arXiv:2304.00635v1 [math.NT] 2 Apr 2023

旋转上的非遍历伯克霍夫和的丢番图逼近

PAUL VERSCHUEREN（
PAUL@VERSCHUEREN.ORG.UK）

摘要。我们研究旋转上的伯克霍夫和（形式为 $\sum_{r=1}^{N}\phi(r\alpha)$ 的级数），其中被求和函数 ϕ 可能在原点处无界。自19世纪90年代末以来，对这类求和的估计在纯数学领域一直备受关注且具有重要应用；近年来，它们也出现在应用数学的众多领域，并重新受到广泛关注。得到深入研究的函数包括数论函数的倒数，例如 $\phi(x)=1/\{x\}$，$1/\{\{x\}\}$，$1/\|x\|$；还包括三角函数，例如 $\phi(x)=\cot\pi x$ 或 $|\csc\pi x|$。传统上，每个函数的伯克霍夫和都是相对孤立地借助针对该函数的工具进行研究，所得结果也往往局限于巴赫曼–朗道估计。本文提出一种适用于上述所有函数的、更为一般统一的理论。该理论仅使用“初等”工具（不使用复分析工具），能够给出“有效”结果（明确的界），总体上可与已有结果相媲美，或优于已有结果。

目录

1. 引言 3
1.1. 丢番图逼近的语境 4
1.2. 动力系统的语境 5
1.3. 主要结果概述 5
1.4. 本文概述 6
2. 预备知识 8
2.1. 基本术语与符号表示 8
2.2. 逻辑学与抽象代数 10
2.3. 动力系统 16
2.4. 圆的几何 17
2.5. 数论 19

日期：本版本：2023年3月。作者谨向帝国理工学院的 Sebastian van Strien 教授致谢；没有他的鼓励与支持，本文将无法发表，同时也感谢该学院为获取文献提供便利。作者还要感谢开放大学的 Ben Mestel，感谢他将作者引入这一领域，感谢他富有感染力的热情以及与作者进行的许多精彩讨论。本研究部分得到 ERC AdG RGDD 第339523号的支持。

3. 同态集岩浆理论 27 3.1. 引言 27 3.2. 自同态的拉回 29 3.3. 自关系的拉回 30 3.4. 特殊情形与应用 33 4. 伯克霍夫和中的关注点分离 35 4.1. 引言 35 4.2. 形式化推导 35 4.3. 设想证明法 37 5. 圆上轨道片段的分布 37 5.1. 准周期分解 37 5.2. 无理旋转的应用 39 6. 无界观测函数空间的分析 44 6.1. 定义与基本拓扑 45 6.2. 一些初始函数类 47 6.3. 区间上原函数的分类 48 6.4. 函数的原函数表示 50 7. 无界观测函数的齐次伯克霍夫和 51 7.1. 引言 51 7.2. 伯克霍夫泛函的对偶关系 52 7.3. 分割和 57 7.4. (0,1) 上单调函数的伯克霍夫和 58 7.5. 原函数的进一步界 62 7.6. 结果总结 68 8. 函数族 $\theta^{\beta}(x) = x^{-\beta}, \beta \geq 1$ 69 的应用 8.1. 一些辅助引理 69 8.2. 使用广义调和函数 H^{β} 71 给出的 $S_N\theta^{\beta}$ 下界 8.3. 使用广义调和函数 H^{β} 72 给出的 $S_N\theta^{\beta}$ 上界 8.4. 使用调和函数的估计 73 8.5. $S_N\theta^{\beta}$ 78 上界结果总结 8.6. 对偶性结果 79 9. 与已有结果的比较 80 9.1. 引言 80 9.2. 我们关于 $\theta x = \frac{1}{x}$ 80 的结果总结 9.3. 小数部分倒数和 $\sum_{r=1}^{N} \frac{1}{\{r\alpha\}}$ 82

9.4. 最近整数函数到最近整数距离的倒数之和 $\sum_{r=1}^{N} \frac{1}{\|r\alpha\|}$ —— 83 9.5. 倒数的反对称化之和 $S_N(\theta - \theta)$ =86 9.6. 级数 $\sum_{r=1}^{N} \frac{1}{r^\gamma} \phi(r\alpha)$ 88 9.7. 双重指数和 $Exp2(N) = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} \sum_{r=1}^{N} e^{2\pi i u v \alpha}$ 88 10. 结论 90 参考文献 90 附录 A. 上下文注释 91

—

1. 引言

我们研究形式为 $\sum_{r=1}^{N} \phi(r\alpha)$ 的级数估计，其中 ϕ 是周期为 1 的实值函数，α 是无理实数。这类级数可归类为圆周旋转上的伯克霍夫和（初始条件为 0）。当 ϕ 勒贝格可积时，借助遍历理论的强大定理，很容易得到一阶估计。特别地，伯克霍夫遍历定理给出 $\frac{1}{N} \sum_{r=1}^{N} \phi(r\alpha) \to \int \phi$。无法用这种方式估计的级数，我们称之为非遍历伯克霍夫和。本文研究 ϕ 因无界而非勒贝格可积的情形。

这类级数在纯数学中一直备受关注（例如丢番图逼近、差异理论、q级数），但随着新的应用在KAM理论、量子场论、量子混沌、量子计算和弦理论等多个领域涌现，近年来人们对它们的兴趣再度高涨。

这类级数似乎最自然地位于丢番图逼近与动力系统这两个学科的交汇处，尽管Hardy和Littlewood在相关研究中也曾著名地运用复分析的精妙技巧。我们将简要说明本研究对象在上述两个学科中的定位。

这两个学科的一个显著区别在于，丢番图逼近研究几乎总是将和 $\sum_{r=1}^{N} \phi(r\alpha)$ 作为自然的研究对象，其中 ϕ 在原点处无界。而在动力系统中，自然的研究对象则是更一般的和 $\sum_{r=1}^{N} \phi(x_0 + r\alpha)$，其中 x_0 是一个“初始条件”。这种视角的拓展十分重要。

尽管本文的一般方法旨在适用于相当一般的求和，但受篇幅所限，我们只能针对一类单独的函数 ϕ 以及齐次（$x_0 = 0$）情形给出详细估计。不过，这一情形涵盖了以往研究中比例高得惊人的一部分结果。我们希望在后续论文中探讨非齐次和及其他类别的函数。

1.1. 丢番图逼近的语境。 级数$\sum_{r=1}^{N}\phi(r\alpha)$的具体例子长期以来一直是丢番图逼近这一学科的研究对象，尤其是利用连分数理论开展的研究。这些研究通常颇具挑战性，且单篇论文往往专注于针对某个特定给定函数 ϕ推导结果。或许正因如此，研究方法常常依赖于与所研究的特定函数相关的恒等式。本文的主要贡献是一种方法，它将对底层动力学（无理旋转）的研究与函数 ϕ的特征区分开来。我们针对动力学推导出新的结果，这些结果随即可以用于任何选定的函数 ϕ。

这类级数中最简单的无疑是“余数和”，即级数$\sum_{r=1}^{N}\{r\alpha\}$ (即 $\phi(x) = \{x\}$)，其中 $\{x\}$ 是 x 的小数部分（或模 1 余数）。此情形具有遍历性，运用遍历理论的一个简单结论，便可立即得到 $\frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N}\{r\alpha\} \to \frac{1}{2}$。然而，其收敛速度极受关注，20 世纪初，许多杰出的数学家对此进行了深入研究，包括 Lerch[10], Sierpinsky[13, 14], Ostrowski[12], Hardy 与 Littlewood[4,5], Behnke[1], Hecke[7] ，他们都提出了见解并贡献了相关技巧。尽管经过了如此深入的研究，Lang 直到 20 世纪 60 年代仍认为有必要提出一种新方法（见 [8]），而近年来也出现了更多关于这一主题的论文。

在这些论文中介绍的所有工具和技术里，我们将最广泛地使用上文 [12]所发展的Ostrowski整数表示。Ostrowski 在其论文中运用这一技术的方式并不容易推广，而且这项技术似乎已经被遗忘了许多年（事实上，它于1952年由 Lekkerkerker [9] 独立重新发现，并于1972年由 Zeckendorf[20],重新发现，但当时仅限于斐波那契数的情形）。然而，近年来人们认识到，这是一项功能强大的技术，完全独立于其最初的“余数和”语境。

尽管我们论文中的方法适用于“余数和”问题，但这并非我们的重点。相反，我们关注的是这样的级数：由于存在无界奇点， ϕ 不可积。在这种情况下，遍历定理并不适用，因此需要采用其他技巧来估计这些和。人们已运用了范围广泛、令人瞩目的技巧。Hardy 与 Littlewood 研究了$\phi(x) = \csc \pi x$，采用了多种先进技巧，包括双重 ζ 函数、函数方程和切萨罗平均。Lang [8]研究了 $\phi(x) = 1/\{x\}$ 和$\csc \pi x|$ ，使用了他为此开发的一种优雅而初等的递归技巧。Sudler[16] 和 Wright [19] 研究了 $\phi(x) = \log|\sin \pi x|$，或许首次给出了这类和的显式界。这个和在众多应用领域中以各种形式出现（参见 [11, 18] 的参考文献，其中列出了截至2016年该主题的30篇论文）。Erdos-Szekeres[3] 于1959年提出的一个开放问题，在1998年由 Lubinsky[11] 对几乎所有旋转数 α 给出了肯定解；Lubinsky确信这一结果适用于所有 α。最终，Verschueren[17], 于2016年给出了否定解，但所用技巧与本文中的技巧大不相同。最近（2020年），Beresnevich、Haynes 和 Velani[2] 研究了 $\phi(x) = 1/\|x\|$，并探讨了这一特定伯克霍夫和与长期悬而未决的利特尔伍德猜想的最新进展之间的联系，所用方法既包括初等技巧，也包括闵可夫斯基定理。Sinai & Ulcigrai[15] 于2009年研究了 $\phi(x) = \cot \pi x$

这一问题源于量子计算领域，他们采用了动力系统学科中发展出的“切割与堆叠”技巧。

本文转而提出一种统一的方法来解决这些问题。我们还将展示，如何以相对轻松的方式将其应用于一类特定的函数（$\sum_{r=1}^{N}\phi(r\alpha)$，其中 ϕ is 在原点处有一个无界点），并得到与文献中现有结果相当或更优的结论。

1.2. **动力系统的语境**。 在动力系统的语境中，我们的级数 $\sum_{r=1}^{N}\phi(r\alpha)$ 是加性余循环（或等价地，斜积）的一个例子，更具体地说，是一个伯克霍夫和。其基相空间是圆，空间态射（或演化函数）是无理旋转。伯克霍夫和广泛用于物理系统的建模，表示沿相空间轨道对观测函数求和。尽管本文将伯克霍夫和的研究限制在最简单的动力系统之一（无理旋转），但我们要指出，许多物理系统都可以通过圆周旋转来研究，甚至可以化约为圆周旋转。

该领域常用的研究工具是遍历定理（例如伯克霍夫、冯·诺伊曼和奥塞莱德茨提出的定理），这些定理证明在适当的约束条件下（主要是要求[1] $\frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N}\phi(r\alpha)$ 几乎处处存在极限），伯克霍夫和的平均值会收敛（即序列 ϕ 可 L^1–积）。当遍历理论无法应用时，我们称伯克霍夫和为非遍历的。

量子场论和弦理论中已经出现了这类情况（其中重整化理论的方法取代了遍历理论的方法）；本文的技术（可视为一种重整化形式）或可为进一步探索替代方法开辟道路。Sinai & Ulcigrai 报告了量子计算问题中出现了$\phi(x) = \text{余切}\,\pi x$ 这一情形。他们针对该问题提出了自己的方法，但本文提出的方法同样适用于该问题，并提供了另一种选择（参见 9.7）。

近年来，“大数据”的出现使人们重新关注库普曼算子及其伴随算子、佩龙-弗罗贝尼乌斯算子，因为这些算子似乎更适用于数据驱动（而非方程驱动）的分析以及高维系统。原始理论是在遍历理论的语境下发展起来的，并且仅适用于观测函数构成的巴拿赫空间（通常是希尔伯特空间）。伯克霍夫和是库普曼算子的一种重要类型，而我们对非遍历和的研究，则将库普曼算子的研究拓展到了带有奇点的非巴拿赫观测函数空间。大数据问题似乎完全有可能在某个阶段需要这样的拓展。因此，我们花了一些篇幅将本理论置于算子理论的语境中（尤其参见第 3节）。

1.3. **主要结果概述**。

[1]或乘法类比 $\left(\prod_{r=1}^{N}\phi(r\alpha)\right)^{1/N}$

(1) 我们为伯克霍夫和 $S_N\phi = \sum_{r=1}^{N} \phi(r\alpha)$ 给出一般的上界和下界，其中 ϕ 是一个单调周期为 1 的函数，且在原点处可能无界。这些界不依赖于 ϕ 的任何其他特征，因此适用范围广泛。(2) 这些界很容易推广到相关的伯克霍夫和 $S_N\theta$，适用于以下情形： $\theta(x) = \phi(1-x)$、 $\theta(x) = \phi(x) + \phi(1-x)$，以及 $\theta(x) = \phi(x) - \phi(1-x)$。(3) 对于特定族 $\phi(x) = x^{-\beta}$，我们计算了在 $\beta \geq 1$ 条件下的具体界。（这些技巧也可用于 $\beta < 1$，但这种情形是 L^1-可积的，已有方法足以处理。）我们表明，在大多数情况下，这能较快地得到与文献中的结果相当或更优的结论。(4) 本理论还包括一项新的分析：利用奥斯特罗斯基整数表示法的拓展，研究小数部分序列 $\{r\alpha\}$ 在 $[0,1$ 上的分布；这项分析本身似乎也颇有价值。(5)

1.4. **本文概述**。 本文旨在建立一套关于如下形式的伯克霍夫和的一般理论：$\sum_1^N \phi(r\alpha)$，其中 α 是无理实数， ϕ是周期为 1 的实值函数，且在原点处可能无界。由于本文将用到若干动力系统的概念，我们指出，伯克霍夫和等价于一个加性余循环或斜积 $\sum_1^N \phi(R_\alpha^r 0)$，其中 R_α 是圆上的无理旋转，0 是初始条件，而 ϕ 是圆上的观测函数，在初始条件处可能无界。

在第 2 章我们将介绍一系列概念和结果，并在本文其余部分中加以运用。本文略显特别之处在于，我们不要求读者掌握任何特定数学学科的高级成果，但会用到多个学科的基础工具和结果。这带来了两个问题。首先，要找到一种适合所有读者的入门层级是不可能的任务；我们先向每位读者致歉：有些章节可能会冒犯她的智力，而另一些章节则可能会对他要求过高。其次，我们发现不同学科之间存在许多符号冲突。我们没有着手完成统一数学记号这一西西弗斯式的任务，而是借用了计算机科学中的命名空间概念，尽管采用的是一种非正式的实现方式，我们认为它更适合数学写作。

在第3节中，我们开始构建同态集岩浆理论，为后续章节提供代数背景。这使我们得到一组对偶关系，从而避免后续重复大量工作，同时也提供了一个结构框架，帮助我们理解后续章节，尤其是第7节。

在第4节 我们引入并发展了关注点分离这一理念，它借鉴自软件工程领域。求和 $\sum_1^n \phi(r\alpha)$ 将观测函数 ϕ 的值与无理旋转的动力学交织在一起。以往研究这类求和的方法，通常会推导关于观测函数 ϕ 的恒等式，并针对这些特定恒等式开发求和技巧。用软件工程的术语来说，求和与动力学这两个关注点紧密耦合。结果是，每种具有不同特征的观测函数往往都需要采用不同的方法。本文所采用的方法将有意识地致力于将这

两个关注点分离开来。这样我们就可以只研究一次动力学，而不依赖任何特定的观测函数。求和过程则成为一个独立的关注点；由于不再与动力学绑定，对它的研究也就简化了。

我们通过采用范畴论/算子理论中的一种方法来实现这一点：将通常的伯克霍夫和 $\sum_1^n \phi(r\alpha)$ 重写为求和 $\phi^* \sum_1^{*n} (R_\alpha^r 0)$，其中 ϕ^*，$\sum^*$ 现在是无理旋转R_α下轨道空间上的算子。这样便实现了所需的分离，尽管代价是采用了更抽象的方法。现在剩下的问题是研究轨道 $\sum_1^{*n} (R_\alpha^r 0)$ 的分布（与 ϕ 无关），然后研究如何将算子 ϕ^* 作用于这类序列。与基础范畴论中的许多内容一样，一旦理解了相关概念，这种方法几乎就变得显而易见。范畴论的价值在于，它鼓励人们进行思考，从而促成富有成效的重新表述。

