_\infty(p) \\ \downarrow{\scriptstyle \psi} & & \downarrow \\ W \otimes W & \longrightarrow & \mathcal{C}_\infty(p) \otimes \mathcal{C}_\infty(p) \end{array}$$

（至少在同伦意义下）可交换。注意，该图表在 0 次时可交换，因为由元数为 p 的空间中的一点确定的零链 c 的余积就是 $c \otimes c$，且 $\psi(e_0) = e_0 \otimes e_0$。由于 $\mathcal{C}_\infty(p) \otimes \mathcal{C}_\infty(p)$ 无圈，且 $W \otimes W$ 是一个自由的 $\mathbb{F}[C_p]$-复形，提升该映射的映射 $W \otimes W \to \mathcal{C}_\infty(p) \otimes \mathcal{C}_\infty(p)$ 在同伦意义下唯一。

引理 6.2。设 $X = \Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi$ 对于 $g \in G$ 和 $n \in \mathbb{Z}$。那么

$$H_{h,m}(W \otimes_{C_p} X^{\circledast p}) \cong \begin{cases} \mathbb{F} & \text{if } h \cong g^p \text{ and } m \geq pn \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

e_i 在映射下的像

$$H_{g^p,i+pn}(W \otimes_{C_p} X^{\circledast p}) \to H_{g^p,i+pn}(\mathrm{Sym}^p(X))$$

为零，除非

$$\begin{cases} i = 2j(p-1) \text{ or } 2j(p-1)-1 & \text{if } (-1)^n\varphi(\mathrm{tr}_{g\oplus g}(\beta_{g,g}^{-1})) = 1 \\ i = (2j+1)(p-1) \text{ or } (2j+1)(p-1)-1 & \text{if } (-1)^n\varphi(\mathrm{tr}_{g\oplus g}(\beta_{g,g}^{-1})) = -1. \end{cases}$$

证明。首先注意到

$$(\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi)^{\circledast p} \cong \Sigma^{g^p,pn}\mathbb{F}_\varphi,$$

因此，$W \otimes_{C_p} X^{\circledast p}$ 和 $\mathrm{Sym}^p(X)$ 的 (h,m) 同调群均为零，除非 $h \cong g^p$。此外，任意态射 $h \to g^p$ 都会诱导一个同构$H_{h,\ m} \to H_{g^p,\ m}$，因此只需考虑 $h = g^p$。

$(\Sigma^{g,\ n}\mathbb{F}_\varphi)^{\circledast p}$ 上的对称群作用来自置换因子$\Sigma^{g,\ n}\mathbb{F}_\varphi$。回想一下，对称性

$$\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi \circledast \Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi \to \Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi \circledast \Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi$$

由乘以单位元 $q = (-1)^n\varphi(\mathrm{tr}_{g\oplus g}(\beta_{g,\ g}^{-1}))$ 给出。因此，

$$H_{g^p,m}(W \otimes_{C_p} X^{\circledast p}) \cong H_m(W_{*-pn} \otimes_{C_p} \mathbb{F}(q))$$

and

$$H_{g^p,m}(\mathrm{Sym}^p(X)) \cong H_m(\mathcal{C}_\infty(p)_{*-pn} \otimes_{\Sigma_p} \mathbb{F}(q)),$$

其中，$\mathbb{F}(q)$ 表示 Σ_p-表示 $\mathbb{F}$，其生成元 σ_j 置换 j 和 $j+1$ 时，作用为乘以 q。但是，由于 W 是 $\mathbb{F}(q)$ 的一个自由 C_p-分解，而 $\mathcal{C}_\infty(p)$ 是 $\mathbb{F}(q)$ 的一个自由 Σ_p-分解，因此我们有

$$H_{g^p,m}(W \otimes_{C_p} X^{\circledast p}) \cong H_{m-pn}(C_p; \mathbb{F}(q))$$

and

$$H_{g^p,m}(\mathrm{Sym}^p(X)) \cong H_{m-pn}(\Sigma_p; \mathbb{F}(q)).$$

C_p 的一个生成元可以写成 $p-1$ 个对换的乘积，因此它在 $\mathbb{F}$ 上的作用是平凡的，因为 $q^{p-1} = 1$。于是，$W \otimes_{C_p} \mathbb{F}(q)$ 的同调同构于 $H_*(C_p; \mathbb{F})$，后者在每个次数上都是一维的。该同调由 $e_i \otimes 1 \in W \otimes \mathbb{F}$ 生成。

该陈述的其余部分可直接由 [May70] 中的引理 1.4 得出。 □

6.1. 下标记。回忆命题 5.3，中的一个类

$$H_{g^p,i+pn}(\mathrm{Sym}^p(\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi))$$

确定了一个从.....出发的同调运算

$$H_{g,n} \to H_{g^n,i+pn}.$$

我们将使用这些来自 C_p 的同调的类来定义特定的运算。

定义 6.3。令 $Q_{i(p-1)}$ 表示由类 $e_{i(p-1)} \in H_{i(p-1)}(C_p;\mathbb{F})$ 确定的同调运算。也就是说，对于任意的 (g,n),

$$Q_{i(p-1)}\colon H_{g,n} \to H_{g^p,i(p-1)+pn}$$

是由.....的像所确定的运算

$$e_{i(p-1)} \in H_{i(p-1)}(C_p;\mathbb{F}) \cong H_{g^p,i(p-1)+pn}(W \otimes_{C_p} (\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi)^{\circledast p})$$

在 $H_{g^p,i(p-1)+pn}(\mathrm{Sym}^p(\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi))$。类似地，我们用 $\beta Q_{i(p-1)}$ 表示由 $e_{i(p-1)-1} \in H_{i(p-1)-1}(C_p;\mathbb{F})$确定的同调运算。

这些运算是采用下标记法书写的 Dyer–Lashof 运算。根据引理 6.2，这些运算涵盖了所有由 $H_*(C_p;\mathbb{F})$产生的非平凡运算（尽管我们定义的某些运算是平凡的）。

注 6.4。请注意，$\beta Q_{i(p-1)}$ 并未定义为对 $Q_{i(p-1)}$应用 Bockstein 同态。由于我们的链复形不一定来自整数链复形，我们可能没有 Bockstein 同态。

Dyer–Lashof 运算满足所有经典关系的相应形式，列举如下（可与 [CLM76] 的定理 1.1 比较）。证明在很大程度上沿用了 [May70], 的方法，不过我们谨慎地将所有内容改述为 $\mathrm{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}$ 的语言，并有时给出经过修改的论证。

定理 6.5。$\mathrm{Alg}_{E_\infty}(\mathrm{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi})$ 上的 Dyer–Lashof 运算由以下自然变换组成

$$\begin{aligned} Q_{i(p-1)}&\colon H_{g,n} \to H_{g^p,i(p-1)+pn} && \text{对于 } i \geq 0 \\ \beta Q_{i(p-1)}&\colon H_{g,n} \to H_{g^p,i(p-1)+pn-1} && \text{对于 } i > 0 \end{aligned}$$

满足以下关系。

i.（“弗罗贝尼乌斯”线性）对于 $x,y \in H_{g,\,n}(X)$ 和 $t \in \mathbb{F}$,

$$Q_{i(p-1)}(tx+y) = t^p Q_{i(p-1)}(x) + Q_{i(p-1)}(y)$$

and

$$\beta Q_{i(p-1)}(tx+y) = t^p \beta Q_{i(p-1)}(x) + \beta Q_{i(p-1)}(y).$$

ii. 若 $(-1)^{n+i}\varphi(\mathrm{tr}_{g\oplus g}(\beta^{-1}_{g\,g,}\,)) = -1$, 则 $Q_{i(p-1)} = 0$ 和 $\beta Q_{i(p-1)} = 0$ 在$H_{g,\,n}$上。iii. 对任意 $x \in H_{*,\,*}(X)$, $Q_0(x) = x^p$。iv. 若 $\mathbb{I} \in H_{\mathbb{I}^{\mathbb{C}},\,0}(X)$ 是单位元，则 $Q_{i(p-1)}(\mathbb{I}) = 0$ 且 $\beta Q_{i(p-1)}(\mathbb{I}) = 0$ 对所有 $i > 0$均成立。

v.（外部 Cartan 公式）若 $X, Y \in \mathrm{Alg}_{E_\infty}(\mathrm{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi})$ 的同调类为$x \in H_{g,\ n}(X)$, $y \in H_{h,\ m}(Y)$，则典范映射

$$H_{(g\oplus h)^p,*}(X \circledast Y) \to H_{g^p\oplus h^p,*}(X \circledast Y)$$

由洗牌映射 $(g \oplus h)^p \to g^p \oplus h^p$ 在 G 中诱导，发送

$$Q_{i(p-1)}(x \otimes y) \mapsto (-1)^{\frac{nm(p-1)}{2}} \sum_{j+k=i} Q_{j(p-1)}(x) \otimes Q_{k(p-1)}(y)$$

and

$$\begin{aligned}\beta Q_{i(p-1)}(x \otimes y) \mapsto (-1)^{\frac{nm(p-1)}{2}} \sum_{j+k=i} \big(&\beta Q_{j(p-1)}(x) \otimes Q_{k(p-1)}(y) \\ &+ (-1)^n Q_{j(p-1)}(x) \otimes \beta Q_{k(p-1)}(y)\big).\end{aligned}$$

vi.（内部 Cartan 公式）若 $x \in H_{g,n}(X)$ 且$y \in H_{h,m}(X)$，则典范映射

$$H_{(g\oplus h)^p,*}(X) \to H_{g^p\oplus h^p,*}(X)$$

发送

$$Q_{i(p-1)}(xy) \mapsto (-1)^{\frac{nm(p-1)}{2}} \sum_{j+k=i} Q_{j(p-1)}(x) Q_{k(p-1)}(y)$$

and

$$\begin{aligned}\beta Q_{i(p-1)}(xy) \mapsto (-1)^{\frac{nm(p-1)}{2}} \sum_{j+k=i} \big(&\beta Q_{j(p-1)}(x) Q_{k(p-1)}(y) \\ &+ (-1)^n Q_{j(p-1)}(x) \beta Q_{k(p-1)}(y)\big).\end{aligned}$$

vii.（Adem 关系）对于 $x \in H_{g,n}$，若 $r > s$，则

$$Q_{r(p-1)} Q_{s(p-1)}(x) = q_{g,n,s} \sum_j t_{r,s,j}\, Q_{(r+ps-pj)(p-1)} Q_{j(p-1)}(x)$$

and

$$\beta Q_{r(p-1)} Q_{s(p-1)}(x) = q_{g,n,s} \sum_j t_{r,s,j}\, \beta Q_{(r+ps-pj)(p-1)} Q_{j(p-1)}(x),$$

其中

$$q_{g,n,s} = [\varphi(\mathrm{tr}_{g\oplus g}(\beta_{g,g}^{-1}))(-1)^n]^{\frac{p-1}{2}} (-1)^{\frac{s(p-1)}{2}}$$

and

$$t_{r,s,j} = (-1)^{\frac{r-j}{2}} \binom{\frac{(j-s)(p-1)}{2} - 1}{\frac{r-j}{2} - 1};$$

若 $r \geq s$，则

$$\begin{aligned}Q_{r(p-1)} \beta Q_{s(p-1)}(x) = q_{g,r} \sum_j \tfrac{(j-s)(p-1)}{pj-s(p-1)-r+1} t_{r,s,j}\, &\beta Q_{(r-1+ps-pj)(p-1)} Q_{j(p-1)}(x) \\ - q_{g,n,s} \sum_j t_{r,s,j}\, &Q_{(r+ps-pj)(p-1)} \beta Q_{j(p-1)}(x)\end{aligned}$$

and

$$\beta Q_{r(p-1)}\beta Q_{s(p-1)}(x) = -q_{g,n,s}\sum_j t_{r,s,j}\,\beta Q_{(r+ps-pj)(p-1)}\beta Q_{j(p-1)}(x)),$$

其中

$$q_{g,r} = \varphi(\mathrm{tr}_{g\oplus g}(\beta_{g,g}^{-1}))^{\frac{p-1}{2}}(-1)^{\frac{r(p-1)}{2}}\left(\tfrac{p-1}{2}!\right),$$

$$q_{g,n,s} = [\varphi(\mathrm{tr}_{g\oplus g}(\beta_{g,g}^{-1}))(-1)^n]^{\frac{p-1}{2}}(-1)^{\frac{s(p-1)}{2}},$$

and

$$t_{r,s,j} = (-1)^{\frac{r-1-j}{2}}\binom{\frac{(j-s)(p-1)}{2}-1}{\frac{r-1-j}{2}}.$$

这里，如果二项式系数中的表达式不是整数，则该二项式系数定义为零。

在上述定理中，我们还希望说明 Dyer–Lashof 运算与链复形次数中的悬挂的相容性。要严谨地陈述这类内容，需要补充一些定义。我们发现，Lurie 的某份课程讲义第3讲中概述的观点很有用[Lur07]。下文用 Σ 和 Ω 分别表示 $\Sigma_{\mathbb{F}_G,\ 1}$ 和 $\Sigma_{\mathbb{F}_G^{-1}}$。

给定 $X \in \mathrm{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}$，我们将构造一个映射

$$H_{*,*}(E_\infty(\Omega X)) \to H_{*,*}(\Omega E_\infty(X)) \tag{6.6}$$

该映射关于 X 是自然的。特别地，如果令 $\Omega X = \Sigma^{g,\ n}\mathbb{F}_\varphi$，我们就得到一个映射

$$\sigma\colon H_{h,m}(E_\infty(\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi)) \to H_{h,m}(\Omega E_\infty(\Sigma^{g,n+1}\mathbb{F}_\varphi)) \xrightarrow{\cong} H_{h,m+1}(E_\infty(\Sigma^{g,n+1}\mathbb{F}_\varphi))$$

它定义了运算 $H_{g,\ n} \to H_{h,\ m}$ 的悬挂。

事实上，这是悬挂与运算相互作用方式的一个特例。设 X，$\Omega X \in \mathrm{Alg}_{E_\infty}(\mathrm{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi})$。给定由映射 $x\colon \Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi \to \Omega X$ 表示的任意同调类，我们可以考虑如下图表

(6.7)

$$\begin{array}{ccccc}
H_{*,*}(E_\infty(\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi)) & \xrightarrow{\sigma} & H_{*,*}(\Omega E_\infty(\Sigma^{g,n+1}\mathbb{F}_\varphi)) & \xrightarrow{\cong} & H_{*,*+1}(E_\infty(\Sigma^{g,n+1}\mathbb{F}_\varphi)) \\
\downarrow{\scriptstyle H_{*,*}(E_\infty(x))} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle H_{*,*}(E_\infty(\Sigma x))} \\
H_{*,*}(E_\infty(\Omega X)) & \longrightarrow & H_{*,*}(\Omega E_\infty(X)) & \xrightarrow{\cong} & H_{*,*+1}(E_\infty(X)) \\
\downarrow & & & & \downarrow \\
H_{*,*}(\Omega X) & & \xrightarrow{\qquad\qquad\cong\qquad\qquad} & & H_{*,*+1}(X)
\end{array}$$

其中悬挂映射是典范的，而映射

$$H_{*,*}(E_\infty(\Omega X)) \to H_{*,*}(\Omega E_\infty(X))$$

由 6.6 得出。给定一个类 $Q \in H_{*,\ *}(E_\infty(\Sigma^{g,\ n}\mathbb{F}_\varphi))$，它通过将 x 映射为 Q 在图表左侧两个垂直映射下的像，从而确定一个同调运算，因此可以问 $\Sigma Q(x)$ 是否等于 $\sigma Q(\Sigma x)$。于是我们对定理 6.5 作如下补充：

定理 6.5（续）。viii. 悬挂映射

$$\sigma\colon \mathrm{Nat}(H_{g,n}, H_{g^p,pn+i(p-1)}) \to \mathrm{Nat}(H_{g,n+1}, H_{g^p,pn+i(p-1)+1})$$

sends $Q_{i(p-1)}$ *to*

$$\sigma Q_{i(p-1)} = (-1)^{\frac{(p-1)n}{2}} \left(\tfrac{p-1}{2}\right)! \, Q_{(i-1)(p-1)}$$

and $\beta Q_{i(p-1)}$ *to*

$$\sigma\beta Q_{i(p-1)} = -(-1)^{\frac{(p-1)n}{2}} \left(\tfrac{p-1}{2}\right)! \, \beta Q_{(i-1)(p-1)}.$$

ix. 若 X，$\Omega X \in \mathsf{Alg}_{E_\infty}(\mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi})$ 具有相容的 E_∞ 结构（即图 6.7 的下半部分交换），则悬挂同构 $\Sigma\colon H_{g,\,n}(\Omega X) \to H_{g,\,n+1}(X)$ 满足

$$\Sigma Q_{i(p-1)}(x) = (-1)^{\frac{(p-1)n}{2}} \left(\tfrac{p-1}{2}\right)! \, Q_{(i-1)(p-1)}(\Sigma x)$$

and

$$\Sigma\beta Q_{i(p-1)}(x) = -(-1)^{\frac{(p-1)n}{2}} \left(\tfrac{p-1}{2}\right)! \, \beta Q_{(i-1)(p-1)}(\Sigma x).$$

在证明定理 6.5 之前，我们先构造所承诺的锯齿链 6.6。

构造 6.8。设 $X \in \mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}$。令 Y 为恒等映射 $\Omega X \to \Omega X$ 的映射锥，从而得到一个序列

$$\Omega X \to Y \to X,$$

其中 Y 是无圈的。取对称幂后，我们得到映射

$$\mathrm{Sym}^k(\Omega X) \to \mathrm{Sym}^k(Y) \to \mathrm{Sym}^k(X).$$

若 Y 具有滤过 $F_iY = 0$（当 $i < 0$ 时）、$F_iY = Y$（当 $i > 0$ 时），且 F_0Y 是 ΩX 在 Y 中的像，则这将在 $\mathsf{Sym}^k(Y)$ 上诱导一个滤过，其定义为

$$F_i \,\mathrm{Sym}^k(Y) = \mathrm{im}\left(\mathcal{C}_\infty(k) \otimes_{\Sigma_k} \bigoplus_{i_1+\cdots+i_k=i} F_{i_1}Y \circledast \cdots \circledast F_{i_k}Y\right).$$

注意，$\mathsf{Sym}^k(\Omega X)$ 在 $\mathsf{Sym}^k(Y)$ 中的像包含于滤过 F_{k-1}（在事实上，它包含于滤过 F_0），因此我们有一个映射 $\mathsf{Sym}^k(\Omega X) \to F_{k-1}\,\mathsf{Sym}^k(Y)$。由于映射 $\mathsf{Sym}^k(Y) \to \mathsf{Sym}^k(X)$ 是满射，我们也可以定义一个映射

$$H_{*,*}(\Omega\,\mathrm{Sym}^k(X)) \to H_{*,*}(F_{k-1}\,\mathrm{Sym}^k(Y))$$

取 $\mathsf{Sym}^k(X)$ 中的一个代表元，在 $\mathsf{Sym}^k(Y)$ 中选择一个提升，并在 $\mathsf{Sym}^k(Y)$ 中应用微分，即可得到该映射；这会诱导出一个良定义的同调映射，且与提升的选择无关。此外，我们声称这个映射是一个同构。

由于 Y 是无圈的，根据引理 4.3，$\mathsf{Sym}^k(Y)$ 对于 $k > 0$ 也同样是无圈的。因此，$F_{k-1}\,\mathsf{Sym}^k(Y)$ 中的任意循环 x 都等于 $d(y)$，其中 $y \in$ 属于 $\mathsf{Sym}^k(Y)$。现在，$F_{k-1}\,\mathsf{Sym}^k(Y)$ 是映射 $\mathsf{Sym}^k(Y) \to \mathsf{Sym}^k(X)$ 的核，因此，由于 $d(y)$ 属于 $F_{k-1}\,\mathsf{Sym}^k(Y)$，$y$ 在该映射下映射为 $z \in \mathsf{Sym}^k(X)$ 中的一个循环。于是，y 是 z 的一个提升，因此 z 的同调类在该映射下映射为 x 的同调类

$$H_{*,*}(\Omega\,\mathrm{Sym}^k(X)) \to H_{*,*}(F_{k-1}\,\mathrm{Sym}^k(Y)),$$

这说明该映射是满射的。如果循环 $z \in H_{*,\ *}(\Omega \mathrm{Sym}^k(X))$ 的类属于该映射的核，那么 z 有一个提升 $y \in \mathrm{Sym}^k(Y)$，满足 $d(y) = d(y')$，其中 $y' \in F_{k-1}$ 属于 $\mathrm{Sym}^k(Y)$。由于 $y - y'$ 也是 z的一个提升，因此我们可以假设 $d(y) = 0$。然而，如果 y 是一个循环，那么它也是一个边界，因为 $\mathrm{Sym}^k(Y)$ 是无圈的。因此，如果 $y = d(z')$，那么 z 等于对 z'的像应用微分所得的结果。由此，该映射也是单射的。

现在我们已经准备好证明定理 6.5。为了便于查找某个特定陈述的证明，每个陈述的证明都被分成了不同的部分。

证明（定理 6.5 的陈述 i。）回顾一下，我们利用 $H_{g,n}$ 中同调里的类定义了 Dyer–Lashof 运算，其中 $W \otimes_{C_p} (\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi)^{\circledast p}$。对于任意映射$f$: $\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi \to X$，若其表示一个同调类，则图表

$$\begin{array}{ccc} W \otimes_{C_p} (\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi)^{\circledast p} & \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes f^{\circledast p}} & W \otimes_{C_p} X^{\circledast p} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Sym}^p(\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi) & \xrightarrow{\mathrm{Sym}^p(f)} & \mathrm{Sym}^p(X) \end{array}$$

交换。Dyer–Lashof 运算由一个类定义：

$$e_i \otimes \iota^p \in (W \otimes_{C_p} (\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi)^{\circledast p})(g^p),$$

其中 ι 表示 $1 \in \Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi(g)_n$。将此运算应用于 f，就是在 g^p上取值后，取 $e_i \otimes \iota^p$ 在这两个复合中的任一个之下的像，然后对 X应用 E_∞-乘法。因此，在应用 E_∞-乘法之前，只需证明 $\mathrm{Sym}^p(X)$ 中的弗罗贝尼乌斯线性性。若记 x 为 $f(\iota)$，则 $e_i \otimes \iota^p$ 的像为

$$e_i \otimes x^{\otimes p} \in \mathcal{C}_\infty(p) \otimes_{\Sigma_p} X(g)^{\otimes p}.$$

首先，我们希望证明

$$e_i \otimes (x+y)^{\otimes p} = e_i \otimes x^{\otimes p} + e_i \otimes y^{\otimes p}$$

在取同调后 $H_{g^p,\ *}(\mathrm{Sym}^p(X))$。我们在链层次上证明这一点（另见 [May70]）。注意

$$(x+y)^{\otimes p} = x^{\otimes p} + y^{\otimes p} + \sum_{j=1}^{p-1} (1 + \alpha + \cdots + \alpha^{p-1}) x^{\otimes j} y^{\otimes p-j},$$

其中 α 是我们选定的循环群 C_p 的生成元，它循环置换单项式 $x^{\otimes j} y^{\otimes p-j}$。在 W 中，如果 i 是偶数，则有

$$(1 + \alpha + \cdots + \alpha^{p-1}) e_i = d((\alpha - 1)^{p-2} e_{i+1}),$$

而如果 i 是奇数，则有

$$(1 + \alpha + \cdots + \alpha^{p-1}) e_i = d(e_{i+1}).$$

因此，

$$e_i \otimes \sum_{j=1}^{p-1} (1 + \alpha + \cdots + \alpha^{p-1}) x^{\otimes j} y^{\otimes p-j}$$

是一个边界，这意味着 Dyer–Lashof 运算具有可加性。由于

$$e_i \otimes (tx)^{\otimes p} = t^p e_i \otimes x^{\otimes p},$$

由此可知，Dyer–Lashof 运算是弗罗贝尼乌斯线性的。这证明了 i。 □

陈述 ii. 直接由引理 6.2 得出。

证明（定理 6.5 的陈述 iii.） p-重乘积是一个权为 (1, . . . , 1) 的 p 元运算 μ，它位于下列对象的第 p 个荷分量中

$$H_{g_1\oplus\cdots\oplus g_p,n_1+\cdots+n_p}(E_\infty(\oplus\Sigma^{g_i,n_i}\mathbb{F}_\varphi)).$$

当所有输入都相同时，这可以看作是一个运算 γ，位于

$$H_{g^p,pn}(E_\infty(\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi))$$

在规范折叠映射 $\oplus\Sigma^{g,\ n}\mathbb{F}_\varphi \to \Sigma^{g,\ n}\mathbb{F}_\varphi$ 的像之下。特别地，只要 $x \in H_{g,\ n}(X)$,

$$\mu(x \otimes x \otimes \cdots \otimes x) = \gamma(x).$$

因此，只需证明 $H_{g^p,\ pn}(E_\infty(\Sigma^{g,\ n}\mathbb{F}_\varphi)) \cong \mathbb{F}$ 中定义 Q_0 的类等于 γ。由于 μ 是迭代乘积，它由空间拟 operad 中元数为 p 的一个点确定。

注意，映射 $W \to \mathcal{C}_\infty(p)$ 必须将链 e_0 映到一条经增广映射后像为 $1 \in \mathbb{F}$ 的链上。因此，由于 $\mathcal{C}_\infty$ 来自空间拟 operad，这条链与任意由一点确定的链同调等价。因此， γ 和 Q_0 都可以表示为一点的链与 $1^{\otimes p}$ 的张量，故它们是同调中的同一个类。□

证明（定理 6.5 的陈述 iv.）回忆一下，单位映射 $\mathbb{F}_\varphi \to X$ 是 E_∞-代数的映射，因此由自然性，只需证明该陈述对 $\mathbb{F}_\varphi$ 成立。然而， $\mathbb{F}_\varphi$ 的 E_∞-结构经由交换拟 operad 分解:

$$\mathrm{Sym}^p(\mathbb{F}_\varphi) \to \mathbb{F}[0] \otimes_{\Sigma_p} \mathbb{F}_\varphi^{\circledast p} \to \mathbb{F}_\varphi.$$

如果 $e_j \in \mathcal{C}_\infty(p)$ 定义了一个 Dyer–Lashof 运算，那么 e_j 在 $\mathbb{F}[0]$ 中的像在 $j > 0$ 时为零，因此该运算恒等于零。□

证明（定理 6.5 的陈述 v. 和 vi.）首先，我们证明这些公式的外部版本。 $\beta^\varepsilon Q_{i(p-1)}$ 在$H_{g,\ n} \otimes H_{h,\ m}$ 上的运算由以下链表示

$$e_{i(p-1)-\varepsilon} \otimes (\iota_1 \otimes \iota_2)^p \in \mathrm{Sym}^p(\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi \circledast \Sigma^{h,m}\mathbb{F}_\varphi)((g \oplus h)^p),$$

其中， ι_i 表示 $1 \in \Sigma^{g_i,\ n_i}\mathbb{F}_\varphi(g_i)_{n_i}$。将此运算作用于一个类 $x \otimes y$上，其中 x 由映射 $\Sigma^{g,\ n}\mathbb{F}_\varphi \to X$ 表示，而 y 由 $\Sigma^{h,\ m}\mathbb{F}_\varphi \to Y$表示，这需要取交换图中的复合

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sym}^p(\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi \circledast \Sigma^{h,m}\mathbb{F}_\varphi) & \xrightarrow{T} & \mathrm{Sym}^p(\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi) \circledast \mathrm{Sym}^p(\Sigma^{h,m}\mathbb{F}_\varphi) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Sym}^p(X \circledast Y) & \longrightarrow & \mathrm{Sym}^p(X) \circledast \mathrm{Sym}^p(Y) \end{array}$$

然后进行 E_∞在 X 和 Y上的乘法。回想一下，此图中的水平箭头是利用 $\mathcal{C}_\infty(p)$上的余积定义的，随后接一个洗牌映射，将

$$(\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi \circledast \Sigma^{h,m}\mathbb{F}_\varphi)^{\circledast p} \to (\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi)^{\circledast p} \circledast (\Sigma^{h,m}\mathbb{F}_\varphi)^{\circledast p}, \tag{6.9}$$