在第 5 节中，我们研究首要关注的问题，即轨道$\sum_1^n (R_\alpha^r 0)$的分布。将这类轨道上的点视为一个集合时，它们的均匀分布已得到充分理解和广泛研究。然而，我们关注的重点是将其视为一个序列来研究其分布，也就是说，要估计每个 r对应的点 $r\alpha$ 的位置。事实证明，借助奥斯特罗斯基表示这一数论工具，我们可以非常出色地做到这一点；但还需要将该工具提升到算子层级，使其作用于“准周期”轨道片段，也就是位于最近回归之间的轨道片段。这些位置估计中的误差项受到良好控制，并且实际上遵循重整化定律。

在第 6 节中，我们建立关于无界函数及其 r
空间的一些基础理论，因为这似乎并非一个得到充分研究的领域。

在第 7 节中，我们转向第二个关注的问题：将所导出的算子 ϕ^*应用于轨道。这在很大程度上等同于将 ϕ^* 应用于第 5 节中所确定的准周期片段。由此可得到伯克霍夫和$\sum_1^n \phi(r\alpha)$的上界和下界；当然，这些界涉及 ϕ，但具有完全一般性，也就是说，它们与特定观测函数ϕ的具体特征无关。此方法还提供了一种途径，用于识别具有相同高阶增长估计的重要观测函数等价类。至此，我们完成了一般理论的建立。

在第 8 节，我们将一般理论应用于这一特定函数族 $\phi(x) = x^{-\beta}$（$\beta \geq 1$ 为实数）。当然，一般理论也可应用于函数族 $\beta < 1$；但由于 $x^{-\beta}$ 在圆上 L^1-可积，这些伯克霍夫和可通过现有方法估计，因此本文不予讨论。对于 $\beta \geq 1$，如今我们有了一般理论，因而能够运用文献中独立发展出的多种估算方法来推导估计。与早期论文相比，该理论使我们能够相对迅速地得到这些估计，且表述或许也更加清晰。此外，由于这些方法是在统一的框架内发展的，我们可以评估不同方法各自的优劣，而这在过去并不容易做到。

在第 9 节中，我们将一般理论得出的估计与文献中已有的结果进行比较。除少数特殊情形外，我们证明，一般理论的结果与文献中的结果等价，或优于后者。（这些例外情况可能也能通过更

谨慎地应用该理论加以改进，因为我们目前尚未尝试获得尽可能好的结果。）

2. 预备知识

本文对任何单一数学学科的先修知识要求都不高，但确实借鉴了多个学科的一些基本思想和结果。这些学科中，有些学科的符号表示有多种通用形式，此外，不同学科之间还存在一些符号冲突。本节将统一符号表示，概述必要的学科背景，并以此为基础，推导一些简单的理论和结果，供后续章节使用。

2.1. **基本术语与符号表示。** 我们采用以下符号表示逻辑运算： 与 (与), | (或), 非 (非), : = (定义), ⟦.⟧(艾弗森括号——见 2)。

我们将使用 𝔹黑板字体中的符号来表示我们关注的主要空间：我们赋予 $\mathbb{Z}$， $\mathbb{R}$， $\mathbb{T}$ 它们通常的含义，分别是整数环、配备勒贝格测度的实数拓扑域，以及圆（作为李群/实流形——见下文）。我们赋予 $\mathbb{N}$ “半标准”的含义，即将其视为加法群（因此 $0 \in \mathbb{N}$，并定义 $\mathbb{N}^+ := \mathbb{N}\backslash\{0\}$）。最后，我们定义两个实半开区间 $\mathbb{I} := [0,1)$ 和 $\mathbb{I}' := \mathbb{I} - \frac{1}{2} = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 它们共同构成圆流形的图册（坐标空间的覆盖）。

我们用类似的符号表示法定义集合 $\{x_r\}_{r=1}^N := \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$，并用 $(x_r)_{r=1}^N$ 表示序列。

2.1.1. 语境注释。动机 本文借鉴了多个学科的内容，很快便遇到了同名异物的问题——同一符号在不同学科中含义不同。问题在于如何消歧：我们该如何确保读者在每次遇到同名异物时，都能理解它所表示的含义?

在数学中，我们历来试图通过消除这个问题来解决它，并强调符号表示明确无歧义的重要性。理论上，我们只需定义足够多的新符号即可。然而，在本文中，我们发现这种方法面临两个障碍。首先，我们使用的是非常基础的概念，而且其符号表示也十分常见，因此引入新符号表示可能无济于事。例如， $\{x\}$ 在集合论和数论中表示不同的含义，但在这两个学科中，似乎都不宜用新的符号表示取而代之。其次，尽管理论上新符号的供应没有限制，现代数学实际上却受限于已定义的 Unicode 符号数量。后者非常有限，而且可能会出乎意料地迅速耗尽。

在撰写本文所述理论的过程中，我们遇到了这两个问题。这使我们开始考虑有歧义的符号表示，而实践表明，这个问题远没有听起来那么严重。

首先，任何特定同名异物的含义通常都很容易从其直接语境中推断出来，因此歧义的危险更多是理论上的，而非实际存在的。事实上，在数学中，我们常常会说自己是在“滥用符号表示”，以此承认这一点。这个说法暗示我们知道自己做了不妥之事，或者

只是偷懒，但或许觉得可以“蒙混过关”。不过，我们现在要论证的是，只要语境确实消除了歧义，我们做的与其说是“滥用”，不如说是“重复使用”符号表示；这是一种有效且值得称道的方法，有助于管理有限资源。举例来说，考虑由$n \mapsto n+1$定义的平凡函数 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$。现在，我们将其扩展为由 $z \mapsto z+1$定义的函数 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$。我们把这称为“符号滥用”，因为我们用符号 f 表示两个不同的函数；但为这两个函数使用不同的符号并无益处，而且这样做反而会忽略它们之间深刻的联系。

因此，我们会毫不拘泥地使用各种符号表示，但作者有责任确保根据语境消除歧义。读者必须判断我们做得如何。

其次，通常消除公式或方程歧义的方法，是在周围文本中补充解释性细节。然而，这样可能显得笨拙，相关文字也可能与符号本身有些脱节。我们借鉴计算机科学中的“内联”语境这一理念，直接用语境（“命名空间”）标记注释有歧义的词元（如变量名），从而确定正确的消歧方式。在计算机科学中，目标是提供适合机器处理的形式化消歧语法；我们考察过的现有实现可能过于繁复，不适合数学写作。因此，我们采用了一种更轻便、更具数学风格的符号表示方法，目标也更为适度：为善于思考的数学读者提供足够的消歧信息，而非设计高效算法。任何新符号表示都需要学习，但我们认为，这篇论文所能获得的益处足以证明其值得采用。下面先给出一份快速入门概要；更正式的说明请参见附录 A。

2.1.2. 上下文标注快速入门。 像上文所述，积极复用符号表示使我们能够写作 $X := (X,\ +)$，以此定义群X，其底集为 X，算子为 $'+'$。我们在此将 $'X'$ 称为同名异物，因为我们给两个不同的数学对象（集合和群）赋予了相同的名称 X。根据所撰写文档的不同，我们可能会认为，预期含义可从上下文中清楚判断。如果需要消歧，我们可以通过为每个符号添加合适的语境标签，明确同名异物 X 每次出现时的含义。例如，我们可以写作$X_{Grp} := (X_{Set},\ +)$。在更正式的场合，我们或许会决定表达得更加明确，例如 $X_{\epsilon Grp} := (X_{::Set},\ +_{AssocOp})$。是否需要定义语境标签 $Grp,\ Set,\ AssocOp$，同样取决于作者的判断。在这些例子中，标签表示数学对象的某个范畴或类别，但不必局限于此。此外，给定带下标的 X_i，我们可以写作$(X_i)_{Grp}$。仅在适当时使用冒号或 ϵ。

例 1. 在数学中，按照经典做法，变量的类型会在随附文本中给出，并与后续推理在视觉上分隔开来。注释方法是对经典方法的补充，两者可以灵活交替使用。在某些情况下，注释可能会分散注意力，使方程或公式显得杂乱；此时，经典方法更为合适。在另一些情况下，注释则可以简洁地内嵌所有必要的语境，从而改善信息流。

例如，我们可以写成 $z_{\mathbb{C}} = x_{\mathbb{R}} + iy_{\mathbb{R}}$，具体效果可能非常有用，也可能十分分散注意力，这取决于实际情况。

2.1.3. **并置算子（注释约定）**。我们不写 Y^X，而使用 XY作为从对象 X 到对象Y 的态射的简洁符号表示。除了方向性更自然之外，这种符号表示也特别便于用作注释。例如，写作 $\phi_{XY}(a) = b$ 告诉我们，ϕ 是从 X 到 Y的态射，因此我们还可以推断出 $a \in X$，$b \in Y$：写作 $\phi_{XY}(a_X) = b_Y$会显得多余，不过这样写也是允许的。注意，写作 ϕ_{XY} 与 $\phi \in XY$ 含义相同，ϕ 也是如此：$X \to Y$；有时也可以简单地说“ϕ 是 XY”。如果 $X = Y$，通常可以将ϕ_{XX} 简写为 ϕ_X，但此时需要从其他语境中明确 ϕ 是定义在 X上的函数，而不是 X的一个元素。这说明了为什么我们在这里将 X视为语境标签，而不是范畴或类 X。

我们还借用了数理逻辑中的惯例：在特定语境下，用并置表示适当的特定算子。例如，在代数环的语境下，我们保留通常的惯例 $xy := x \times y$，即并置算子表示乘法算子。然而，在函数空间 XY 的语境下，我们将并置定义为求值，即 $\phi_{XY}x := \phi(x)$。此外，给定 θ_{YZ}，我们将并置定义为函数复合，即 $(\theta\phi)_{XZ}x := \theta_{YZ}(\phi_{XY}x)$。

2.2. **逻辑学与抽象代数**。 命题的函数

定义 2。 设 $\mathscr{P}$ 是一个由逻辑命题构成的布尔代数，$\mathscr{B}$ 是布尔整数 $\{0,1\}$，$\mathscr{B}'$ 是另一类布尔整数 $\{-1,1\}$。艾弗森括号 $[\![.]\!]_{\mathscr{P}\mathscr{B}}$ 是一个将逻辑命题映射到 $\{0,1\}$ 的函数，定义如下：对于任意命题 P，若 P 为真，则定义 $[\![P]\!] := 1$；若 P 为假，则定义为 0。另一种艾弗森括号 $[\![.]\!]'_{\mathscr{P}\mathscr{B}'}$ 与之类似：若 P 为真，则定义 $[\![P]\!] := 1$；若 P 为假，则定义为 -1。

注意这些有用的恒等式 $[\![!P]\!] = 1 - [\![P]\!]$，以及 $[\![P]\!]' = (-1)^{[\![!P]\!]} = [\![P]\!] - [\![!P]\!]$。这些函数使我们能够非常高效地定义不连续函数：例如，$f_{\mathbb{R}\mathbb{R}}(x) := [\![x > 0]\!]\, x$ 给出赫维赛德函数（即当 $x > 0$ 时取值为 x、否则取值为 0 的实值函数）。

我们常常需要区分奇数情形和偶数情形，因此定义一组常数很有用。

定义 3。 对于 $r \in \mathbb{Z}$，我们定义 $E_r := [\![r \text{ 为偶数}]\!]$，$O_r := [\![r \text{ 为奇数}]\!]$

请注意这些有用的恒等式 $E_r + O_r = 1$（因此 $x_r = E_r x_r + O_r x_r$），以及 $E_r - O_r =$ （-1）^{r}。

抽象代数 基本术语 我们回顾一些基本的代数概念和术语，明确规定本文中这些术语的用法，并确立符号表示。

集合： 这里我们不讨论基础问题，因此采用朴素方法，并特别允许用朴素符号 $X := \{x : Px\}$ 来定义集合，其中 P 是一个逻辑命题。

函数： 此处的函数 ϕ_{XY} 始终指集合$X \times Y$上的单值关系。注释 XY表示从 X 到 Y 的态射集合；对于集合而言，它恰好是从 X 到 Y 的所有可能函数组成的集合。后者通常记作 Y^X，但我们更倾向于采用更自然的

由 XY所暗示的方向。在更合适的情况下，我们也会使用传统符号表示 ϕ：$X \to Y$。

函数使用符号表示 $\phi_{XY} \coloneqq x_X \mapsto y_Y$ 显式定义，这种表示法也允许定义匿名函数，例如 $x_X \mapsto y_Y$。

我们还将使用占位符记法，以便表示带有装饰符（例如 $\bar{.}$）或花括号（例如 $\{.\}$ ）的函数符号。这里，字符 $'.'$ 是占位符。

我们将 ϕ_{XY} 的 $n_{\mathbb{N}}$ 元扩展定义为 $\phi_{X^nY^n} : (x_i)_{i=1}^n \mapsto (\phi x_i)_{i=1}^n$，并将斜扩展 $\phi^{Op}_{X^nY^n} : (x_i) \mapsto (\phi x_i)^{Op}$ 定义为.....，其中 $\left(.^{Op}\right)_{X^nX^n}$ 是在 X^n 中反转序列的函数。（这当然是范畴论中 Op 函子的一个特例，但我们希望在此避免采用完整的一般性。我们保留“斜”这一术语，因为它在我们所处的语境中更为熟悉。）

若 $X = Y$，则 ϕ 是一个集合自同态；任何满足 $\phi x = x$ 的 x_X 都称为 ϕ的不动点。

代数运算： 函数 $\circ_{X^nX}$ 称为集合 X上的 $n_{\mathbb{N}}$元代数运算；当 n 无关紧要时，简称为 X 上的运算。

一元运算也是一种集合自同态，通常可通过给符号添加装饰来表示，例如 $\bar{}$。表示函数 $x \mapsto x$。

二元运算的形式化符号表示为 $\circ(x_1,\ x_2)$，有时这种写法很有用；不过，我们通常当然会采用更常见的符号表示 $x_1 \circ x_2$。并置（例如 ab）常用于表示某个众所周知的二元运算；必要时，我们会用 $''$ 表示并置算子，例如 $'' \coloneqq (a,\ b) \mapsto a \times b$ 意味着 ab 应解释为 $a \times b$。

序列上的 n 元运算 $(x_i)_{X^n}$ 通常通过扩展一元或二元运算来构造，例如通过 $(x_i) := \overline{(x_i)}$ 或 $\circ(x_i) := \circ(x_1,\ \circ(x_2,\ \ldots \circ(\overline{x_{n-1}},\ x_n).....))$，除非另有说明，我们将这些扩展视为已给定。如果我们也省略了 n 的说明，那么我们指的是该扩展可以适用于任意 $n \geq 1$ （一元）或 $n \geq 2$ （二元）情形。例如：一元运算 $-:\ x \mapsto -x$ 给出 $-(x_1,\ \ldots x_n) = (-x_1,\ .....,\ -x_n)$；交换二元运算 $+$ 给出 $+(x_1,\ .....,\ x_n) = \sum_1^n x_i$，而非交换二元斜运算 $\circ^{Op}:\ (x_1,\ x_2) \mapsto x_2 \circ x_1$ 给出

$\circ^{Op}(x_1,\ \ldots,\ x_n) = \circ(x_n,\ \ldots,\ x_1)$。（借自泛代数）。

代数结构： 代数结构 X_{Struc} 是一个由集合组成的有序对 $(X,\ \{\circ_\alpha\}_{\alpha \in A})$，其中 X_{Set} 称为底集，而 $\{\circ_\alpha\}$是作用于 X 上的一组运算，并由集合 A索引。我们也将 X 称为一个 $|A| - Struc$。对于单元素集合 A（即 X 是一个 $1 - Struc$）的情况，我们将符号表示简化为 $(X,\ \circ)$，而不写作 $(X,\ \{\circ\})$。例如，一个纯集合具有 $A = \emptyset$ （意指没有附加结构）；一个纯幺半群或群具有 A 这个单元素集合；一个纯环或域具有 $|A| = 2$。对于 $|A| \geq 2$，通常会有定义算子之间相互作用的关系。