接下来是编织 $\mathcal{C}_\infty(p) \otimes (\Sigma^{g,\ n}\mathbb{F}_\varphi)^{\circledast p} \to (\Sigma^{g,\ n}\mathbb{F}_\varphi)^{\circledast p} \otimes \mathcal{C}_\infty(p)$。

典范比较映射 $H_{(g\oplus h)^p}(X \circledast Y) \to H_{g^p\oplus h^p}(X \circledast Y)$ 由洗牌态射 $\psi\colon (g \oplus h)^p \to g^p \oplus h^p$ in G 诱导。结合上面的

图表可知，只需计算 $e_{i(p-1)-\varepsilon}\otimes(\iota_1\otimes\iota_2)^p$ 在复合下的像

$$\begin{array}{c}\mathrm{Sym}^p(\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi\circledast\Sigma^{h,m}\mathbb{F}_\varphi)((g\oplus h)^p)\\ \downarrow{\scriptstyle T((g\oplus h)^p)}\\ (\mathrm{Sym}^p(\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi)\circledast\mathrm{Sym}^p(\Sigma^{h,m}\mathbb{F}_\varphi))((g\oplus h)^p)\\ \downarrow{\scriptstyle \psi_*}\\ (\mathrm{Sym}^p(\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi)\circledast\mathrm{Sym}^p(\Sigma^{h,m}\mathbb{F}_\varphi))(g^p\oplus h^p).\end{array}$$

我们知道映射 $W\to\mathcal{C}_\infty(p)$ 保持余积，因此根据 W 上余积的定义（见 6.1），我们知道该余积

$$\mathcal{C}_\infty(p)\to\mathcal{C}_\infty(p)\otimes\mathcal{C}_\infty(p)$$

将 $e_{i(p-1)}$ 送到

$$\sum_{2j+2k=i(p-1)}e_{2j}\otimes e_{2k}+\sum_{2j+2k+2=i(p-1)}\ \sum_{0\le r<s<p}\alpha^r e_{2j+1}\otimes\alpha^s e_{2k+1},$$

其中，按照惯例，α 表示循环群 C_p 的一个选定生成元。回想一下，洗牌映射 6.9 是先在 $\mathsf{Ch}_\mathbb{F}$ 中应用洗牌映射（这会引入一个符号），然后应用逆洗牌态射 $\psi^{-1}\colon g^p\oplus h^p\to(g\oplus h)^p$. 得到的。因此，复合 $\psi_*\circ T((g\oplus h)^p)$ 中的洗牌映射相互抵消，而该复合将 $e_{i(p-1)}\otimes(\iota_1\otimes\iota_2)^p$ 送到

(6.10)
$$\begin{aligned}(-1)^{\frac{nmp(p-1)}{2}}\Big(&\sum_{2j+2k=i(p-1)}(e_{2j}\otimes\iota_1^p)\otimes(e_{2k}\otimes\iota_2^p)\\&+(-1)^{np}\sum_{2j+2k+2=i(p-1)}\ \sum_{0\le r<s<p}(\alpha^r e_{2j+1}\otimes\iota_1^p)\otimes(\alpha^s e_{2k+1}\otimes\iota_2^p)\Big).\end{aligned}$$

同样，这里的符号源于 $\mathsf{Ch}_\mathbb{F}$ 中的对称性：通过进行 $p(p-1)/2$ 次对称性作用，我们得到 $(-1)^{\frac{nmp(p-1)}{2}}$

$$\Sigma^{h,m}\mathbb{F}_\varphi\circledast\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi\to\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi\circledast\Sigma^{h,m}\mathbb{F}_\varphi,$$

而其他符号则由对称性的 p 次应用得到

$$\mathcal{C}_\infty(p)\otimes\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi\to\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi\otimes\mathcal{C}_\infty(p).$$

注意，α 在 ι_1^p 上的作用是乘以 $((-1)^n\varphi(\mathrm{tr}^{g\oplus g}(\beta^{-1}_{g\ g,}\ ))^{p-1}=1$，$\iota_2^p$ 也类似，因此

$$\sum_{2j+2k+2=i(p-1)}\ \sum_{0\le r<s<p}(\alpha^r e_{2j+1}\otimes\iota_1^p)\otimes(\alpha^s e_{2k+1}\otimes\iota_2^p)$$

等于

$$\binom{p}{2}\sum_{2j+2k+2=i(p-1)}(e_{2j+1}\otimes\iota_1^p)\otimes(e_{2k+1}\otimes\iota_2^p),$$

它在特征 p下为 0。将引理 6.2 应用于第一项，我们由此得知 6.10 等于

$$(-1)^{\frac{nmp(p-1)}{2}} \sum_{j+k=i} (e_{j(p-1)} \otimes \iota_1^p) \otimes (e_{k(p-1)} \otimes \iota_2^p).$$

利用 p 为奇数这一事实，我们得到 v 中的常数。

类似地， $\psi_* \circ T((g \oplus h)^p)$ 将 $e_{i(p-1)-1} \otimes (\iota_1 \otimes \iota_2)^p$ 映射为

$$(-1)^{\frac{nmp(p-1)}{2}} \sum_{2j+2k=i(p-1)} (-1)^{pn} (e_{2j} \otimes \iota_1^p) \otimes (e_{2k+1} \otimes \iota_2^p) + (e_{2j+1} \otimes \iota_1^p) \otimes (\alpha e_{2k} \otimes \iota_2^p).$$

再次利用 α 作用平凡这一事实，并应用引理 6.2，即可证明关于 $\beta Q_{i(p-1)}$ 的外部 Cartan 公式。

根据引理 4.7，我们可以定义链级乘积映射 $X \circledast X \to X$；经过同调后，它保持 E_∞ 结构。若 $\Sigma^g, {}^n\mathbb{F}_\varphi \to X$、 $\Sigma^h, {}^m\mathbb{F}_\varphi \to X$ 和 $\Sigma^{g\oplus h}, {}^{n+m}\mathbb{F}_\varphi \to X$ 分别是表示类 x、y 和 xy 的映射，则图表

$$\begin{array}{ccccc} H_{*,*}(\mathrm{Sym}^p(\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi \circledast \Sigma^{h,m}\mathbb{F}_\varphi)) & \longrightarrow & H_{*,*}(\mathrm{Sym}^p(X \circledast X)) & \longrightarrow & H_{*,*}(X \circledast X) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_{*,*}(\mathrm{Sym}^p(\Sigma^{g\oplus h,n+m}\mathbb{F}_\varphi)) & \longrightarrow & H_{*,*}(\mathrm{Sym}^p(X)) & \longrightarrow & H_{*,*}(X) \end{array}$$

可交换，因此右侧映射将 $\beta^\varepsilon Q_{i(p-1)}(x \otimes y)$ 映射为 $\beta^\varepsilon Q_{i(p-1)}(xy)$。由于映射 $X \circledast X \to X$ 在同调上诱导乘积，内部 Cartan 公式可由外部 Cartan 公式通过考察图表

$$\begin{array}{ccc} H_{(g\oplus h)^p,*}(X \circledast X) & \xrightarrow{\psi_*} & H_{g^p\oplus h^p,*}(X \circledast X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_{(g\oplus h)^p,*}(X) & \xrightarrow{\psi_*} & H_{g^p\oplus h^p}(X). \end{array}$$

□

为了证明 Adem 关系，我们需要几个引理。第一个是关于模 p 的二项式系数的初等结论。

引理 6.11。以下等式模 p 成立。

i. 设 $j \geq 0$ 和 $t > 0$。那么

$$\binom{j(p-1)}{1+p+\cdots+p^t-j} \equiv 0 \bmod p$$

除非 $j = 1+p+\cdots+p^t$，否则不成立。此外，

$$\binom{j(p-1)-1}{p^t-j} \equiv 0 \bmod p$$

除非 $j = p^t$.

ii. 若 i、$j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和 $i < p^t$，则对任意 $0 \leq a < p$， $\binom{i+j}{j} \equiv \binom{i+j+ap^t}{j+ap^t}$ 模 p。

证明。所有结论均可由卢卡斯定理通过初等论证得出。该定理指出，若 m、$n \geq 0$ 的以 p 为底的展开为

$$m = \sum_{k=0}^{\ell} m_k p^k \text{ and } n = \sum_{k=0}^{\ell} n_k p^k,$$

then

$$\binom{m}{n} \equiv \prod_{k=0}^{\ell} \binom{m_k}{n_k} \bmod p.$$

□

我们还要求在范畴 $\mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}$ 中，定义在球面上的奇异上链的一种版本。正如 [May70]，所述，若将空间 X 的奇异上链复形 $C^*(X)$ 视为非正次数的链复形，那么 Steenrod 运算便与 Dyer–Lashof 运算一致；其中 $C^*(X)$ 可通过杯积的链级构造获得一个 E_∞-代数结构。

引理 6.12。对于任意 $k > 0$，存在 $Y_k \in \mathsf{Alg}_{E_\infty}(\mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi})$，使得

$$H_{g,n}(Y_k) \cong \begin{cases} \mathbb{F} & \text{if } g \cong \mathbb{I}^{\mathsf{G}} \text{ and } n = -k \text{ or } n = 0 \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

并且存在 $y \in H_{\mathsf{G}\,-k}(Y_k)$，使得

i. $Q_{i(p-1)}(y) = 0$ *if* $i \neq k$;

ii. the map

$$H_{\mathbb{I}^{\mathsf{G}^p},-k}(Y_k) \to H_{\mathbb{I}^{\mathsf{G}},-k}(Y_k)$$

induced by the canonical map $(\mathbb{I}^{\mathsf{G}})^p \to \mathbb{I}^{\mathsf{G}}$ *sends*

$$Q_{k(p-1)}(y) \mapsto y;$$

iii. $\beta Q_{i(p-1)}(y) = 0$ *for all* i.

证明。我们可以将球面 k 上的奇异上链 $C^*(S^k;\mathbb{F})$ 视为负次数的链复形，因此它是 $\mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}$ 中的一个对象。自由函子

$$\mathsf{Ch}_{\mathbb{F}} \to \mathsf{Mod}_{\mathbb{F}_\varphi}(\mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{G}})$$

将链复形 X 映射到 $X \otimes \mathbb{F}_\varphi$ 的函子是强对称幺半函子，因此它诱导出一个函子

$$\mathsf{Alg}_{E_\infty}(\mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}) \to \mathsf{Alg}_{E_\infty}(\mathsf{Mod}_{\mathbb{F}_\varphi}).$$

若 $X \in \mathsf{Alg}_{E_\infty}(\mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi})$，则 $X(\mathbb{I}^{\mathsf{G}}) \in \mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}$ 继承一个 E_∞-代数结构，这是基于如下事实：对所有 k，都存在典范映射 $(\mathbb{I}^{\mathsf{G}})^k \to \mathbb{I}^{\mathsf{G}}$。显式地，我们有映射

$$\mathcal{C}_\infty(k) \otimes_{\Sigma_k} X(\mathbb{I}^{\mathsf{G}})^{\otimes k} \to \mathrm{Sym}^k(X)(\mathbb{I}^{\mathsf{G}}_k) \to X(\mathbb{I}^{\mathsf{G}}_k) \to X(\mathbb{I}^{\mathsf{G}})$$

很容易看出，这些映射与余运算子复合映射相容。

空间的上链复形可以赋予 E_∞-代数结构，使得其在同调上诱导的乘积与杯积一致，且 Dyer–Lashof 运算与 Steenrod 运算一致（参见 [May70] 的第 7、8 节）。因此，我们令 Y_k 为 E_∞-代数 $C^*(S^k;\mathbb{F})$ 在 $\mathsf{Alg}_{E_\infty}(\mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi})$ 中的像。

$\mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}$ 中任何表示一个同调类的映射 $\mathbb{F}[n] \to C^*(S^k;\mathbb{F})$，都会在 $\mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}$ 中诱导一个映射$\Sigma^n\mathbb{F}_\varphi \to Y_k$，使得图表

$$\begin{array}{ccc} E_\infty(\mathbb{F}[n]) & \xrightarrow{\simeq} & E_\infty(\Sigma^n\mathbb{F}_\varphi)({}_{\mathbb{I}^{\mathsf{G}}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C^*(S^k;\mathbb{F}) & \xrightarrow{\simeq} & Y_k({}_{\mathbb{I}^{\mathsf{G}}}) \end{array}$$

在 $\mathsf{Alg}_{E_\infty}(\mathsf{Ch}_{\mathbb{F}})$ 中可交换。因此，同构 $H^*(S^k;\mathbb{F}) \to H_{\mathbb{I}^{\mathsf{G}}-*}(Y_k)$ 保持 Dyer–Lashof 运算，因此 Y_k 满足所需的性质。□

证明（定理 6.5 的陈述 vii）。两个 Dyer–Lashof 运算的复合是一个运算，属于

$$H_{g^{p^2},*}(\mathrm{Sym}^{p^2}(\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi))$$

由复合确定

$$\begin{array}{c} \mathcal{C}_\infty(p) \otimes_{C_p} (\mathcal{C}_\infty(p) \otimes (\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi)^{\circledast p})^{\circledast p} \\ \downarrow \\ \mathcal{C}_\infty(p) \otimes_{C_p} (\mathcal{C}_\infty(p)^p \otimes ((\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi)^{\circledast p})^{\circledast p}) \\ \downarrow \\ \mathrm{Sym}^{p^2}(\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi). \end{array}$$

也就是说，若 ι 表示 $\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi$ 的一个选定生成元，则由 e_i 和 e_j 确定的运算的复合为

$$(-1)^{nj(p-1)/2}\theta(e_i \otimes e_j^p) \otimes (\iota^p)^p, \tag{6.13}$$

其中 θ 表示 $\mathcal{C}_\infty$ 中的复合。这里的符号来自将 $\mathcal{C}(p)$ 与 $(\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi)^{\circledast p}$ $p(p-1)$ 编织 $/2$ 次。类似于引理 6.2 的推理表明

$$H_{g^{p^2},*}(\mathrm{Sym}^{p^2}(\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi)) \cong H_{*-p^2n}(\Sigma_{p^2};\mathbb{F}(q)),$$

其中 $q = (-1)^n\varphi(\mathrm{tr}_{g\oplus g}(\beta_{g,g}^{-1}))$ 和 $\mathbb{F}(q)$ 与同一引理证明中的情形相同。此外，

$$H_{g^{p^2},*}(\mathcal{C}_\infty(p) \otimes_{C_p} (\mathcal{C}_\infty(p) \otimes (\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi)^{\circledast p})^{\circledast p}) \cong H_{*-p^2n-p\bullet}(C_p; H_\bullet(C_p;\mathbb{F})^p).$$

若将 Σ_{p^2} 视为作用在元组 (i,j) 上，其中 $1 \le i,j \le p$，令 $\alpha \in \Sigma_{p^2}$ 为将 $(i,j) \mapsto (i+1,j)$ 送到的置换，并令 α_i 在 $k \ne i$ 时将 $(i,j) \mapsto (i,j+1)$ 以及 $(k,j) \mapsto (k,j)$ 送到。令 $\tau \le \Sigma_{p^2}$ 为由 α 和 α_i 生成的子群。则

$$H_*(\tau;\mathbb{F}(q)) \cong H_*(C_p; H_*(C_p;\mathbb{F})^p),$$

并且可以选取上述同构，使得该映射

$$H_*(\tau;\mathbb{F}(q)) \to H_*(\Sigma_{p^2};\mathbb{F}(q))$$

由包含诱导的映射与该映射一致

$$H_{g^{p^2},*}(\mathcal{C}_\infty(p) \otimes_{C_p} (\mathcal{C}_\infty(p)^p \otimes ((\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi)^{\circledast p})^{\circledast p})) \to H_{g^{p^2},*}(\mathrm{Sym}^{p^2}(\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi)).$$

Adem 关系源于 $H_*(\Sigma_{p^2};\mathbb{F}(q))$ 中的关系，而这些关系来自 $H_*(\tau;\mathbb{F}(q))$。我们遵循 [May70] 中第 4 节的一般方法来推导这些关系，并针对扭曲系数和下标记作出调整。

将 $C_p \times C_p$ 视为 Σ_{p^2} 的子群：把 $(1,0)$ 看作置换 α，并把 $(0,1)$ 看作将 (i,j) 映为 $(i,j+1)$ 的置换 β。注意到$\alpha\beta = \beta\alpha$，因此这确实将 $C_p \times C_p$ 嵌入为 Σ_{p^2}的子群。

由于 $\beta = \alpha_1 \cdots \alpha_p$，我们看到这个包含映射可分解为经过 τ的映射。因此，我们得到一个诱导映射

$$H_*(C_p \times C_p;\mathbb{F}(q)) \xrightarrow{f} H_*(\tau;\mathbb{F}(q)) \to H_*(\Sigma_{p^2};\mathbb{F}(q)).$$

May 给出了映射 f 的显式计算（引理 4.6 (ii)，[May70]）：

$$\begin{aligned} f(e_r \otimes e_s) = &\sum_k t(s,k) e_{r+(2pk-s)(p-1)} \otimes e^p_{s-2k(p-1)} \\ &- \delta(r)\delta(s-1)\sum_k t(s-1,k) e_{r+p+(2pk-s)(p-1)} \otimes e^p_{s-2k(p-1)-1}, \end{aligned} \tag{6.14}$$

其中

$$t(j,k) = (-1)^k v(j) \binom{[j/2] - k(p-1)}{k},$$

$$v(j) = (-1)^{j(j-1)(p-1)/4} \left(\tfrac{p-1}{2}!\right)^j,$$

并且 $\delta(j)$ 在 j 为奇数时等于 1，在 j 为偶数时等于 0。常数 $v(j)$ 将在全文中使用，但常数 $t(j,k)$ 仅用于此证明。

现在令 $\gamma \in \Sigma_{p^2}$ 为将 $(i,j) \mapsto (j,i)$ 送到的置换。于是 $\gamma\alpha\gamma^{-1} = \beta$，因此由 γ 共轭给出的群同态 $\Sigma_{p^2} \to \Sigma_{p^2}$ 限制为同态 $C_p \times C_p \to C_p \times C_p$。再结合映射 $\mathbb{F}(q) \to \mathbb{F}(q)$（其作用为从左侧乘以 γ），便诱导出群同调的映射，使得图表

$$\begin{array}{ccccc} H_*(C_p \times C_p;\mathbb{F}(q)) & \xrightarrow{f} & H_*(\tau;\mathbb{F}(q)) & \xrightarrow{g} & H_*(\Sigma_{p^2};\mathbb{F}(q)) \\ \downarrow{\scriptstyle \gamma_*} & & & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_*} \\ H_*(C_p \times C_p;\mathbb{F}(q)) & \xrightarrow{f} & H_*(\tau;\mathbb{F}(q)) & \xrightarrow{g} & H_*(\Sigma_{p^2};\mathbb{F}(q)) \end{array}$$

可交换。在群同调中，映射 γ_* 在 $H_*(\Sigma_{p^2};\mathbb{F}(q))$ 上是单位元，这是一个标准结论。此外，直接计算 γ_* 在 $H_*(C_p \times C_p;\mathbb{F}(q))$ 上的作用并不困难（May 在引理 4.4 中给出了这一计算）；利用 γ 可以写成 $p(p-1)/2$ 个对换的乘积这一事实，我们得到

$$\gamma_*(e_i \otimes e_j) = (-1)^{ij} q^{\frac{p-1}{2}} e_j \otimes e_i. \tag{6.15}$$

利用等式 6.13、6.14 和 6.15，以及 $gf = gf\gamma_*$ 这一事实，我们得到如下关系

(6.16)

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{ns(p-1)/2}\sum_k t(s,k)\theta(e_{r+(2pk-s)(p-1)}\otimes e^p_{s-2k(p-1)})\otimes \iota^{p^2}\\
&\quad-(-1)^{n(s-1)(p-1)/2}\delta(r)\delta(s-1)\sum_k t(s-1,k)\theta(e_{r+p+(2pk-s)(p-1)}\otimes e^p_{s-2k(p-1)-1})\otimes \iota^{p^2}\\
&\quad=(-1)^{rs+nr(p-1)/2}q^{\frac{p-1}{2}}\sum_\ell t(r,\ell)\theta(e_{s+(2p\ell-r)(p-1)}\otimes e^p_{r-2\ell(p-1)})\otimes \iota^{p^2}\\
&\quad-(-1)^D q^{\frac{p-1}{2}}\delta(s)\delta(r-1)\sum_\ell t(r-1,\ell)\theta(e_{s+p+(2p\ell-r)(p-1)}\otimes e^p_{r-2\ell(p-1)-1})\otimes \iota^{p^2}
\end{aligned}
$$

在 $H_{g^{p^2},\ *}(\mathrm{Sym}^{p^2}(\Sigma^{g,\ n}\mathbb{F}_\varphi))$ 中，其中 $t(j,k)$ 的定义见 6.14，并且

$$D = rs + n(r-1)(p-1)/2.$$

由于 $\mathcal{C}_\infty(k)$ 的同调，以及群同调 $H_*(C_p)$、$H_*(\tau)$ 和 $H_*(\Sigma_k)$，都可以由模 p 约化后的整数链复形计算得到，因此这些同调都带有一个 Bockstein 同态 β。May 证明了

$$\beta(e_k\otimes e^p_\ell\otimes \iota^{p^2}) = \delta(k-1)e_{k-1}\otimes e^p_\ell\otimes \iota^{p^2};$$

因此，只需证明第一和第三个 Adem 关系。

将 r 替换为 $(r+s(p-1))(p-1)$，将 s 替换为 $s(p-1)$，再将 6.16 中的 $j = s-2k$ 和 $i = r+s(p-1)-2\ell$ 代入，并利用一般情况下，当 r 和 s 具有相同奇偶性时，$v(s(p-1)) \equiv v((r+s(p-1))(p-1))$ 模 p，即可得到

(6.17)

$$
\begin{aligned}
&\sum_j(-1)^{\frac{s-j}{2}}\binom{j\frac{(p-1)}{2}}{\frac{s-j}{2}}Q_{(r+ps-pj)(p-1)}Q_{j(p-1)}\\
&\qquad=q^{\frac{p-1}{2}}\sum_i(-1)^{\frac{r+s(p-1)-i}{2}}\binom{\frac{i(p-1)}{2}}{\frac{r+s(p-1)-i}{2}}Q_{(r+ps-pi)(p-1)}Q_{i(p-1)},
\end{aligned}
$$

其中我们使用记号 $Q_kQ_{k'}$ 表示 $\theta(e_k\otimes e^p_{k'})\otimes\iota^{p^2}$。请注意，在引入 i 和 j 时，我们隐含地对 i、j、s 和 r 的奇偶性作了一些假设。然而，根据引理 6.2，我们知道，对于所有奇数 k' 或所有偶数 k'，$Q_{k'(p-1)}$ 都为零；此外，$Q_{k'(p-1)}$ 的双次数为 $(g^p, pn+k'(p-1))$，并且

$$\varphi(\mathrm{tr}_{g^p\oplus g^p}(\beta_{g^p,g^p})))(-1)^{pn+k'(p-1)} = \varphi(\mathrm{tr}_{g\oplus g}(\beta_{g,g}))^p(-1)^n = \varphi(\mathrm{tr}_{g\oplus g}(\beta_{g,g}))(-1)^n$$

根据公式 2.2，因此，只要 k 和 k' 的奇偶性不同，$Q_{k(p-1)}Q_{k'(p-1)}$ 就为零。因此，我们有理由假设 r 和 s 的奇偶性相同，进而可以假设 s 和 j 的奇偶性相同，i 和 r 也一样。因此，二项式系数或指数中出现分数并不会造成问题。

假设 $r > s$ 确保 6.17 两边不会出现相同的运算。为此，请注意，左侧的二项式系数除非满足以下条件，否则为零：

$$\tfrac{s}{p} \le j \le s,$$

而右侧的二项式系数除非满足以下条件，否则为零：

$$\tfrac{r+s(p-1)}{p} \le i \le r + s(p-1).$$

若 $r > s$，则 $s < \frac{r+s}{(p-1)}\, p$，因此这些范围互不相交。

我们首先证明这些关系对 $s = 2(1 + p + \cdots + p^t)$ 成立。如上所述，我们可以假设 r、s、j、i 都具有相同的奇偶性。因此，在式 6.17 中将 r、j、i 替换为 $2r$、$2j$、$2i$，得到

$$\sum_j (-1)^{1+\cdots+p^t-j} \binom{j(p-1)}{1+\cdots+p^t-j} Q_{(2r+ps-2pj)(p-1)} Q_{2j(p-1)}$$
$$= q^{\frac{p-1}{2}} \sum_i (-1)^{r+p^{t+1}-1-i} \binom{i(p-1)}{r+p^{t+1}-1-i} Q_{(2r+ps-2pi)(p-1)} Q_{2i(p-1)}.$$

根据引理 6.11，左边的二项式系数除非 $j = 1 + \cdots + p^t$，否则为零。右边则注意到，除非 $2r + ps - 2pi \ge 0$，否则 $Q_{(2r+ps-2pi)(p-1)}$ 为零。这个不等式意味着

$$pi - r - p^{t+1} + 1 \le 1 + p + \cdots + p^t < p^{t+1}.$$

因此，根据引理 6.11，若 $r - i - 1 \ge 0$，

$$\binom{(i-\frac{s}{2})(p-1)-1}{pi-r-\frac{s(p-1)}{2}} = \binom{i(p-1)-p^{t+1}}{r-i-1} \equiv \binom{i(p-1)}{r-i+p^{t+1}-1} \bmod p. \tag{6.18}$$

若 $r - i - 1 < 0$，则 $\binom{i(p-1)-p^{t+1}}{r-i-1} = 0$，并且用引理 6.11 中提到的类似方法可知，当 $r - pi + p + \cdots + p^{t+1} \ge 0$ 时，$\left(\binom{i(p-1)}{r-i+p^{t+1}-1} \equiv 0\right) \bmod p$ 也成立。当 $r - pi + p + \cdots + p^{t+1} < 0$ 时，6.18 未必成立；然而，在这种情况下 $Q_{(2r+ps-2pi)(p-1)} = 0$，因此我们有理由将 6.18 中的二项式系数替换为对所有 i 都成立的表达式。因此，当 $s = 2(1 + \cdots + p^t)$ 时，我们已证明，对于任意 $r > s$ 以及任意 $x \in H_{g,n}(X)$，$Q_{r(p-1)} Q_{s(p-1)}(x)$ 等于

$$q^{\frac{p-1}{2}} (-1)^{\frac{s(p-1)}{2}} \sum_i (-1)^{\frac{r-i}{2}} \binom{(i-s)\frac{(p-1)}{2}-1}{\frac{pi-r-s(p-1)}{2}} Q_{(r+ps-pi)(p-1)} Q_{i(p-1)}(x).$$

为证明一般 s 的公式，令 $k = 2(1 + p + \cdots + p^t) - s$，其中 t 足够大，使得 $k \ge 0$。令 $Y_k \in \mathrm{Alg}_{E_\infty}(\mathrm{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi})$ 按引理 6.12 中的定义给出。特别地，令 $y \in H_{\mathbb{I}^{\mathbb{G}}-k}(Y_k)$ 满足 $Q_{k(p-1)}(y) \mapsto y$，其中 $\mapsto y$ 是由 $\mathbb{I}^{\mathbb{G}^p} \to \mathbb{I}^{\mathbb{G}}$ 诱导的映射，并且当 $i \ne k$ 时，$Q_{i(p-1)}(y) = 0$。定义

$$Q_{r,s,g,n} \coloneqq Q_{r(p-1)} Q_{s(p-1)} - q^{\frac{p-1}{2}} (-1)^{\frac{s(p-1)}{2}} \sum_i (-1)^{\frac{r-i}{2}} \binom{(i-s)\frac{p-1}{2}-1}{\frac{r-i}{2}-1} Q_{(r+ps-pi)(p-1)} Q_{i(p-1)}$$