生成结构： 设 $(U, \circ)$ 是一个带有 $\circ$ 二元运算的结构。若 U有单位元，则称其为含幺的。注意，若 U 不是含幺的，我们总可以为其添加一个单位元，而且 $\circ$至多只有一个单位元。设 $X \subseteq U$，且 X 在 $\circ$下闭，则 X 是 U的子结构。包含X 的最小子结构（它可能是 U 、 X ，或介于两者之间的某个结构）是 X的闭包，

记作 $< X, \circ >$（也称为由 X生成的结构）。
如果 $\circ$ 不是结合的（遵循Bourbaki ##论文），则该结构是一个岩浆，其元素可用叶节点取自 X的二叉树表示。例如， $w_1 \circ w_2$ 可视为一棵以 $\circ$ 为根、以 w_1、 w_2 分别为左、右子树（子树也可以只是叶节点）的树。当 $\circ$ 是结合的时，就不再需要括号，该结构成为半群，而像 $u_1 \circ u_2 \circ u_3$ 这样的元素可以表示为字符串 $u_1u_2u_3$ 或序列（u_1、 u_2、 u_3）。如果这些结构中的某一个缺少单位元，我们总可以通过添加一个唯一的单位元来扩充它，但这在半群的情形下更为重要——此时，该结构成为幺半群，而单位元可以表示为空字符串或空序列，通常记为 ϵ。
如果元素之间不存在关系，也就是说， $w_1 = w_2$ 意味着 w_1， w_2 （树或字符串）的任何表示都相同，那么这种结构就称为自由的。注意，即使（U， $\circ$）不是自由的，我们也总可以引入第二个算子 $\circ_2$，忘掉 $\circ_1$，并将 U_{Set} 视为自由岩浆、半群或幺半群（U^*， $\circ_2$）的一组生成元。在这种情况下， U_{Set}的元素称为基元素。
我们尤其关注如何利用自由幺半群来表示动力系统中的轨道，以及如何利用 Hom 集的岩浆来发展我们的诱导态射理论（参见3）。

我们可以通过两种方式将自由岩浆视为一种自然的分次结构（也就是说，存在一个函数 $U^* \to \mathbb{N}_0$）。第一种方式由 Bourbaki 提出，实质上是项二叉树的宽度，即以树底部的宽度来衡量，也就是树中叶节点的数量。这种分级也适用于结合的自由岩浆，在这种情况下，它简化为字符串的长度）。我们在3中为非结合岩浆引入第二种分级，称为树的高度，这对我们的目的更为有用。我们将高度为 0 的树定义为基元素，并递归地将高度为 n 的树定义为至少有一棵子树的高度为 $n-1$ 的树。注意，这意味着 $a \circ b$ 的高度为 1， $(a \circ b) \circ (c \circ d)$ 的高度为 2，而 $(a \circ (b \circ (c \circ d)))$ 的高度为 3。

同态/态射： 两个代数结构 $X_{Sruc} = (X_{Set}, \{\circ_\alpha\})$ $Y_{Struc} = (Y_{Set}, \{\circ_\beta\})$之间的结构同态 ϕ_{XY} 是一个函数 $\phi_{X_{Set}Y_{Set}}$ ，它保持（与之兼容/对其分配）代数结构。这意味着，对于 X 上的每个 n元（$n > 0$）代数运算 $\circ_\alpha$ ，在 Y 上都有一个 n元运算 $\circ_\beta$ ，使得 $\phi(\circ_\alpha(x_i)^{n-Seq}) =$
$\circ_\beta(\phi x_i)^{n-Seq}$ 对所有序列（x_i）$_{X^n}$都成立。对于每个 n ，定义笛卡尔积函数 $\phi_{X^nY^n} = \prod_{i=1}^n \phi_{XY} := (x_i)_{X^n} \mapsto (\phi_{XY} x_i)_{Y^n}$很有用，它给出 $\phi_{XY} \circ \circ_\alpha = \circ_\beta \circ \phi_{X^nY^n}$。我们还可以定义对合 $Op_{X^n} := (x_i)_{i=1}^n \mapsto (x_i)_{i=n}^1$，它提升为$X^nY^n$ 上的对合，定义为 $Op(\phi_{X^nY^n}) = \phi^{Op}_{X^nY^n} := \phi_{X^nY^n} \circ Op_{X^n}$。
我们称 ϕ^{Op}为反结构同态，因为它会反转序列。例如，给定群$(X, \circ_X)$，$(Y, \circ_Y)$，则 ϕ_{XY}是反群同态，当且仅当 $\phi(x_1 \circ_X x_2) = (\phi x_2) \circ_Y (\phi x_1)$。

注意特殊同态的标准补充术语：如果函数 $\phi_{X_{Set}Y_{Set}}$ 是双射，那么 ϕ 是同构；如果$X = Y$，那么 ϕ_{XX} 是自同态；若这两个条件都成立，则

ϕ_{XX} 是自同构。如果 $\phi_{XX}x = x$，那么 x 是自同态 ϕ的不动点。

Hom 集：注意 XY 表示从 X 到 Y的同态集（同态或态射的集合）。并且自同态集 XX 是 X 上的一元算子同态集的子集 X。因此，我们需要注意， XY 通常可以通过底层代数结构的运算来定义代数运算X 和 Y。我们称这些新运算为导出/诱导运算，而 XY 本身则构成一个独立的（二阶）代数结构。我们将大量使用这种构造，详见下文第（3）节。

> 并置映射 $" := (X, \ Y) \mapsto XY$本身是集合上的二元运算，因此给定一个集合族 $X = \{X_\alpha\}$，我们将由 X 通过 $''$生成的集合族记作 $X^* =< X, \ '' >$。注意，由于 $''$ 不满足结合律，$(X^*, \ '')$ 是一个岩浆而非半群（其元素由二叉树而非字符串表示），我们将其称为同态集岩浆。此外， X^* 的元素通常包含集合之间的态射，而非态射之间的态射，因此它们不同于高阶范畴论中遇到的“高阶”态射。第二点不能用例如 Y 群： XY 群来说明；群的自同态构成一个群（或幺半群 XYZ 的复合）。

:

对合：代数结构 $X = (X_{Set}, \{\circ\}_\alpha)$ 上的对合（.）$_{XX}$ 是一种二阶一元运算（即对于每个 x_X，都有 $x = x$），同时也是斜自同构，并且与每个 $\circ_\alpha$ 斜反交换，即 $x \circ_\alpha y = y \circ_\alpha x$。如果 $\{\circ\}_\alpha$ 为空，则第二个约束自动满足。给定另一个集合 Y， X 上的对合会通过 $\phi_{XY}x = \phi x$ 在 $(XY)_{Set}$ 上诱导出一个对合。然而，这个对合通常不与 XY 上的算子（如复合或加法）交换，因此通常不能视为代数结构 XY 上的对合。

我们称 $\bar{x}$ 为 x 的对合像；当 $x = x$ 时，称其为自对合点。自对合点的集合就是.的 不动点集合，记作 $FP(X, \bar{.})$；当 $\bar{.}$ 明确时，也可简记为 $FP(X)$。若子集 $W \subseteq X$ 与 $FP(X, \bar{.})$ 不相交，则称 $W \subseteq X$ 在 $\bar{.}$ 下无不动点。注意，这意味着 $W, \bar{W}$ 两两不相交，并且 $W \neq X$，除非 $X = \emptyset$。 X 在 $\bar{.}$ 下的一个划分，是由三个两两不相交的子集组成的三元组 $(W, W, FP(X))$，它们覆盖 X。

引理4。设 X、Y是带有对合 $\bar{.}_X$、$\bar{.}_Y$的代数结构，并且 $W \subset X$在 $\bar{.}_X$下无不动点。进一步假设， A、B是定义在$X \times Y$上的实值函数，且满足：对于任意 y和任意 $x \in W$， $A(x, y) > B(x, y)$，且 $A(x, y) < B(x, y)$。那么，对于任意 y和任意 $x \in W$， $A(x, y) < B(x, y)$，且 $A(x, y) > B(x, y)$。

证明。$\overline{A}(x, y) = A(\overline{x}, \overline{y}) < B(\overline{x}, \overline{y}) = \overline{B}(x, y)$，第二个结果可类似地得出。□

对合

定义 5。集合 X 上的对合 . 是一个自反双射，即 $x = x$。代数结构 $(X, \circ)$ 上的对合是 X 上的对合，同时也是反同构，即 $x \circ y = y \circ x$。如果 $\circ$ 是交换的，. 就成为一个自同构。

若 $(X, \circ)$ 是一个群，我们称 $x = x^{-1}$ 为逆元对合，并注意到 $xy = y\,x$。当 $X = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 时，这给出 $x = -x$，$x + y = (-y) + (-x)$，我们将广泛使用这一点。在自由幺半群 $(X^*, +)$，上，反转是一种对合，其中 $x_1 x_2 \ldots x_N = x_N x_{N-1} \ldots x_1$ 且 $w_1 + w_2 = w_2 + w_1$。注意，限制在 X 上的反转是恒等映射。

我们将借鉴范畴论中的一些有用抽象，以简化并构建我们的理论。我们从具体范畴开始，也就是对象为数学空间且每个空间都有一个底集的范畴。我们将通过符号滥用，把 X_{Obj} 的底空间记作 X_{Set}。此外，在具体范畴中，从 X_{Obj} 到 Y_{Obj} 的态射集 XY 是底集之间的函数集 $\{\phi_{X_{Set}Y_{Set}}\}$。当然，$XY$ 通常是从 X_{Set} 到 Y_{Set} 的全体函数集（通常记作 Y^X）的真子集，并且其选取方式会保留空间 X_{Obj}，Y_{Obj} 的某种附加结构。

给定一个具体范畴 C，我们构造二阶范畴 C^+，其对象为 $Obj(C) \bigcup \{XY\colon X, Y \in Obj(C)\}$，即通过将 C 的态射集 XY 作为 C^+ 的对象来扩展 C。这使我们能够构造 C 的态射集之间，以及 C 的态射集与 C 的对象之间的态射。

我们用这种方法来区分 S_N，ϕ，并少量运用对偶性，以减少需要考虑的情形数量。

诱导/构造/依赖态射 一般形式：$A_{(XY)(VW)}\colon\ \phi_{XY} \mapsto \phi_{VW}$ 需要检查 ϕ_{VW} 是否为态射。

序列扩张 $\prod^n{}_{(XY)(X^nY^n)}\colon\ \phi_{XY} \mapsto \phi_{X^nY^n}$ 其中 $(\prod^n \phi)(x_i) := (\phi x_i)_{Y^n}$，因而可扩展到克莱尼星 $\phi_{X^*Y^*}$，它作用于长度为 $n \geq 0$ 的序列。不过请注意，像 $\prod^n{}_{(XY)(X^nY^n)} XY$ 通常是 X^nY^n 的真子集，仅由对角线项构成：X^nY^n 的一般项为 $(\phi_j)_{X^nY^n}\colon (x_j)_{X^n} \mapsto (\phi_j x_j)_{Y^n}$。$X^nY^n$ 的对角线元素，X^n 分别有 $\phi_j = \phi$、$x_j = x$。

$(XY)^n = \{(\phi_1, \ldots\ldots, \phi_n)\}$ 在定义域上有歧义——它是 XY^n 还是 X^nY^n？——不要使用它；应使用后两者中定义明确的那个。不过这样一来，$\phi_{XY^n} \in (XY)^n_{Set}$——但将 $(XY)^n$ 作为映射来应用并未定义，最好说 XY^n 与 $X^nY^n\,|_{Diag(X^n\text{自然同构}}$

另外，$(\phi_i)_{XY^n}\colon\ x \mapsto (\phi_i x)_{Y^n}$——将 X^nY^n 的定义域从 X^n 限制到 X^n 的对角元素，$Diag(X^n)$

拉回／Koopman 算子：$C_\psi\colon\ \phi_{XY} \mapsto (\phi\psi_{WX})_{WY}$ C_ψ 关于 ϕ 是线性的，且具有签名 $(XY)(WY)$；C 是从 $(WX)((XY)((XY)(WY)))$ 到算子的函数（元算子、二阶算子）

给定 $(Y, \circ_{Y^nY}) \circ_{(XY^n)}(XY)\colon (\phi_i)_{XY^n} \mapsto (\circ_{Y^nY} \cdot (\phi_i)_{XY^n})_{XY}$ eg (n=2) $(\phi_1 \circ_{XY} \phi_2)x := (\phi_1 x) \circ_Y (\phi_2 x)$（$\circ$ 的推前）等价于 $f(g) = f \circ g$ 非 $g(f) = f \circ g$——对 1-函数的简单复合，并扩展到序列。那么 $\circ_{Y^nZ}$ 呢？$(Y, \circ_{Y^nZ}) \circ_{(XY^n)}(XZ)\colon (\phi_i)_{XY^n} \mapsto (\circ_{Y^nZ} \cdot (\phi_i)_{XY^n})_{XZ}$——这是将 Y 替换为 Y^n. 后的普通复合。当 $X = Y = Z$ 时，分布的推广。

丢番图逼近　　非遍历伯克霍夫和在　　旋转上的15

推前/Koopman伴随： C_ϕ： $\psi_{WX} \mapsto (\phi_{XY}\psi_{WX})_{WY}$是 $(WX)(WY)$，而不是 $(XY)(WY)$。 C关于 ϕ 是线性的，但 C_ϕ 关于 ψ不是线性的。因此， ϕ 的陪域X 被推前到 Y，而不是将 X 的定义域拉回到W。在上文中，$(W,\ X,\ Y)$ 被替换为 $(X,\ Y^n,\ Y)$。

设 $X,\ Y$ 是某个具体范畴 C中的两个对象，并设 Y 配备了一个二元运算 $+_Y$（不一定满足交换律）。那么， $+_Y$ 按如下方式在函数集 Y^X 上诱导出一个依赖二元运算 $+_{XY}$：$(\phi_{XY} +_{XY} \theta_{XY})x := \phi x +_Y \theta x$。当然， Y^X 的子集 XY在 $+_{XY}$下可能不是闭的。若它是闭的，则称空间 $XY := (XY,\ +_{XY})$ 是 Y的依赖空间。

现在给定一个自同态 T_{XX} 和一个态射 ϕ_{XY}，则复合$\phi_{XY}T_{XX}$ 本身属于 XY。换言之， T通过 $\phi \mapsto \phi T$作用于 XY。当 XY是 Y上的依赖空间时，这个作用还是线性的，即 $(\phi_1 + \phi_2)(Tx) = \phi_1(Tx) + \phi_2(Tx) = (\phi_1 T)(x) + (\phi_2 T)(x) = (\phi_1 T + \phi_2 T)(x)$。

现在，我们希望能够进一步讨论映射 $\phi \mapsto \phi T$；它是 XY 的自同态，因此在 C 中不存在。非正式地说，我们只需将它加进去，但下面也会说明如何以形式化方式做到这一点。我们转向高阶范畴 C^+，在其中可以定义态射集合之间的态射——特别是， XY 与 AB 之间的态射将属于态射集合 $(XY)(AB)$。特别地，现在我们可以定义依赖态射 $\mathbb{T}_{(XY)(XY)}(\phi_{XY}) := \phi T_{XX}$。根据上面的结果， XY 中的 $+_{XY}$ 会诱导出一个依赖二元运算 $+_{(XY)(XY)}$，它属于 $XY_{(XY)}$，定义为 $(T+U)\phi := T\phi + U\phi$。同样，若 $(XY)(XY)$ 在 $+$ 下闭，则它是 XY 的一个依赖空间。

X 的自同态 T_{XX} 在复合运算下构成一个幺半群，因此 $(XY)(XY)$ 也如此；若在从 $+_Y$ 提升而来的算子 $+_{XY}$ 下闭，它还构成一个半群。此外，对于 $n \geq 0$，有 $T^n\phi = \phi T^n$。