视为作用于 $H_{g,\,n}$ 上的运算。（请注意，此处 $q = (-1)^n \varphi(\mathrm{tr}^{g\oplus g}(\beta_{g,\,g}))$ 取决于 n 和 g。）利用关于 $X \circledast Y_k$ 的外部 Cartan 公式可知，在由复合诱导的同调同构下

$$((g \oplus \mathbb{I}^{\mathbb{G}})^p)^p \to (g^p \oplus \mathbb{I}^{\mathbb{G}^p})^p \to (g^p \oplus \mathbb{I}^{\mathbb{G}})^p \to (g^p)^p \oplus \mathbb{I}^{\mathbb{G}^p} \to (g^p)^p \oplus \mathbb{I}^{\mathbb{G}}$$

在 G 中，

$$Q_{r',s',g,n-k}(x \otimes y) \mapsto Q_{r,s,g,n}(x) \otimes y,$$

其中 $s' = 2(1 + \cdots + p^t)$，而且 $r' = r + k$（作为中间步骤，我们已用 $i' = i + k$ 对求和重新编了索引）。注意，此时 $r' - s' = r - s > 0$，因此我们已经证明 $Q_{r',\,s',\,g,\,n-k}(x \otimes y) = 0$。因此，由于 $H_{*,\,*}(X \circledast Y_k) \cong H_{*,\,*}(X) \circledast H_{*,\,*}(Y_k)$ 且 $y \neq 0$，我们必有

$$Q_{r,s,g,n}(x) = 0.$$

这证明了第一个 Adem 关系。

为了证明另一个 Adem 关系，我们将 r 替换为 $(r-1+s(p-1))(p-1)$，并将s 替换为 $s(p-1)-1$，随后在 6.16 中进行指标变换 $j = s - 2k, i = r - 1 + s(p-1) - 2\ell$。化简常数后得到公式

$$\begin{aligned}
&\sum_j (-1)^{\frac{s-j}{2}} \binom{\frac{j(p-1)}{2} - 1}{\frac{s-j}{2}} Q_{(r+ps-pj)(p-1)} \beta Q_{j(p-1)} \\
&= \varphi(\mathrm{tr}_{g\oplus g}(\beta_{g,g}))^{\frac{p-1}{2}} \left(\tfrac{p-1}{2}!\right) \sum_i (-1)^{\frac{r-1-i+r(p-1)}{2}} \binom{\frac{i(p-1)}{2}}{\frac{r-1+s(p-1)-i}{2}} \beta Q_{(r-1+ps-pi)(p-1)} Q_{i(p-1)} \\
&\quad - q^{\frac{p-1}{2}} \sum_i (-1)^{\frac{r-1+s(p-1)-i}{2}} \binom{\frac{i(p-1)}{2} - 1}{\frac{r-1+s(p-1)-i}{2}} Q_{(r+ps-pi)(p-1)} \beta Q_{i(p-1)},
\end{aligned}$$

例如，我们将 $Q_{2k}\beta Q_{2k'}$ 记作 $\theta(e_{2k} \otimes e^p_{2k'-1}) \otimes \iota^{p^2}$.。再次注意，对于每个非零的 Dyer–Lashof 运算复合，我们都有 r和 s 奇偶性相反，而 i 和 j 与 s具有相同的奇偶性。这确保了上述公式中的所有分数都是整数。

注意，右侧第二项中的二项式系数除非满足

$$\tfrac{r-1+s(p-1)+2}{p} \leq i \leq r + s(p-1) - 1,$$

左侧的二项式系数除非满足

$$\tfrac{s+2}{p} \leq j \leq s.$$

假设 $r \geq s$ 可确保

$$s < s + \tfrac{1}{p} = \tfrac{ps+1}{p} \leq \tfrac{r+1+s(p-1)}{p},$$

因此，等式两边不会出现相同的项。

现在假设 $s = 2p^t$，其中 $t > 0$。将 j 替换为 $2j$（因为我们可以假设 j 和 s 具有相同的奇偶性）后，左侧的二项式系数变为

$$\binom{j(p-1) - 1}{p^t - j},$$

根据引理 6.11，除非 $j = p^t$，否则该系数为 0。此外，将 i 替换为 $2i$ 后，右侧第一项中的二项式系数变为

$$\binom{i(p-1)}{\frac{r-1}{2} + p^t(p-1) - i}.$$

由于 $\beta Q_{(r-1+ps-2pi)(p-1)} = 0$ 除非 $r - 1 + ps - 2pi > 0$，这意味着

$$pi - \tfrac{r-1}{2} - p^t(p-1) < p^t,$$

因此，引理 6.11 意味着

$$\binom{i(p-1)}{\frac{r-1}{2}+p^t(p-1)-i} \equiv \binom{(i-p^t)(p-1)}{\frac{(r-1)}{2}-i} \bmod p$$

当 $(r-1)/2-i \geq 0$；当 $(r-1)/2-i < 0$ 时，利用卢卡斯定理的一个初等论证表明，左边必为 0（右边显然也为 0）。对右边的第二项作类似论证可得

$$\binom{i(p-1)-1}{\frac{(r-1)}{2}+p^t(p-1)-i} \equiv \binom{i(p-1)-p^t(p-1)-1}{\frac{r-1}{2}-i} \bmod p$$

当 $r+ps-pi \geq 0$ 时，且当 $r+ps-pi<0$ 时，$Q_{(r+ps-pi)(p-1)}$ 消失。因此，我们已经证明，当 $s=2p^t$ 时，

$$Q_{r(p-1)}\beta Q_{s(p-1)} = q_{g,r}\sum_i t_{r,s,i}\tfrac{(i-s)(p-1)}{pi-s(p-1)-r+1}\beta Q_{(r-1+ps-pi)(p-1)}Q_{i(p-1)} - q^{\frac{p-1}{2}}(-1)^{\frac{s(p-1)}{2}}\sum_i t_{r,s,i}Q_{(r+ps-pi)(p-1)}\beta Q_{i(p-1)},$$

其中

$$q_{g,r} = \varphi(\mathrm{tr}_{g\oplus g}(\beta_{g,g}))^{\frac{p-1}{2}}\left(\tfrac{p-1}{2}!\right)(-1)^{\frac{r(p-1)}{2}},$$

$q = \varphi(\mathrm{tr}_{g\oplus g}(\beta_{g,g}))$ 并且

$$t_{r,s,i} = (-1)^{\frac{r-i-1}{2}}\binom{\frac{(i-s)(p-1)}{2}-1}{\frac{r-1-i}{2}}.$$

为证明一般的 s 情形，令

$$\beta Q_{r,s,g,n} := Q_{r(p-1)}\beta Q_{s(p-1)} - q_{g,r}\sum_i t_{r,s,i}\tfrac{(i-s)(p-1)}{pi-s(p-1)-r+1}\beta Q_{(r-1+ps-pi)(p-1)}Q_{i(p-1)} + q^{\frac{p-1}{2}}(-1)^{\frac{s(p-1)}{2}}\sum_i t_{r,s,i}Q_{(r+ps-pi)(p-1)}\beta Q_{i(p-1)}.$$

再一次，设 Y_k 和 y 如引理 6.12 中所述。外部 Cartan 公式表明

$$\beta Q_{r',s',g,n-k}(x\otimes y) \mapsto (-1)^{\frac{k(p-1)}{2}}\beta Q_{r,s,g,n}(x)\otimes y$$

在适当态射诱导的映射下 $((g\oplus \mathbb{1}_G)^p)^p \to (g^p)^p \oplus \mathbb{1}_G$ 对于 $r'=r+k$, $s'=s+k$。选取 $k>0$ 使得 $s'=2p^t$，便得到

$$\beta Q_{r',s',g,n-k}(x\otimes y) = 0,$$

因此 $\beta Q_{r,s,g,n}(x) = 0$ 也成立。这证明了第二对 Adem 关系。□

证明（定理 6.5 的陈述 viii 和 ix）。最后，我们证明陈述 viii。设 $X=\Sigma^g, {}^{n+1}\mathbb{F}_\varphi$，并设 Y 如构造 6.8 中所述。照例，我们记 ι_n 为 $1\in(\Omega X)(g)_n$，并记 ι_{n+1} 为 $1\in X(g)_{n+1}$。根据 σ 的定义，我们看到，要证明

$$\sigma Q_{i(p-1)} = (-1)^{\frac{n(p-1)}{2}}\left(\tfrac{p-1}{2}\right)!\,Q_{(i-1)(p-1)},$$

只需找到一个链 $y\in(W\otimes_{C_p}Y^{\circledast p})(g^p)$，其在 $(W\otimes_{C_p}X^{\circledast p})(g^p)$ 中的像为

$$(-1)^{\frac{n(p-1)}{2}}\left(\tfrac{p-1}{2}\right)!\,e_{(i-1)(p-1)}\otimes\iota_{n+1}^p$$

并且使得 $d(y) = e_{i(p-1)} \otimes \iota_n^p$。这样的 y 可完全按照 [May70, 中定理 3.1 的证明来构造，其中 May 称为 a 和 b 的类分别由 ι_{n+1} 和 ι_n 替代，而 y 是 May 对 c 的记法（对于 $j = i(p-1)$。）

同样，为了证明

$$\sigma\beta Q_{i(p-1)} = -(-1)^{\frac{n(p-1)}{2}} \left(\tfrac{p-1}{2}\right)!\beta Q_{(i-1)(p-1)},$$

我们使用 May 所称的 c' 的构造来构造一个链

$$y' \in (W \otimes_{C_p} Y^{\circledast p})(g^p)$$

其在 $(W \otimes_{C_p} X^{\circledast p})(g^p)$ 中的像为

$$(-1)^{\frac{n(p-1)}{2}} \left(\tfrac{p-1}{2}\right)! \, e_{(i-1)(p-1)-1} \otimes \iota_{n+1}^p$$

并且满足 $d(y') = -e_{i(p-1)-1} \otimes \iota_n^p$。

陈述 ix. 直接由 viii. 以及图 6.7 的交换性得出。 □

6.2. 上标记。更常见的做法是对 Dyer-Lashof 运算重新编号，使这些运算提升次数。这样我们便可以定义一个作用于 $\mathbb{F}_\varphi$-代数的 $\mathbb{F}_\varphi$运算分次代数，并使其作用在该代数的同调上。由于我们的同调按 (ob G)$\times\mathbb{Z}$ 分次，因此上标运算也具有双重分次。

定义 6.19。对于 $s \in \mathbb{Z}$ 和 $g \in$G，令

$$Q_g^s \colon H_{g,n} \to H_{g^p, n+2s(p-1)}$$

定义为

$$Q_g^s = (-1)^s v(n) Q_{(2s-n)(p-1)},$$

其中

$$v(n) = (-1)^{\frac{n(n-1)(p-1)}{4}} [\left(\tfrac{p-1}{2}\right)!]^n,$$

并且 $Q_{(2s-n)(p-1)}$ 是定义 6.3 中的低指标运算。当 $2s - n < 0$ 时， $Q_{(2s-n)(p-1)}$ 定义为零。类似地，若 $s \in \mathbb{Z}$，令

$$\beta Q_g^s \colon H_{g,n} \to H_{g^p, n+2s(p-1)-1}$$

定义为

$$\beta Q_g^s = (-1)^s v(n) \beta Q_{(2s-n)(p-1)},$$

其中，若 $2s - n \leq 0$，则 $\beta Q_{(2s-n)(p-1)} = 0$。我们将运算 Q_g^s 和 βQ_g^s 称为经典或非扭曲 Dyer–Lashof 运算。

对于 $s \in \mathbb{Z}$，令

$$Q_g^{s+\frac{1}{2}} \colon H_{g,n} \to H_{g^p, n+(2s+1)(p-1)}$$

定义为

$$Q_g^{s+\frac{1}{2}} = (-1)^s [\left(\tfrac{p-1}{2}\right)!]^3 v(n) Q_{(2s+1-n)(p-1)},$$

并令

$$\beta Q_g^{s+\frac{1}{2}} \colon H_{g,n} \to H_{g^p, n+(2s+1)(p-1)-1}$$

定义为

$$\beta Q_g^{s+\frac{1}{2}} = (-1)^s [\left(\tfrac{p-1}{2}\right)!]^3 v(n) \beta Q_{(2s+1-n)(p-1)}.$$

我们将 $Q_g^{s+\frac{1}{2}}$和 $\beta Q_g^{s+\frac{1}{2}}$称为扭曲 Dyer–Lashof 运算。

注记 6.20。这个定义值得作几点说明。

i. 根据定理 6.5，作用于 $H_{g,n}$ 的非扭曲运算 Q_g^s，除非 $\varphi(\mathrm{tr}_{g\oplus g}(\beta_{g,g})) = 1$，否则均为零；作用于 $H_{g,n}$ 的扭曲运算 $Q_g^{s+\frac{1}{2}}$，除非 $\varphi(\mathrm{tr}_{g\oplus g}(\beta_{g,g})) = -1$，否则均为零。不过值得注意的是，两类运算对所有 g 都有定义。

ii. 在处理这些常数时，以下一点很有用：

$$[\left(\tfrac{p-1}{2}\right)!]^2 \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}+1} \bmod p,$$

因此，$\left(\frac{p-1}{2}\right)!$ 要么是 -1，要么是四次本原单位根，具体取决于 p 模 4 是 1 还是 3。

iii. 我们通常会省略分数记法，转而写作 Q_g^s，其中 s 是整数或半整数。我们用 $\mathbb{Z}+\frac{1}{2}$ 表示半整数的集合。

iv. 非扭曲运算的定义方式与经典 Dyer–Lashof 运算完全相同（不过现在要记录 G 分次）。当 φ 是平凡同态时，此定义中的常数选择确保

- 如果 $2s = n$ 和 $x \in H_{g,\ n}(X)$，那么 $Q_g^s(x) = x^p$
- 悬挂与 Q_g^s 可交换（不包括 ix. 中的常数）。
- Cartan 公式中的符号相互抵消。

我们的选择确保扭曲运算满足前两个条件；不过，尽管采用我们选择的常数后，Cartan 公式中的符号确实有所简化，但在某些情况下仍会出现 -1。这一选择也与非扭曲运算的惯常常数选择一致，因为我们能够同时陈述扭曲运算和非扭曲运算的关系。当然，逻辑上可能还有其他常数选择。

现在我们可以改写上标运算的定理 6.5。这个定理应与 E_∞-空间在 [CLM76], 中的经典定理非常相似，不过它没有陈述 Nishida 关系，因为在我们的代数框架中不一定存在 Steenrod 运算。Kudo 的一个版本的横截定理将在第 7.3 节陈述。

定理 6.21。$\mathrm{Alg}_{E_\infty}(\mathrm{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi})$ 上的 Dyer–Lashof 运算由自然变换组成，

$$Q_g^s\colon H_{g,n} \to H_{g^p,n+2s(p-1)}$$
$$\beta Q_g^s\colon H_{g,n} \to H_{g^p,n+2s(p-1)-1}$$

对每个满足以下关系的 $s \in \mathbb{Z} \sqcup \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$。

i. 若 $\varphi(\mathrm{tr}_{g\oplus g}(\beta_{g,\ g})) = 1$，则只要满足 $s \in \mathbb{Z}+\frac{1}{2}$，就有 $Q_g^s = 0$；若 $\varphi(\mathrm{tr}_{g\oplus g}(\beta_{g,\ g})) = -1$，则只要满足 $s \in \mathbb{Z}$，就有 $Q_g^s = 0$。ii.（弗罗贝尼乌斯线性性）对于 x、$y \in H_{g,\ n}(X)$ 和 $t \in \mathbb{F}$，以及 iii. 若满足 $2s < n$，则 $Q_g^s = 0$ 在 $H_{g,\ n}$ 上。

$$Q_g^s(tx+y) = t^p Q_g^s(x) + Q_g^s(y)$$

$$\beta Q_g^s(tx+y) = t^p \beta Q_g^s(x) + \beta Q_g^s(y).$$

iv. 若满足 $2s \le n$，则 $\beta Q^s_g = 0$ 在 $H_{g,\ n}$ 上。 v. 若 $x \in H_{g,\ n}(X)$ 且满足 $n = 2s$，则 $Q^s_g(x) = x^p$。 vi. 若 $\mathbb{I} \in H_{\mathbb{I}^G,\ 0}(X)$ 是单位元，则 $Q^s_{\mathbb{I}^G}(\mathbb{I}) = 0$，且在满足 $s > 0$时，$\beta Q^s_{\mathbb{I}^G}(\mathbb{I}) = 0$。 vii.（内部和外部 Cartan 公式）若 $x \in H_{g,\ n}(X)$ 且 $y \in H_{h,\ m}(X)$，则对于 s、j、$k \in \mathbb{Z} \sqcup \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$，洗牌映射

$$H_{(g\oplus h)^p,*}(X) \to H_{g^p\oplus h^p,*}(X)$$

取

$$Q^s_{g\oplus h}(xy) \mapsto \sum_{j+k=s} (-1)^{2jk(p-1)} Q^j_g(x) Q^k_h(y)$$

and

$$\beta Q^s_{g\oplus h}(xy) \mapsto \sum_{j+k=s} (-1)^{2jk(p-1)} \left(\beta Q^j_g(x) Q^k_h(y) + (-1)^n Q^j_g(x) \beta Q^k_h(y)\right).$$

类似地，若 $x \in H_{g,\ n}(X)$ 和 $y \in H_{h,\ m}(Y)$，则对于 s、j、$k \in \mathbb{Z} \sqcup \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$，洗牌映射

$$H_{g\oplus h^p,*}(X \circledast Y) \to H_{g^p\oplus h^p,*}(X \circledast Y)$$

取

$$Q^s_{g\oplus h}(x \otimes y) \mapsto \sum_{j+k=s} (-1)^{2jk(p-1)} Q^j_g(x) \otimes Q^k_h(y)$$

and

$$\beta Q^s_{g\oplus h}(x \otimes y) \mapsto \sum_{j+k=s} (-1)^{2jk(p-1)} \left(\beta Q^j_g(x) \otimes Q^k_h(y) + (-1)^n Q^j_g(x) \otimes \beta Q^k_h(y)\right).$$

viii.（Adem 关系）若 $r > ps$，则

$$Q^r_{g^p} Q^s_g = \varphi(\mathrm{tr}_{g\oplus g}(\beta_{g,g}))^{\frac{p-1}{2}} \sum_i (-1)^{r-i} \binom{(i-s)(p-1)-1}{r-(p-1)s-i-1} Q^{r+s-i}_{g^p} Q^i_g$$

and

$$\beta Q^r_{g^p} Q^s_g = \varphi(\mathrm{tr}_{g\oplus g}(\beta_{g,g}))^{\frac{p-1}{2}} \sum_i (-1)^{r-i} \binom{(i-s)(p-1)-1}{r-(p-1)s-i-1} \beta Q^{r+s-i}_{g^p} Q^i_g;$$

if $r \ge ps$, *then*

$$\begin{aligned} Q^r_{g^p} \beta Q^s_g = &\sum_i (-1)^{r-i} \binom{(i-s)(p-1)}{r-(p-1)s-i} \beta Q^{r+s-i}_{g^p} Q^i_g \\ &- \varphi(\mathrm{tr}_{g\oplus g}(\beta_{g,g}))^{\frac{p-1}{2}} \sum_i (-1)^{r-i} \binom{(i-s)(p-1)-1}{r-(p-1)s-i} Q^{r+s-i}_{g^p} \beta Q^i_g \end{aligned}$$

and

$$\beta Q^r_{g^p} \beta Q^s_g = -\varphi(\mathrm{tr}_{g\oplus g}(\beta_{g,g}))^{\frac{p-1}{2}} \sum_i (-1)^{r-i} \binom{(i-s)(p-1)-1}{r-(p-1)s-i} \beta Q^{r+s-i}_{g^p} \beta Q^i_g.$$

ix. 若 X，$\Omega X \in \mathrm{Alg}_{E_\infty}(\mathrm{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi})$ 具有兼容的 E_∞ 结构，即图 6.7 的下半部分可交换，则悬挂同构 $\Sigma\colon H_{*,\ *}(\Omega X) \to H_{*,\ *+1}(X)$ 满足

$$\Sigma Q^s_g(x) = Q^s_g(\Sigma x)$$

and

$$\Sigma\beta Q_g^s(x) = -\beta Q_g^s(\Sigma x).$$

证明。通过对运算重新编号并仔细化简常数，可直接由定理 6.5 得出。□

注记 6.22. 根据注5.11，我们知道，如果 x 的双次数为 (g,n)，且 $(-1)^n\varphi(\mathrm{tr}_{g\oplus g}(\beta_{g,g})) = -1$，并且根据定理 6.5，我们知道 $Q_{\mathbb{I}^G}(x) = 0$，如果 $(-1)^n\varphi(\mathrm{tr}_{g\oplus g}(\beta_{g,g})) = -1$。因此，在这种情况下，命题 v. 显然成立。

根据公式 2.2，我们知道

$$\varphi(\mathrm{tr}_{g^p\oplus g^p}(\beta_{g^p,g^p})) = \varphi(\mathrm{tr}_{g\oplus g}(\beta_{g,g}))^p = \varphi(\mathrm{tr}_{g\oplus g}(\beta_{g,g})),$$

其中，第二个等式是由以下事实得出的：$\varphi(\mathrm{tr}_{g\oplus g}(\beta_{g,g})) = \pm 1$。因此，在考虑上标运算 $Q^r_{g^p}Q^s_g$的复合时，我们可以假设 $r,s\in\mathbb{Z}$，如果 $\varphi(\mathrm{tr}_{g\oplus g}(\beta_{g,g})) = 1$，并且 $r,s\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}$，如果 $\varphi(\mathrm{tr}_{g\oplus g}(\beta_{g,g})) = -1$。也就是说，非扭曲运算与扭曲运算的复合总是零。

7. A basis for the homology of free E_∞-algebras

现在，我们希望用 $\mathbb{F}_\varphi$ Dyer–Lashof 运算完整描述自由E_∞代数的 $\mathbb{F}_\varphi$-同调。这无疑有助于计算；但鉴于命题 5.3，它也给出了所有运算的分类。特别是，我们的结果将表明，Dyer–Lashof 运算与乘积共同生成所有同调运算。

本节将通过给出一个显式基来计算作为向量空间的同调。与这类计算通常的做法一样，一次性计算整个同调$H_{*,\ *}(E_\infty(X))$，比起分别计算每个 (g,n) 的 $H_{g,\ n}(E_\infty(X))$ 要容易。因此，我们实际上将把 $H_{*,\ *}(E_\infty(X))$ 描述为 $\mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}(\mathsf{GrVect}^{\mathsf{G}}_{\mathbb{F}})$ 中的一个自由交换幺半群对象。

在陈述并证明这一结果之前，我们将在此设置下严格定义基和自由交换代数，并构造一个 Serre 谱序列的类似物，以便在证明中使用。

7.1. 商。在本节和下一节中，我们将频繁使用商；在此语境下，我们通过泛性质或余极限来定义商。令 $\mathsf{Set}^{\mathrm{ob}\,\mathsf{G}\times\mathbb{Z}}$表示（ob G $\times\mathbb{Z}$）-分次集合的范畴；等价地，它可以描述为从 ob G$\times\mathbb{Z}$ 到 Set 的函子范畴，其中 ob G$\times\mathbb{Z}$ 表示这样一个范畴：其对象是 ob G $\times\mathbb{Z}$ 的元素，且没有非单位元态射。存在一个自由-遗忘伴随

$$\mathsf{Set}^{\mathrm{ob}\,\mathsf{G}\times\mathbb{Z}} \rightleftarrows \mathsf{Mod}_{\mathbb{F}_\varphi}(\mathsf{GrVect}^{\mathsf{G}})$$

它将一个分次集合 S 映射为

$$\mathbb{F}_\varphi\{S\} \coloneqq \bigoplus_{x\in S}\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi\{x\},$$

其中 $\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi\{x\}$ 表示 $\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi$ 当 x 具有双次数 $|x| = (g,n)$ 时。

定义 7.1. 假设我们有一个自由-遗忘伴随

$$L\colon \mathsf{Mod}_{\mathbb{F}_\varphi}(\mathsf{GrVect}^{\mathsf{G}}) \rightleftarrows \mathsf{D}$$

到一个（带基点的）范畴 D，其中左伴随记为 $L_\circ$ 若 $V \in \mathsf{D}$，且我们有一个映射 $L(\mathbb{F}_\varphi\{S\}) \to V$（这等价于有一个分次集合的映射 $S \to V$），那么我们将 V 对集合 S 取商定义为对象 $V/S \in \mathsf{D}$，以及一个映射 $V \to V/S$，使得复合

$$L(\mathbb{F}_\varphi\{S\}) \to V \to V/S$$

为零，并满足以下泛性质：若 $V \to V'$ 是另一个映射，且 $L(\mathbb{F}_\varphi\{S\}) \to V \to V'$ 为零，则 $V \to V'$ 唯一地分解为

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V/S \\ & \searrow & \downarrow \\ & & V'. \end{array}$$

要看出商存在，注意图表的推出

$$\begin{array}{ccc} L(\mathbb{F}_\varphi\{S\}) & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & \\ L(0) & & \end{array}$$

满足此泛性质。只要 D 可以描述为某个筛滤单子上的代数（参见 [GKRW18a] 的引理 3.5），这样的推出就存在；我们的所有例子都符合这一条件。

7.2. 交换的 $\mathbb{F}_\varphi$-代数。现在，我们为 $\mathsf{Set}^{\mathrm{ob}\,\mathsf{G}\times\mathbb{Z}}$ 中的一个分次集合构造自由交换代数，并给出其在 $\mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}(\mathsf{GrVect}^{\mathsf{G}})$ 中的底层对象的一组基。

令 $\mathsf{Alg}^{\mathbb{F}_\varphi}(\mathsf{GrVect}^{\mathsf{G}})$ 表示 $\mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}(\mathsf{GrVect}^{\mathsf{G}})$ 中幺半群对象构成的范畴。考虑自由-遗忘伴随

$$\mathsf{Mod}_{\mathbb{F}_\varphi}(\mathsf{GrVect}^{\mathsf{G}}) \rightleftarrows \mathsf{Alg}_{\mathbb{F}_\varphi}(\mathsf{GrVect}^{\mathsf{G}}),$$

其中，我们可以取由张量代数给出的自由函子

$$V \mapsto T(V) \coloneqq \bigoplus_{k\geq 0} V^{\circledast k}.$$

令 $\mathsf{CAlg}^{\mathbb{F}_\varphi}(\mathsf{GrVect}^{\mathsf{G}})$ 表示 $\mathsf{Alg}^{\mathbb{F}_\varphi}(\mathsf{GrVect}^{\mathsf{G}})$ 中由 $\mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}(\mathsf{GrVect}^{\mathsf{G}})$ 内交换幺半群对象构成的全子范畴。于是存在一个函子

$$\mathsf{Alg}_{\mathbb{F}_\varphi}(\mathsf{GrVect}^{\mathsf{G}}) \to \mathsf{CAlg}_{\mathbb{F}_\varphi}(\mathsf{GrVect}^{\mathsf{G}})$$

它是包含函子的左伴随，其定义是将代数$V \in \mathsf{Alg}^{\mathbb{F}_\varphi}(\mathsf{GrVect}^{\mathsf{G}})$ 映到 V 关于 $(\mathrm{ob}\,\mathsf{G} \times \mathbb{Z})$-分次集合 S 的商，其中该集合包含

$$v_1v_2 - (-1)^{n_1n_2}\beta^{-1}_{g_1,g_2}(v_2v_1)$$

对每个 $v_i \in V(g_i)_{n_i}$，其中 $(g_i, n_i) \in \mathrm{ob}\,\mathsf{G} \times \mathbb{Z}_\circ$ 这里，$V(g_i)_{n_i}$ 表示 $V(g_i)$ 的 n_i-分次分量，v_iv_j 表示 $v_i \otimes v_j$ 在幺半群乘法映射下的像，而 $\beta^{-1}_{g_1,\ g_2}(v_2v_1)$ 表示 v_2v_1 在由编织态射 $\beta_{g_1,\ g_2}$: $g_1 \oplus g_2 \to g_2 \oplus g_1$. 的逆诱导的映射下的像