$X^* = (X^*, +)$ 是由 X 上的自由线性幺半群，并且我们通过 $T(\sum_{r=1}^N x_r) := \sum_{r=1}^N Tx_r$ 将 T 扩展到 X^*，因此所诱导的 T 是 X^*X^* 且为线性的。现在，在 (X,T) 中，x_0 的长度为 N 的轨道片段是 $(Tx_0, T^2x_0, \ldots, T^Nx_0)$，现将其视为 X^* 中的字 $\sum_{r=1}^N (T^r(x_0))_{X^*}$，其中 $(x_0)_{X^*}$ 是 X^* 中对应于 $(x_0)_X$ 的单字母字。利用 T^r 的线性性，我们可以将其改写为 $\left(\sum_{r=1}^N T^r\right) x_0$，其中求和是所诱导的算子 $+_{(X^*X^*)}$。现在我们定义线性算子$S_N = \sum_{r=1}^N T^r$，于是可以将轨道片段写成 $S_N x_0$。最后，我们类似地通过 $\phi(\sum_{r=1}^N x_r) = \sum_{r=1}^N \phi x_r$ 将 ϕ_{XY} 扩展到 X^*，其中第二个求和使用 $+_Y$。因此，我们可以使用 **(4)** 的重写规则 $\phi(S_N x_0) = \sum_{r=1}^N \phi(T^r x_0) = \sum_{r=1}^N (T^r\phi)x_0 = \left(\sum_{r=1}^N T^r\right)\phi x_0 = (S_N\phi)\ x_0$，其中第二个同名异物 S_N 现在是 $(X^*Y)Y$，而 $S_N\phi$ 是 X^*Y（即 X^* 上的一个观测函数），其限制到 X 后现在就是伯克霍夫和算子

自由幺半群

定义 6. 给定集合 X， X 上的自由幺半群 $(X^*,\ +)$ 定义为由有限字（或字符串）$x_1x_2\ldots x_N$组成的集合，其中每个字母 $x_i \in X$ 都属于该集合，包括空字 $\mathbf{0}$；其运算 $+$ 为字的连接（这当然不是可交换的）。我们用 $\sum_{r=1}^N w_r$ 表示 $w_1 + w_2 \ldots + w_N$，其中 w_r 是 X^* 的一个字。我们将反向求和 $w_N + w_{N-1} \ldots + w_1$ 记作 $\sum_{r=1}^N w_{N+1-r}$。

对偶性 两个空间之间的对偶性使我们能够根据一个空间中的结果，自动得到另一个空间中的对偶结果。我们将在若干处利用对偶性，以减少需要考虑的情形数量。不过，这些对偶性相当简单，将其形式化并明确表述所需的理论推导并不值得付出相应的努力。因此，我们只会非正式地指出这些对偶性，并利用它们来组织需要考虑的各种情形。

我们将利用两种对偶：定义域对偶源于底集和群上有用的对合的存在，而奇偶对偶（奇数结果与偶数结果之间的对偶）则是在研究连分数时产生的。

2.3. **动力系统**。 尽管我们上文提到伯克霍夫和在伯克霍夫之前就已受到研究，但如今它们通常与遍历理论和动力系统联系在一起，因此我们将在此介绍相应的术语和符号表示。

动力系统（X，T_X）就是一个空间 X（一个集合 X，配备了适当的代数和分析结构），以及一个自同态 T： $X \to X$。给定 $x_0 \in X$（称为初始条件），点 $x_N = T^N x_0$是 x_0的第 N–次迭代，而序列（x_1，x_2，.....）是 x_0的（正向）轨道（注意：不把 x_0 本身视为轨道的第一个点非常方便）。对于n，$m \geq 0$，轨道的子序列（x_r）$_{r=m+1}^{m+n}$ 称为长度为 n的片段；若 $m = 0$，则称为初始片段。

本文将重点研究动力系统 $(\mathbb{T}, R_\alpha)$，其中 $\mathbb{T} = [0, 1)$ 是圆（一个紧致的一维实流形），而 R_α 是旋转 $\alpha_{\mathbb{R}}$ 圈的旋转。注意， $R_\alpha = R_{\{\alpha\}}$

当 X 具有距离函数 d 时，如果 $x_N = T^N x_0$ 满足 $d(x_0, x_N) < d(x_0, x_r)$，对 $r < N$ 成立，我们称 x_N 是 x_0 的最近回归点；也就是说，在长度为 N 的初始轨道片段中， x_N 是与 x_0 距离最小的第一个点。我们称 N 为准周期，其拟周期误差为 $d(x_0, x_N)$。注意，1 显然是一个准周期。

还要注意，如果 $x_N = x_0$ ，那么：轨道是周期的，且 N 是周期 $p = \min\{r > 0$ 的倍数： $R^r x = x\}$；周期本身也是一个拟周期误差为 0 的准周期。

现在，我们将动力系统的观测函数定义为取值于半群（$Y, \circ_Y$）的函数 ϕ_{XY}。根据 2.2，这会在 XY 上诱导出一个自然的二元函数 $\circ_{XY}$。一般而言， $\circ_Y$、 $\circ_{XY}$ 未必可交换（例如在余循环理论中， （$Y, \circ$）是一个以矩阵乘法为运算的矩阵空间）。本文仅讨论简单情形（$Y, \circ$） = （$\mathbb{R}, +$），因此下文中， X 上的观测函数将是 X 上的实值函数，而观测函数的集合 $X\mathbb{R}$ 是一个交换群，即（ $X\mathbb{R}, +_{X\mathbb{R}}$ ）。

定义 7 （伯克霍夫和）。 在初始条件为 x 时，可观测量 $\phi_{X\mathbb{R}}$ 关于动力系统（X, T）的第 N 个伯克霍夫和为 S_N^T（ϕ, x）：$= \sum_{r=1}^{N} \phi$（$T^r x$）。

我们将方便地定义若干由S_N导出的同名形式。若上下文明确，也可省略 T 或 ϕ ，得到以下形式： $S_N(\phi, x) := S_N^T(\phi, x)$， $S_N x := S_N(\phi, x)$。当 T为 R_α时，即旋转

圆周 $\alpha_{\mathbb{R}}$ 周之后，我们也记作 $S_N^{\alpha} := S_N^{R_\alpha}$。最后，我们定义齐次形式 $S_N\phi := S_N(\phi, 0)$,

关注点分离 设 (X,T) 是一个带有值系统 $(Y,+)$ 和观测量系统 $(XY,+)$ 的动力系统。

在（2.2）中我们指出，给定 $T: X \to X$ 和 $\phi \in (XY,+)$， T 在 $T: XY \to XY$ 上有一个同态作用，其定义为

$$(T\phi)x = (\phi \circ T)x = \phi(Tx)$$

就本文而言，右侧更易处理，因为这意味着我们可以独立于 $\phi(X,T)$ 研究给定的动力系统 。然而，我们的目标是研究形式为 $(S_N\phi)x_0$ 的伯克霍夫和。注意到它与（2.2）左侧的形式相同，因此最好将 $(S_N\phi)x_0$改写为 $\phi(S_Nx_0)$。遗憾的是， S_Nx_0 未定义，但我们可以轻松补救：将研究范围从 X 扩展到 X^*，即 X 上的自由幺半群（见 2.2），从而提供一个更丰富的语境供我们开展研究。

注意，任意一个字 $w = x_1 \dots x_N \in X^*$ 都可以写成连接 $\sum_{r=1}^N x_i$。我们也可以将 $(T^r x_0)_{r=1}^N$ 的初始轨道片段识别为 $(X,T)\sum_{r=1}^N T^r x_0$ 的连接。

现在，我们将函数 $\phi: X \to Y$ 扩展为幺半群同态 $\phi: X^* \to Y$，定义为 $\phi(\sum_{r=1}^N x_r) = \sum_{r=1}^N \phi x_r$。类似地，我们将每个函数 $T^r: X \to X$ 扩展为幺半群同态 $T^r: X^* \to X^*$，定义为 $T^r(\sum_{r=1}^N x_r) = \sum_{r=1}^N T^r x_r$。注意，根据 (2.2)， $+$ 在 X^* 上诱导出 $+$ 在 X^*X^* 上，因此 $M = ((X^*X^*)\ +)$ 是一个由幺半群自同态构成的幺半群。特别地，现在对于每个字 $w \in X^*$，我们可以写出 $S_N = \sum_{r=1}^N T^r \in M$，其中 $S_N w = \sum_{r=1}^N T^r w$。现在，我们可以将 (2.2) 与 $U: X^* \to X^* \in M$ 以及 $\phi \in (X^*Y,+) = M_2$ 一起使用，从而得到 U 具有同态作用 $U: M_2 \to M_2$，其定义为 $(U\phi)w = \phi(Uw)$。特别地，取 $U = S_N, w = x_0$，便得到（如所期望的）$(S_N\phi)x_0 = \phi(S_Nx_0)$，事实上还能得到更多。

注意到现在我们可以将 S_Nx_0与初始轨道片段$(T^r x_0)_{r=1}^N$对应起来，该片段位于动力系统(X, T)中，我们利用上述恒等式，将对伯克霍夫和 $S_N\phi x_0$ 的研究分解为对初始轨道片段的研究，随后再研究 ϕ 在这些片段上的作用。我们分别在第（5,6）章中完成这两项研究。

2.4. 圆的几何。 照例，我们将采用拓扑商群 $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 作为圆的模型，并赋予其商拓扑以及（由 $\mathbb{I}$推前得到的）勒贝格测度。回顾一下， $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 的元素是陪集 $x_{\mathbb{R}} + \mathbb{Z}$。我们记 $x_{\mathbb{T}} := x_{\mathbb{R}} + \mathbb{Z}$，并将商同态$\pi_{\mathbb{RT}}$ 记为，使得 $\pi(x_{\mathbb{R}}) = x_{\mathbb{R}} + \mathbb{Z} = x_{\mathbb{T}}$。给定 $x, x_0 \in \mathbb{R}$，我们也将 $\mathbb{T}$ 视为带有坐标图图册[2] $\chi_{x_0}^{\mathbb{TI}}: x_{\mathbb{T}} = x + \mathbb{Z} \mapsto \{x - x_0\}$的紧流形。注意， $\chi_{x_0}^{\mathbb{TI}}\chi^{\mathbb{RT}} = \chi_{x_0}^{\mathbb{RI}}: x \mapsto \{x - x_0\}$。我们还有一组类似的坐标图 $\chi_{x_0}^{\mathbb{TI}'}$： $x_{\mathbb{T}} \mapsto \{\{x - x_0\}\}$，其中$\chi_{x_0}^{\mathbb{TI}'}\chi^{\mathbb{RT}} = \chi_{x_0}^{\mathbb{RI}'}: x \mapsto \{x - x_0\}$。当 $x_0 = 0$ 时，我们将省略每个映射 χ 的下标，并将它们视为典范映射。特别地，我们取 $\chi^{\mathbb{TI}}$， $\chi^{\mathbb{TI}'}$

[2]严格来说，坐标图是开集之间的同胚，但我们可以轻易地将这些坐标图扩展到整个流形。要扩展到整个流形/区间，我们必须先定义 $\chi_{x_0}: \mathbb{T}\backslash\{x_0 + \mathbb{Z}\}_{Set} \to \mathbb{I}\backslash\{x_0\}_{Set}$，然后将其扩展以包含 $x_0 + \mathbb{Z} \mapsto \{x_0\}$.。 χ_{x_0}' 也同样如此

作为典范图册，并将 $x_{\mathbb{I}} = \chi^{\mathbb{TI}}(x_{\mathbb{T}})$ $x_{\mathbb{I}'} = \chi^{\mathbb{TI}'}(x_{\mathbb{T}})$ 分别称为 $x_{\mathbb{T}}$ 的自然坐标和有向坐标。

注意过渡映射或坐标变换 $\chi^{\mathbb{TI}}_{x_1}\left(\chi^{\mathbb{TI}'}_{x_0}\right)^{-1} x = \{x - (x_1 - x_0)\}$，因此对于典范坐标，态射 $\chi^{\mathbb{TI}}_{x_1}\left(\chi^{\mathbb{TI}'}_{x_0}\right)^{-1}$ 属于同态集$\mathbb{I}'\mathbb{I}$，其逆元属于 $\mathbb{II}'$。

$\mathbb{R}$和 $\mathbb{I}$ 上的自然序在 $\mathbb{T}$上并不明确。虽然通常将圆周序定义为一种三元关系（不涉及坐标），但对我们来说，采用由自然坐标诱导的序更为合适，因此我们定义 $x_{\mathbb{T}} \leq y_{\mathbb{T}} \Leftrightarrow 0 \leq x_{\mathbb{I}} \leq y_{\mathbb{I}} < 1$。接着，如果存在一个旋转 R_α，使完整序列按自然序排列，即对于 $i = 1..n-1$有 $\{x_i + \alpha\}_{\mathbb{I}} \leq \{x_{i+1} + \alpha\}_{\mathbb{I}}$，那么我们称序列 $(x_i)_{i=1}^{n}$ 在 $n \geq 3$上按循环序排列。如果反向序列 $(x_i)_{i=n}^{1}$ 按循环序排列，那么我们称序列 $(x_i)_{i=1}^{n}$ 在$n \geq 3$ 上按反循环序排列。按循环序或反循环序排列的序列称为有序序列。长度为 $0 \leq n \leq 2$ 的序列总是同时按循环序和反循环序排列。

顺序的歧义意味着，一对不同的圆周上的点 $a_{\mathbb{T}} < b_{\mathbb{T}}$ 确定了两个圆区间，其定义取决于从 a 到 b的行进方向。我们将采用两种方式来消除这种歧义。首先采用坐标序：循环区间 $\mathbb{I}$包含内点 x，使得 $(a,\ x,\ b)$ 按循环序排列；反循环区间则包含 x，使得 $(a,\ x,\ b)$ 按反循环序排列。我们称它们为有向区间；若未指定方向，默认采用循环方向。其次，我们定义无向区间：测度较小者为小弧，测度较大者为大弧。若两者的测度均恰为 $1/2$，则取循环有向区间为小弧，不过本文不会用到此类区间。注意，对于有向区间，$(a,\ b) \neq (b,\ a)$；而对于测度不为 $_{1\,2}$ 的无向区间，无论是小弧还是大弧，均有 $(a,\ b) = (b,\ a)$。

除了开区间和闭区间外，我们同样关注半开区间。我们将使用通常的记号，以圆括号 () 和闭 [] 括号表示是否包含端点。我们还会使用 $|$，以避免指定具体是哪种情况，因此 $|a, b|$ 表示端点 4 种可能配置中的一种特定但未指明的区间。

为便于阅读，在适当之处我们也会用 1 作为 0 的同义表示，因此$[\frac{3}{4}, 1]$表示 $\mathbb{I}$中的子集$[\frac{3}{4}, 1) \cup \{0\}$，以及 $\mathbb{T}$中的循环有向区间 $[\frac{3}{4}, 0]$。

任意圆周区间 J也是配备子空间拓扑的 $\mathbb{T}$ 的一个拓扑子空间。需要注意一个细微之处：子空间在母空间拓扑中可能有边界点，但这些点在子空间拓扑中并不是边界点。例如，若 $J = [a, b)$，则区间 $[a, c_J)$ 在 J 的子空间拓扑中是开 的（而非半开）。了解这一点后，将关于 $\mathbb{R}$ 的开集的著名刻画推广到任意实数区间或圆周区间就很简单了。为求完整，我们给出证明：

命题 8. 在 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{T}$ 中的区间 J 的子空间拓扑下，开集是至多可数个互不相交的开区间之并

证明。设 X 是 J 的拓扑中的一个开集。对每个 x_X，令 I_x 为 X 中包含 x 的极大区间。如果 I_x，I_y 不互不相交，那么它们的并是一个区间，因此由它们的极大性可知 $I_x = I_x \cup I_y = I_y$。于是 X 是互不相交的区间之并。然而 X 也是开集，因此不含边界点。故每个 I_x 都是开区间。最后，每个内部非空的区间都包含一个有理数，因此任何由内部非空的互不相交区间组成的族至多可数。□

长度为 $n \geq 1$ 的圆的分割是一个有序序列 $(x_i)_{i=1}^{n}$。圆区间 J 的分割是圆的一个分割，其中所有点都位于 J中。（请注意，这是对通常定义的轻微推广：我们不要求 J 是闭的，也不要求将 J 的端点包含在分割中）。

我们引入 $\mathbb{T}$ 上的自然对合，由 $x_{\mathbb{T}} = -x_{\mathbb{T}}$ 定义，它诱导出坐标对合 $\{\chi x_{\mathbb{T}}\} = \{\chi x_{\mathbb{T}}\} = \{-x_I\} = \{1 - \overline{x}\}$ 和 $\{\{\chi' x_{\mathbb{T}}\}\} = \{\{\chi' \overline{x_{\mathbb{T}}}\}\} = \{\{-x_{\mathbb{I}'}\}\} = -\{\{x_{\mathbb{I}'}\}\}$。请注意，对于 $x_{\mathbb{I}} \neq 0$，我们有 $\{1 - x\} = 1 - x$，而 $\{1 - 0\} = 0$。应用此对合所产生的对偶性称为圆对偶。

现在我们引入实平移 $R_\alpha^{\mathbb{R}\mathbb{R}}$: $x \mapsto x + \alpha$。这会诱导出平移（我们在这里称之为旋转） $R_{\alpha_{\mathbb{T}}}^{\mathbb{T}\mathbb{T}}$: $x_{\mathbb{T}} \mapsto x_{\mathbb{T}} + \alpha_{\mathbb{T}}$ 和 $R_{\alpha_{\mathbb{I}}}^{\mathbb{I}\mathbb{I}}$: $x_{\mathbb{I}} \mapsto \{x_{\mathbb{I}} + \alpha_{\mathbb{I}}\}$，$R_{\alpha_{\mathbb{I}'}}^{\mathbb{I}'}$: $x_{\mathbb{I}'} \mapsto \{\{x_{\mathbb{I}} + \alpha_{\mathbb{I}}\}\}$。由于它们的结构完全相同，我们将采用符号滥用，把它们都视为 R_α。

Note that $\overline{R_\alpha} = R_{\overline{\alpha}} = R_{1-\alpha}$ (and $R_\alpha = R_{\{\alpha\}} = R_{\alpha+n_{\mathbb{Z}}}$)

请注意，在这些系统中，我们有 $R_\alpha^N x = \{x + N\alpha\}$ 和 $S_N(\phi, x, R_\alpha) = \sum_{r=1}^{N} \phi(\{x + r\alpha\})$。请注意，我们总能通过定义 $\phi^\uparrow(x) = \phi(\{x\})$，将 ϕ: $\mathbb{T} \to \mathbb{R}$ 提升为 $\phi^\uparrow$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$；根据符号滥用，我们将简单地用 ϕ 表示 $\phi^\uparrow$。例如，我们可以简单地写作 $S_N(\phi, x, R_\alpha) = \sum_{r=1}^{N} \phi(x + r\alpha)$。我们称 $S_N(\phi, x, R_\alpha)$ 为关于 $\{x\} = 0$的齐次和，以及关于 $\{x\} \neq 0$的非齐次和。

Duality results:. $S_N^{\overline{T}} \overline{\phi} \overline{x} = S_N^T \phi x$ $S_N(-\phi)x = -S_N \phi x$ $S_N^{\overline{T}}(-\overline{\phi})\overline{x} = -S_N^T \phi x$

长度为 $q \geq 1$ 的圆的分割是由 q 个坐标满足 $0 \leq x_1 < x_2 \ldots < x_q < 1$的圆周上的点构成的序列。注意，任意互不相同的点序列都可以重新排序，从而得到一个分割。该分割的区间是 $q - 1$ 区间（x_i, x_{i+1}）在 $\chi_{\mathbb{T}\mathbb{I}}^{-1}$ 作用下的像，其中 $r < q$；以及区间（x_q, $\mathbf{1}$）$\bigcup$（$\mathbf{0}$, x_1）。

若对 $1 \leq r < q$有$x_{r+1} - x_r = \frac{1}{q}$，且（若$q > 1$）$\{x_1 - x_q\} = \frac{1}{q}$，则该分割是正规分割。我们只讨论正规分割，因此省略“正规”一词。注意，长度为 $\mathbf{1}$ 的分割总是正规分割。

2.5. 数论。代数背景 给定集合 $A \subseteq \mathbb{R}$，定义 $x_{\mathbb{R}} A = \{xa : a \in A\}$。若 A 是加法群，则 xA 也是加法群，并且存在商群$\mathbb{R}/xA$，它也是加法群，其元素为 $y_{(\mathbb{R}/xA)} = y + xA := \{y + xa : a \in A\}$。此外，$xA$ 在乘法下也闭，当且仅当 $z \in \mathbb{Z}$。当 $z \in \mathbb{Z}$时，$z\mathbb{Z}$ 是交换环（对于 $|z| > 1$没有单位元），而商 $\mathbb{Z}/z\mathbb{Z}$ 是有单位元的交换环（若 z 是素数，则为域；但若 z 是合数，则有零因子）。

本文主要讨论正实数的射影闭包，即配备对合 R: $x \mapsto \frac{1}{x}$ 的区间 $\mathbb{P} = [0, \infty]$，其中我们定义

$\infty := R0$ （因此 $R\infty = 0$ 和 $R[0,1] = [1,\infty]$）。我们还定义 ∞ 为一个整数，并采用通常的算子扩展 $\infty + x_{\mathbb{P}} := \infty$， $\infty . x_{\mathbb{P}} := \infty$， $x_{\mathbb{P}} \leq \infty$。数值函数对我们而言，最重要的一组函数是余数（剩余）函数和下取整函数。回想 $\mathbb{I} := [0,1)$，以及对于 $x_{\mathbb{R}} \neq 0$ $x\mathbb{I} = [0,x)$。

对于每个 $z_{\mathbb{R}} \neq 0$，我们定义余数函数 $\{.\}_z : \mathbb{R} \to |z|\mathbb{I}$，定义为 $\{x\}_z := \min\{x - k_{\mathbb{Z}} z : kz \leq x\}$，即 $\{x\}_z$ 是除以 z 进行整数除法后得到的正余数。注意，由于 $z \to 0$， $\{x\}_z \to 0$，因此我们将其扩展到 $\{x\}_0 = 0$。注意 $\{x + nz\}_z = \{x\}_z$，所以存在自然双射 $x + z\mathbb{Z} \longleftrightarrow \{x\}_z$，即 $\mathbb{R}/z\mathbb{Z} \leftrightarrow |z|\mathbb{I}$。这意味着我们可以通过 $x +_{z\mathbb{I}} y := \{x+y\}_z$ 为 $|z|\mathbb{I}$ 赋予群结构。类似地，$\mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \longleftrightarrow |q|\mathbb{I} \bigcap \mathbb{Z}$，并且我们可以通过 $r \cdot_{|q|\mathbb{I}} s = \{rs\}_q$ 添加分配律乘法。

带符号余数为 $\{\{x\}\}_z = \{x\}_z - \left[\!\left[\{x\}_z \geq \frac{|z|}{2} \right]\!\right] |z| \in |z|\mathbb{I}/_{\sim}$。余数与带符号余数是互为逆的双射 $|z|\mathbb{I}/_{\sim} \longleftrightarrow |z|\mathbb{I}$。它们共同在 $|z|\left(\mathbb{I} \bigcup \mathbb{I}/_{\sim}\right)$ 上构成一个对合，该对合固定 $|z|[0, \frac{1}{2})$，并将 $[-\frac{1}{2}, 0)$ 与 $[\frac{1}{2}, 1)$ 互换。

我们还定义下取整函数 $\lfloor x \rfloor_z := x - \{x\}_z$，以及 x 到 $z\mathbb{Z}$ 的最小距离，记为 $\|x\|_z = |\{\{x\}\}_z| \in \frac{|z|}{2}\mathbb{I}$。请注意，后者是 $\mathbb{I}$- 上的度量，但不是范数（它不满足数乘要求）。扩展这些函数很有用，具体做法是定义 $\{\infty\} = 0$，由此我们还得到 $\{\{\infty\}\} = 0$， $\lfloor \infty \rfloor = \infty$， $\|\infty\| = 0$。

当 $z = 1$ 时，我们会从符号表示中省略它。函数 $\{x\}, \{\{x\}\}$ 也称为 x 的小数部分。

我们可以利用 $\{x\}_z$ 推导出其他常见函数：

最大公因数是二元运算 $(x_{\mathbb{R}}, y_{\mathbb{R}}) := \max\{z_{\mathbb{R}} : \{x\}_z = 0 \& \{y\}_z = 0\}$。注意 $(x,x) = (x,0) = |x|$。

自反且传递的“整除”关系由 $z|x := \{x\}_z = 0$ 给出（因此我们允许 $0|x$），而“同余”这一等价关系由 $x \equiv y \bmod z := \{x\}_z = \{y\}_z$ 给出。现在 $\{x\}_z = \{y\}_z \iff x + z\mathbb{Z} = y + z\mathbb{Z}$，因此 $[0,z)$ 与 $\mathbb{R}/z\mathbb{Z}$ 之间存在自然双射，使 $[0,z)$ 通过 $x_{[0,z)} \leftrightarrow [x]$ 具有群结构，并在 $\{r\}_{r=0}^{q-1}$ 上赋予由 $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ 诱导的环结构。

符号函数 sgn 将 $\alpha_{\mathbb{R}}$ 映射为其符号：$\mathrm{sgn}(x_{\mathbb{R}}) = [\![x > 0]\!] - [\![x < 0]\!]$。（注意，$\mathrm{sgn}(0) = 0$）。剩余 当 z, x 是自然数时，我们称 $\{x\}_z$ 为 z 的一个剩余。注意，可能的剩余恰有 z 个，即集合 $\{i_{\mathbb{N}} : 0 \leq i < z\}$。我们还倾向于使用 我们有以下基本结果：如果 $(p_{\mathbb{N}}, q_{\mathbb{N}}) = 1$，那么 $\{\{r_{\mathbb{N}} p\}_q\}_{r=1}^{q-1} = \{r\}_{r=1}^{q-1}$；也就是说，后缀算子 $\times p$ 在 q 的非零剩余上诱导一个置换。特别地，对于 $q > 1$，存在唯一的 $1 \leq r_p \leq q-1$，使得 $\{r_p p\}_q = 1$，我们将其记为 $\{p\}_q^{-1}$。

$\{.\}_q$ 由以下方式诱导 $+_{q\mathbb{I}}$： $\{x\}_q +_{q\mathbb{I}} \{y\}_q = \{x+y\}_q$——需要证明其与 x, y. $\{x+y\}_q = \{\{x\}_q + \{y\}_q\}_q = \{x\}_q + \{y\}_q - [\![\{x\}_q + \{y\}_q \geq |z|]\!]\,|z|$ 的选择无关。$\{rs\}_q = \{\{r\}_q \{s\}_q\}_q$

丢番图逼近 给定 $a_{\mathbb{R}}$，连分数理论提供了一个序列 $\binom{p_r}{q_r}_{r=0}^{\infty}$ (渐近分数)，它们能以指数速度不断改进对 a的有理逼近。这些长期以来一直是我们研究领域的主要工具，已有许多优秀的入门介绍，例如 Hardy & Wright[6]。我们将从一个略微新颖的视角出发，简要概述本文所需的内容。

回想一下，我们可以将任意 $x_{\mathbb{R}}$ 拆分为整数部分和小数部分，即 $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$。下文中，我们将采用这样的约定：带有 $./$ 的符号表示实数，不带的符号表示整数。此外，我们将把 ∞ 视为包括 0 在内的正整数倒数，因此$1\,0 := \infty = \lfloor \infty \rfloor + \frac{1}{\infty}$。整数、有理数、实数分别表示$\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}\ \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \bigcup \{\infty\} \mathbb{R} = \mathbb{R} \bigcup \{\infty\}$ 中的元素。

我们首先介绍一种现代化的交替相减法。这种方法由早期的希腊人（可能是毕达哥拉斯学派）发展而来，后来成为我们如今所称的欧几里得算法的核心组成部分。

定义 9。反相除关系是递推关系 $a_n^{/} = a_n + \frac{1}{a_{n+1}^{/}}$ 其中 $a_n = \left\lfloor a_n^{/} \right\rfloor$。给定一个初始实数 $\overline{a^{/}}$并设定 $a_0^{/} = a^{/}$，该关系定义了（对于 $n \geq 0$）两个实数无限序列 $(a_n^{/})$、(a_n)，以及它们各自的整数部分。 [3] 出于历史原因，我们称 $(a_n^{/})$ 为 $a^{/}$的完全商序列，称 (a_n) 为部分商序列。整数序列 (a_n) 也称为实数$a^{/}$.的交替相减展开

注意，对于 $n \geq 0$, $\frac{1}{a_{n+1}^{/}}$ 是 $a_n^{/}$的小数部分，因此 $1 < a_{n+1}^{/} \leq \infty$ ，这也意味着 $a_{n+1} \geq 1$。此外，根据定义， $a_n \leq a_n^{/} < a_n + 1$ ，除非 $a_n^{/} = a_n = \infty$。

用现代术语来说，该关系定义了从实数到整数序列的辗转相减映射 $\mathscr{A}: a^{/} \mapsto (a_n)$。显然，这个映射是单射，因此它提供了实数到整数的可逆编码。该映射不是满射：如果 $a_n = \infty$ ，那么 $a_{n+1} = \infty$ ，且 $a_{n-1} \neq 1$ （唯一的例外是 $A(1) = (1,\ \infty,\ \infty,\ \ldots\ldots)$ ）。因此， $\mathscr{A}$的像是反相除数列的集合，它是所有整数序列的一个子集。

自然会产生这样一个问题：我们能否构造从反相除数列集合到 $[1, \infty]$ 的逆映射 A^{-1}。首先注意，递归地使用反相除关系，可得 $a_0^{/} = a_0 + \frac{1}{a_1^{/}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2^{/}}} = \ldots$。这些表达式称为连分数，不过现代更恰当的术语或许是递归分数，也就是 $\frac{a}{b}$ 这样的分数，其中 $a,\ b$ 本身也可能是递归分数。我们将第 $n-$ 个连分数记作 $CF_n^{/}(a_0,\ \ldots\ldots,\ a_{n-1},\ a_n^{/})$，注意，如果把连分数化简回普通分数，最终会得到 $a_0^{/} = CF_n^{/}(a_0,\ \ldots\ldots,\ a_n^{/}) = \frac{P_n(a_0,\ \ldots\ldots,\ a_n^{/})}{Q_n(a_0,\ \ldots\ldots,\ a_n^{/})}$，这是关于 $a_0,\ \ldots\ldots,$ $a_n^{/}$ 的有理多项式。若 $a_0^{/}$ ————————

[3]技术说明：传统论述通常区分有限序列（对应 $a_0^{/}$ 有理数）和无限序列（对应 $a_0^{/}$ 无理数）。为便于讨论，我们将所有序列都视为无限序列，并用整数 ∞延长有限序列。实际上，这对讨论影响不大。

是无理数，那么 a_n' 也是无理数，而我们只是把构造逆映射的问题从 a_0' 转移到了 a_n'.[4]）。

然而，如果 a_n' 本身是一个整数，那么 a_0' 是有理数，且易于计算，因此我们可以忽略将 a_n' 替换为其整数部分 a_n所产生的影响。这给出了一个由连分数构成的派生序列 $CF_n = CF_n'(a_0...a_n)$，其中每一项现在都简化为某个普通分数 $\frac{p_n}{q_n}$。例如 $CF_0 = \frac{p_0}{q_0} = a_0$，$CF_1 = \frac{p_1}{q_1} = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0a_1+1}{a_1}$，$CF_2 = \frac{p_2}{q_2} = a_0 + \frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2}} = \frac{a_0a_1a_2+a_0+a_2}{a_1a_2+1}$等。

连分数理论的显著结果是

$$a_0' - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n\left(a_{n+1}'q_n + q_{n-1}\right)} \tag{2.1}$$

这意味着 $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ 是一个以 a_0' 为极限的序列，即 $A^{-1}(a_r) = \lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{q_n}$，我们称 $\frac{p_n}{q_n}$ 为 a_0' 的一个渐近分数。此外，这些是给定分母大小时可能达到的最佳有理逼近，也就是说，$\left|a_0' - \frac{p}{q}\right| < \left|a_0' - \frac{p_n}{q_n}\right|$需要满足 $q > q_n$。事实上，每个逼近实际上都更强：不等式（更严格的）$\left|qa_0' - p\right| < \left|q_na_0' - p_n\right|$ 实际上要求 $q \geq q_{n+1}$。