商映射是左伴随，这一点可由商的泛性质推出：如果 $V' \in \mathsf{CAlg}^{\mathbb{F}_\varphi}(\mathsf{GrVect}^{\mathsf{G}})$，那么 V' 是交换的，因此每个 $V \to V'$ in $\mathsf{Alg}^{\mathbb{F}_\varphi}(\mathsf{GrVect}^{\mathsf{G}})$ 中的映射都会将 S 映到零。于是，存在唯一映射 $V/S \to V'$

in $\mathrm{Alg}^{\mathbb{F}_\varphi}(\mathrm{GrVect}^G)$ 中的映射，而由于 V/S 和 V' 都是交换的，这也是 $\mathrm{CAlg}^{\mathbb{F}_\varphi}(\mathrm{GrVect}^G)$ 中的映射。由此得到一个映射

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Alg}}(V, V') \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{CAlg}}(V/S, V')$$

也就是说，它是由商映射 $V \to V/S$ 预复合所给出的映射的逆映射。

定义 7.2。给定 $V \in \mathrm{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}(\mathrm{GrVect}^G)$，$V$上的自由交换代数是 V在复合下的像

$$\mathsf{Mod}_{\mathbb{F}_\varphi}(\mathsf{GrVect}^G) \to \mathsf{Alg}_{\mathbb{F}_\varphi}(\mathsf{GrVect}^G) \to \mathsf{CAlg}_{\mathbb{F}_\varphi}(\mathsf{GrVect}^G).$$

若 $U \in \mathrm{Set}^{\mathrm{ob}\, G \times \mathbb{Z}}$，则 U上的自由交换代数，记作 $\mathcal{S}(U)$，就是 $\mathbb{F}_\varphi\{U\}$上的自由交换代数。

我们可以将基的概念推广到 $\mathbb{F}_\varphi$ 上的模和代数。

定义 7.3。若 $V \in \mathrm{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}(\mathrm{GrVect}^G)$，则 V的基是一个集合 $S \in \mathrm{Set}^{\mathrm{ob}\, G \times \mathbb{Z}}$，连同一个同构 $\mathbb{F}_\varphi\{S\} \to V$。$V \in \mathrm{Alg}^{\mathbb{F}_\varphi}(\mathrm{GrVect}^G)$的基，是 V在遗忘函子到 $\mathrm{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}(\mathrm{GrVect}^G)$ 下的像的基。

我们需要描述集合上的自由交换代数的基，因此给出以下 $\mathrm{Alg}^{\mathbb{F}_\varphi}(\mathrm{GrVect}^G)$ 中商的描述。

命题 7.4. 设 $V \in \mathrm{Alg}^{\mathbb{F}_\varphi}(\mathrm{GrVect}^G)$ 和 $X \in \mathrm{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}(\mathrm{GrVect}^G)$，并且有一个映射 $X \to V$ in $\mathrm{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}(\mathrm{GrVect}^G)$。则其推出为

$$\begin{array}{ccc} V \circledast X \circledast V & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & \\ 0 & & \end{array}$$

在 $\mathrm{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}(\mathrm{GrVect}^G)$ 中可以赋予幺半群结构，使其成为以下对象的推出

$$\begin{array}{ccc} T(X) & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & \\ T(0) & & \end{array}$$

在 $\mathrm{Alg}^{\mathbb{F}_\varphi}(\mathrm{GrVect}^G)$ 中。

该命题是 [SS00]，中引理 6.2 证明所述更一般构造的特例，因此这里略去证明。

注意，$\mathrm{Set}^{\mathrm{ob}\, G \times \mathbb{Z}}$ 也可以利用集合的笛卡尔积赋予 Day 卷积幺半结构。结合 Set 中的对称性与 ob G $\times\, \mathbb{Z}$ 上的（平凡）编织，我们得到一个对称幺半群结构。我们再次得到一个自由-遗忘伴随

$$\mathsf{Set}^{\mathrm{ob}\, G \times \mathbb{Z}} \rightleftarrows \mathsf{Mon}(\mathsf{Set}^{\mathrm{ob}\, G \times \mathbb{Z}}) \rightleftarrows \mathsf{CMon}(\mathsf{Set}^{\mathrm{ob}\, G \times \mathbb{Z}}),$$

其中，Mon 表示幺半群对象，CMon 表示交换幺半群对象。自由函子 $\mathrm{Set}^{\mathrm{ob}\, G \times \mathbb{Z}} \to \mathrm{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}(\mathrm{GrVect}^G)$ 是（强）幺半群函子，因此它诱导出一个函子

$$\mathsf{Mon}(\mathsf{Set}^{\mathrm{ob}\, G \times \mathbb{Z}}) \to \mathsf{Alg}_{\mathbb{F}_\varphi}(\mathsf{GrVect}^G)$$

它是遗忘函子的左伴随。特别地，集合$S \in \mathsf{Set}^{\mathrm{ob}\,\mathsf{G}\times\mathbb{Z}}$上的自由代数同构于 $\mathbb{F}_\varphi\{T(S)\}$，其中 $T(S) \in \mathsf{Mon}(\mathsf{Set}^{\mathrm{ob}\,\mathsf{G}^{\times\mathbb{Z}}})$ 是 S 上的自由幺半群。

我们可以结合命题 7.4，给集合 U 上的自由交换代数构造一个非典范基。给 U 一个全序，并令 $C(U)$ 表示 $T(U)$ 中形如 $s_1 \cdots s_j$ 的元素，其中 $s_1 \le \cdots \le s_j$；并且只有在 $|s_i| = (g,n)$ 时，我们才可能有 $s_i = s_{i+1}$，其中 $(-1)^n\varphi(\mathrm{tr}^{g\oplus g}(\beta_{g,\ g})) = 1$。

引理 7.5。集合 $C(U)$ 是 U 上自由交换代数 $\mathcal{S}(U)$ 的一个基。

为证明这一点，注意到由于 $C(U)$ 是 $T(U)$ 的子集，我们有一个映射

$$\mathbb{F}_\varphi\{C(U)\} \hookrightarrow \mathbb{F}_\varphi\{T(U)\} \to \mathcal{S}(U),$$

其中后一个映射是一个商映射。不难证明这个映射是一个同构。

若 $X \in \mathsf{Alg}_{E_\infty}(\mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}(\mathsf{Ch}^{\mathsf{G}}))$，则第 5.3 节定义的乘积赋予 $H_{*,\ *}(X)$ 一个位于 $\mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}(\mathsf{GrVect}^{\mathsf{G}})$ 中的交换幺半群结构。

7.3. Serre 谱序列的类比。在构造 6.8 中，我们为 Y 的映射锥 $X \to X$（针对任意 $X \in \mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}$）上的 $E_\infty(Y)$ 定义了一个滤过（实际上，我们在那里使用的是恒等映射 $\Omega X \to \Omega X$，不过当然也可以改用 X）。下一节中，我们将使用与此滤过相关联的谱序列，因此这里先证明关于它的若干有用事实。

在本节余下部分中，我们将范畴 $\mathsf{Ch}^{\mathsf{G}}_{\mathbb{F}}$ 替换为等价范畴 $\mathsf{Ch}(\mathsf{Vect}^{\mathsf{G}}_{\mathbb{F}})$，即阿贝尔范畴 $\mathsf{Vect}^{\mathsf{G}}_{\mathbb{F}}$ 中的 $\mathbb{Z}$-分次链复形范畴。我们仍将此范畴中的系数系统记作 $\mathbb{F}_\varphi$，并考虑以下范畴

$$\mathsf{Mod}_{\mathbb{F}_\varphi}(\mathsf{Ch}(\mathsf{Vect}^{\mathsf{G}}_{\mathbb{F}}))$$

$\mathsf{Ch}(\mathsf{Vect}^{\mathsf{G}}_{\mathbb{F}})$ 中 $\mathbb{F}_\varphi$ 上的模范畴。此范畴中的幺半结构仍记作 $\circledast$。给定 $X \in \mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}(\mathsf{Ch}(\mathsf{Vect}^{\mathsf{G}}_{\mathbb{F}}))$，我们用 $H_n(X)$ 表示函子 $\mathsf{G} \to \mathsf{Vect}_{\mathbb{F}}$；该函子在 $g \in \mathsf{G}$ 上的取值为 $H_n(X(g)) = H_{g,\ n}(X)$。类似地，我们将范畴 $\mathsf{GrVect}^{\mathsf{G}}$ 替换为等价范畴 $(\mathsf{Vect}^{\mathsf{G}})^{\mathbb{Z}}$。

我们在 $E_\infty(Y)$ 上的滤过实际上由每个 k 对应的 $\mathsf{Sym}^k(Y)$ 上的滤过组成，目前我们分别考察这些滤过。$\mathsf{Sym}^k(Y)$ 上的滤过是有界的，因此相应的谱序列收敛到 $H_*(\mathsf{Sym}^k(Y))$。由引理 4.3 可知，当 $k \ge 1$ 时，$H_*(\mathsf{Sym}^k(Y)) = 0$。对 k 取余积，得到一个电荷分次谱序列 E，它收敛到 $H_*(E_\infty(Y))$。我们用 $E\langle k\rangle$ 表示该谱序列中荷为 k 的分量；也就是说，它是由 $\mathsf{Sym}^k(Y)$ 上的滤过得到的谱序列。

引理 7.6. 荷为 k 的谱序列的 E^1 页同构于

$$E^1_{t,q}\langle k\rangle \cong \bigoplus_r H_{t+q-r}(\mathrm{Sym}^t(\Sigma X)) \circledast H_r(\mathrm{Sym}^{k-t}(X))$$

在 $\mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}(\mathsf{Vect}^{\mathsf{G}}_{\mathbb{F}})$ 中。

请注意这里不寻常的双分次：第一个分次对应于 $E_\infty(\Sigma X)$ 的电荷分次，第二个分次对应于张量积的同调次数。谱序列的形状可参见图 7.3。

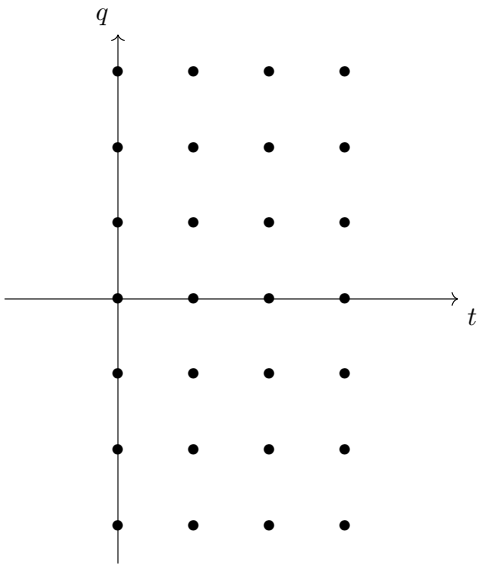


FIGURE 1. E^1_t的图，$_q\langle 3\rangle$。点表示可能非零的类。特别是，所有非零类都出现在 $0 \le t \le 3$。位于 $(0,q)$ 的点对应于 $H_q(\mathrm{Sym}^3(X))$，位于 $(3,q)$ 的点对应于 $H_{3+q}(\mathrm{Sym}^3(\Sigma X))$。

证明。首先注意，若 gr 表示伴随分次，则 $\mathrm{gr}\, Y \cong X \oplus \Sigma X$；因此根据命题 4.9，

$$H_*(E_\infty(\mathrm{gr}\, Y)) \cong H_*(E_\infty(X)) \circledast H_*(E_\infty(\Sigma X)).$$

此外，

$$\mathrm{gr}\, \mathrm{Sym}^k(Y) \cong \mathrm{Sym}^k(\mathrm{gr}\, Y),$$

其中，$F_i\,\mathrm{Sym}^k(Y)/F_{i-1}\,\mathrm{Sym}^k(Y)$ 对应于 $\mathrm{Sym}^k(\mathrm{gr}\, Y)$ 中 $F_1Y/F_0Y \cong \Sigma X$ 因子重复出现 i 次的分量。取同调后，我们得到

$$\begin{aligned} E^1_{t,q}\langle k\rangle &\cong H_{t+q}(F_t\,\mathrm{Sym}^k(Y)/F_{t-1}\,\mathrm{Sym}^k(Y)) \\ &\cong H_{t+q}(\mathrm{Sym}^t(\Sigma X) \circledast \mathrm{Sym}^{k-t}(X)) \\ &\cong H_{t+q-*}(\mathrm{Sym}^t(\Sigma X)) \circledast H_*(\mathrm{Sym}^{k-t}(X)), \end{aligned}$$

由此得到谱序列的 E^1 页所需的描述。 □

照例，通过选取乘积的一个链代表元，我们得到一个映射

$$E_\infty(Y) \circledast E_\infty(Y) \to E_\infty(Y)$$

特别会将其映射为

$$F_i\,\mathrm{Sym}^k(Y) \circledast F_j\,\mathrm{Sym}^\ell(Y) \to F_{i+j}\,\mathrm{Sym}^{k+\ell}(Y).$$

这赋予谱序列 E 乘法结构。上面的论证表明，伴随分次 E^0 与 $E_\infty(\Sigma X \oplus X)$同构，而且，

E^0 上的乘法在此同构下与 $E_\infty(\Sigma X \oplus X)$上的链级乘法相容。由于弱等价

$$E_\infty(\Sigma X \oplus X) \to E_\infty(\Sigma X) \circledast E_\infty(X)$$

由于命题 4.9 的映射是 E_∞-代数映射，根据运算的自然性，该映射保持同调上的乘积。回想一下，我们可以将张量积 $E_\infty(\Sigma X) \circledast E_\infty(X)$上的乘积描述为

$$\begin{array}{c} H_*(E_\infty(\Sigma X)) \circledast H_*(E_\infty(X)) \circledast H_*(E_\infty(\Sigma X)) \circledast H_*(E_\infty(X)) \\ \downarrow \\ H_*(E_\infty(\Sigma X)) \circledast H_*(E_\infty(\Sigma X)) \circledast H_*(E_\infty(X)) \circledast H_*(E_\infty(X)) \\ \downarrow \\ H_*(E_\infty(\Sigma X)) \circledast H_*(E_\infty(X)), \end{array}$$

其中，最后一步是分别对每个因子应用乘积。因此，我们的谱序列的 E^1 页上的乘法结构与上述乘法相容；特别地，该乘法满足莱布尼茨法则。

我们以给出 Kudo 横截定理的一个版本来结束本节[Kud56]。根据引理 7.6，我们知道

$$E^1_{k,*}\langle k\rangle \cong H_{k+*}(\mathrm{Sym}^k(\Sigma X)),$$

并且 $E^1_{t,*}\langle k\rangle = 0$ 对于 $t > k$。

定义 7.7。若一个类 $x \in H_{k+*}(\mathrm{Sym}^k(\Sigma X))$ 传递到 $y \in H_{*+k-1}(\mathrm{Sym}^k X)$，则称其为

这很合理，因为对于每个 r，$E^1_{0,*}\langle k\rangle \cong H_*(\mathrm{Sym}^k(X))$ 和 $E^1_{t,*}\langle k\rangle = 0$ if $t < 0$, so$E^r_{0,*}\langle k\rangle$ 都是 $H_*(\mathrm{Sym}^k(X))$ 的商。由于我们是在一个域上工作，商映射存在规范分裂，因此我们可以将 y 视为 $H_{*+k-1}(\mathrm{Sym}^k X)$ 中的一个元素。现在我们可以陈述迁移定理的类比结果。其证明与 [May70] 中定理 3.4 的证明非常相似。

命题 7.8. 引理 7.6 的谱序列具有以下传递类。

> i. 若 $x \in H_*(X)$，则 Σx 传递到 x。 ii. 若 $x \in H_*(\mathrm{Sym}^k(\Sigma X))$ 传递到 y，则 $Q^s x \in H_*(\mathrm{Sym}^{pk}(\Sigma X))$ 传递到 $Q^s y$，且对于任意 $s \in \mathbb{Z}\sqcup\mathbb{Z}+\frac{1}{2}$，$\beta Q^s x$ 传递到 $-\beta Q^s y$。 iii. 若 $x \in H_n(\mathrm{Sym}^k(\Sigma X))(g)$ 传递到 y，且 $\varphi(\mathrm{tr}_{g\oplus g}(\beta_{g,g}))(-1)^n = 1$,$n$，则 $x^{p-1}\otimes y$“传递”到 $-\beta Q^{\overline{2}}_g(y)$。也就是说， $x^{p-1}\otimes y$ 一直存留到第 $E^{k(p-1)}$ 页，且 $d^{k(p-1)}(x^{p-1}\otimes y) = -\beta Q^{\overline{2}}_g(y)$。

证明。根据定义，谱序列中的微分直接来自 $E_\infty(Y)$ 上的微分。特别地，传递可视为连接同态：如构造 6.8 所示，给定 $x \in H_*(\mathrm{Sym}^k(\Sigma X))$，我们可以选取一个代表它的循环，在 $\mathrm{Sym}^k(Y)$ 中选取一个提升，并应用微分得到一个映射

$$H_*(\mathrm{Sym}^k(\Sigma X)) \to H_{*-1}(F_{k-1}\,\mathrm{Sym}^k(Y)).$$

按照这种描述，只有当存在一个提升$z \in \mathrm{Sym}^k(Y)$，它代表 x 的某个循环，并且满足 $d(z) \in F_0 \mathrm{Sym}^k(Y) \cong \mathrm{Sym}^k(X)$ 时， x 才会发生传递。

因此，由 6.8 中悬挂映射的定义可知，

$$\Sigma\colon H_*(\mathrm{Sym}^k(X)) \to H_{*+1}(\mathrm{Sym}^k(\Sigma X)),$$

适当限制后，传递与悬挂互为逆运算。也就是说， Σ 的像恰好是 $H_{*+1}(\mathrm{Sym}^k(\Sigma X))$ 中的可传递元素；若$\Sigma y = x$，则 x 传递到$E^k_{0,\ *}\langle k\rangle$中的 y 的像。同样，若 x 传递到 y，则 $y \in H_*(\mathrm{Sym}^k(X))$的任意提升在悬挂后都得到 x。

由此可知，对于任意 $x \in H_*(X)$， Σx 都传递到 x 。更一般地，若x 传递到 y，则根据定理 6.21 ix.，有

$$Q^s_g(x) = \Sigma Q^s_g(y)$$

传递到 $Q^s_g(y)$，而 $\beta Q^s_g(x)$传递到 $-\beta Q^s_g(y)$。

关于 $x^{p-1} \otimes y$ 的陈述可参照 [May70]中定理 3.4 的证明，利用链级构造予以证明。□

7.4. 可容许序列。现在我们希望定义某些 Dyer–Lashof 运算的复合，以此为自由 E_∞-代数在 $\mathrm{CAlg}^{\mathbb{F}_\varphi}(\mathrm{GrVect}^{\mathsf{G}})$ 中作为对象时的同调给出一组基。

考虑元组

$$I = (\varepsilon_1, s_1, \ldots, \varepsilon_k, s_k, g),$$

其中 ε_i 是 0 或 1， $s_i \in \mathbb{Z} \sqcup (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})$（也就是说， s_i 是整数或半整数），并且 $g \in \mathrm{ob}\,\mathsf{G}$。任意这样的 I 都确定了 Dyer–Lashof 运算中的一个字

$$Q^I_g := \beta^{\varepsilon_1} Q^{s_1}_{g^{p^{k-1}}} \ldots \beta^{\varepsilon_k} Q^{s_k}_g,$$

这里我们滥用记号，令 $\beta^0 Q^s_g$ 表示 Q^s_g，令 $\beta^1 Q^s_g$ 表示 βQ^s_g。若这样的序列 I 满足以下两个条件，我们称其为可容许的：

i. if $\varphi(\mathrm{tr}_{g\oplus g}(\beta_{g,g})) = 1$, then $s_i \in \mathbb{Z}$ for all $1 \le i \le k$; if $\varphi(\mathrm{tr}_{g\oplus g}(\beta_{g,g})) = -1$, then $s_i \in (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})$ for all $1 \le i \le k$
ii. $ps_i - \varepsilon_i \ge s_{i-1}$ for all $1 < i \le k$.

空序列也可容许，并且它确定恒等运算。

注意，第一个条件确保 Q^I_g 是仅由非扭曲运算（分别仅由扭曲运算）复合而成，若 $\varphi(\mathrm{tr}_{g\oplus g}(\beta_{g,\ g})) = 1$（分别若 $\varphi(\mathrm{tr}_{g\oplus g}(\beta_{g,\ g})) = -1$）；由于非扭曲运算与扭曲运算的复合总是零，这个条件排除了那些显然因此为零的 Q^I_g。第二个条件确保 Q^I_g 不能用 Adem 关系改写。

设序列 $I = (\varepsilon_1, s_1, \ldots, \varepsilon_k, s_k, g)$ 的超额为整数

$$e(I) := 2s_1 - \varepsilon_1 - \sum_{i=2}^{k} (2s_i(p-1) - \varepsilon_i),$$

且长度为

$$\ell(I) = k.$$

相应的运算 Q^I_g 具有 $(\mathrm{ob}\,\mathsf{G} \times \mathbb{Z})$-分次，其中

$$|Q^I_g| = (d_{\mathsf{G}}(I), d_{\mathbb{Z}}(I)) := \left(g^{(p^k-1)}, \sum_{i=1}^{k} (2s_i(p-1) - \varepsilon_i) \right) \in \mathrm{ob}\,\mathsf{G} \times \mathbb{Z}.$$

空序列的超额为 ∞，长度为 0，双次数为 $(\mathbb{I}_G, 0)$。

若 $I=(\varepsilon_1, s_1, \dots, \varepsilon_k, s_k, g)$，则记作

$$I_{\geq j} = \begin{cases} (\varepsilon_j, s_j, \dots, \varepsilon_k, s_k, g) & 1 \leq j \leq k \\ \emptyset & j > k. \end{cases} \tag{7.9}$$

根据定义，若 I 可容许，则 $I_{\geq j}$ 也可容许。

以下基本性质在运用此定义时会很有用。

引理 7.10. 设 I 可容许，并设 x 是一个双次数为 (g,n) 的 $(\mathrm{ob}\,G\times\mathbb{Z})$-分次集合 U 中的元素。

i. 若 $e(I)+\varepsilon_1 > n$，则 $d_{\mathbb{Z}}(Q_g^I x) \geq p^{\ell(I)} n$，且当且仅当 $I=\emptyset$ 时取等号。

ii. 对所有 $j \geq 1$, $e(I) + \varepsilon_1 \leq e(I_{\geq j}) + \varepsilon_j$.iii. 若 $e(I)+\varepsilon_1 = n$，则

$$I = (\varepsilon_1, p^{i-1}s_i, 0, p^{i-2}s_i, \dots, 0, ps_i, 0, s_i, \varepsilon_{i+1}, s_{i+1}, \dots, \varepsilon_k, s_k, g),$$

其中 $e(I_{\geq i+1}) + \varepsilon_{i+1} > n$ 和 $2s_i = n + d_{\mathbb{Z}}(I_{\geq i+1})$。这里 $I_{\geq i+1}$ 可以为空；若 $i=1$，则上式变为

$$I = (\varepsilon_1, s_1, \varepsilon_2, s_2, \dots, \varepsilon_k, s_k, g).$$

证明。我们对 I 的长度使用归纳法来证明 i.。若 $I=\emptyset$，则 $Q_g^I x = x$，因此显然有 $d_{\mathbb{Z}}(Q_g^I x) = d_{\mathbb{Z}}(x)$。现在假设对于$0 \leq \ell(I) \leq k-1$，有 $d_{\mathbb{Z}}(Q_g^I x) \geq p^{\ell(I)} n$，并考虑满足 $\ell(I)=k$ 的 I。注意

$$d_{\mathbb{Z}}(Q_g^I x) = n + \sum_{j=1}^{k} (2s_j(p-1) - \varepsilon_j) = 2s_1(p-1) - \varepsilon_1 + d_{\mathbb{Z}}(Q_g^{I_{\geq 2}} x).$$

假设 $e(I) + \varepsilon_1 \geq n+1$，可推出

$$2s_1 \geq n + 1 + \sum_{j=2}^{k} (2s_j(p-1) - \varepsilon_j) = d_{\mathbb{Z}}(Q_g^{I_{\geq 2}} x) + 1.$$

结合这些不等式，可得

$$d_{\mathbb{Z}}(Q_g^I x) \geq p\, d_{\mathbb{Z}}(Q_g^{I_{\geq 2}} x) + p - 1 - \varepsilon_1 > p\, d_{\mathbb{Z}}(Q_g^{I_{\geq 2}} x).$$

根据假设，$d_{\mathbb{Z}}(Q_g^{I_{\geq 2}} x) \geq p^{k-1} n$，因此可推出对所有$k>0$，都有 $d_{\mathbb{Z}}(Q_g^I x) > p^k n$。

为证明 ii.，我们利用 I 的可容许性所给出的不等式 $s_1 \leq p s_2 - \varepsilon_2$，得到

$$e(I) + \varepsilon_1 = e(I_{\geq 2}) + 2s_1 - 2(ps_2 - \varepsilon_2) \leq e(I_{\geq 2}) \leq e(I_{\geq 2}) + \varepsilon_2.$$

然后利用相同的论证，通过归纳法即可得出该结论。

我们对 $\ell(I)$ 使用归纳法证明 iii.。若 $k=1$，则 $e(I) + \varepsilon_1 = n$ 直接推出 $2s_1 = n$，因此无需证明。一般而言，若 $e(I_{\geq 2}) + \varepsilon_2 > n$，则对于 $i=1$，I 具有所需的形式，因为根据超额的定义，$e(I) + \varepsilon_1 = 2s_1 - d_{\mathbb{Z}}(I_{\geq 2})$。若 $e(I_{\geq 2}) + \varepsilon_2 = n$，则

$$n = e(I) + \varepsilon_1 = e(I_{\geq 2}) + 2s_1 - 2(ps_2 - \varepsilon_2) \leq e(I_{\geq 2}) + \varepsilon_2 = n,$$

因此，我们必定有

$$2s_1 - 2(ps_2 - \varepsilon_2) = \varepsilon_2.$$

然而，根据可容许性和 $\varepsilon_2 \in \{0,1\}$，左边非正，因此可得 $\varepsilon_2 = 0$，进而得到 $s_1 = ps_2$。将归纳假设应用于$I_{\geq 2}$，即可得到所需结果。□

7.5. 同调基。设 $U \in$ 集合$^{\mathrm{ob}\,\mathsf{G}\times\mathbb{Z}}$。我们将经常使用形式符号的 (ob G $\times\,\mathbb{Z}$)-分次集合

$$Q(U) \coloneqq \{Q_g^I x \mid x \in U(g,n), I \text{ admissible}, e(I)+\varepsilon_1 > n\}, \tag{7.11}$$

其中 $Q_g^I x$ 的双次数为

$$|Q_g^I x| = (g^{p^{\ell(I)}}, n + d_{\mathbb{Z}}(I)).$$

定义 7.12。设 U是 $V \in$Mod$^{\mathbb{F}_\varphi}$(GrVect^{G}) 的一组基。令 $W(V,U)$ 为 GrVect^{G}) 中以分次集合 $Q(U)$ 为生成元的自由交换代数。在其他表述中，

$$W(V,U) = \mathcal{S}(Q(U)).$$

若 $X \in$Mod$^{\mathbb{F}_\varphi}$(Ch^{G}) 且 S 是 $H_{*,*}(X)$ 的一组基的选取，则存在一个集合映射

$$Q(S) \to H_{*,*}(E_\infty(X))$$

它将 $x \in S$ 映射到 $H_{*,*}(E_\infty(X))$，使用典范单态射

$$H_{*,*}(X) \to H_{*,*}(E_\infty(X)),$$

并且将 $Q_g^I x$ 映射到作用于 x的相应 Dyer–Lashof 运算。这诱导出一个映射

$$\Psi_X \colon W(H_{*,*}(X), S) \to H_{*,*}(E_\infty(X)),$$

我们声称它是一个同构。

定理 7.13. 若 $X \in$ Mod$^{\mathbb{F}_\varphi}$(Ch$^{\mathsf{G}}_{\mathbb{F}}$)，且 S 是 $H_{*,\ *}(X)$ 的任意一组基，则映射

$$\Psi_X \colon W(H_{*,*}(X), S) \to H_{*,*}(E_\infty(X))$$

是 CAlg$^{\mathbb{F}_\varphi}$(GrVect^{G}) 中的一个同构。

在开始证明之前，我们还需要一些定义。回顾一下，$H_{*,\ *}(E_\infty(X))$ 带有一个额外的 $\mathbb{N}$-分次，即电荷分次。我们也将为 $W(H_{*,\ *}(X)\ S)$ 赋予电荷分次，并在证明中加以利用。

一般而言，若 $V \in$Mod$^{\mathbb{F}_\varphi}$(GrVect^{G}) 带有电荷分次，则可如下为 V 上的自由交换代数赋予电荷分次。首先注意，我们可以将这个额外分次视为一个函子

$$V\langle - \rangle \colon \mathbb{N} \to \mathsf{Mod}_{\mathbb{F}_\varphi}(\mathsf{GrVect}^{\mathsf{G}}),$$

其中，$\mathbb{N}$ 表示一个范畴，其对象为自然数，且不存在非单位元态射，并且满足

$$V \cong \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} V\langle k\rangle.$$

这类函子通过 Day 卷积继承了幺半结构，具体而言，这意味着

$$(V \circledast V')\langle k\rangle \cong \bigoplus_{i+j=k} V\langle i\rangle \circledast V'\langle j\rangle.$$

特别地，张量代数 $T(V)$ 继承了电荷分次

$$T(V)\langle k\rangle = \bigoplus_{j\geq 0} V^{\circledast j}\langle k\rangle.$$

在此，我们定义 $V^{\circledast 0}$ 的荷集中于荷 0。就此而言，这与 $T(V)$ 上的幺半群结构相容：我们可以将 $T(V)$ 视为函子范畴 $\mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}(\mathsf{GrVect}^{\mathsf{G}})^{\mathbb{N}}$. 中的幺半群对象

V 上的自由交换代数由 $T(V)$ 对一个集合 U 取商构成。注意，若集合 U 也带有荷分次，且该分次与 $T(V)$ 上的荷分次相容，那么商 $T(V)/U$ 也继承荷分次。对于 V 上的自由交换代数， U 的每个元素都具有如下形式

$$[v_1, v_2] \coloneqq v_1v_2 - (-1)^{n_1n_2}\beta^{-1}_{g_1,g_2}(v_2v_1) \in (V \circledast V)(g_1 \oplus g_2)_{n_1+n_2}.$$

若每个 $v_i \in V(g_i)_{n_i}$ 都是荷为 k_i 的齐次元素，那么 $[v_1, v_2]$ 是荷为 $k_1 + k_2$ 的齐次元素，因此我们可以赋予 U 一个源自 V 的荷分次。于是， V 上的自由交换代数继承荷分次。

特别地，这使我们能够赋予 $W(H_{*,\ *}(X)\ S)$ 一种荷分次：我们称元素 $Q^I_g x$ 的荷为 $p^{\ell(I)}$，从而 $Q(S)$ 具有荷分次，并由此在 $Q(S)$ 上的自由交换代数 $W(H_{*,\ *}(X)\ S)$ 上诱导出一种荷分次。

一般而言，我们用记号 $\langle k\rangle$ 表示荷 k。特别地，我们有

$$H_{*,*}(E_\infty(X))\langle k\rangle = H_{*,*}(\mathrm{Sym}^k(X)).$$

在证明定理 7.13 之前，我们还需要一个技术引理。

若 y是一个带有双分次 (g, n) 的 $(\mathsf{ob}\,\mathsf{G} \times \mathbb{Z})$-分次集合 U 的元素，令

$$q(y) \coloneqq (-1)^n\varphi(\mathrm{tr}_{g\oplus g}(\beta_{g,g})).$$

记

$$Q(U)^- \coloneqq \{y \in Q(U) \mid q(y) = -1\} \text{ and } Q(U)^+ \coloneqq \{y \in Q(U) \mid q(y) = 1\},$$

使得

$$Q(U) = Q(U)^- \sqcup Q(U)^+.$$

引理 7.14。设 $X \in \mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}(\mathsf{GrVect}^{\mathsf{G}})$，且 S 是 X 的基。那么在 $(\mathsf{Vect}^{\mathsf{G}}_{\mathbb{F}})^{\mathbb{Z}}$ 中存在一个同构

$$W(\Sigma X, \Sigma S) \circledast W(X, S)$$

with

$$\left(\circledast_{Q^I\Sigma x\in Q(\Sigma S)^-} \mathcal{S}(Q^I\Sigma x) \circledast \mathcal{S}(Q^I x)\right) \circledast \circledast_{Q^I\Sigma x\in Q(\Sigma S)^+} M, \tag{7.15}$$

其中

$$M = \circledast_{i\geq 0} \mathbb{F}_\varphi\{(Q^I\Sigma x)^{jp^i}\}_{0\leq j\leq p-1} \circledast \mathcal{S}(Q^{I^0_{i-1,s,g}}Q^I x) \circledast \mathcal{S}(Q^{I^1_{i,s,g}}Q^I x),$$

for

$$I^\varepsilon_{i,s,g} \coloneqq \begin{cases} (\varepsilon, p^i s, 0, p^{i-1}s, \ldots, 0, ps, 0, s, g) & i \geq 0 \\ \emptyset & i = -1, \end{cases}$$

并且（$g, 2s$）是 $Q^I\Sigma x$ 的双次数。

证明。要看出这样的同构存在，首先注意到

$$W(\Sigma X, \Sigma S) \cong \circledast_{y \in Q(\Sigma S)^-} \mathcal{S}(y) \circledast \circledast_{y \in Q(\Sigma S)^+} \mathcal{S}(y).$$

若 $y \in Q(\Sigma S)^+$，则 $y^2 \neq 0$，因此 $\{y^i\}_{i \geq 0}$ 是 $\mathcal{S}(y)$ 的一组基；也就是说，我们有一个 $(\mathrm{Vect}^{\mathsf{G}})^{\mathbb{Z}}$ 中的同构

$$\mathbb{F}_\varphi\{y^i\}_{i \geq 0} \cong \mathcal{S}(y).$$

任意满足 $i > 0$ 的幂 y^i 都可以唯一地写成以下元素的一个不同乘积

$$\{y, y^2, \dots, y^{p-1}, y^p, y^{2p}, \dots, y^{(p-1)p}, \dots, y^{p^j}, y^{2p^j}, \dots, y^{(p-1)p^j}\}$$

（这本质上相当于将 i 写成以 p 为底数的形式）。因此，我们有

$$\circledast_{i \geq 0} \mathbb{F}_\varphi\{y^{0p^i}, y^{p^i}, \dots, y^{(p-1)p^i}\} \cong \mathbb{F}_\varphi\{y^i\}_{i \geq 0}$$

在 $(\mathrm{Vect}^{\mathsf{G}})^{\mathbb{Z}}$ 中，因此我们有

$$\circledast_{i \geq 0} \mathbb{F}_\varphi\{y^{0p^i}, y^{p^i}, \dots, y^{(p-1)p^i}\} \cong \mathcal{S}(y)$$

在 $(\mathrm{Vect}^{\mathsf{G}})^{\mathbb{Z}}$ 中。因此，我们已经证明

$$W(\Sigma X, \Sigma S) \cong \circledast_{y \in Q(\Sigma S)^-} \mathcal{S}(y) \circledast \circledast_{y \in Q(\Sigma S)^+} \circledast_{i \geq 0} \mathbb{F}_\varphi\{y^{0p^i}, y^{p^i}, \dots, y^{(p-1)p^i}\} \tag{7.16}$$

在 $(\mathrm{Vect}^{\mathsf{G}})^{\mathbb{Z}}$ 中。

Now,

$$W(X, S) \cong \circledast_{Q^I \Sigma x \in Q(\Sigma S)} \mathcal{S}(Q^I x) \circledast \circledast_{\substack{Q^I x \in Q(S) \\ e(I) + \varepsilon_1 = d_{\mathbb{Z}}(\Sigma x)}} \mathcal{S}(Q^I x). \tag{7.17}$$

我们断言，如果 $Q^I x \in Q(S)$，但 $Q^I \Sigma x \notin Q(\Sigma S)$，那么

$$Q^I x = \beta^{\varepsilon_1} Q^{p^j s}_{g^{p^j}} Q^{p^{j-1} s}_{g^{p^{j-1}}} \dots Q^{ps}_{g^p} Q^s_g Q^{I'} x,$$

其中 $Q^{I'} \Sigma x \in Q(\Sigma S)^+$，$g = d_{\mathsf{G}}(Q^{I'} \Sigma x)$，且 $2s = d_{\mathbb{Z}}(Q^{I'} \Sigma x)$。由于 $Q^I \Sigma x \notin Q(\Sigma S)$，但 $Q^I x \in Q(S)$，我们必有 $e(I) + \varepsilon_1 = d_{\mathbb{Z}}(\Sigma x)$。根据引理 7.10 iii.，$I$ 必具有所需的形式。为了看出 $Q^{I'} \Sigma x \in Q(\Sigma S)^+$，注意到$2s = d_{\mathbb{Z}}(Q^{I'} \Sigma x)$ 只有在 $q(Q^{I'} \Sigma x) = 1$ 时才可能，因为 $\varphi(\mathrm{tr}_{g \oplus g}(\beta_{g,g}))$ 的符号决定了 $2s$ 是偶数还是奇数，特别是，$\varphi(\mathrm{tr}_{g \oplus g}(\beta_{g,g}))$ 和 $(-1)^{2s}$ 总是相等。

我们记

$$I^{\varepsilon}_{i,s,g} := (\varepsilon, p^i s, 0, p^{i-1} s, \dots, 0, ps, 0, s, g)$$

从而我们已证明

$$Q^I x = Q^{I^{\varepsilon_1}_{j,s,g}} Q^{I'} x,$$

其中 $2s = d_{\mathbb{Z}}(Q^{I'} \Sigma x)$ 且 $g = d_{\mathsf{G}}(Q^{I'} \Sigma x)$。

因此，任何满足 $e(I) + \varepsilon_1 = d_{\mathbb{Z}}(\Sigma x)$ 的 $Q^I x$ 都可以唯一地写成 $Q^{I^{\varepsilon}_{i,s,g}} Q^{I'} x$，其中 $Q^{I'} \Sigma x \in Q(\Sigma S)^+$；而当 $2s = d_{\mathbb{Z}}(Q^{I'} \Sigma x)$ 时，$Q^{I^{\varepsilon}_{i,s,g}} Q^{I'} x \in Q(S)$。因此，存在一个同构

$$\circledast_{Q^I \Sigma x \in Q(\Sigma S)^+} \circledast_{i \geq 0} \mathcal{S}(Q^{I^0_{i,s,g}} Q^I x) \circledast \mathcal{S}(Q^{I^1_{i,s,g}} Q^I x) \to \circledast_{\substack{Q^I x \in Q(S) \\ e(I) + \varepsilon_1 = d_{\mathbb{Z}}(\Sigma x)}} \mathcal{S}(Q^I x).$$

将此结果与 7.16 和 7.17 结合，即可证明 7.15。

□

注记 7.18。注意，此处我们选择 $\mathbb{F}_\varphi\{y^j\}_{0\le j\le p-1}$，而不是 $\mathcal{S}(y)$ 除以集合 $\{y^p\}$ 所得的商 $\mathcal{S}(y)/y^p$，因为 $\mathcal{S}(y)/y^p$ 上的乘法不保持荷。

现在我们可以证明定理 7.13 了。

证明。容易看出，映射 Ψ_X 保持荷，因为如果

$$x \in H_{g,*}(X) \cong H_{g,*}(\mathrm{Sym}^1(X)),$$

那么 $Q^s_g(x) \in H_{*,*}(\mathrm{Sym}^p(X))$。更一般地，

$$Q^I_g(x) \in H_{*,*}(\mathrm{Sym}^{p^{\ell(I)}}(X)).$$

因此，只需证明这些映射

$$\Psi_X\langle k\rangle \colon W(H_{*,*}(X),S)\langle k\rangle \to H_{*,*}(\mathrm{Sym}^k(X))$$

对于所有 $k \ge 0$ 都是同构。我们将对 k 使用归纳法来证明这一点。首先，我们将确立基例 $k = 0$、1。在归纳步骤中，我们引入一个中间命题，即命题 7.19。然后，我们证明该定理可由此命题推出，最后给出该命题的证明。

7.5.1. 基例。回忆一下，$W(H_{*,*}(X), S)$ 是张量代数 $T(\mathbb{F}_\varphi\{Q(S)\})$ 关于集合

$$[v_1, v_2] \coloneqq v_1v_2 - (-1)^{n_1n_2}\beta^{-1}_{g_1,g_2}(v_2v_1)$$

对于 $v_i \in T(\mathbb{F}_\varphi\{Q(S)\})(g_i)^{n_i}$。令 U 为所有 $[v_1, v_2]$ 的集合。根据命题 7.4，我们可以在 $\mathrm{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}(\mathrm{GrVect}^{\mathbb{G}})$ 中构造 $W(H_{*,*}(X), S)$ 作为一个商（而不是在 $\mathrm{Alg}^{\mathbb{F}_\varphi}(\mathrm{GrVect}^{\mathbb{G}})$ 中）。具体而言，$W(H_{*,*}(X), S)\langle k\rangle$ 由 $\mathrm{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}$ 中的以下推出方给出：

$$\begin{array}{ccc} T(\mathbb{F}_\varphi\{Q(S)\}) \circledast \mathbb{F}_\varphi\{U\} \circledast T(\mathbb{F}_\varphi\{Q(S)\})\langle k\rangle & \longrightarrow & T(\mathbb{F}_\varphi\{Q(S)\})\langle k\rangle \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & W(H_{*,*}(X),S)\langle k\rangle. \end{array}$$

$Q(S)$中的每个元素的荷至少为 1，因此 U 中的元素的荷至少为 2。所以，荷为 0 的分量

$$T(\mathbb{F}_\varphi\{Q(S)\}) \circledast \mathbb{F}_\varphi\{U\} \circledast T(\mathbb{F}_\varphi\{Q(S)\})$$

为 0，因此

$$W(H_{*,*}(X),S)\langle 0\rangle \cong T(\mathbb{F}_\varphi\{Q(S)\})\langle 0\rangle \cong \mathbb{F}_\varphi.$$

幺半群单位映射 $\mathbb{F}_\varphi \to T(\mathbb{F}_\varphi\{Q(S)\})\langle 0\rangle \to W(H_{*,*}(X), S)\langle 0\rangle$ 因此是一个同构。类似地，幺半群单位映射

$$\mathbb{F}_\varphi \to H_{*,*}(\mathrm{Sym}^0(X))$$

也是一个同构，因此，由于 Ψ_X 是一个幺半群映射，可知 $\Psi_X\langle 0\rangle$ 是一个同构。

类似的逻辑表明

$$W(H_{*,*}(X),S)\langle 1\rangle \cong T(\mathbb{F}_\varphi\{Q(S)\})\langle 1\rangle.$$

由于 $Q(S)$ 中荷为 1 的元素只有 S 中的元素，因此可得

$$T(\mathbb{F}_\varphi\{Q(S)\})\langle 1\rangle \cong \mathbb{F}_\varphi\{S\} \cong H_{*,*}(X).$$

因此，由于 $H_{*,\,*}(X) \cong H_{*,\,*}(\mathrm{Sym}^1(X))$，且 Ψ_X 是利用典范映射在 S 上定义的

$$H_{*,*}(X) \to H_{*,*}(E_\infty(X)),$$

我们可知 $\Psi_X\langle 1\rangle$ 也是一个同构。

7.5.2. 归纳步骤。在进行归纳法之前，我们先引入一些记号上的简化。首先，我们将 $W(X,S)$ 记作 $W(H_{*,\,*}(X)\ S)$。其次，我们用等价范畴 $\mathsf{Ch}(\mathsf{Vect}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{G}})$ 替换范畴 $\mathsf{Ch}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{G}}$，并用等价范畴 $(\mathsf{Vect}^{\mathsf{G}})^{\mathbb{Z}}$ 替换范畴 $\mathsf{GrVect}^{\mathsf{G}}$，如第 7.3 节所述。我们也将 $\Sigma^r X$ 记作 $\Sigma_{\mathbb{I}^{\mathsf{G}^r}} X$。

假设我们已经证明，对于所有 X 以及任意一组基，只要 $\ell \le k-1$，$\Psi_X\langle\ell\rangle$ 就是一个同构。$\Psi_X\langle k\rangle$ 是一个同构这一结论将由以下断言得出。

命题 7.19。如果

$$\Psi_{\Sigma X}\langle k\rangle\colon W(\Sigma X,\Sigma S)\langle k\rangle \to H_*(\mathrm{Sym}^k(\Sigma X))$$

在 $*<N$ 次上是同构，并且当 $*=N$ 时为满射，那么

$$\Psi_X\langle k\rangle\colon W(X,S)\langle k\rangle \to H_*(\mathrm{Sym}^k(X))$$

在 $*<N-1$ 次上是同构，并且当 $*=N-1$ 时为满射。这里，ΣS 表示由元素 Σx（$x\in S$）组成的集合，其中当 x 具有 $\mathbb{Z}$-度 m 时，Σx 具有 $\mathbb{Z}$-度 $m+1$。

7.5.3. 假设命题 7.19 的定理证明。首先，我们证明该定理由此命题推出。对于 $n\in\mathbb{Z}$，如果 $H_m(X)=0$ for $m\le n$，则称 X 是 n-连通的。如果 X 是 n-连通的，那么只要 $m<k(n+1)$，$H_m(\mathrm{Sym}^k(X))$ 就为零（为了解这一点，请回忆 Sym^k 保持拟同构，因此我们可以用其同调替代 X；此外，$\mathcal{C}_\infty(k)$ 在负次数上为 0，所以可能出现非零类的最小次数是 $m=k(n+1)$）。我们断言，$W(X,S)\langle k\rangle$ 在 $m<k(n+1)$ 次上也为 0。根据构造，$W(X,S)$ 由 $Q(S)$ 中元素的乘积张成。一个乘积

$$Q^{I_1}_{g_1}x_1\otimes\cdots\otimes Q^{I_j}_{g_j}x_j$$

其荷为 $\sum_{i=1}^{j}p^{\ell(I_i)}$。由引理 7.10，条件 $e(I)+\varepsilon_1>d_{\mathbb{Z}}(x)$ 蕴含 $d_{\mathbb{Z}}(Q^I_g x)\ge p^{\ell(I)}d_{\mathbb{Z}}(x)$，因此乘积的次数为

$$d_{\mathbb{Z}}(Q^{I_1}_{g_1}x_1\otimes\cdots\otimes Q^{I_j}_{g_j}x_j)\ge\sum_{i=1}^{j}p^{\ell(I_i)}d_{\mathbb{Z}}(x_i).$$

由于 $d_{\mathbb{Z}}(x_i)\ge n+1$，因此荷为 k 的乘积次数至少为 $k(n+1)$。所以，$\Psi_X\langle k\rangle$ 在次数 $m<k(n+1)$ 上显然是一个同构，因为源和目标都是 $(k(n+1)-1)$-连通的。

此外，如果 I 非空且可容许的，那么

$$d_{\mathbb{Z}}(Q^I_g x)>p^{\ell(I)}d_{\mathbb{Z}}(x)\ge p^{\ell(I)}(n+1),$$

因此，唯一能使其成立的方式是

$$d_{\mathbb{Z}}(Q^{I_1}_{g_1}x_1\otimes\cdots\otimes Q^{I_j}_{g_j}x_j)=k(n+1)$$

当且仅当每个 I_i 都为空， $j = k$，且每个 $d_{\mathbb{Z}}(x_i) = n+1$ 时， $\sum p^{\ell(I_i)} = k$。也就是说，只有 $H_{n+1}(X)$ 中元素的 k 重乘积，其次数才可能是 $k(n+1)$，位于 $W(X,S)\langle k\rangle$ 中。然而，映射

$$(H_{n+1}(X)^{\circledast k})_{\Sigma_k} \to H_{k(n+1)}(\mathrm{Sym}^k(X))$$

是一个满射。因此，当 X 是 n-连通时， $\Psi_X\langle k\rangle$ 在次数 $m = k(n+1)$ 上是满射。

若 X 是 n-连通的，则 $\Sigma^r X$ 是 $(r+n)$-连通的，因此上述论证表明， $\Psi_{\Sigma^r X}\langle k\rangle$ 在次数 $m < k(r+n+1)$ 上是同构，并且当 $m = k(r+n+1)$ 时是满射。通过反复应用命题 7.19，这意味着 $\Psi_X\langle k\rangle$ 在次数 $m < k(n+1)+r(k-1)$ 上是同构。由于 $k-1 \geq 1$, $k(n+1)$ 是固定的，而 r 可以任意增大，这意味着 $\Psi_X\langle k\rangle$ 在所有次数上都是同构。这就证明了当 X 是 n-连通时的定理。

注意，任何 X 都可以写成有界下对象的滤过余极限（即对某个 n 而言是 n-连通的对象）。明确地说， $X = \mathsf{colim}_{n\in\mathbb{Z}} X_{\geq n}$，其中 $X_{\geq n}$ 是 X 的截断，含义是

$$(X_{\geq n})_m = \begin{cases} X_m & m \geq n \\ 0 & m < n. \end{cases}$$

由于 $W(H_*(X)\ S)$ 仅由 $H_*(X)$ 决定，我们可以用 X 的同调替代它；也就是说，可以假设 X 是一个微分平凡的链复形。于是我们有映射

$$\cdots \to X_{\geq n+1} \to X_{\geq n} \to X_{\geq n-1} \to \cdots \to X$$

对于所有 m，这些映射在 $(X_{\geq n})_m$ 上都是单位映射；如所声称的， $X = \mathsf{colim}_{n\in\mathbb{Z}} X_{\geq n}$.令

$$S_n = \{x \in S \mid d_{\mathbb{Z}}(x) \geq n\}.$$

于是 $S_n \subset S_{n-1}$，并且 $S = \cup_{n\in\mathbb{Z}} S_n$. 。类似地，

$$Q(S_n) \subset Q(S_{n-1}) \text{ and } Q(S) = \cup_{n\in\mathbb{Z}} Q(S_n).$$

包含映射 $Q(S_n) \to Q(S_{n-1})$ 和 $Q(S_n) \to Q(S)$ 在自由交换代数上诱导出映射

$$W(H_*(X_{\geq n}), S_n) \to W(H_*(X_{\geq n-1}), S_{n-1})$$

and

$$W(H_*(X_{\geq n}), S_n) \to W(H_*(X), S),$$

后者与前者相容。此外，我们有一个分次集合的映射

$$Q(S) \to \mathrm{colim}_{m\in\mathbb{Z}} W(H_*(X_{\geq m}), S_m)$$

利用这些映射定义

$$Q(S_n) \to \mathrm{colim}_{m\in\mathbb{Z}} W(H_*(X_{\geq m}), S_m).$$

这定义了一个映射

$$W(H_*(X), S) \to \mathrm{colim}_{m\in\mathbb{Z}} W(H_*(X_{\geq m}), S_m)$$

交换代数的，这表明 $W(H_*(X)\ S)$ 满足余极限的泛性质，因此该映射是一个同构。现在， $H_*(E_\infty(-))$ 与滤过余极限可交换，因此我们还可以得到

$$H_*(E_\infty(X)) \cong \mathrm{colim}_{n\in\mathbb{Z}} H_*(E_\infty(X_{\geq n})).$$

由于这些图表

$$\begin{array}{ccc} W(H_*(X_{\geq n}), S_n) & \longrightarrow & W(H_*(X_{\geq n-1}), S_{n-1}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_*(E_\infty(X_{\geq n})) & \longrightarrow & H_*(E_\infty(X_{\geq n-1})) \end{array}$$

由运算的自然性可交换，因此只需证明当 X 是 n连通时的定理，其中 n为某个 n。

7.5.4. 命题 7.19 的证明。因此，只需证明命题 7.19。为此，我们将使用第 7.3 节中描述的电荷分次谱序列，其 E^1 页

$$E^1_{t,q}\langle k\rangle \cong \bigoplus_r H_{t+q-r}(\mathrm{Sym}^t(\Sigma X)) \circledast H_r(\mathrm{Sym}^{k-t}(X))$$

当 $k = 0$时，若 $k > 0$ 和 $\mathbb{F}_\varphi$ 则收敛到 0。我们将以类似方式构造一个模型谱序列，将 $W(X, S)$与 $W(\Sigma X, \Sigma S)$联系起来，结论随后由谱序列比较定理得出。

现在我们构造模型谱序列 $\tilde{E}$，它带有一个满足以下条件的电荷分次

$$\tilde{E}^1_{t,q}\langle \ell\rangle \cong W(\Sigma X, \Sigma S)_{t+q-*}\langle t\rangle \circledast W(X, S)_*\langle \ell - t\rangle. \tag{7.20}$$

由引理 7.14 可知， $W(\Sigma X, \Sigma S) \circledast W(X, S)$ 同构于

$$\left(\circledast_{Q^I\Sigma x \in Q(\Sigma S)^-} \mathcal{S}(Q^I\Sigma x) \circledast \mathcal{S}(Q^I x) \right) \circledast \circledast_{Q^I\Sigma x \in Q(\Sigma S)^+} M,$$

其中

$$M = \circledast_{i\geq 0} \mathbb{F}_\varphi\{(Q^I\Sigma x)^{jp^i}\}_{0\leq j\leq p-1} \circledast \mathcal{S}(Q^{I^0_{i-1,s,g}} Q^I x) \circledast \mathcal{S}(Q^{I^1_{i,s,g}} Q^I x),$$

且 $(g, 2s)$ 是 $Q^I\Sigma x$ 的双次数。我们将为每个 $Q^I\Sigma x \in Q(\Sigma S)^-$ 构造一个初等谱序列，并分别为每个 $Q^I\Sigma x \in Q(\Sigma S)^+$ 构造一个初等谱序列。取这些谱序列的乘积并运用莱布尼茨法则，即可定义 E 的微分 $\tilde{}$。

对于每个 $Q^I\Sigma x \in Q(\Sigma S)^-$，我们可以定义一个以 E^1 页为第 页的电荷分次谱序列

$$\mathcal{S}(Q^I\Sigma x) \circledast \mathcal{S}(Q^I x).$$

具体而言，若 $d_{\mathbb{Z}}(Q^I\Sigma x) = n + 1$，则该序列具有

$$E^r_{0,jn}\langle jp^{\ell(I)}\rangle = \mathbb{F}_\varphi\{1 \otimes (Q^I x)^j\}$$

若 $r \leq p^{\ell(I)}$ 且

$$E^r_{p^{\ell(I)}, n(j+1)+1-p^{\ell(I)}}\langle (j+1)p^{\ell(I)}\rangle = \mathbb{F}_\varphi\{Q^I\Sigma x \otimes (Q^I x)^j\}$$

若 $r \leq p^{\ell(I)}$ 且在其他情况下为零。微分由下式给出

$$d^{p^{\ell(I)}}(Q^I\Sigma x \otimes 1) = 1 \otimes (-1)^{\varepsilon(I)} Q^I x,$$

其中 $\varepsilon(I) = \sum_{i=1}^{\ell(I)} \varepsilon_i$ （也就是说， $\varepsilon(I)$ 是形如 βQ^s 的运算在 I 中出现的次数），而在 $p^{\ell(I)}$ 页的其余部分，微分由莱布尼茨法则定义。否则，所有微分都为零，显然该谱序列收敛到 0，唯有荷为 0 的单位元 $\mathbb{F}_\varphi$ 除外。

对于每个满足 $Q^I\Sigma x \in Q(\Sigma S)^+$、 $2s = d_{\mathbb{Z}}(Q^I\Sigma x)$ 和 $g = d_{\mathsf{G}}(Q^I\Sigma x)$ 的情形，对于每个 $i \geq 0$，我们也可以类似地定义一个电荷分次谱序列，其 E^1 页为

$$\mathbb{F}_\varphi\{(Q^I\Sigma x)^{0p^i}, (Q^I\Sigma x)^{p^i}, \dots, (Q^I\Sigma x)^{(p-1)p^i}\} \circledast \mathcal{S}(Q^{I^0_{i-1,s,g}}Q^I x) \circledast \mathcal{S}(Q^{I^1_{i,s,g}}Q^I x).$$