我们还需要连分数理论中的另外两个基本结果。假设每个$\frac{p_n}{q_n}$ 都是最简分数。首先，序列有一个由下列恒等式给出的不变量：

$$p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n \tag{2.2}$$

其次，(p_n)，(q_n)都满足连续分数递推关系 $r_n = a_nr_{n-1} + r_{n-2}$，这意味着：

$$p_n = a_np_{n-1} + p_{n-2}$$
$$q_n = a_nq_{n-1} + q_{n-2}$$

注意，由 $\frac{p_0}{q_0} = a_0$ 可得 $p_0 = a_0$，$q_0 = 1$；由 $\frac{p_1}{q_1} = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0a_1+1}{a_1}$ 可得 $p_1 = a_0a_1 + 1$、$q_1 = a_1$。注意到递推关系也可以写成递减形式 $r_{n-2} = r_n - a_nr_{n-1}$，由此可推得更简单的初始条件：

$$p_{-1} = 1, p_{-2} = 0$$
$$q_{-1} = 0, q_{-2} = 1$$

连分数理论始于希腊人对自然数、有理数与实数之间关系的代数兴趣，这种代数关注也延续到了对它们与丢番图方程解（即整数解或有理解）之间联系的探索。相比之下，我们感兴趣的是运用该理论的结果来研究由圆周旋转构成的动力系统。这改变了我们对该理论中核心对象的看法。因此，经典理论中的核心对象是有理收敛子和逼近误差，而我们的

[4]有一个重要的例外：如果交替相减法最终呈周期性，欧拉和拉格朗日证明了，a_0' 是一个二次方程的根，而该方程可以从序列中恢复出来。

则是最近返回周期，以及相关返回误差的周期。下面我们来详细说明。

给定一个动力系统（X，T），其中（X，d）是一个度量空间，回顾一下，x_0的最接近返回周期（或准周期）是指满足 d（$T^m x_0$，x_0）$<d$（$T^n x_0$，x_0）需要 $m>n$的整数 $n>0$。在系统（$\mathbb{T}$，$R_{a_0'}$）中（即圆周旋转 a_0' 圈），经典连分式理论的“最佳可能”结果等价于如下结果：每个 q_n 都是一个准周期。逼近误差 $q_n a_0' - p_n =$（-1^n）等价于：q_n 次旋转经过 a_0' 后返回到距起点（有向）-1^n）圈的距离，也就是说，这就是返回误差，其误差周期为 $a_{n+1}' q_n + q_{n-1}$。由于这将是我们主要关注的对象，我们为其赋予专门的符号：受准周期的连分式递推关系（即 $q_{n+1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1}$）启发，我们将第 $n-$ 个误差周期记为 $q_{n+1}' := a_{n+1}' q_n + q_{n-1}$。[5]

总之，序列 a_n，a_n' 既是经典理论中的核心对象，也是本文理论中的核心对象。然而，经典理论侧重于渐近分数$\frac{p_n}{q_n}$及其分子/分母，而我们关注的是周期 q_n，q_n'。为方便起见，我们给出一个正式定义：

定义 10. 给定一个实数 a_0'，其完全商序列为 (a_n')，部分商序列为 (a_n)，我们还为 $n \geq 0$ 定义 a_0' 的准周期序列为 $(q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-1})$，以及 a_0' 的误差周期序列为 $(q_n' = a_n' q_{n-1} + q_{n-1})$，其中 $q_{-1} = 0$，$q_{-2} = 1$。虽然关注度较低，我们也以类似方式定义 p_n，p_n'。

最后我们指出，旋转 $a_0' \geq 1$ 与旋转 $\alpha = \{a_0'\} < 1$等价。本文关注无理旋转的动力学，因此我们约定符号 α 表示一个具有 $0 \leq \alpha := \{a_0'\} < 1$的实数（通常为无理数），并注意到 $A(\alpha) = CF(0,\ a_1,\ a_2 \ldots)$，即 $a_0 = 0$，因此 $\alpha = a_0'(\alpha) = \frac{1}{a_1'}$ 也成立。它还给出 $p_0 = 0$，$p_1 = 1$。

定义 11 (丢番图型函数)。在估计中，我们发现，建立序列 (q_n)，(q_n') 增长的界很有用。由于 $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$，对于 $n \geq 1$ $a_n q_{n-1} \leq q_n < (a_n + 1) q_{n-1}$，我们有 $\prod_{r=1}^{n} a_r \leq q_n < \prod_{r=1}^{n} (a_r + 1)$，且仅当 $n = 1$ 时取等号。定义 $a_n^{\max} = \max_{r \leq n} a_r$，则 $q_n < (a_n^{\max} + 1)^n$。注意，$a_n^{\max}$ 是递增的正序列。定义 $a_n^{\max}$，$a_n'^{\max}$与$A_n = \max_{r \leq n} \left(\frac{q_r}{q_{r-1}} \right)$，以及 $A_n' = \max_{r \leq n} \left(\frac{q_r'}{q_{r-1}} \right)$。注意，$a_n^{\max} < a_n'^{\max} < a_n^{\max} + 1$ 和 $A_n < A_n' < A_n + 1$ $a_n^{\max} < A_n < a_n^{\max} + 1$ $a_n'^{\max} < A_n' < a'^{\max_n} + 1$。它们全都是$O(a_n^{\max})$，且 $A_n' < a_n^{\max} + 2$。

[5]历史说明：符号表示 q_{n+1}' 实际上曾被 Hardy & Wright 使用[6]，，但纯粹是为了方便，在局部用作表达式 $a_{n+1}' q_n + q_{n-1}$ 的简写，以用于证明不等式$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}$。它似乎并未被命名，也未用于后续理论的发展。事实上，Lang[8] 完全没有使用任何简写，而是始终 $a_{n+1}' q_n + q_{n-1}$ 完整地写出。我们不知道此前是否有人为 (q_n)、(q_n') 引入过特定名称。

与估计相关的 n， q_n 由于 $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$，我们得到 $q_n = (a_n a_{n-1} + 1)\ q_{n-2} + q_{n-3} \geq 2q_{n-2}$，其中 $n \geq 2$ （仅当 $n = 2$时取等号）。因此，当 n 为偶数时，即使 $q_n \geq 2^{n/2}$对于 $n \geq 2$，且当 n为奇数时， $q_n \geq 2^{(n-1)/2} q_1$对于 $n \geq 1$。因此 $n \leq {}^{2}_{\text{对数}\,2}\log\ q_n$与$n \leq 1 + {}^{2}_{\text{对数}\,2}(\log\ q_n - \log\ q_1)$，其中 n为奇数。

将 $\phi := \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+1\right)$写作黄金比例，我们可以通过观察到 q_n 随 a_n 递增而递增，得到稍好的估计，因此最低的准周期属于黄金旋转，即 $\phi - 1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$，且 $a_i = 1$。由此 $q_n \geq F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi^{n+1} - (-\phi)^{-(n+1)}\right)$，得到 $n \leq {}^{1}_{\text{对数}\,\phi}\left(\text{对数}\, q_n + \text{对数}\,\sqrt{5} - \text{对数}\left(1 - \phi^{-2(n+1)}\right)\right) - 1$。由于 $\phi^{-2(n+1)}$是一个递减函数，且 n，对于 $n \geq 1$， $n \leq {}^{1}_{\text{对数}\,\phi}\left(\text{对数}\, q_n + \text{对数}\,\sqrt{5} - \text{对数}\left(1 - \phi^{-4}\right)\right) - 1$。现在 $1 - \phi^{-4} = \phi^{-2}(\phi^2 + \phi^{-2}) = \phi^{-2} F_2 \sqrt{5}$，并且 $F_2 = 1$，因此对数 $\sqrt{5}$ –对数$\left(1 - \phi^{-4}\right) = 2$对数$\phi$。所以，对于 $n \geq 1$，我们有 $n \leq {}^{}_{\text{对数}\,q_n}\text{对数}_{\phi} + 1$，等号仅在$n = 1$ 和 $q_1 = 1$ 时成立（事实上，对于 $n = 0$，严格不等式仍然成立）。

此外 $q_n = \prod_{r=1}^{n} \frac{q_r}{q_{r-1}} \leq \prod_{r=1}^{n} A_r \leq (A_n)^n$。因此

$$\frac{\log q_n}{\log A_n} \leq n \leq \frac{\log q_n}{\log \phi} + 1 \tag{2.3}$$

其中左侧不等式对 $q_n > 1$ 成立（因此对 $A_n > 1$ 也成立），右侧不等式对 $n \geq 0$ 成立。[6]

连分数 预备结果 在接下来的章节中，我们还需要一些额外的简单结果。鉴于连分数理论已相当成熟，这些结果很可能并非新结果；然而，我们未能找到它们（或许它们因符号表示上的差异而被隐藏起来），因此将在此给出证明。

引理 12. $p_n \equiv (-1)^{n+1} q_{n-1}^{-1}$ 模 q_n 其中 r^{-1} 表示 r 的逆元模 q，即 $0 \leq r^{-1} < q$，且 $r r^{-1} \equiv 1$ 模 q。对于 $\alpha = a_0' < 1$，这等价于 $p_n = q_{n-1}^{-1}$（奇数）和 $p_n = q_n - q_{n-1}^{-1}$（偶数）。

证明。 第一部分直接由将（2.2） 模q_n表示得出。对于第二部分，注意到当 $\alpha < 1$ 时，我们有 $p_n < q_n$，结论由此得出。 □

引理 13。 我们有等式 $q_n' = \prod_1^n a_r'$ 和 $\frac{p_n'}{q_n'} = a_0'$

证明。 根据递推关系，我们有 $q_{n+1}' = a_{n+1}' q_n + q_{n-1} = a_{n+1}'(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) + q_{n-1}$。反相除关系给出 $a_{n+1}' a_n + 1 = a_{n+1}' a_n'$，因此 $q_{n+1}' = a_{n+1}'\left(a_n' q_{n-1} + q_{n-2}\right) = a_{n+1}' q_n'$。由此得到 $q_n' = \left(\prod_1^n a_r'\right) q_0'$。现在 $q_0' = a_0' q_{-1} + q_{-2} = 1$，第一个结果便得证。类似的论证可得 $p_n' = \left(\prod_1^n a_r'\right) p_0'$和 $p_0' = a_0' p_{-1} + p_{-2} = a_0'$，第二个结果便得证。 □

---

[6]在此语境下，很容易想到将 a_r从 0 开始编号，使得 $\alpha = [0;\ a_0,\ a_1,\ \ldots]$这样便可得到对应得很整齐的序列（$a_r$）$_{r=0}^{\infty}$，（$b_r$）$_{r=0}^{\infty}$，（$q_r$）$_{r=0}^{\infty}$，其中 $b_r \leq a_r$。然而，这样做将显著偏离一种历史悠久的惯例，而该惯例在更广泛的语境中行之有效。因此，我们将遵循既定惯例，使得 $\alpha = [0;\ a_1\ a_2\ \ldots]$以及$\frac{q_{r+1}}{a_{r+1} q_r + q_{r-1} a_r\ q_r}$，与文献中的其他地方保持一致。

定义 14。 我们定义上高斯映射 $\Gamma\colon [0,\infty]\to[1,\infty]$，其定义为 $x\mapsto \frac{1}{x-\lfloor x\rfloor}$；注意，这定义了完全商序列上的左移，即 $\Gamma(a'_n)=a'_{n+1}$。[7]

回顾一下，我们定义对偶旋转 $\alpha:=1-\alpha$。对于任意观测函数序列$x_r:=x_r(\alpha)$，我们定义对偶观测值 $x_r:=x_r(\alpha)$
$a'_0=\alpha,\ a_n=\left\lfloor a'_n\right\rfloor,\ a'_{n+1}=\frac{1}{a'_n-a_n}$ 因此对于 $\alpha<\frac{1}{2}\ a_1=\left\lfloor\frac{1}{\alpha}\right\rfloor\geq 2,\ a'_0=\alpha,$
$a'_1=\frac{1}{\alpha},\ a'_0=1-\alpha,\ a'_1=\frac{1}{1-\alpha}$ 因此
$a'_2=\frac{1}{a'_1-a_1}=\frac{1}{\frac{1}{1-\alpha}-1}=\frac{1-\alpha}{\alpha}=\frac{1}{\alpha}-1=a'_1=1$。 因此$a_2=a_1-1$

引理 15. 对于 $0<\alpha<\frac{1}{2}$，$-\alpha$ 的商 a'_r,a_r 满足恒等式 $x_{r+1}=x_r$（当 $r\geq 2$ 时），此外 q'_r 在 $r\geq 1$ 时也满足该恒等式，且 q_r 在 $r\geq 0$ 时也满足。在此之外，序列的早期值为 $a'_0=1-\alpha, a'_1=\frac{1}{1-\alpha}, a'_2=\frac{\alpha}{1-\alpha}, a_0=0, a_1=1, a_2=a_1-1, q'_0=1,$ $q'_1=\frac{1}{1-\alpha}$ 与 $q_0=1$。

证明. 本节前文的标准结果立即给出 $a'_0=1-\alpha, q_0=1, q'_0=1$；此外，由于 $1-\alpha<1$, $a_0=0, q'_1=a'_1=\frac{1}{1-\alpha}$（注意 $q'_1\neq q'_0$,$a'_1\neq a'_0$）。

现在我们使用 $0<\alpha\leq\frac{1}{2}$ 使得 $\frac{1}{2}<\alpha<1$ 因此 $a'_1=\frac{1}{1-\alpha}\leq 2$，得到 $q_1=a_1=1=q_0$。现在我们可以计算 $a'_2=\frac{1}{a'_1-a_1}=\frac{1}{\frac{1}{1-\alpha}-1}=\frac{1-\alpha}{\alpha}=\frac{1}{\alpha}-1=a'_1-1$因此 $a_2=a_1-1$。这些结果进而给出 $q_2=(a_1-1).1+1=a_1=q_1$ 类似地 $q'_2=(a'_1-1).1+1=a'_1=q'_1$。最后 $a'_3=\frac{1}{a'_2-a_2}=\frac{1}{\left(a'_1-1\right)-(a_1-1)}=a'_2$
因此也有 $a_3=a_2$。这就得到了 $q'_3=a'_3q'_2=a'_2q'_1=q'_2$，并且我们已经确定了序列的前几个值。
现在，对于 $n\geq 2$，我们可以写成 $a'_{n+1}=\Gamma^{n-2}a'_3=\Gamma^{n-2}a'_2=a'_n$，因此也有$a_{n+1}=a_n$。 q'_{n+1}, q_{n+1} 的递推关系可以很快得出这些序列在 $n\geq 2$ 下的结果，而序列的前几个结果则将它们推广到所声称的初始值。□

现在我们来推导一些有用的恒等式

引理 16. 恒等式:

(1) 对于无理数 $n\geq 0$ 与 a'_0，我们有 $1\leq a_{n+1}<a'_{n+1}=a_{n+1}+\frac{1}{a'_{n+2}}<a_{n+1}+1$(2) (3) 对于 $n>0$, $q_n<q'_n<q_n+q_{n-1}<\min\left(\left(1+\frac{1}{a_n}\right)q_n,q_{n+1}\right)\leq 2q_n$ 因此$\prod_{r=1}^{n}a_r<q_n<q'_n=\prod_{r=1}^{n}a'_r=\prod_{r=1}^{n}(a_r+\frac{1}{a'_{r+1}})<\prod_{r=1}^{n}(a_r+1)$

[7]它也是下高斯映射 γ 的共轭：$[0,1]\to[0,1]$ 由 $\Gamma=R\gamma R$ 给出，其中 R 是 $x\to\frac{1}{x}$ 在 $[0,\infty]$ 上的对合

(4) $a'_{n+1}(a'_n - a_n) = 1$ (等价于 $a'_{n+1}a'_n = a'_{n+1}a_n + 1$，因此 $a'_{n+1}a'_n > 2$与 $q'_{n+1} > 2q'_{n-1}$)，从而 $q'_n = q_n + \frac{q_{n-1}}{a'_{n+1}} < q_n\left(1 + \frac{1}{a_n a'_{n+1}}\right)$。除非 $a_{n+1} = a_n = 1$，否则$< \frac{3}{2}q_n$

(5) $\frac{1}{q'_{r+2}} + \frac{a_{r+1}}{q'_{r+1}} = \frac{1}{q'_r} \leq \frac{1}{q_r}$（仅当 $r = 0$ 时取等号） (6) $\frac{1}{q_r} - \frac{1}{q'_r} = \frac{q_{r-1}}{q_r q'_{r+1}} \leq \min\{\frac{1}{q'_{r+1}}, \frac{1}{2q_r}\} \leq \frac{1}{2q_r}$，仅在 $r = 1$ 时可能取等号, $q_1 = 1$