设 $y = (Q^I\Sigma x)^{p^i}$, $z = Q^{I^0_{i-1,s,g}}Q^I x$，以及 $v = Q^{I^1_{i,s,g}}Q^I x$。在此谱序列中，y将沿谱序列传递到 $(-1)^{\varepsilon(I)}z$，而 $y^{p-1}\otimes z$将传递到 $(-1)^{\varepsilon(I)+1}v$。明确地说，若 $0 \leq j_1 \leq p-1$ 且 $j_2 \geq 0$，则

$$E^r_{j_1p^{i+\ell(I)},q}\langle p^{i+\ell(I)}(j_1+pj_2)\rangle = \mathbb{F}_\varphi\{y^{j_1}\otimes 1\otimes v^{j_2}\} \text{ for } \begin{cases} r \leq p^{i+\ell(I)} & j_1 > 0 \\ r \leq (p-1)p^{i+\ell(I)} & j_1 = 0, \end{cases}$$

其中 $q = p^i j_1(2s - p^{\ell(I)}) + 2j_2(p^{i+1}s - 1)$，并且

$$E^r_{j_1p^{i+\ell(I)},q}\langle p^{i+\ell(I)}(j_1+pj_2+1)\rangle = \mathbb{F}_\varphi\{y^{j_1}\otimes z\otimes v^{j_2}\} \text{ for } \begin{cases} r \leq p^{i+\ell(I)} & j_1 < p-1 \\ r \leq (p-1)p^{i+\ell(I)} & j_1 = p-1, \end{cases}$$

其中 $q = p^i j_1(2s - p^{\ell(I)}) + 2sp^i - 1 + 2j_2(p^{i+1}s - 1)$。否则，$E^r_{t,q} = 0$。微分定义为

$$d^r(y^{j_1}\otimes 1\otimes v^{j_2}) = (-1)^{\varepsilon(I)}\varphi(\mathrm{tr}_{g\oplus g}(\beta_{g,g}))^{j_1-1}j_1 y^{j_1-1}\otimes z\otimes v^{j_2}$$

当 $j_1 > 0$ 时， $r = p^{i+\ell(I)}$，并且

$$d^r(y^{p-1}\otimes z\otimes v^{j_2}) = (-1)^{\varepsilon(I)+1}y^0\otimes 1\otimes v^{j_2+1}$$

当 $r = (p-1)p^{i+\ell(I)}$ 时。所有其他微分均为零。此谱序列收敛到 0，但荷为 0 时有一份 $\mathbb{F}_\varphi$。

因此，我们可以利用莱布尼茨法则，在这些基本谱序列的乘积 E 上定义一个谱序列。根据命题 7.8， E中的微分经过构造，使得我们得到一个诱导映射 f: $E \to E$，它来自映射$\Psi_{\Sigma X}$ 和 Ψ_X。

由于 E 和 E 都收敛到零，除了荷为 0 的单位元 $\mathbb{F}_\varphi$ 之外（在该处，映射 f 显然是一个同构），因此 f^∞ 在所有次数上都是同构。根据假设，当 $\ell < k$时，$\Psi_{\Sigma X}\langle\ell\rangle$ 在所有次数上都是同构；在次数 $* < N$ 上是同构，并且当 $* = N$ 时是满射，其中 $\ell = k$。因此，$f^1_{k,\ q}\langle k\rangle$当 $q < N-k$ 时是同构，当 $q = N-k$时是满射。于是，根据谱序列比较定理 A.1，$f^1_{0,\ q}\langle k\rangle$ 在 $q < N-1$ 时是同构，在 $q = N-1$ 时是满射。因此，在相应的次数上， $\Psi_X\langle k\rangle$ 分别是同构或满射。这就证明了该断言。□

8. Allowable Dyer–Lashof algebras

实际上，定理 7.13 的结果最适用于计算，因为它为自由 E_∞-代数 $H_{*,*}(E_\infty(X))$ 的同调给出了显式生成元。然而，我们的代数描述 $W(H_{*,*}(X)\ S)$ 仅具有 $\mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}(\mathsf{GrVect}^{\mathsf{G}})$ 中交换幺半群对象的结构；它不像 $H_{*,*}(E_\infty(X))$ 那样自带 Dyer–Lashof 运算的作用。此外， $W(H_{*,*}(X)\ S)$ 对 X 并非函子性的，因为它需要选择一组基。本节将精确描述赋予 $H_{*,*}(E_\infty(X))$ 的代数结构，并重新表述定理 7.13，以表明 $H_{*,*}(E_\infty(X))$ 是关于此结构的自由对象。

8.1. Dyer–Lashof 代数。首先，我们将定义 Dyer–Lashof 代数。直观地说，它应当是由符号集合 $\{\beta^\varepsilon Q_g^s\}$ 生成、模掉某些关系后的自由 $\mathbb{F}_\varphi$-代数。然而，为了容纳这样一个事实：在特征为 p 的一般域 $\mathbb{F}$ 上，Dyer–Lashof 运算是弗罗贝尼乌斯线性的，而非线性的，我们必须改为在 $\mathbb{F}$-$\mathbb{F}$-双模范畴中定义 Dyer–Lashof 代数。这样便可以通过定义不同的右、左向量空间结构来编码标量 α 的关系 $Q_g^s\alpha = \alpha^p Q_g^s$。

在 $\mathbb{F} = \mathbb{F}_p$ 的情形下，无需区分左右向量空间结构，而且可以将 Dyer–Lashof 代数构造为 $\mathrm{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}(\mathrm{GrVect}^{\mathsf{G}})$ 中的幺半群对象。这样便可以在 $\mathrm{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}(\mathrm{GrVect}^{\mathsf{G}})$ 中考虑 Dyer–Lashof 代数上的左模。以下定义使用取值于 $\mathbb{F}$-$\mathbb{F}$ 双模范畴的函子，旨在进行相同的构造，同时允许左右向量空间结构不同。

8.1.1. 范畴 $\mathrm{Bimod}^{\mathbb{F}^{bm}_\varphi}$。考虑从 $\mathsf{G}^{\mathrm{op}}\times\mathsf{G}$ 到 $\mathbb{Z}$ 分次 $\mathbb{F}$-$\mathbb{F}$ 双模范畴的函子所构成的范畴。照常，我们可以对双模取张量积，从而得到一个双模；我们用 ${}_{\mathbb{F}}\otimes_{\mathbb{F}}$ 表示这个张量积，以区别于 $\mathbb{F}$ 向量空间的张量积 $\otimes_{\mathbb{F}}$。

定义 8.1。令 $(\mathrm{Bimod}_{\mathbb{F}}^{\mathbb{Z}})^{\mathsf{G}^{\mathrm{op}}\times\mathsf{G}}$ 表示从 $\mathsf{G}^{\mathrm{op}}\times\mathsf{G}$ 到 $\mathbb{Z}$ 分次 $\mathbb{F}$-$\mathbb{F}$ 双模范畴的函子所构成的范畴。我们为这个函子范畴赋予一个幺半结构，记作 $\circ$，如下所示：对于 $F, G \in (\mathrm{Bimod}_{\mathbb{F}}^{\mathbb{Z}})^{\mathsf{G}^{\mathrm{op}}\times\mathsf{G}}$，$F\circ G$ 可以定义为余端，或者等价地定义为余等化子

$$F\circ G \coloneqq \mathrm{coeq}\left(\bigoplus_{\substack{g,g'\in\mathsf{G}\\ f\colon g\to g'}} F(g',-)\ {}_{\mathbb{F}}\otimes_{\mathbb{F}}\ G(-,g) \rightrightarrows \bigoplus_{g\in\mathsf{G}} F(g,-)\ {}_{\mathbb{F}}\otimes_{\mathbb{F}}\ G(-,g)\right),$$

其中一个箭头由以下方式得到

$$F(g',-)\ {}_{\mathbb{F}}\otimes_{\mathbb{F}}\ G(-,g) \xrightarrow{F(\mathrm{id},\mathrm{id})\otimes G(\mathrm{id},f)} F(g',-)\ {}_{\mathbb{F}}\otimes_{\mathbb{F}}\ G(-,g'),$$

另一个箭头由以下方式得到

$$F(g',-)\ {}_{\mathbb{F}}\otimes_{\mathbb{F}}\ G(-,g) \xrightarrow{F(f,\mathrm{id})\otimes G(\mathrm{id},\mathrm{id})} F(g,-)\ {}_{\mathbb{F}}\otimes_{\mathbb{F}}\ G(-,g).$$

注 8.2. 这类函子有时称为预函子，而我们定义的幺半结构有时称为预函子的复合，这也说明了我们选择这种记号的原因。

该幺半结构的结合子由双模张量积的结合子定义。此范畴中的单位元是 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}\mathsf{G}}(-,-)$，它被视为一个双模，其左右数乘均由 $\mathbb{F}$ 中的乘法给出。

我们还可以在 $(\mathrm{Bimod}_{\mathbb{F}}^{\mathbb{Z}})^{\mathsf{G}^{\mathrm{op}}\times\mathsf{G}}$ 中定义 $\mathbb{F}_\varphi$ 的一个类比 $\mathbb{F}_\varphi^{\mathrm{bm}}$（这里的“bm”代表“双模”）。

定义 8.3. 令 $\mathbb{F}_\varphi^{\mathrm{bm}}(g,h)$ 为下列映射的余等化子

$$\bigoplus_{\mathrm{Aut}_{\mathsf{G}}(g)\times\mathrm{Aut}_{\mathsf{G}}(h)} \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}\mathsf{G}}(g,h) \rightrightarrows \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}\mathsf{G}}(g,h),$$

其中一个箭头先复合 b: $g \to g$，再后复合 b': $h \to h$；另一个箭头在左侧乘以 $\varphi(\mathrm{tr}_h(b'))$，在右侧乘以 $\varphi(\mathrm{tr}_g(b))$。$\mathsf{G}^{\mathrm{op}} \times \mathsf{G}$ 中的态射通过先复合和后复合作用。

注意，此处乘法的顺序实际上并不重要，因为 $\mathbb{F}$ 是交换的，但之后我们需要跟踪这个顺序。因此， $\mathbb{F}_\varphi^{\mathrm{bm}}$ 是单位对象 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}\mathsf{G}}(-,-)$ 的一个商。不难证明，单位映射 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}\mathsf{G}}(-,-) \circ \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}\mathsf{G}}(-,-) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}\mathsf{G}}(-,-)$ 下降为一个映射 $\mathbb{F}_\varphi^{\mathrm{bm}} \circ \mathbb{F}_\varphi^{\mathrm{bm}} \to \mathbb{F}_\varphi^{\mathrm{bm}}$，使得 $\mathbb{F}_\varphi^{\mathrm{bm}}$ 成为 $(\mathrm{Bimod}_{\mathbb{F}}^{\mathbb{Z}})^{\mathsf{G}^{\mathrm{op}} \times \mathsf{G}}$ 中的幺半群对象。

定义 8.4. 令 $\mathrm{Bimod}^{\mathbb{F}_\varphi^{\mathrm{bm}}}$ 表示函子范畴 $(\mathrm{Bimod}_{\mathbb{F}}^{\mathbb{Z}})^{\mathsf{G}^{\mathrm{op}} \times \mathsf{G}}$ 中的 $\mathbb{F}_\varphi^{\mathrm{bm}}$-$\mathbb{F}_\varphi^{\mathrm{bm}}$-双模范畴。它以通常的方式继承了一个幺半结构 $\circ^{\mathbb{F}_\varphi^{\mathrm{bm}}}$，我们将其简单记为 $\circ$，因为它与 $\circ$ 一致。

由于 $\mathbb{F}_\varphi^{\mathrm{bm}}$再次是单位对象的一个商，与命题 3.3 中类似的论证表明，成为 $\mathbb{F}_\varphi^{\mathrm{bm}}$上的双模是一种性质，而非额外结构。

命题 8.5. 函子 $X \in$(双模$_{\mathbb{F}}^{\mathbb{Z}})^{\mathsf{G}^{\mathrm{op}} \times \mathsf{G}}$ 可以赋予 $\mathbb{F}_\varphi^{bm}$上的双模结构，当且仅当对于每个 $(g,h) \in \mathsf{G}^{\mathrm{op}} \times \mathsf{G}$，以及每个态射 $(b,b') \in \mathrm{Aut}_{\mathsf{G}^{\mathrm{op}} \times \mathsf{G}}(g,h)$，诱导映射

$$X(b,b')\colon X(g,h) \to X(g,h)$$

由左乘 $\varphi(\mathrm{tr}_h(b'))$ 和右乘 $\varphi(\mathrm{tr}_g(b^{\mathrm{op}}))$ 给出。这里 b^{op} 表示 G 中的“底层”态射（也就是说，G^{op} 中的一个态射 $f\colon g_1 \to g_2$按定义就是 G 中的一个态射 $g_2 \to g_1$；我们将此态射记作 f^{op}）。

此外还有一个函子

$$-\boxtimes -\colon \mathrm{Bimod}_{\mathbb{F}_\varphi^{\mathrm{bm}}} \times \mathrm{Mod}_{\mathbb{F}_\varphi}(\mathrm{GrVect}^{\mathsf{G}}) \to \mathrm{Mod}_{\mathbb{F}_\varphi}(\mathrm{GrVect}^{\mathsf{G}}),$$

其中， $M \boxtimes X$ 定义为余端，或者等价地，定义为以下余等化子:

$$\bigoplus_{\substack{g,g' \in \mathsf{G} \\ f\colon g \to g'}} M(g',-) \otimes_{\mathbb{F}} X(g) \rightrightarrows \bigoplus_{g \in \mathsf{G}} M(g,-) \otimes_{\mathbb{F}} X(g),$$

其中一个箭头是 $M(f,\mathrm{id}) \otimes X(\mathrm{id})$，另一个是 $M(\mathrm{id},\mathrm{id}) \otimes X(f)$。注意，所得对象确实是一个 $\mathbb{F}_\varphi$上的模，因为 h 的自同构 f 作用于 $M(g,h)$，进而作用于 $(M \boxtimes X)(h)$，其作用方式是通过 $\varphi(\mathrm{tr}_h(f))$进行左乘。

引理 8.6. 若 M 是 $\mathrm{Bimod}^{\mathbb{F}_\varphi^{bm}}$中的幺半群对象，则自函子

$$M \boxtimes -\colon \mathrm{Mod}_{\mathbb{F}_\varphi}(\mathrm{GrVect}^{\mathsf{G}}) \to \mathrm{Mod}_{\mathbb{F}_\varphi}(\mathrm{GrVect}^{\mathsf{G}})$$

继承单子结构。

证明。显然的映射

$$\begin{array}{c} \bigoplus_{g \in \mathsf{G}} M(g,-) \otimes_{\mathbb{F}} \left(\bigoplus_{g' \in \mathsf{G}} M(g',g) \otimes_{\mathbb{F}} X(g') \right) \\ \downarrow \\ \bigoplus_{g' \in \mathsf{G}} \left(\bigoplus_{g \in \mathsf{G}} M(g,-) \otimes_{\mathbb{F}} M(g',g) \right) \otimes_{\mathbb{F}} X(g') \end{array}$$

诱导出一个映射 $M \boxtimes (M \boxtimes X) \to (M \circ M) \boxtimes X$，该映射与幺半群的乘积映射复合后，诱导出一个映射 $M \boxtimes (M \boxtimes X) \to M \boxtimes X$。对于 M 而言，单子图表恰好足以证明自函子 $M \boxtimes -$是一个单子。□

根据引理 8.6，将 $\mathrm{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}(\mathrm{GrVect}^{\mathsf{G}})$ 中的对象视为 $\mathrm{Bimod}^{\mathbb{F}_\varphi^{\mathrm{bm}}}$ 中某个幺半群对象上的代数是合理的。

8.1.2. Dyer–Lashof 代数的构造。现在我们具备了所需的工具，可以将 Dyer–Lashof 代数 R_φ 定义为 $\mathrm{Bimod}^{\mathbb{F}_\varphi^{\mathrm{bm}}}$ 中的一个幺半群对象。

若 $V \in \mathrm{Bimod}^{\mathbb{F}_\varphi^{\mathrm{bm}}}$，则可在 V 上构造自由幺半群 $T_{\mathbb{F}\text{-}\mathbb{F}}(V)$，其定义为

$$T_{\mathbb{F}\text{-}\mathbb{F}}(V) \coloneqq \bigoplus_{n \geq 0} V^{\circ n}.$$

因此，在 $X \in \mathrm{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}(\mathrm{GrVect}^{\mathsf{G}})$ 上定义一个 $T_{\mathbb{F}\text{-}\mathbb{F}}(V)$-代数结构，就相当于定义一个映射

$$V \boxtimes X \to X.$$

考虑集合

$$Q = \{\beta^\varepsilon Q_g^s \mid s \in \mathbb{Z} \text{ if } \varphi(\mathrm{tr}_{g\oplus g}(\beta_{g,g})) = 1, s \in \mathbb{Z} + \tfrac{1}{2} \text{ if } \varphi(\mathrm{tr}_{g\oplus g}(\beta_{g,g})) = -1\}$$

具有 $\mathbb{Z}$-分次

$$d_{\mathbb{Z}}(Q_g^s) = 2s(p-1) \text{ and } d_{\mathbb{Z}}(\beta Q_g^s) = 2s(p-1) - 1.$$

定义 $V(\beta^\varepsilon Q_g^s) \in \mathrm{Bimod}^{\mathbb{F}_\varphi^{\mathrm{bm}}}$如下：取.....的商

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}\mathsf{G}}(g^p, -) \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}\mathsf{G}}(-, g)$$

对每个 $\alpha \in \mathbb{F}$，取 $\alpha^p \otimes 1 - 1 \otimes \alpha$ 的集合。也就是说，在 (h, h') 上计算这个张量积后，其中 $h \cong g$ 且 $h' \cong g^p$，我们得到 $\mathbb{F} \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}$，并取其商。注意，这个商可描述为 $\mathbb{F}$，配备通常的左乘法作为其左数乘，并在应用弗罗贝尼乌斯同态后以右乘法作为其右数乘。现在，我们将所得函子与 $\mathbb{F}[2s(p-1) - \varepsilon]$ 作逐级张量积，得到一个集中在 $\mathbb{Z}$-次 $2s(p-1) - \varepsilon$ 的函子；最后，我们在右侧和左侧复合 $\mathbb{F}_\varphi^{\mathrm{bm}}$，从而得到 $\mathrm{Bimod}^{\mathbb{F}_\varphi^{\mathrm{bm}}}$ 中的一个对象。

Let

$$V(Q) \coloneqq \bigoplus_{\beta^\varepsilon Q_g^s \in Q} V(\beta^\varepsilon Q_g^s) \in \mathsf{Bimod}_{\mathbb{F}_\varphi^{\mathrm{bm}}}.$$

最后，令 R_φ 为 $T_{\mathbb{F}\text{-}\mathbb{F}}(V(Q))$ 关于 Adem 关系的商。也就是说，我们考虑 $T_{\mathbb{F}\text{-}\mathbb{F}}(V(Q))(g, (g^p)^p)$ 中的以下元素，其中 g 遍历所有$g \in$G：

$$Q_{g^p}^r Q_g^s - \varphi(\mathrm{tr}_{g\oplus g}(\beta_{g,g}))^{\frac{p-1}{2}} \sum_i (-1)^{r+i} \binom{(i-s)(p-1)-1}{r-(p-1)s-i-1} Q_{g^p}^{r+s-i} Q_g^i$$

and

$$\beta Q_{g^p}^r Q_g^s - \varphi(\mathrm{tr}_{g\oplus g}(\beta_{g,g}))^{\frac{p-1}{2}} \sum_i (-1)^{r+i} \binom{(i-s)(p-1)-1}{r-(p-1)s-i-1} \beta Q_{g^p}^{r+s-i} Q_g^i$$

对于所有 $r > ps$，以及所有 $r \geq ps$，

$$Q^r_{g^p}\beta Q^s_g - \sum_i (-1)^{r+i}\binom{(i-s)(p-1)}{r-(p-1)s-i}\beta Q^{r+s-i}_{g^p} Q^i_g + \varphi(\mathrm{tr}_{g\oplus g}(\beta_{g,g}))^{\frac{p-1}{2}} \sum_i (-1)^{r+i}\binom{(i-s)(p-1)-1}{r-(p-1)s-i} Q^{r+s-i}_{g^p}\beta Q^i_g$$

and

$$\beta Q^r_{g^p}\beta Q^s_g + \varphi(\mathrm{tr}_{g\oplus g}(\beta_{g,g}))^{\frac{p-1}{2}} \sum_i (-1)^{r+i}\binom{(i-s)(p-1)-1}{r-(p-1)s-i}\beta Q^{r+s-i}_{g^p}\beta Q^i_g,$$

其中，在所有情形下，若 $\varphi(\mathrm{tr}_{g\oplus g}(\beta_{g,\,g})) = 1$，则 $r, s \in \mathbb{Z}$；若 $\varphi(\mathrm{tr}_{g\oplus g}(\beta_{g,\,g})) = -1$，则 r，$s \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$。给定 $T_{\mathbb{F}\text{-}\mathbb{F}}(V(Q))(g, (g^p)^p)$ 中一个 $\mathbb{Z}$-次数为 n 的元素 v，我们得到一个映射

$$X_v \coloneqq \mathbb{F}^{\mathrm{bm}}_\varphi \circ \Sigma^n(\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}\mathsf{G}}((g^p)^p, -) \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}\mathsf{G}}(-, g)) \circ \mathbb{F}^{\mathrm{bm}}_\varphi \to T_{\mathbb{F}\text{-}\mathbb{F}}(V(Q)),$$

其中 Σ^n 此处表示与 $\mathbb{F}[n]$ 的逐级张量积。对所有 Adem 关系 v 取余积后，我们定义 R_φ 为如下图表的推出

$$\begin{array}{ccc} T_{\mathbb{F}\text{-}\mathbb{F}}(\oplus_v X_v) & \longrightarrow & T_{\mathbb{F}\text{-}\mathbb{F}}(V(Q)) \\ \downarrow & & \\ T_{\mathbb{F}\text{-}\mathbb{F}}(0) & & \end{array}$$

在 $\mathsf{Mon}(\mathsf{Bimod}^{\mathbb{F}^{\mathrm{bm}}_\varphi})$ 中。因此，R_φ 是 $\mathbb{F}^{\mathrm{bm}}_\varphi$-双模范畴中的一个幺半群对象。

定义 8.7。幺半群 R_φ 称为 $\mathbb{F}_\varphi$-Dyer–Lashof 代数。

该函子

$$R_\varphi \boxtimes -\colon \mathsf{Mod}_{\mathbb{F}_\varphi}(\mathsf{GrVect}^{\mathsf{G}}_{\mathbb{F}}) \to \mathsf{Mod}_{\mathbb{F}_\varphi}(\mathsf{GrVect}^{\mathsf{G}}_{\mathbb{F}})$$

由于 R_φ 是一个结合的幺半群对象，因而定义了一个单子。

8.2. 容许的 Dyer–Lashof 模。我们定义一种中间代数结构，它由带有 R_φ 作用且满足次数条件的对象组成。为与 Peter May 的术语保持一致，并将“代数”一词保留给同时具有幺半群结构的这类对象，我们选择将这些对象称为 Dyer–Lashof 模。不过，我们要指出，这里的术语尤其容易引起混淆，因为我们的 Dyer–Lashof 模实际上是单子 $R_\varphi \boxtimes -$上的代数。

定义 8.8。左 R_φ-模是单子 $R_\varphi \boxtimes -$上的代数。若映射 X 满足以下条件，则左R_φ-模 X 称为容许的：

$$\rho\colon R_\varphi \boxtimes X \to X$$

当 $2s < m + \varepsilon$时，将 $V(\beta^\varepsilon Q^s_g)$ 的像 $\boxtimes X_m$ 映到 $R_\varphi \boxtimes X$ 中的 0，其中 X_m表示 X 的 $\mathbb{Z}$-次数 m 分量。特别地，这意味着

$$\rho(\beta^\varepsilon Q^s_g \otimes x) = 0$$

当 $x \in X(g)_m$ 对于 $2s < m + \varepsilon$ 时。

容许的 R_φ-模构成左 R_φ-模范畴的一个全子范畴 $\mathsf{LMod}_{R_\varphi}^{\mathrm{allow}}$。

存在一个自由可容许的 R_φ-模函子

$$D\colon \mathsf{Mod}_{\mathbb{F}_\varphi}(\mathsf{GrVect}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{G}}) \to \mathsf{LMod}_{R_\varphi}^{\mathrm{allow}},$$

其中 $D(X)$ 是 $R_\varphi \boxtimes X$ 关于由以下元素组成的集合取商所得的商：

$$Q_g^I \otimes_{\mathbb{F}} X(g)_m$$

当 $e(I) < m$ 时。注意， D 可经由所有左 R_φ-模构成的范畴分解：

$$\mathsf{Mod}_{\mathbb{F}_\varphi}(\mathsf{GrVect}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{G}}) \xrightarrow{R_\varphi \boxtimes -} \mathsf{LMod}_{R_\varphi} \to \mathsf{LMod}_{R_\varphi}^{\mathrm{allow}},$$

其中第二个函子由取上述定义的商给出。显然， $R_\varphi \boxtimes -$ 是遗忘函子的左伴随。正如我们之前所见，商的泛性质表明商函子是包含函子的左伴随。因此， D 是到 $\mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}(\mathsf{GrVect}^{\mathsf{G}})$ 的遗忘函子的左伴随。

为了将函子 D 与上一节的基层构造进行比较，明确描述自由可容许的 R_φ-模的一组基会很方便。关于下述陈述中所用可容许序列的定义和记号，请读者参阅第 7.4 节。

引理 8.9. 若 S 是 $X \in \mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}(\mathsf{GrVect}^{\mathsf{G}})$ 的一组基，那么

$$\{Q_g^I \otimes_{\mathbb{F}} x \mid x \in S(g), I \text{ admissible}, e(I) \geq d_{\mathbb{Z}}(x)\}$$

就是 $D(X)$ 的一组基。

证明. 首先证明 R_φ 由满足 I 可容许的 $\{Q_g^I\}$ 张成。（这里我们可以把所有线性组合写成常数在左侧的形式。）根据构造，对于所有 I，R_φ 都由 $\{Q_g^I\}$ 张成，因此我们对 $\ell(I)$ 作归纳，证明每个这样的乘积都可以写成可容许复合的线性组合。

若 $\ell(I) = 0$ 或为 1，则无需证明。假设我们已证明，当 $1 \leq \ell(I) \leq k-1$ 时， Q_g^I 可以写成可容许复合的线性组合。为了证明 $\ell(I) = k$ 的情形，我们还需要一个中间断言（类似论证见 [Lur07] 的第 6 讲）：

断言 8.10. 固定 $m \in \mathbb{Z}$，并假设 $s_2 \geq p^{k-2}m + \varepsilon_2$ 和 $s_1 \geq p^{k-1}m$。那么，要么 I 已经是可容许的，要么 Q_g^I 可以写成 $Q_g^{I'}$ 的线性组合，其中 $\ell(I') = k$, I' 是可容许的， $s_2' > p^{k-2}m + \varepsilon_2'$，且 $s_1' > p^{k-1}m$。

我们通过对 s_1 进行归纳法来证明断言 8.10。首先注意，不失一般性，我们可以假设 $I_{\geq 2}$ 是可容许的，因为它的长度为 $k-1$。第二次归纳的基础情形是 $s_1 = p^{k-1}m$。由于 $s_2 \geq p^{k-2}m + \varepsilon_2$，我们有

$$ps_2 - \varepsilon_2 \geq p^{k-1}m + (p-1)\varepsilon_2 \geq p^{k-1}m = s_1.$$

因此， I 已经是可容许的，因为 $I_{\geq 2}$ 是。

现在假设 $s_1 > p^{k-1}m$。同样，要么 I 已经是可容许的，此时无需证明；要么 $s_1 > ps_2 - \varepsilon_2$。在后一种情况下，我们应用一个 Adem 关系。我们将此分为两种情况。