证明。 $\frac{1}{q'_{r+2}} + \frac{a_{r+1}}{q'_{r+1}} = \frac{q'_{r+1} + a_{r+1}q'_{r+2}}{q'_{r+2}q'_{r+1}} = \frac{\left(1 + a_{r+1}a'_{r+2}\right)q'_{r+1}}{q'_{r+2}q'_{r+1}} = \frac{\left(a'_{r+1}a'_{r+2}\right)}{q'_{r+2}} = \frac{1}{q'_r}$ 与 $q'_r \geq q_r$，仅当 $r = 0$ 时取等号

$\frac{1}{q_r} - \frac{1}{q'_r} = \frac{q'_r - q_r}{q_r q'_r} = \frac{(a'_r - a_r)}{q_r q'_r} \frac{q_{r-1}}{} = \frac{a'_{r+1}}{q_r q'_r} \frac{q_{r-1}}{} = \frac{q_{r-1}}{q_r q'_{r+1}}$。这些不等式由 $q_{r-1} \leq q_r$（仅当 $r = 1,\ \alpha > \frac{1}{2}$ 时等号成立）以及 $q'_{r+1} > q_{r+1} > 2q_{r-1}$ 得出 □

奥斯特罗斯基表示 奥斯特罗斯基在研究余数和（伯克霍夫和 $\sum_{r=1}^{N}\{r\alpha\}$）的论文（##paper）中引入了这种表示。该论文中这一工具的具体应用似乎难以自然推广，但工具本身此后已在许多其他领域得到应用，并将成为我们研究中的主要工具。

我们先回顾用非标准数制表示整数的思想。在标准数制中，我们使用基数 $q > 1$ 来表示整数 N：取由 $q^n \leq N < q^{n+1}$ 定义的权重序列 $1 = q^0 < q^1 < q^2 ... < q^n$，并求出整数系数 $b_r \geq 0$，使得 $N = \sum_{r=0}^{n} b_r q^r$。一般来说，$N$ 有许多这样的表示；但如果我们规定要使 b_n 最大化，那么 b_{n-1}，依此类推，直到 b_0，则 b_r 就被确定下来，从而得到一个规范表示。在非标准数制中，我们取一个任意的无界权重序列 $1 = q_0 \leq q_1 \leq q_2 ...$，并采用完全相同的步骤，得到一个规范表示 $N = \sum_{r=0}^{n} b_r q_r$。（我们可以允许 $q_r = q_{r+1}$，因为先于 b_r 最大化 b_{r+1} 将导致 $b_r = 0$。）

定义 17. </style对于 $N \in \mathbb{N}$，奥斯特罗斯基表示 $O_\alpha(N)$ 是由 α 的准周期 q_r 定义的非标准数制中的典范表示 $N = \sum_{r=0}^{n} b_r q_r$。

预备结果 本节将从上述内容推导出一些简单的结果，这些结果将在我们的主要论述中发挥作用。

我们注意到奥斯特罗斯基表示具有以下特征：

引理 18. 设 α 的部分商序列为 (a_n)，准周期序列为(q_n)，并假设 N 的奥斯特罗斯基表示为 $\sum_{r=0}^{n} b_r q_r$，则：

(1) $b_r \leq a_{r+1}$*(2)* $b_0 < a_1$

(3) $b_r = a_{r+1} \implies b_{r-1} = 0$

(4) (5) $q_1 = 1 \implies b_0 = 0$

证明。关键的洞见是，如果 $b_r q_r \geq q_{r+1}$，那么 b_{r+1} 就不是 q_{r+1}的最大系数。因此，在典范表示中，我们必须有 $b_r q_r < q_{r+1}$。由于对于 $r \geq 0$，$q_{r+1} = a_{r+1}q_r + q_{r-1}$ 且 $q_r > 0$，这就得到对于 $r \geq 0$，$b_r < a_{r+1} + \frac{q_{r-1}}{q_r}$。回想一下 $q_{-1} = 0$，$q_0 = 1$，$q_1 \geq 1$，$q_2 > 1$，因此对于 $r = 0$，$b_0 < a_1$；对于 $r \geq 1$，则有 $b_r \leq a_{r+1}$。此外，如果 $q_1 = 1$，那么 $a_1 = 1$，进而 $b_0 < a_1$ 推出 $b_0 = 0$。最后，进一步完善最初的洞见，我们注意到，如果 $b_r = a_{r+1}$，那么 $b_r q_r + b_{r-1}q_{r-1} = q_{r+1} + (b_{r-1} - 1)q_{r-1}$，这再次意味着，当 $b_{r-1} - 1 \geq 0$时，b_{r+1} 不可能是最大的。□

3. Hom 集岩浆理论

3.1. 引言。 给定伯克霍夫和 $S_N(\phi, x_0) = \sum_{r=1}^{N} \phi(x_0 + r\alpha)$，我们可以将其改写为柯里化形式 $S_N^{x_0}\phi$，即算子 $S_N^{x_0}$（签名为 $(\mathbb{TR})\mathbb{R}$，见**）对观测函数函数空间 $\{\phi_{\mathbb{TR}}\}$ 到 $\mathbb{R}$的作用。更具体地说，$S_N^{x_0}$ 是一个泛函。在后续章节中，我们将把 $S_N^{x_0}$ 分解为许多具有相同签名的泛函之和。这会带来大量重复工作，而通过有结构地理解若干相关的底层对偶关系，就能避免这些工作。

本节将发展包含这些对偶关系的代数理论；这一理论本身似乎也值得研究。除此之外，它还给出了 8 个对偶关系，这些关系涉及由源结构 (S, σ_S, R_S) 和目标结构 (T, τ_T, R_T) 构造的、签名为 $(ST)T$ 的泛函；这两种结构配备了自同态 σ，τ 和自关系 R_S，R_T。只要其中任意一个对偶关系成立，我们就能立即推出其余 7 个关系。

我们将在后文（第 7.2 节）把这一理论应用于环境 $(\mathbb{T}, ., \leq_{\mathbb{T}})$、$(\mathbb{R}, -_{\mathbb{R}}, \leq_{\mathbb{R}})$。尽管这是应用该理论时一个极其简单的环境，我们仍发现，这种方法通过为处理这些关系提供严谨而系统的途径，节省了重复劳动，也许更重要的是，避免了混淆。同态集的一般岩浆。如需简要了解自由岩浆和高度函数 h，以及 Hom 集，请参阅第 2.2 小节中关于生成结构和 Hom 集的章节。

设 $X = \{X_\alpha\}$ 是一个由另一集合 A索引的集合族。我们称每个 X_α 为基集，或高度 0 集合，并令 $M_0(X) := X$。回忆一下，我们用 AB 表示从 A 到 B的函数集。对于 $n \geq 1$，定义 $M_n(X) = \{AB : A \in M_{n-1}(X) | B \in M_{n-1}(X)\}$（即 A、B 中至少有一个属于 $M_{n-1}(X)$）。每个 $m \in M_n(X)$都是一个同态集，我们称其高度为 n（记作 $h(m) = n$），类型为（$h(A)$ $h(B)$）。注意，$h(AB) = \max(h(A)\ h(B)) + 1$。最后，我们定义 $M(X) = \bigcup_{n=0}^{\infty} M_n(X)$，称为 X上的同态集岩浆。下文中，为方便起见，我们将 AB 的高度称为其层级。

注意，如果 A，B是集合，那么 AB是 $P^2(A \times B)$ 的一个元素，其中 P是作用于集合的幂集算子，因此它与 $M(X)$ 本身一起满足 ZF 中集合的要求，所以不存在基础问题。

不过，还有一个技术问题：我们无法轻易保证生成集 X 是自由的。因此，$M(X)$ 可能不是自由岩浆，给定元素 m 也可能出现在不同层级，并具有不同的树表示。我们通过将 $M(X)$ 视为由符号 $'X'_\alpha$ 上的自由岩浆索引的集合族来避免这一问题。这样一来，当我们谈到 $AB \in M(X)$ 时，就必须说明我们指的是自由岩浆中的哪一种

表示树；这样， AB 的高度、宽度和类型便都有了明确定义。

关于符号表示和注释的补充说明下文将采用算子理论中的约定，并称第2层及以上的函数为算子。此外，我们将类型为 $(n,0)$（将函数映射到一个基集）的算子称为泛函。我们将用希腊字母表示第1层函数（它们必然是类型为 $(0,0)$ 的函数），例如 $\phi_{X_\alpha X_\beta}$；用大写字母表示泛函，例如 $A_{(X_\alpha X_\beta)X_\beta}$（这样我们就能正确地写成 $\left(A_{(X_\alpha X_\beta)X_\beta}\phi_{X_\alpha X_\beta}\right)_{X_\beta}$）。我们还需要指代关系，并将用符号 $'R'$ 表示它们。特别地， R_{XX} 表示 X上的一个自关系。

为方便起见，我们还将引入一种简写的自映射标注：用标注 T° 表示标注 TT，用 $T^{\circ\circ}=(TT)^\circ=(TT)(TT)$ 等表示。此约定同时适用于自同态和自关系。例如， XY 上的第2层自同态 $\alpha_{(XY)(XY)}$ 可以写作 $\alpha_{(XY)^\circ}$，而 $(ST)^\circ$ 上的第3层自同态 $\sigma_{((ST)(ST))((ST)(ST))}$ 可以写作 $\sigma_{(ST)^{\circ\circ}}$。请注意，出现.°总是表示带标注的态射是自同态。之后，当我们希望读者已经熟悉哪些符号表示自同态、哪些表示自关系时，就会省略 .° 标注，使带标注的（第2层）自同态 $\sigma_{(ST)^\circ}$ 进一步简写为 α_{ST}。当然，这样做有可能会使它与（第1层）函数 α_{ST}混淆。嘎嘎规则适用：如果它看起来像自同态，表现得也像自同态，那么它很可能是更高层级的自同态，而不是较低层级的函数。

我们还采用以下约定：只有当指称对象发生变化时才使用注释，阅读方向为从左到右。例如，在公式 $\sigma_{(ST)^\circ}\phi_{ST}=\phi\circ\sigma_{S^\circ}$ 中，符号 $'\sigma'$ 改变了指称对象（从类型为 $(1,1)$ 的第2层变为类型为 $(0,0)$ 的第1层），而符号 $'\phi'$ 在两处指称的对象相同。

最后，我们按惯例使用符号 $'\circ'$ 作为复合态射的二元运算，因此函数复合 $(f_{TZ}\circ g_{ST})_{SZ}$ 表示函数 $s_S\mapsto f(g(s))$，关系也有相应的定义。

源-目标幺半群 本节将研究一对0级集合 $X=\{S,T\}$ 上的同态集岩浆 $M(X)$ 的第0至第3层。我们将重点关注从 S 到 T 的态射，并称 S 为源， T 为目标结构。这里我们将指出特别重要的同态集。

第1层同态集包含类型为 $(0,0)$ 的函数，即在 0级集合 S，T 的有序对之间的函数。特别地，同态集 SS，TT（或 S°，T°）分别是 S 和 T 的自同态，而 ST 是从源到目标的函数所构成的同态集。另一个第1层同态集是 TS，但我们在此不予重点讨论。

第2层同态集包含第2层算子（即涉及第1层对象的算子），我们将重点关注：

(1) $(ST)(ST)$ 或 $(ST)^\circ$，这是将 ST 中的函数映射到 ST 中函数的 $(1,1)$ 型自同态的同态集；(2) $(ST)T$这是 $(1,0)$ 型算子（泛函）的同态集，它将 ST 中的函数映射到“值”，即基集 T 的元素。

第3层同态集包含第3层算子（即涉及第2层对象的算子），我们将重点讨论 $((ST)T)$ $((ST)T)$ 或 $((ST)T)^{\circ}$，这是将泛函映射到 $(ST)T$ 中泛函的 $(2,1)$ 型自同态的同态集。

我们还将发展“提升”的概念。顾名思义，提升将较低层级的对象映射到更高层级，而泛函则将对象映射到基础层级。因此，从技术上说，提升是算子，但显式介绍它们的意义不大，我们只探讨其结果。具体而言，我们将介绍将第1层对象提升到第2层和第3层，以及将第2层对象提升到第3层的方法。对象可以是函数或关系。提升是对广为人知的拉回与推前构造的特化。

3.2. 自同态的拉回。 对 S，T 上自同态的第2层提升

定义19 （提升自同态）。 令 σ_{SS}，τ_{TT} 分别为 S，T 的第1层自同态。

现在我们将 σ_{SS} 沿 ST 拉回，以诱导出一个作用于 ST、类型为 $(1,1)$ 的第2层自同态 $\sigma_{(ST)(ST)}$。使用简写的自同态注释，我们有：

$$\sigma_{(ST)^{\circ}} \coloneqq \phi_{ST} \mapsto (\phi \circ \sigma_{S^{\circ}})_{ST} \tag{3.1}$$

我们称 $\sigma_{(ST)^{\circ}}$ 为 $\sigma_{S^{\circ}}$ 从 S 到 ST 的（源）提升。类似地，我们可以将 $\tau_{T^{\circ}}$ 向前推，以诱导出 $\tau_{T^{\circ}}$ 从 T 到 ST 的（目标）提升；它同样是一个类型为 $(1,1)$ 的第2层自同态：

$$\tau_{(ST)^{\circ}} \coloneqq \phi_{ST} \mapsto (\tau_{T^{\circ}} \circ \phi)_{ST} \tag{3.2}$$

注意，源自同态与目标自同态的提升之间，复合顺序是反转的。

引理20. 对合的提升仍然是对合。

证明. 设 $\sigma_{(ST)^{\circ}}$ 是 $\sigma_{S^{\circ}}$ 的源提升。那么

$$\sigma^2_{(ST)^{\circ}}\phi = \sigma(\sigma\phi) = \sigma(\phi \circ \sigma_{S^{\circ}}) = (\phi \circ \sigma_{S^{\circ}}) \circ \sigma_{S^{\circ}} = \phi \circ \sigma^2_{S^{\circ}} \tag{3.3}$$

因此，若 $\sigma_{S^{\circ}}$ 是对合（即 $\sigma^2 = Id$），则 $\sigma_{(ST)^{\circ}}$ 也为对合。对目标提升也有类似的论证。□

引理 21。 如果两个源提升（或目标提升）的底层自同态可交换，则这两个源提升（或目标提升）也可交换。源提升与目标提升总是可交换的。

证明。 设 $\sigma_{S^{\circ}}, \varsigma_{S^{\circ}}$ 为两个可交换的自同态。利用复合的结合律，我们得到

$$\left(\sigma_{(ST)^{\circ}} \circ \varsigma_{(ST)^{\circ}}\right)\phi_{ST} = \sigma(\varsigma(\phi)) = (\phi \circ \varsigma_{S^{\circ}}) \circ \sigma_{S^{\circ}} = \phi \circ (\varsigma \circ \sigma) = \phi \circ (\sigma \circ \varsigma) = (\varsigma_{(ST)^{\circ}} \circ \sigma_{(ST)^{\circ}})\phi \tag{3.4}$$

对两个目标自同态进行类似论证即可得到该结果。通过另一个类似的论证：

$$\left(\sigma_{(ST)^{\circ}} \circ \tau_{(ST)^{\circ}}\right)\phi_{ST} = \sigma(\tau(\phi)) = (\tau_{TT} \circ \phi) \circ \sigma_{SS} = \tau \circ (\phi \circ \sigma) = \tau_{(ST)^{\circ}}(\sigma_{(ST)^{\circ}}(\phi)) = (\tau \circ \sigma)\phi \tag{3.5}$$

因此 $\sigma_{(ST)^\circ}$，$\tau_{(ST)^\circ}$ 总是可交换的。 □

注22。若两个对合 σ,τ可交换，则 $(\sigma\tau)^2=\sigma^2\tau^2=Id$，因此 $\sigma\tau$也是一个对合。

S上的自同态第三级提升,T 现在，我们可以利用上述关于ST 的结果，通过将 S 替换为 ST 并保持 T 不变，推导出关于 $(ST)T$ 的类似结果。注意，$(ST)T$是一个类型为 $(1,0)$ 的第2层态射集合，因此 $((ST)T)^\circ$是一个类型为 $(2,2)$ 的第三级态射集合。

按照上一小节中的方法进行，$\sigma_{(ST)^\circ}$ 的拉回给出了源提升：

$$\sigma_{((ST)T)^\circ}\coloneqq A_{(ST)T}\mapsto A\circ\sigma_{(ST)^\circ} \tag{3.6}$$