首先，若 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ 或 $\varepsilon_2 = 0$，则相应的 Adem 关系将 $\beta^{\varepsilon_1} Q^{s_1}_{g^{p^{k-1}}} \beta^{\varepsilon_2} Q^{s_2}_{g^{p^{k-2}}}$ 表示为运算 $\beta^{\varepsilon_1} Q^{s_1+s_2-i}_{g^{p^{k-1}}} \beta^{\varepsilon_2} Q^{i}_{g^{p^{k-2}}}$ 的线性组合，其中 $i \leq s_1 - s_2(p-1) + \varepsilon_2 - 1$ 且 $pi - \varepsilon_2 \geq s_1$（否则二项式系数为零）。

由于 $s_1 > ps_2 - \varepsilon_2$，第二个不等式告诉我们 $i > s_2$；又由于$s_2 \geq p^{k-2}m + \varepsilon_2$，我们有 $i > p^{k-2}m + \varepsilon_2$。第一个不等式意味着

$$s_1 + s_2 - i \geq ps_2 + 1 - \varepsilon_2 \geq p^{k-1}m + (p-1)\varepsilon_2 + 1 > p^{k-1}m.$$

此外，由于 $i > s_2$, $s_1 + s_2 - i < s_1$。因此，$\beta^{\varepsilon_1} Q^{s_1+s_2-i}_{g^{p^{k-1}}} \beta^{\varepsilon_2} Q^{i}_{g^{p^{k-2}}} Q_g^{I_{\geq 3}}$ 也满足断言 8.10 的假设，且其首个指标严格小于 s_1。根据归纳假设，该复合可改写为可容许复合之和。

其次，若 $\varepsilon_1 = 0$ 且 $\varepsilon_2 = 1$，则相应的 Adem 关系将 $Q^{s_1}_{g^{p^{k-1}}} \beta Q^{s_2}_{g^{p^{k-2}}}$ 表示为由两种不同复合构成的项的线性组合。形如 $Q^{s_1+s_2-i}_{g^{p^{k-1}}} \beta Q^{i}_{g^{p^{k-2}}}$ 的项仅在以下情形下具有非零系数：

$$i \leq s_1 - s_2(p-1) + \varepsilon_2 - 1$$

且 $pi - \varepsilon_2 \geq s_1$，与 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ 时相同的论证表明，该项可改写为可容许复合之和。其他项形如 $\beta Q^{s_1+s_2-i}_{g^{p^{k-1}}} Q^{i}_{g^{p^{k-2}}}$，且仅在 $i \leq s_1 - s_2(p-1)$ 且 $pi \geq s_1$ 时非零。由于 $s_1 > ps_2 - \varepsilon_2$，后一个不等式推出 $pi > ps_2 - 1$，因此

$$i \geq s_2 \geq p^{k-2}m + 1 > p^{k-2}m.$$

前一个不等式意味着

$$s_1 + s_2 - i \geq ps_2 \geq p^{k-1}m + p > p^{k-1}m.$$

因此，

$$\beta Q^{s_1+s_2-i}_{g^{p^{k-1}}} Q^{i}_{g^{p^{k-2}}} Q_g^{I_{\geq 3}}$$

满足断言 8.10 的条件，并且当 $s_1 + s_2 - i < s_1$ 时，可以应用归纳假设将其改写为可容许元素的线性组合。然而，我们还必须考虑 $i = s_2$ 的情形，因为这会迫使 $s_1 + s_2 - i = s_1$。不过，这也会迫使 $ps_2 = pi = s_1$，所以复合 $\beta Q^{s_1}_{g^{p^{k-1}}} Q^{s_2}_{g^{p^{k-2}}} Q_g^{I_{\geq 3}}$ 已经是可容许的。

这就证明了断言 8.10 对所有 $s_1 \geq p^{k-1}m$ 都成立。由于 m 是任意的，并且对于任意给定的 I，我们总可以选取足够小的 m，使得 I 满足断言 8.10 的假设，因此这就完成了证明：Q_g^I 可以写成可容许复合的线性组合。

现在注意到，$e(I) < n$ 当且仅当 $Q^I_{g\,\mathbb{F}}\otimes_{\mathbb{F}} x$ 是我们用来对 $R_\varphi \boxtimes X$ 取商以得到 $D(X)$ 的那个集合中的元素。因此，只有满足 $e(I) \geq n$ 的那些 I 才需要用来张成 $D(X)$。

由于 S 是 X的一组基，这证明典范映射

$$\mathbb{F}_\varphi\{Q^I_{g\,\mathbb{F}}\otimes_{\mathbb{F}} x \mid x \in S(g), I \text{ admissible}, e(I) \geq d_{\mathbb{Z}}(x)\} \to D(X)$$

是满射。

根据定理 6.21，$H_{*,\,*}(E_\infty(X))$具有可容许 R_φ-模的结构。因此，$\mathsf{GrVect}^{\mathsf{G}}_{\mathbb{F}}$ 中的映射 $X \to E_\infty(X)$诱导出映射

$$D(X) \to H_{*,*}(E_\infty(X))$$

由可容许的 R_φ-模构成的，它将 $Q^I_{g\,\mathbb{F}}\otimes_{\mathbb{F}} x \mapsto Q^I_g(x)$ 发送到.....在定理 7.13 中，我们给出了 $H_{*,\,*}(E_\infty(X))$ 的一个基，该基由 $Q(S)$ 中元素的乘积构成；如果 I 是可容许的，且对于 $x \in S(g)$，有 $e(I) + \varepsilon_1 > d_{\mathbb{Z}}(x)$，那么 $Q^I_g(x)$ 就是这些基元素之一。如果 $\varepsilon_1 = 1$，那么 $e(I) + \varepsilon_1 > d_{\mathbb{Z}}(x)$ 等价于 $e(I) \geq d_{\mathbb{Z}}(x)$。如果 $\varepsilon_1 = 0$，并且

$e(I) = d_{\mathbb{Z}}(x)$，那么引理 7.10 iii. 表明 $Q_g^I(x) = (Q_g^{I_{\geq j}}(x))^{p^{j-1}}$，其中 $e(I_{\geq j}) + \varepsilon_j > d_{\mathbb{Z}}(x)$，且 $2s_{j-1} = d_{\mathbb{Z}}(Q_g^{I_{\geq j}}(x))$。因此，$Q_{g^{p^{j-1}}}^{I_{\geq j}}(x) \in Q(S)$，并且

$$(-1)^{d_{\mathbb{Z}}(Q_g^{I_{\geq j}}(x))}\varphi(\mathrm{tr}_{g\oplus g}(\beta_{g,g})) = (-1)^{2s_{j-1}}\varphi(\mathrm{tr}_{g\oplus g}(\beta_{g,g})) = 1,$$

所以 $(Q_g^{I_{\geq j}}(x))^{p^{j-1}}$ 也是我们为 $H_{*,*}(E_\infty(X))$ 构造的基中的一个元素。因此，

$$\{Q_g^I \otimes_{\mathbb{F}} x \mid x \in S(g), I \text{ admissible}, e(I) \geq d_{\mathbb{Z}}(x)\}$$

必须在线性意义下独立于 $D(X)$，因为它在 $H_{*,*}(E_\infty(X))$ 中的像线性无关。□

现在我们将为范畴 $\mathbf{LMod}_{R_\varphi}^{\mathrm{allow}}$ 定义一个幺半结构。回想一下，R_φ 是 $\mathbb{F}_\varphi^{\mathrm{bm}}$-双模中的自由幺半群对象 $T_{\mathbb{F}\text{-}\mathbb{F}}(V(Q))$ 的商。对于任意 $X, Y \in \mathbf{LMod}_{R_\varphi}^{\mathrm{allow}}$，我们将定义一个作用在 $X \circledast Y$ 上的左 R_φ-模结构。首先，我们定义一个映射

$$V(Q) \boxtimes (X \circledast Y) \to X \circledast Y$$

利用外部 Cartan 公式。我们分两步进行。如果 $f\colon h_1 \oplus h_2 \to g$ 是 G 中的一个态射，那么我们定义复合

$$V(\beta^\varepsilon Q_g^s)(g, g^p) \otimes_{\mathbb{F}} (X(h_1) \otimes Y(h_2)) \to X({h_1}^p) \otimes Y({h_2}^p) \to (X \circledast Y)(g^p),$$

其中第一个映射将

$$Q_g^s \otimes_{\mathbb{F}} (x \otimes y) \mapsto \sum_{j+k=s} (-1)^{2jk(p-1)} Q_{h_1}^j(x) \otimes Q_{h_2}^k(y)$$

若 $\varepsilon = 0$，则将 $\beta Q_g^s \otimes_{\mathbb{F}} (x \otimes y)$ 发送到

$$\sum_{j+k=s} (-1)^{2jk(p-1)} \left(\beta Q_{h_1}^j(x) \otimes Q_{h_2}^k(y) + (-1)^{d_{\mathbb{Z}}(x)} Q_{h_1}^j(x) \otimes \beta Q_{h_2}^k(y)\right).$$

第二个映射先应用典范映射 $X({h_1}^p) \otimes Y({h_2}^p) \to (X \circledast Y)({h_1}^p \oplus {h_2}^p)$，再应用逆洗牌映射 ${h_1}^p \oplus {h_2}^p \to (h_1 \oplus h_2)^p$，最后

$$f^p\colon (h_1 \oplus h_2)^p \to g^p.$$

注意，由于 X 和 Y 是可容许的，这些和是有限的。该映射诱导出一个映射

$$V(\beta^\varepsilon Q_g^s)(g, g^p) \otimes_{\mathbb{F}} (X \circledast Y)(g) \to (X \circledast Y)(g^p).$$

给定 $g' \cong g$ 和 $h \cong g^p$，任取态射 $f_1\colon g \to g'$ 和 $f_2\colon h \to g^p$，并通过图表定义映射

$$V(\beta^\varepsilon Q_g^s)(g', h) \otimes_{\mathbb{F}} (X \circledast Y)(g') \to (X \circledast Y)(h)$$

根据图表

$$\begin{array}{ccc} V(\beta^\varepsilon Q_g^s)(g', h) \otimes_{\mathbb{F}} (X \circledast Y)(g') & \dashrightarrow & (X \circledast Y)(h) \\ {\scriptstyle (f_1, f_2)\otimes f_1^{-1}}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle f_2^{-1}} \\ V(\beta^\varepsilon Q_g^s)(g, g^p) \otimes_{\mathbb{F}} (X \circledast Y)(g) & \longrightarrow & (X \circledast Y)(g^p) \end{array}$$

其中，底部的箭头是我们刚才根据 Cartan 公式定义的箭头。一个初等论证表明，这个映射与

对 f_1、f_2 的选择无关；此外，所有这类映射构成的集合诱导出一个映射$V(\beta^\varepsilon Q_g^s) \boxtimes (X \circledast Y) \to X \circledast Y$，将它们相加即可得到所需的映射

$$V(Q) \boxtimes (X \circledast Y) \to X \circledast Y.$$

因此，这诱导出一个 $T_{\mathbb{F}\text{-}\mathbb{F}}(V(Q))$-代数映射

$$\mu\colon T_{\mathbb{F}\text{-}\mathbb{F}}(V(Q)) \boxtimes (X \circledast Y) \to X \circledast Y.$$

根据我们对该映射的定义，符号 $\beta^\varepsilon Q_g^s$ 在 $X \circledast Y$ 上的作用满足外部 Cartan 公式，因为逆洗牌映射与洗牌映射相消。

我们断言，该映射将所有 Adem 关系映为 0，因此定义了 $X \circledast Y$上的左R_φ-模结构。

命题 8.11. 对于 $X, Y \in \mathrm{LMod}_{R_\varphi}^{allow}$，映射

$$\mu\colon T_{\mathbb{F}\text{-}\mathbb{F}}(V(Q)) \boxtimes (X \circledast Y) \to X \circledast Y$$

可分解为一个映射

$$R_\varphi \boxtimes (X \circledast Y) \to X \circledast Y$$

使 $X \circledast Y$ 具有左可容许 R_φ-模结构。

证明。为方便记号，记 V 为 $V(Q)$。我们有一个诱导映射

$$R_\varphi \boxtimes (X \circledast Y) \to X \circledast Y$$

当且仅当 $T_{\mathbb{F}\text{-}\mathbb{F}}(V)$ 中的每个 Adem 关系都作用为零。具体而言，若 $u \in (V \circ V)(g, (g^p)^p)$ 是一个 Adem 关系，则我们需要验证

$$\mu(u \,{}_{\mathbb{F}}\otimes_{\mathbb{F}} (x \otimes y)) = 0$$

只要 $x \otimes y \in X(g_1) \otimes Y(g_2)$ 且 $g_1 \oplus g_2 \cong g$。选择这样的 $x \otimes y$ 等价于指定映射

$$\Sigma^{g_1, n_1}\mathbb{F}_\varphi \to X \text{ and } \Sigma^{g_2, n_2}\mathbb{F}_\varphi \to Y$$

在 $\mathrm{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}$ 中，其中 $d_{\mathbb{Z}}(x) = n_1$, $d_{\mathbb{Z}}(y) = n_2$，或者等价地，指定映射

$$D(\Sigma^{g_1, n_1}\mathbb{F}_\varphi) \to X \text{ and } D(\Sigma^{g_2, n_2}\mathbb{F}_\varphi) \to Y$$

可容许 R_φ-模的映射。由于 $T_{\mathbb{F}\text{-}\mathbb{F}}(V) \boxtimes -$ 是一个函子，因此只需假设 $X = D(\Sigma^{g_1,\ n_1}\mathbb{F}_\varphi)$ 和 $Y = D(\Sigma^{g_2,\ n_2}\mathbb{F}_\varphi)$。

根据定理 6.21，$H_{*,\ *}(E_\infty(\Sigma^{g_i,\ n_i}\mathbb{F}_\varphi))$ 是一个容许的 R_φ-模，因此我们有一个映射

$$D(\Sigma^{g_i, n_i}\mathbb{F}_\varphi) \to H_{*,*}(E_\infty(\Sigma^{g_i, n_i}\mathbb{F}_\varphi))$$

由容许的 R_φ-模构成。除此之外，

$$H_{*,*}(E_\infty(\Sigma^{g_1, n_1}\mathbb{F}_\varphi)) \circledast H_{*,*}(E_\infty(\Sigma^{g_2, n_2}\mathbb{F}_\varphi))$$

也是一个容许的 R_φ-模，其 R_φ-作用满足外 Cartan 公式。因此，记

$$X = D(\Sigma^{g_1, n_1}\mathbb{F}_\varphi) \text{ and } Y = D(\Sigma^{g_2 \cdot n_2}\mathbb{F}_\varphi),$$

我们有如下交换图表

$$\begin{array}{ccc} T_{\mathbb{F}\text{-}\mathbb{F}}(V) \boxtimes (X \circledast Y) & \longrightarrow & R_\varphi \boxtimes (H_{*,*}(E_\infty(\Sigma^{g_1, n_1}\mathbb{F}_\varphi)) \circledast H_{*,*}(E_\infty(\Sigma^{g_2, n_2}\mathbb{F}_\varphi))) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X \circledast Y & \longrightarrow & H_{*,*}(E_\infty(\Sigma^{g_1, n_1}\mathbb{F}_\varphi)) \circledast H_{*,*}(E_\infty(\Sigma^{g_2, n_2}\mathbb{F}_\varphi)) \end{array}$$

。这里，顶部的箭头是商映射 $T_{\mathbb{F}\text{-}\mathbb{F}}(V) \to R_\varphi$ 与从 X 和 Y 到自由 E_∞-代数的典范映射的复合。我们知道，$u \otimes_{\mathbb{F}} (x \otimes y)$在右下角映射为 0

$$H_{*,*}(E_\infty(\Sigma^{g_1,n_1}\mathbb{F}_\varphi)) \circledast H_{*,*}(E_\infty(\Sigma^{g_2,n_2}\mathbb{F}_\varphi)).$$

因此，为了证明它在 $D(\Sigma^{g_1,n_1}\mathbb{F}_\varphi) \circledast D(\Sigma^{g_2,n_2}\mathbb{F}_\varphi)$ 中映为零，只需证明映射

$$D(\Sigma^{g_1,n_1}\mathbb{F}_\varphi) \circledast D(\Sigma^{g_2,n_2}\mathbb{F}_\varphi) \to H_{*,*}(E_\infty(\Sigma^{g_1,n_1}\mathbb{F}_\varphi)) \circledast H_{*,*}(E_\infty(\Sigma^{g_2,n_2}\mathbb{F}_\varphi))$$

是单射。由于我们是在一个域上工作，这又等价于证明每个映射

$$D(\Sigma^{g_i,n_i}\mathbb{F}_\varphi) \to H_{*,*}(E_\infty(\Sigma^{g_i,n_i}\mathbb{F}_\varphi))$$

都是单射。

为此，我们使用引理 8.9 中对 $D(\Sigma^{g_i,n_i}\mathbb{F}_\varphi)$ 的基的描述。具体而言，若 x 是双次数为 (g,n) 的单元素集合，且 $\mathbb{F}_\varphi\{x\} \cong \Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi$，则

$$\{Q_g^I \otimes_{\mathbb{F}} x \mid I \text{ admissible}, e(I) \geq n\}$$

是 $D(\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi)$ 的一组基。由定理 7.13 可知，$H_{*,*}(E_\infty(\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi))$ 同构于由以下元素生成的自由交换代数

$$Q(\{x\}) = \{Q_g^I(x) \mid I \text{ admissible}, e(I) + \varepsilon_1 > n\}.$$

由引理 7.5 可知，$Q(\{x\})$ 上的自由交换代数有一个基，由 $Q(\{x\})$ 中元素按全序单调递增排列的乘积构成。特别地，存在一个单射

$$\mathbb{F}_\varphi\{Q(\{x\})\} \hookrightarrow H_{*,*}(E_\infty(\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi)).$$

注意，

$$\{Q_g^I(x) \mid I \text{ admissible}, e(I) \geq n\} = Q(\{x\}) \sqcup \{Q_g^I(x) \mid I \text{ admissible}, \varepsilon_1 = 0, e(I) = n\}.$$

此外，引理 7.14 的论证表明，可容许的 I 满足 $\varepsilon_1 = 0, e(I) = n$ 当且仅当

$$Q_g^I(x) = (Q_g^{I_{\geq 2}}(x))^p$$

且满足以下条件之一：$Q_g^{I_{\geq 2}}(x) \in Q(\{x\})$ 或 $\varepsilon_2 = 0, e(I_{\geq 2}) = n$。也就是说，$Q_g^I(x) = (Q_g^{I_{\geq i}}(x))^{p^{i-1}}$，其中 $Q_g^{I_{\geq i}}(x) \in Q(\{x\})$（这里允许 $I_{\geq i}$ 为空，此时 i 取为 $k+1$）。因此，$D(\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi)$ 有一个基，其元素要么属于 $Q(\{x\})$，要么是 $Q(\{x\})$ 中元素的迭代幂，这意味着存在一个单射

$$D(\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi) \hookrightarrow \mathcal{S}(Q(\{x\})) \cong H_{*,*}(E_\infty(\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi)).$$

由于我们可以选择此映射，使其与典范映射一致

$$D(\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi) \to H_{*,*}(E_\infty(\Sigma^{g,n}\mathbb{F}_\varphi)),$$

因此，这个典范映射是单射。

因此，根据上述论证，我们有一个映射

$$R_\varphi \boxtimes (X \circledast Y) \to X \circledast Y$$

对于任意可容许的 R_φ-模 X 和 Y，使得 $X \circledast Y$ 成为一个左 R_φ-模。此外，$X \circledast Y$的可容许性可由 Cartan 公式推出：若 $x \in X(g)_n$且 $y \in Y(h)_m$，并且 $2s < n + m$，则对于任意满足 $j + k = s$的 j、k，必有 $2j < n$ 或 $2k < m$，从而根据 X 的可容许性，$Q_g^j(x) \otimes Q_h^k(y) = 0$，并且

Y。这表明在适当的范围内， $Q^s_{g\oplus h}$ 在 $x\otimes y$ 上的作用为 0。类似的论证表明，在适当的范围内， $\beta Q^s_{g\oplus h}$ 的作用为零。□

我们也可以通过定义一个映射，为 $\mathbb{F}_\varphi$ 赋予可容许 R_φ-模的结构

$$V(Q)\boxtimes\mathbb{F}_\varphi\to\mathbb{F}_\varphi$$

该映射除在 $V(Q^0_{\mathbb{I}^\mathfrak{G}})\boxtimes\mathbb{F}_\varphi$ 上外均为零；在此处，它由将 $Q^0_{\mathbb{I}^\mathfrak{G}}\otimes 1\mapsto 1$ 送至.....来确定。由于没有任何 Adem 关系包含重复出现的 $Q^0_{\mathbb{I}^\mathfrak{G}}$，不难看出这会诱导出一个映射

$$R_\varphi\boxtimes\mathbb{F}_\varphi\to\mathbb{F}_\varphi$$

从而赋予 $\mathbb{F}_\varphi$ 左 R_φ-模结构。根据构造， $\mathbb{F}_\varphi$ 是可容许的。

因此，利用命题 8.11 中的乘积，并取 $\mathbb{F}_\varphi$ 为幺半群单位，我们可以为 $\mathrm{LMod}^{\mathrm{allow}}_{R_\varphi}$ 赋予幺半结构；我们声称，$\mathrm{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}(\mathrm{GrVect}^\mathfrak{G})$ 中的对称性也会在此范畴上诱导出对称性。

命题 8.12。$\mathrm{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}(\mathrm{GrVect}^\mathfrak{G})$ 上的对称幺半结构，使 $\mathrm{LMod}^{allow}_{R_\varphi}$成为一个对称幺半范畴，其中乘积采用命题 8.11 所给出的左 R_φ-模结构。

证明。还需证明，对称映射 $X\circledast Y\to Y\circledast X$ in $\mathrm{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}(\mathrm{GrVect}^\mathfrak{G})$ 是左 R_φ-模的映射。因此，我们需要验证下图可交换

$$\begin{array}{ccc} R_\varphi\boxtimes(X\circledast Y) & \longrightarrow & R_\varphi\boxtimes(Y\circledast X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X\circledast Y & \longrightarrow & Y\circledast X. \end{array} \tag{8.13}$$

为此，回忆等式 2.5， $X(g_1)_{n_1}\otimes Y(g_2)_{n_2}$ 上的对称性由以下方式给出：应用 GrVect 中的对称性（它交换因子并引入一个符号），再由编织态射 $\beta^{-1}_{g_1,g_2}$作用。因此，先应用对称性再由 R_φ 作用，会引入符号 $(-1)^{n_1n_2}$，并由 $(\beta^{-1}_{g_1,g_2})^p\circ\psi^{-1}$作用（其中照例 ψ 是洗牌映射）。另一方面，先由 Q^s_g 作用再应用对称性，会在 Cartan 公式求和的每一项上引入符号 $(-1)^{(n_1+2j)(p-1)(n_2+2(s-j)(p-1))}$，并由 $\psi^{-1}\circ\beta^{-1}_{g_1{}^p,g_2{}^p}\cdot$ 作用。由于 $2j(p-1)$ 和 $2(s-j)(p-1)$ 都是偶数，这些符号相同。此外，$(\beta^{-1}_{g_1,g_2})^p\circ\psi^{-1}$ 和 $\psi^{-1}\circ\beta^{-1}_{g_1{}^p,g_2{}^p}$ 都是态射

$$g_2{}^p\oplus g_1{}^p\to(g_1\oplus g_2)^p$$

由编织和结合子定义，并且保持 g_1 和 g_2的因子顺序。因此，根据对称幺半范畴的相干公理，它们彼此相等。类似地，可以验证作用于 βQ^s_g时符号也相同，因此图表 8.13 可交换。□

注 8.14。对于经典 Dyer–Lashof 代数（或类似地，对于 Steenrod 代数），可以先定义一个余乘映射$R_\varphi\to R_\varphi\otimes R_\varphi$，使 R_φ 成为 Hopf 对象，从而定义这种幺半结构。然而，由于若干原因，这种方法在我们的情形中行不通。

首先，我们允许 $\mathbb{Z}$分次运算，而不只是非负分次运算，因此这个和

$$\sum Q^rQ^{s-r}$$

不会是有限的。即使我们只考虑非负分次运算，如果 obG 是无限的，那么

$$\sum_{h_1 \oplus h_2 \cong h} Q^r_{h_1} Q^{r-s}_{h_2}$$

也将是无限的。因此，我们显然无法定义这样的余积。因此，为了使用这个公式，限制讨论范围，只考虑容许的 R_φ-模，这一点很重要。

此外，如果 $\mathbb{F}$ 不等于其素子域，那么我们必须使用上述基于双模的构造，而 $\mathbb{F}$-$\mathbb{F}$-双模范畴并非辫编幺半范畴。因此，我们无法进行通常的构造

$$R_\varphi \otimes X \otimes Y \to R_\varphi \otimes R_\varphi \otimes X \otimes Y \to R_\varphi \otimes X \otimes R_\varphi \otimes Y \to X \otimes Y$$

即使我们已经在 R_φ 上定义了余积也是如此，因为这样做需要与双模进行编织。

8.3. 容许的 Dyer–Lashof 代数。现在我们准备定义容许的 Dyer–Lashof 代数，并将证明 $H_{*,\ *}(E_\infty(X))$ 同构于由 $H_{*,\ *}(X)$ 生成的自由容许 Dyer–Lashof 代数。

利用 $\mathsf{LMod}^{\mathrm{allow}}_{R_\varphi}$ 上的幺半结构，通常的张量代数构造定义了遗忘函子的左伴随 T

$$\mathsf{LMod}^{\mathrm{allow}}_{R_\varphi} \overset{T}{\rightleftarrows} \mathsf{Mon}(\mathsf{LMod}^{\mathrm{allow}}_{R_\varphi})$$

来自 $\mathsf{LMod}^{\mathrm{allow}}_{R_\varphi}$ 中幺半群对象的范畴。与通常一样，商构造给出一个左伴随

$$\mathsf{Mon}(\mathsf{LMod}^{\mathrm{allow}}_{R_\varphi}) \rightleftarrows \mathsf{CMon}(\mathsf{LMod}^{\mathrm{allow}}_{R_\varphi})$$

对应于从 $\mathsf{LMod}^{\mathrm{allow}}_{R_\varphi}$ 中交换幺半群对象的范畴出发的遗忘函子。

定义 8.15. 一个可容许的 R_φ-代数是 $\mathsf{LMod}^{\mathrm{allow}}_{R_\varphi}$ 中的交换幺半群对象 X，其结构映射为

$$\rho\colon R_\varphi \boxtimes X \to X \text{ in } \mathsf{Mod}_{\mathbb{F}_\varphi}(\mathsf{GrVect}^{\mathsf{G}})$$

and

$$\mu\colon X \circledast X \to X \text{ in } \mathsf{LMod}^{\mathrm{allow}}_{R_\varphi}$$

使得若 $x \in X(g)_m$，且 $\varphi(\mathrm{tr}_{g\oplus g}(\beta_{g,g}))(-1)^m = 1$，那么当 $2s = m$ 时，

$$\rho(Q^s_g \otimes x) = x^{\otimes p},$$

其中 $x^{\otimes p} = \mu(x, \mu(x, \dots, \mu(x, x)))$ 是 p 重迭代乘积。

可容许的 R_φ-代数构成 $\mathsf{CMon}(\mathsf{LMod}^{\mathrm{allow}}_{R_\varphi})$ 的一个全子范畴 $\mathsf{Alg}^{\mathrm{allow}}_{R_\varphi}$。

注释 8.16. 注意，根据使用 Cartan 公式定义的 R_φ 对 $X \circledast X$ 的作用，我们自动得到 Cartan 公式在 X 中成立。此外，假设 $\varphi(\mathrm{tr}_{g\oplus g}(\beta_{g,\ g}))(-1)^m = 1$ 保证了 $Q^s_g \in Q$ 当 $2s = m$ 时。从幺半群单位 $\mathbb{F}_\varphi$ 上的 R_φ-模结构定义出发，我们自动得到当 $s \neq 0$ 时 $Q^s_{\mathbb{I}_\mathcal{G}} \otimes 1 \mapsto 0$。

我们对范畴 $\mathsf{Alg}^{\mathrm{allow}}_{R_\varphi}$的定义，正是为了使 E_∞-代数的同调上的运算能够定义一种允许的 R_φ-代数结构。定理 6.21 直接推出这一点确实成立：

推论 8.17. 若 $X \in \mathsf{Alg}^{E_\infty}(\mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi})$，则 $H_{*,\ *}(X)$ 继承一种允许的 R_φ-代数结构。

我们定义一个自由容许 R_φ-代数函子

$$\mathbf{W}\colon \mathsf{Mod}_{\mathbb{F}_\varphi}(\mathsf{GrVect}_{\mathbb{F}}^{\mathsf{G}}) \to \mathsf{Alg}_{R_\varphi}^{\mathrm{allow}}$$

它分解为

$$\mathsf{Mod}_{\mathbb{F}_\varphi}(\mathsf{GrVect}^{\mathsf{G}}) \xrightarrow{D} \mathsf{LMod}_{R_\varphi}^{\mathrm{allow}} \to \mathsf{CMon}(\mathsf{LMod}_{R_\varphi}^{\mathrm{allow}}) \to \mathsf{Alg}_{R_\varphi}^{\mathrm{allow}},$$

其中我们已证明前两个函子是左伴随函子，而最后一个函子仍需定义。为了从 $\mathsf{CMon}(\mathsf{LMod}_{R_\varphi}^{\mathrm{allow}})$ 中带有 R_φ 作用映射 ρ: $R_\varphi \boxtimes X \to X$ 的对象 X in 中得到一个容许 R_φ-代数，我们对 X取商，商掉包含以下所有元素的集合:

$$\rho\left(Q_g^{\frac{m}{2}} \otimes x\right) - x^p$$

对于 $x \in X(g)_m$ ，其中 $\varphi(\mathrm{tr}_{g\oplus g}(\beta_{g,\ g}))(-1)^m = 1.$ 。再次利用商的泛性质，可以证明这个商函子是包含函子的左伴随。因此，W 定义为若干左伴随函子的复合，所以它本身也是遗忘函子的左伴随。

事实上，我们声称 W 只是第 7.5 节中构造 $W(H_{*,\ *}(X)\ S)$ 的另一种表述；不过，W 带有 Dyer–Lashof 运算的作用，而 $W(H_{*,\ *}(X)\ S)$ 仅有一个乘积。现在我们将比较 $\mathsf{Alg}^{\mathbb{F}_\varphi}(\mathsf{GrVect}^{\mathsf{G}})$ 中的 $W(H_{*,\ *}(X)\ S)$ 和 $\mathsf{W}(H_{*,\ *}(X))$。

回想一下， $W(H_{*,\ *}(X)\ S)$ 是集合 $Q(S)$ 上的自由交换代数。因此，为了在 $\mathsf{Alg}^{\mathbb{F}_\varphi}$ 中构造映射 $W(H_{*,\ *}(X)\ S) \to \mathsf{W}(H_{*,\ *}(X))$，只需构造一个映射

$$Q(S) \to \mathbf{W}(H_{*,*}(X))$$

分次集合之间的映射。存在一个集合映射 $Q(S) \to R_\varphi \boxtimes H_{*,\ *}(X)$，它将 $Q_g^I x \mapsto Q_g^I \otimes x$ 发送到。因此，我们得到一个映射

$$Q(S) \to R_\varphi \boxtimes H_{*,*}(X) \to D(H_{*,*}(X)) \to T(D(H_{*,*}(X))) \to \mathbf{W}(H_{*,*}(X)),$$

其中 $R_\varphi \boxtimes - \to D(-)$ 和 $T(D(-)) \to \mathsf{W}(-)$ 是商映射。换句话说，$\mathsf{LMod}^{R_\varphi}$ 中的映射 $R_\varphi \boxtimes H_{*,\ *}(X) \to \mathsf{W}(H_{*,\ *}(X))$ 与 $\mathsf{Alg}_{R_\varphi}^{\mathrm{allow}}$ 中的单位元映射 $\mathsf{W}(H_{*,\ *}(X)) \to \mathsf{W}(H_{*,\ *}(X))$ 互为伴随。这诱导出一个映射

$$W(H_{*,*}(X), S) \to \mathbf{W}(H_{*,*}(X))$$

代数。

命题 8.18. 设 $X \in \mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}(\mathsf{Ch}^{\mathsf{G}})$，且设 S 为 $H_{*,\ *}(X)$ 的一组基。那么映射

$$W(H_{*,*}(X), S) \to \mathbf{W}(H_{*,*}(X))$$

在 $\mathsf{Alg}^{\mathbb{F}_\varphi}(\mathsf{GrVect}^{\mathsf{G}})$ 中是一个同构。

在证明这一点之前，我们先说明这个映射分解了该同构

$$W(H_{*,*}(X), S) \to H_{*,*}(E_\infty(X)).$$

通常的映射

$$H_{*,*}(X) \to H_{*,*}(E_\infty(X))$$

在 $\mathsf{GrVect}^{\mathsf{G}}$ 中诱导出一个映射

$$\mathbf{W}(H_{*,*}(X)) \to H_{*,*}(E_\infty(X))$$

在 X 中自然的容许 R_φ-代数的.....。由于同构 $W(H_{*,\ *}(X)\ S)\ \to H_{*,\ *}(E_\infty(X))$ 是通过映射定义的

$$S \to H_{*,*}(X) \to H_{*,*}(E_\infty(X)),$$

映射 $Q(S) \to H_{*,\ *}(E_\infty(X))$ 和 $Q(S)\ \to \mathsf{W}(H_{*,\ *}(X)) \to H_{*,\ *}(E_\infty(X))$ 相同。由于 $W(H_{*,\ *}(X)\ S)$ 是由 $Q(S)$ 生成的自由交换代数，因此可得图表

$$\begin{array}{ccc} W(H_{*,*}(X)\ S) & \longrightarrow & H_{*,*}(E_\infty(X)) \\ \downarrow & \nearrow & \\ \mathsf{W}(H_{*,\ *}(X)) & & \end{array}$$

此处交换，其中对角箭头在忘掉 R_φ-模结构后被视为 $\mathsf{Alg}^{\mathbb{F}_\varphi}(\mathsf{GrVect}^{\mathsf{G}})$ 中的一个映射。

证明。由于映射 $W(H_{*,*}(X)\ S) \to H_{*,*}(E_\infty(X))$ 根据定理 7.13 是一个同构，因此映射 $W(H_{*,*}(X)\ S)\ \to \mathsf{W}(H_{*,*}(X))$ 必须是单射。

现在我们证明这个映射也是满射。由引理 8.9，我们知道

$$Q' = \{Q_g^I \otimes x \mid I \text{ admissible}, x \in S(g)_n, e(I) \geq n\}$$

是 $D(H_{*,*}(X))$ 的一组基。此外，我们有

$$Q' \cong Q(S) \sqcup \{Q_g^I \otimes x \mid I \text{ admissible}, x \in S(g)_n, \varepsilon_1 = 0, e(I) = n\}.$$

因此，$\mathsf{W}(H_{*,*}(X))$ 的底层交换代数是自由交换代数 $\mathcal{S}(Q')$ 的一个商，其生成元为 Q'。在 Q' 上选取一个全序，使得 $\mathcal{S}(Q')$ 的一组基由 $\{q_1 \cdots q_j\}$ 给出，其中 $q_i \in Q'$、 $q_i \leq q_{i+1}$，且仅当 q_i 对于 $\varphi(\mathrm{tr}_{g\oplus g}(\beta_{g,g}))(-1)^n = 1$ 的双次数为 (g, n) 时，才允许取 $q_i = q_{i+1}$。这里 j 是任意非负整数，而 $j = 0$ 对应于空积。

将这个全序限制在 Q' 的子集 $Q(S)$ 上，我们得到 $W(H_{*,*}(X)\ S)$ 的一组基，由上述形式的元素 $\{q_1 \cdots q_j\}$ 构成，但要求 $q_i \in Q(S)$。因此，显然的映射 $W(H_{*,*}(X)\ S) \to \mathcal{S}(Q')$ 是单射。该映射的余核有一组基，由上述形式的元素 $\{q_1 \cdots q_j\}$ 构成，但至少有一个$q_i \in Q' \setminus Q(S)$。换句话说， $q_i = Q_g^I \otimes x$，其中 $\varepsilon_1 = 0$ 且 $e(I) = d_{\mathbb{Z}}(x)$。根据引理 7.10 iii.，条件 $\varepsilon_1 = 0, e(I) = n$ 等价于 $Q_g^I \otimes x$ 在 $\mathsf{W}(H_{*,*}(X))$ 中的像为 $(Q_g^{I_{\geq i}} \otimes x)^{p^{i-1}}$，其中 $Q_g^{I_{\geq i}} \otimes x \in Q(S)$，且$2 \leq i \leq k+1$ 唯一确定。由于对于 $Q_g^{I_{\geq i}} \otimes x \in Q(S)$，$(Q_g^{I_{\geq i}} \otimes x)^{p^{i-1}}$ 位于复合映射的像中

$$W(H_{*,*}(X), S) \to \mathcal{S}(Q') \to \mathbf{W}(H_{*,*}(X)),$$

由此可知，这个复合映射是满射（因为后一个映射是满射，而且第一个映射的余核中的每个元素都映射到由 $W(H_{*,*}(X)\ S)$ 张成的空间中的某个元素）。

□

结合定理 7.13 的结果可知，自由函子W描述了自由 E_∞-代数的同调。也就是说，自由 E_∞-代数的同调同构于自由的可容许 R_φ-代数。

推论 8.19。存在一个自然同构

$$\mathbf{W}(H_{*,*}(-)) \to H_{*,*}(E_\infty(-))$$

从 $\mathsf{Mod}^{\mathbb{F}_\varphi}(\mathsf{Ch}^{\mathsf{G}})$ 到 $\mathsf{Alg}^{allow}_{R_\varphi}$ 的函子范畴。

Appendix A。 A spectral sequence comparison theorem

下面是 Zeeman [Zee57] 通常的谱序列比较定理的一个类比。这里我们在阿贝尔范畴 $(\mathsf{Vect}^{\mathsf{G}}_{\mathbb{F}})^{\mathbb{N}}$ 中处理谱序列，该范畴由 $\mathsf{Vect}^{\mathsf{G}}_{\mathbb{F}}$ 的 $\mathbb{N}$-分次对象构成。此处分次对应于本文其余部分中的电荷分次，因此我们总是写成

$$F\langle k\rangle$$

表示 F 中具有分次 k 的直和项。

定理 A.1。设 $\tilde{E}$ 和 E 是 $(\mathsf{Vect}^{\mathsf{G}}_{\mathbb{F}})^{\mathbb{N}}$ 中的谱序列，满足 $\tilde{E}^r_{p,\,q}\langle k\rangle = E^r_{p,\,q}\langle k\rangle = 0$ 若 $p<0$ 或 $p>k$。此外，设

$$E^1_{p,q}\langle k\rangle \cong \bigoplus_t E^1_{p,t}\langle p\rangle \circledast E^1_{0,q-t}\langle k-p\rangle$$

and

$$\tilde{E}^1_{p,q}\langle k\rangle \cong \bigoplus_t \tilde{E}^1_{p,t}\langle p\rangle \circledast \tilde{E}^1_{0,q-t}\langle k-p\rangle.$$

设 $\Psi\colon E \to E$ 是谱序列之间的映射，并记 $\Psi^r_{p,\,q}\langle k\rangle$ 为相应的映射

$$\tilde{E}^r_{p,q}\langle k\rangle \to E^r_{p,q}\langle k\rangle.$$

If

- $\Psi^\infty_{p,\,q}\langle k\rangle$ 对所有 p、q都是同构；
- $\Psi^1_{p,\,q}\langle \ell\rangle$ 在 $\ell<k$ 条件下，对所有 p、q 都是同构；
- $\Psi^1_{k,\,q}\langle k\rangle$ 对 $q\le M$ 是同构，对 $q=M+1$是满射，

then

$$\Psi^1_{0,q}\langle k\rangle\colon \tilde{E}^1_{0,q}\langle k\rangle \to E^1_{0,q}\langle k\rangle$$

对 $q\le M+k-1$ 是同构，对 $q=M+k$是满射。

证明。记 $Z^r_{p,\,q}\langle\ell\rangle$（分别记 $Z^r_{p,\,q}\langle\ell\rangle$）为 $d^r_{p,\,q}\langle\ell\rangle$（$d^r_{p,\,q}\langle\ell\rangle$）的核，并记 $B^r_{p,\,q}\langle\ell\rangle$（$B^r_{p,\,q}\langle\ell\rangle$）为 $d^r_{p+r,\,q-r+1}\langle\ell\rangle$（$d^r_{p+r,\,q-r+1}\langle\ell\rangle$）在 $E^r_{p,\,q}\langle\ell\rangle$中的像。我们将映射 $\Psi^r_{p,\,q}\langle\ell\rangle$ 在 $Z^r_{p,\,q}\langle\ell\rangle$ 上的限制记为 $z^r_{p,\,q}\langle\ell\rangle$，并将限制到 $B^r_{p,\,q}\langle\ell\rangle$记为 $b^r_{p,\,q}\langle\ell\rangle$。我们反复使用短正合列

$$0\to B^r_{p,q}\langle\ell\rangle \to Z^r_{p,q}\langle\ell\rangle \to E^{r+1}_{p,q}\langle\ell\rangle \to 0$$

and

$$0\to Z^r_{p,q}\langle\ell\rangle \to E^r_{p,q}\langle\ell\rangle \xrightarrow{d^r} B^r_{p-r,q+r-1}\langle\ell\rangle \to 0,$$

以及 E 中相同的正合列。特别是，这些短正合列给出以下推论：

i. 如果 $\Psi^r_{p,\,q}\langle\ell\rangle$是单射，则 $z^r_{p,\,q}\langle\ell\rangle$ 和 $b^r_{p,\,q}\langle\ell\rangle$都是单射。ii. 如果 $\Psi^r_{p+r,\,q-r+1}\langle\ell\rangle$ 是满射，则 $b^r_{p,\,q}\langle\ell\rangle$ 是满射。iii. 如果 $\Psi^r_{p,\,q}\langle\ell\rangle$ 是满射且 $b^r_{p-r,\,q+r-1}\langle\ell\rangle$ 是单射，则 $z^r_{p,\,q}\langle\ell\rangle$ 是满射。iv. 如果 $b^r_{p,\,q}\langle\ell\rangle$是满射且 $z^r_{p,\,q}\langle\ell\rangle$是单射，则 $\Psi^{r+1}_{p,\,q}\langle\ell\rangle$ 是单射。

v. 如果 $z^r_{p,\ q}\langle\ell\rangle$是满射，则 $\Psi^{r+1}_{p,\ q}\ \langle\ell\rangle$ 是满射。

注意到，根据对谱序列的 E^1 页描述为乘积，并且假设当 $\ell < k$ 时 $\Psi^1_{p,\ q}\langle\ell\rangle$ 是同构，我们看到，当 $0 < p < k$ 时，$\Psi^1_{p,\ q}\langle k\rangle$ 总是同构。

在证明的其余部分，我们使用 $\ell = k$，因此将其从记号中省略。我们首先证明以下中间结论。

命题 A.2。假设 $1 \le r \le k-1$。则

$$b^r_{p,q} \text{ is injective for all } q \text{ if } 1 \le p \le k$$

$$\text{surjective } \begin{cases} \text{for all } q & 0 \le p \le k-r-1 \text{ or } k-r < p \\ q \le M+r & p = k-r \end{cases}$$

and

$$z^r_{p,q} \text{ is injective } \begin{cases} \text{for all } q & 1 \le p \le k-r \\ q \le M+k-p & k-r < p \le k \end{cases}$$

$$\text{surjective } \begin{cases} \text{for all } q & r+1 \le p < k \\ q \le M+1 & p = k. \end{cases}$$

特别地，利用陈述 (iv) 和 (v)，可推出

$$\Psi^{r+1}_{p,q} \text{ is injective } \begin{cases} \text{for all } q & 1 \le p < k-r \\ q \le M+k-p & k-r \le p \le k \end{cases}$$

$$\text{surjective } \begin{cases} \text{for all } q & r+1 \le p < k \\ q \le M+1 & p = k. \end{cases}$$

˜我们对 r 进行归纳法证明。注意，对于所有 $p > k-r$, $B^r_{p,q} = B^r_{p,q} = 0$，由于我们的谱序列在 $p > k$ 时为零，因此在证明上述关于 $b^r_{p,q}$ 的陈述时，只需考虑范围 $p \le k-r$。首先考虑 $r = 1$。由于当 $1 \le p \le k-1$ 时对所有 q 以及当 $p = k$ 时对 $q \le M$，$\Psi^1_{p,q}$ 是单射，根据陈述 (i)，关于 $b^1_{p,q}$ 和 $z^1_{p,q}$ 的单射陈述成立。由于当 $1 \le p+1 \le k-1$ 时对所有 q 以及当 $p+1 = k$ 时对 $q \le M+1$，$\Psi^1_{p+1,q}$ 是满射，根据陈述 (ii)，关于 $b^1_{p,q}$ 的满射陈述成立。最后，当 $1 \le p \le k-1$ 时对所有 q 以及当 $p = k$ 时对 $q \le M+1$，$\Psi^1_{p,q}$ 是满射；当 $1 \le p-1 \le k$ 时对所有 q，$b^1_{p-1,q}$ 是单射。因此，根据陈述 (iii)，$z^1_{p,q}$ 在这些范围的交集上是满射，即当 $2 \le p \le k-1$ 时对所有 q 以及当 $p = k$ 时对$q \le M+1$。这证明了基例 $r = 1$。

假设我们已证明 $b^{r-1}_{p\ q,}$ 和$z^{r-1}_{p\ q,}$ 的情形，因此可以假设

$$\Psi^r_{p,q} \text{ is injective } \begin{cases} \text{for all } q & 1 \le p \le k-r \\ q \le M+k-p & k-r < p \le k \end{cases}$$

$$\text{surjective } \begin{cases} \text{for all } q & r \le p < k \\ q \le M+1 & p = k. \end{cases}$$

$\Psi^r_{p,q}$ 的单射范围立即由命题 (i) 得出$z^r_{p,q}$ 和$b^r_{p,q}$ 的单射范围。由于$\Psi^r_{p+r,q-r+1}$ 在 $r \le p+r < k$ 时对所有 q 均为满射，而在 $p+r = k$时对 $q-r+1 \le M+1$ 为满射，因此$b^r_{p,q}$ 在 q时对所有

$0 \le p < k-r$ 且在 $p = k-r$ 时对 $q \le M+r$ 为满射（由命题 (ii) 得出）。最后，$\Psi^r_{p,q}$ 在 $r \le p < k$ 时对所有 q 均为满射，而在 $p = k$时对 $q \le M+1$ 为满射；并且，如果 $1 \le p-r \le k$，则$b^r_{p-r,q+r-1}$对所有 q 均为单射。因此，$z^r_{p,q}$ 在这些范围的交集中为满射，也就是说，对所有 q，当 $r+1 \le p \le k-1$ 时成立；而当 $p = k$时，对 $q \le M+1$ 成立。这就证明了该断言。

在证明的其余部分，我们将结合该断言以及两个谱序列的形状进行若干论证。为简化记号，˜我们只在 E中陈述大多数结论；但由于 E 具有相同的形状，同样的˜结论对 E 也成立。

注意，$d^r\colon E^r_{0,q} \to 0$ 恒为零，因此 $Z^r_{0,q} \cong E^r_{0,q}$。由于当 $r > k$时，$d^r\colon E^r_{r,\,q-r+1} \to E^r_{0,q}$为零，因此我们有

$$E^1_{0,q} \cong E^\infty_{0,q} \oplus \bigoplus_{r=1}^{k} B^r_{0,q},$$

并且对 $\tilde{E}^1_{0,q}$也有类似结论。这些分解与映射 $b^r_{0,q}$ 和 $\Psi^\infty_{0,q}$相容，因此，要证明 $\Psi^1_{0,q}$ 是单射/满射，只需证明所有 $b^r_{0,q}$ 都是单射/满射（因为我们已假设 Ψ^∞始终是同构）。

由该断言可知，当 $1 \le r \le k-1$时，对于所有 q，$b^r_{0,q}$ 都是满射。根据定义，$d^k\colon E^k_{k,q-k+1} \to B^k_{0,q}$ 是满射，同次数下的 $\tilde{d}^k$ 也是如此。由该断言可知，当 $q-k+1 \le M+1$时，$\Psi^k_{k,q-k+1}$ 是满射。综上，当$q \le M+k$时，所有 $b^r_{0,q}$（因此 $\Psi^1_{0,q}$ 也如此）都是满射。注意，当 $k = 1$ 时这一结论也成立，因为此时我们只需考虑 $b^k_{0,q}$。

现在，我们通过考察短正合列，来研究 $b^r_{0,q}$ 何时是单射。

$$0 \to Z^r_{r,q-r+1} \to E^r_{r,q-r+1} \to B^r_{0,q} \to 0.$$

如果 $z^r_{r,q-r+1}$ 是满射，且 $\Psi^r_{r,q-r+1}$ 是单射，那么 $b^r_{0,q}$ 是单射。

首先，假设 $k-r < r$。那么，对于所有 $t \ge 0$，都有 $B^{r+t}_{r,q-r+1} = 0$，因为我们的谱序列在 $p > k$ 时为零，所以对于任意 $t \ge 0$，都有 $Z^{r+t}_{r,q-r+1} \cong E^{r+t+1}_{r,q-r+1}$。此外，对于任意 $t > 0$，都有 $d^{r+t}_{r,q-r+1} = 0$，因此对于任意 $t > 0$，都有 $Z^{r+t}_{r,q-r+1} \cong E^{r+t}_{r,q-r+1}$。于是，$Z^r_{r,q-r+1} \cong E^\infty_{r,q-r+1}$，所以对于所有 q，$z^r_{r,q-r+1}$ 都是满射（事实上是同构）。此外，由该断言可知，当 $q-r+1 \le M+k-r$时，$\Psi^r_{r,q-r+1}$ 是单射，也就是说，当 $q \le M+k-1$时如此，因此当 $q \le M+k-1$时，$b^r_{0,q}$ 是单射。注意，当 $k = 1$时这一结论也成立，因为根据假设，当 $q \le M$ 时，$\Psi^1_{k,q}$ 是单射。

如果 $k-r = r$，那么我们有 $E^{r+1}_{r,q-r+1} \cong E^\infty_{r,q-r+1}$，因此存在一个短正合列

$$0 \to B^r_{r,q-r+1} \to Z^r_{r,q-r+1} \to E^\infty_{r,q-r+1} \to 0.$$

我们知道 Ψ^∞ 总是满射，而当 $q-r+1 \le M+r$时，$b^r_{r,q-r+1}$ 是满射。因此，当 $q \le M+2r-1 = M+k-1$时，$z^r_{r,q-r+1}$ 是满射。此外，对于所有 q，$\Psi^r_{r,q-r+1}$ 都是单射，因此当 $q \le M+k-1$时，$b^r_{0,q}$ 是单射。

最后，如果 $k-r > r$，那么对于所有 $t > 0$，都有 $d^{r+t}_{r,\,*} = 0$，因此

$$Z^r_{r,q-r+1} \cong E^\infty_{r,q-r+1} \oplus \bigoplus_{t=0}^{k-2r} B^{r+t}_{r,q-r+1}.$$

我们知道，对于所有 q，$b_r^{r+t}{}_{,\ q-r+1}$ 都是满射，除非 $r = k - r - t$；在这种情况下，我们需要 $q - r + 1 \leq M + r + t$，或者等价地说 $q \leq M + k - 1$。再次，对于所有 q，$\Psi^r_{r,\ q-r+1}$ 都是单射，因此只要 $q \leq M + k - 1$，$b^r_{0,\ q}$ 就是单射。

因此，我们已经证明：当 $q \leq M + k - 1$ 时，$\Psi^1_{0,\ q}$ 是单射；当 $q \leq M + k$ 时，则是满射。□

References

[BP72] Michael Barratt 和 Stewart Priddy。非连通幺半群及其相应群的同调。 *Comment. Math. Helv.*，47：1–14，1972。[CLM76] Frederick R. Cohen、Thomas J. Lada 和 J. Peter May。*The homology of iterated loop spaces* 533 。数学讲义，第 卷。施普林格出版社，柏林—纽约，1976。[Day70] Brian Day。函子范畴的闭范畴。载于*Seminar IV* *Reports of the Midwest Category* 137， 1 38 ，数学讲义，第 卷，第 – 页。施普林格，柏林，1970。[DL62] Eldon Dyer 和 R. K. Lashof。迭代环空间的同调。 *Amer. J. Math.*，84 35：–88，1962。[Fre09] Benoit Fresse。 *Modules over operads and functors* 1967 *Lecture Notes in* ，第 卷。施普林格出版社，柏林，。[GKRW18a] Søren Galatius、Alexander Kupers 和 Oscar Randal-Williams。胞腔 E_k代数，2018。arXiv:1805.07184。[GKRW18b] Søren Galatius、Alexander Kupers 和 Oscar Randal-Williams。E_∞-胞腔与有限域上的一般线性群，2018。arXiv:1810.11931。[GKRW20] Søren Galatius、Alexander Kupers 和 Oscar Randal-Williams。E_∞-胞腔与无限域上的一般线性群，2020。arXiv:2005.05620。[Hir03] Philip S. Hirschhorn。 *Model categories and their localizations* 99 *Mathe-* ，第 卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2003。[Hov99] Mark Hovey。 *Model categories*，第 63 卷，载于 *Mathematical Surveys and Monographs*。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1999。[JS93] Andr´e Joyal 和 Ross Street。辫张量范畴。 *Adv. Math.*， （）：–。[KA56] Tatsuji Kudo 和 Shˆorˆo Araki。 H_n-空间的拓扑与 H-平方运算。*Mem. Fac. Sci. Kyūsyū Univ. A*，10：85–120，1956。[KM18] Alexander Kupers 和 Jeremy Miller。 E_n-胞腔附着与同调稳定性的由局部到整体原理。 *Math. Ann.*，370(1-2)：209–269，2018。[KMP21] Alexander Kupers、Jeremy Miller 和 Peter Patzt。某些一般线性群的改进同调稳定性，2021。arXiv:2106.12363。[Kud56] Tatsuji Kudo。一个传递定理。 *Mem. Fac. Sci. Kyūsyū Univ. A*，9 81，1956 79：–。[Law20] Tyler Lawson。 E_n *Handbook of homotopy* -谱与 Dyer–Lashof 运算。载于 ，第 – 页。CRC出版社，佛罗里达州博卡拉顿，。[Lur07] Jacob Lurie。关于 Sullivan 猜想课程的讲义。可通过麻省理工学院开放课程在线获取，2007。[Mac71] Saunders MacLane。 *Categories for the working mathematician*。施普林格出版社，纽约—柏林，1971。数学研究生教材，第 5 卷。[May70] J. Peter May。关于 Steenrod 运算的一般代数方法。载于 *The Steenrod Algebra and its Applications (Proc. Conf. to Celebrate N. E. Steenrod's Sixtieth Birthday, Battelle Memorial Inst., Columbus, Ohio, 1970)* ，数学讲义，第 168 卷，第 153–231 页。施普林格，柏林，1970。[May72] J. P. May。 *The geometry of iterated loop spaces*。施普林格出版社，柏林—纽约，1972。数学讲义，第 271 卷。[Qui71] Daniel Quillen。等变上同调环的谱。I、II。 *Ann. of Math.* ，：–；同上 *(2)* 94 549 572 2 94 1971 573 602, 1971 （） （），–。[SS00] Stefan Schwede 和 Brooke E. Shipley。幺半模型范畴中的代数与模。 *Proc. London Math. Soc. (3)*，80(2)：491–511，2000。[Zee57] E. C. Zeeman。谱序列比较定理的一个证明。 *Proc.* ，：–。 *Cambridge Philos. Soc.* 53 57 62, 1957