而对 τ_{T° 的推前给出了目标提升：

$$\tau_{((ST)T)^\circ}\coloneqq A_{(ST)T}\mapsto \tau_{T^\circ}\circ A \tag{3.7}$$

然而这次，我们在源 ST 上有一个额外的自同态，即 $\tau_{(ST)^\circ}$，我们同样可以将其拉回。这个新提升的自然标记应为 $\tau_{((ST)T)^\circ}$，但我们刚刚已经用该符号和注释来表示 τ_{T° 的提升了！因此，由于这个新提升是源提升，我们将其标记为 $\sigma'_{((ST)T)^\circ}$，得到：

$$\sigma'_{((ST)T)^\circ}\coloneqq A_{(ST)T}\mapsto A\circ\tau_{(ST)^\circ} \tag{3.8}$$

根据引理 21的第二部分，我们立即得到$\sigma_{((ST)T)^\circ}$，$\tau_{((ST)T)^\circ}$可交换，且 $\sigma'_{((ST)T)^\circ}$，$\tau_{((ST)T)^\circ}$可交换。引理的同一部分还给出 $\sigma_{(ST)^\circ}$，$\tau_{(ST)^\circ}$ 可交换，随后我们可以应用第一部分，得到 $\sigma_{((ST)T)^\circ}$，$\sigma'_{((ST)T)^\circ}$可交换。

由反复应用引理 20 可知，如果 σ_{S° 是对合，那么$\sigma_{((ST)T)^\circ}$也是对合；如果 τ_{T° 是对合，那么 $\tau_{((ST)T)^\circ}$和 $\sigma'_{((ST)T)^\circ}$也都是对合。若 $\sigma_{S^\circ},\tau_{T^\circ}$都为对合，那么三个第 3 层的全部 8 种复合也都是对合。因此我们已经证明：

定理 23. 若 S,T分别配备了对合 $\sigma_{S^\circ},\tau_{T^\circ}$，则泛函空间 $(ST)T$ 配备了一个$(C_2)^3$ 对合群，它由 $((ST)\ T)^\circ$ 的 *3* 个对合 σ,σ',τ生成，而这些对合本身由 $\sigma_{S^\circ},\tau_{T^\circ}$诱导。

3.3. 自关系的拉回。 到目前为止，我们所发展的理论完全可以在范畴论的语境中表述（即只用对象和态射，而不定义它们的含义）。不过在现阶段，若引入标准的集合论关系概念，将关系视为集合的元素，我们就能最容易地推进研究。

定义 24。 我们将 R_{ST} 定义为 S，T 的一个关系，即 $S\times T$ 的子集，也就是 S 的笛卡尔积的幂集中的一个元素，T。我们用 $s_S\,R_{ST}\,t_T$ 表示 $(s,\ t)\in R_{ST}$，并且还定义对偶关系或反关系 $R^{Op}_{TS}=\{(t,\ s):(s,\ t)\in R_{ST}\}$。如果 $S=T$，则 R 和 R^{Op} 被称为 S 上的自关系。

请注意， Op 是关系上的一个对合，即 $(R^{Op})^{Op} = R$，并且 $sRt \Leftrightarrow tR^{Op}s$。
现在假设 S，T除了配备自同态σ_{S°，τ_{T°外，还配备了自关系$R_{S^\circ} \subseteq S \times S$，$R_{T^\circ} \subseteq T \times T$。照例，若有$(s_1, s_2) \in R_{S^\circ}$，我们将其记作$s_1 R_{S^\circ} s_2$，并将反关系 $R_{S^\circ}^{Op}$ 定义为$s_1 R_{S^\circ} s_2 \Leftrightarrow s_2 R_{S^\circ}^{Op} s_1$，类似地定义 $R_{T^\circ}^{Op}$。

定义25。从 R_{S° 到 R_{T° 的关系同态是指满足以下条件的态射 ϕ_{ST}：$\phi \times \phi$是 $R_{S^\circ} R_{T^\circ}$的一个元素，即 $s_1 R_{S^\circ} s_2 \Leftrightarrow (s_1, s_2) \in R_{S^\circ} \Rightarrow (\phi s_1, \phi s_2) \in R_{S^\circ} \Leftrightarrow \phi s_1 R_{T^\circ} \phi s_2$。从$R_{S^\circ}$到$R_{T^\circ}$的关系反同态是从$R_{S^\circ}$到 $R_{T^\circ}^{Op}$的关系同态，其结果相反，即$s_1 R_S s_2 \Rightarrow \phi s_1 R_T^{Op} \phi s_2 \Leftrightarrow \phi s_2 R_T \phi s_1$。如果$R_{S^\circ}$，$R_{T^\circ}$都是函数，我们就称 ϕ_{ST}为函数同态。

注记 26。注意，$R_{S^\circ} R_{T^\circ}$ 的关系反态射会在 R_{T° 下转置其像，因此，关系态射与关系反态射的复合是关系反态射，而两个关系态射或两个关系反态射的复合是关系态射。此外，若 ϕ 是一个 $R_{S^\circ} R_{T^\circ}$ 态射，则有 $s_2 R_{S^\circ}^{Op} s_1 \Leftrightarrow s_1 R_{S^\circ} s_2 \Rightarrow \phi s_1 R_{T^\circ} \phi s_2 \Leftrightarrow \phi s_2 R_{T^\circ}^{Op} \phi s_1$，因此 ϕ也是一个 $R_{S^\circ} R_{T^\circ}^{Op}$、$R_{S^\circ}^{Op} R_{T^\circ}$反态射和一个 $R_{S^\circ}^{Op} R_{T^\circ}^{Op}$态射。
现在假设 σ_{S° 是一个 $R_{S^\circ} R_{S^\circ}$ 反态射，并且同样地，τ_{T° 是一个 $R_{T^\circ} R_{T^\circ}$反态射。那么，若 ϕ也是 $R_{S^\circ} R_{T^\circ}$的关系反态射，则 $\sigma_{ST}(\phi) = \phi \circ \sigma_{S^\circ}$，$\tau_{ST}(\phi) = \tau_T \circ \phi$都是 $R_{S^\circ} R_{T^\circ}$的关系态射，而 $(\sigma \circ \tau) \circ \phi$是 $R_{S^\circ} R_{T^\circ}$的关系反态射。

—

注记 27。当 R 是函数时，我们将 xRy 写作 $y = R(x)$，因此函数同态满足 $s_2 = R_s(s_1) \Rightarrow \phi s_2 = R_T(\phi s_1)$，于是 $\phi(R_S s_1) = R_T(\phi s_1)$，从而有 $\phi \circ R_S = R_T \circ \phi$。

自关系的第2层拉回 T 本节定义 T 上自关系的一种拉回。此拉回不是 函数的拉回运算；拉回的方式有很多种，我们只定义一个方向上的运算，即从目标进行拉回。尽管如此，“拉回”一词似乎仍然恰当。

定义 28。对于任意子集 $Z \subseteq S$，自关系 R_T 的拉回是 ST 上由 $\phi_1 R_Z \phi_2 \Leftrightarrow (\phi_1 s R_{T^\circ} \phi_2 s$ 对所有 $s_Z)$ 定义的自关系 $(R_Z)^{(ST)^\circ}$。若 $Z = \emptyset$，则 R_Z 是全关系。

注 29。请记住，我们可以随时自行更改记号，尽管这可能引起混淆。这里似乎是可读性的提升超过了由此带来的风险。

我们将用 σ（不加注释）表示 σ_{T°，用 σ_{ST}表示 $\sigma^{(ST)^\circ}$，并以类似方式使用符号 τ。我们还将把 $R_Z R_Z$ 的态射称为 R_Z的自同态。

注 30。注意，如果 $Z' \subseteq Z$，那么 $\phi_1 R_Z \phi_2 \Rightarrow \phi_1 R_{Z'} \phi_2$，即 $R_Z \subseteq R_{Z'}$。
给定 ϕ_1，ϕ_2 使得 $\phi_1 R_Z \phi_2$，我们现在可以推导出若干对偶结果，即给定一个涉及 R_Z 的结果，我们可以推导出一个涉及 R_Z^{Op} 的相应结果。

然而，使用这一方法，我们会发现可以将这些结果转回以 R_Z表示的另一种形式，而且这样做实际上更加方便。

命题 31. 若 τ 是 R_T。的反自同态，则 τ_{ST} 是 R_Z的反自同态，即 $\phi_1 R_Z \phi_2 \Rightarrow (\tau_{ST}\phi_2)\ R_Z\ (\tau_{ST}\phi_1)$。自同态也有类似结果。

证明. 若 τ是反态射，则对任意 s_S， $\phi_1 s\, R_{T^\circ}\, \phi_2 s \Rightarrow \tau(\phi_2 s)\, R_{T^\circ}\, \tau(\phi_1 s) \Leftrightarrow (\tau_{ST}\phi_2)s\, R_{T^\circ}\, (\tau_{ST}\phi_1)s$。由于这对所有 s_Z显然成立，反态射的情形得证。态射的情形类似。□

回顾一下， $\sigma Z := \{\sigma z :\ z \in Z\}$。

命题 32. 若 σ 是 S 上的对合，则 σ_{ST} 是 $R_{\sigma Z}$ 的自同态，即 $\phi_1 R_Z \phi_2 \Rightarrow (\sigma_{ST}\phi_1)\ R_{\sigma Z}\, (\sigma_{ST}\phi_2)$

证明. 由于 σ 是对合， $\phi s = \phi(\sigma^2 s) = (\phi \circ \sigma)(\sigma s) = (\sigma_{ST}\phi)(\sigma s)$，因此 $\phi_1 s\, R_{T^\circ}\, \phi_2 s \Rightarrow (\sigma_{ST}\phi_1)(\sigma s)\ R_{T^\circ} (\sigma_{ST}\phi_2)(\sigma s)$，从而得证。□

命题 33. 若 σ 是 S 上的对合，且 τ_T 是 R_T 上的（反）态射，则 $\sigma_{ST} \circ \tau_{ST}$ 是 $R_{\sigma Z}$ 的（反）态射。

证明. 这可直接通过应用 31再应用 32 得出，例如在反态射的情形下， $\phi_1 R_Z \phi_2 \Rightarrow (\sigma_{ST} \circ \tau_{ST})\phi_2\, R_{\sigma Z}\, (\sigma_{ST} \circ \tau_{ST})\phi_1$ □

请注意，我们已在 $\sigma_{ST} \circ \tau_{ST} = \tau_{ST} \circ \sigma_{ST}$ （3.5）中建立了这一点，因此上述结果的应用顺序并不重要。

来自 T 的自关系第三级提升回顾（23）：若 σ, τ 是 S, T 上的对合，那么 (ST) T 上的 σ, σ', τ 也是彼此可交换的对合，并生成一个含有 8 个对合的（阿贝尔）$(C_2)^3$ 群。我们希望考察这些对合对 $(ST)T$ 上诱导关系的作用。首先，我们通过将 S 替换为 ST、将 $Z \subseteq S$ 替换为 $\Psi \subseteq ST$，并将 ϕ_{ST} 替换为 $A_{(ST)T}$，来看哪些结果可以沿用上一节的结论。回顾 $\sigma'_{((ST)T)^\circ}(A) = A \circ \tau_{(ST)^\circ}$。

注意，我们可以将命题 31 应用于 $\tau_{(ST)T}$，将命题 32 应用于 $\sigma_{(ST)T}, \sigma'_{(ST)T}$。命题 31 要求 τ_T 是 R_T 上的反态射，命题 32 则要求 $\sigma_{ST}, \sigma'_{ST}$ 是 ST 上的对合。现在，若 σ_S 是对合，则 σ_{ST} 也是对合；若 τ_T 是对合，则 σ'_{ST} 也是对合。若这些条件成立，那么对于数对 σ, τ 和 σ', τ，命题 33 也成立。因此，命题 31–33 给出了涉及 Id, $\sigma, \sigma', \tau, \sigma \circ \tau, \sigma' \circ \tau$ 的对偶结果，但我们还缺少关于 $\sigma \circ \sigma', \sigma \circ \sigma' \circ \tau$ 的结果，接下来将对此进行推导。

命题 34. 若 σ_{ST}， σ'_{ST}是 ST上的对合，则 $\sigma_{(ST)T} \circ \sigma'_{(ST)T}$本身也是一个对合，且是 $R_{\sigma\sigma'_\Psi}$的自同态，即 $A_1 R_\Psi A_2 \Leftrightarrow (\sigma\sigma')A_1\, R_{(\sigma\sigma'_\Psi)}\, (\sigma\sigma')A_2$

证明。 根据定理 23 $\sigma \circ \sigma'$ 本身是 ST上的对合，由命题 32 □可得结论

命题 35。 若 σ_{ST}， σ'_{ST}是 ST上的对合，且 τ_T是 R_T的（反）态射，则 $\sigma_{(ST)T} \circ \sigma'_{(ST)T} \circ \tau_{(ST)T}$是 $R_{\sigma\sigma'_\Psi}$的（反）态射，即 $A_1 R_\Psi A_2 \Leftrightarrow (\sigma\sigma'\tau)$ $A_2\, R_{(\sigma\sigma'_\Psi)}\, (\sigma\sigma'\tau)A_1$

证明。 根据前一个命题， $\sigma_{(ST)T} \circ \sigma'_{(ST)T}$是一个对合，结论由应用命题 33 □可得

现在我们已经确立了以下结论：

定理 36. 若 σ_S, τ_T 分别是 (S, σ_S, R_S) 和 (T, τ_T, R_T) 上的对合，且 τ_T 也是 R_T 上的反态射，则我们可以得到 8 个对偶等价，它们涉及诱导的自关系 $R_\Psi, R_{\sigma\Psi}, R_{\tau\Psi}, R_{\sigma\tau\Psi}$（定义于 $(ST)T$ 上）以及诱导的对合 $\sigma_{(ST)T}, \sigma'_{(ST)T}, \tau_{(ST)T}$，即

$$A_1 R_\Psi A_2 \Leftrightarrow \sigma A_1 R_{\sigma\Psi} \sigma A_2 \Leftrightarrow \sigma' A_1 R_{\tau\Psi} \sigma' A_2 \Leftrightarrow \sigma\sigma' A_1 R_{\sigma\tau\Psi} \sigma\sigma' A_2$$

$$\Leftrightarrow \tau A_1 R^{Op}_{\Psi} \tau A_2 \Leftrightarrow \sigma\tau A_1 R^{Op}_{\sigma\Psi} \sigma\tau A_2 \Leftrightarrow \sigma' \tau A_1 R^{Op}_{\tau\Psi} \sigma' \tau A_2 \Leftrightarrow \sigma\sigma' \tau A_1 R^{Op}_{\sigma\tau\Psi} \sigma\sigma' \tau A_2$$

3.4. 特殊情形与应用。现在我们考察定理 36 的两种特殊情形： Ψ 自对偶的情形，以及在 Ψ 中从 τ_{ST} 到 τ_T 的函数同态情形。当 Ψ 在对合 $\sigma\tau$ 下自共轭时，给定任意 $\Phi \subseteq ST$，令 $\Psi(\Phi) = \Phi \bigcup \sigma\tau\Phi$。注意，此时 $\sigma\tau\Psi = \Psi$（即 Ψ 在对合 $\sigma\tau = \sigma \circ \tau$ 下自共轭），由此立即得到 $\tau\Psi = \sigma\Psi$，因为 σ, τ 是可交换的对合。因此， $\Psi(\Phi)$ 和 $\Psi(\sigma\Phi)$ 都在 $\sigma\tau$ 下自共轭，于是我们可以在定理 36 的上述对偶形式中互换 R_Ψ 与 $R_{\sigma\tau\Psi}$，以及 $R_{\sigma\Psi}$ 与 $R_{\tau\Psi}$。

(3.9) $$A_1 R_\Psi A_2 \Leftrightarrow \sigma A_1 R_{\sigma\Psi} \sigma A_2 \Leftrightarrow \sigma' A_1 R_{\sigma\Psi} \sigma' A_2 \Leftrightarrow \sigma\sigma' A_1 R_\Psi \sigma\sigma' A_2$$

$$\Leftrightarrow \tau A_1 R^{Op}_{\Psi} \tau A_2 \Leftrightarrow \sigma\tau A_1 R^{Op}_{\sigma\Psi} \sigma\tau A_2 \Leftrightarrow \sigma' \tau A_1 R^{Op}_{\sigma\Psi} \sigma' \tau A_2 \Leftrightarrow \sigma\sigma' \tau A_1 R^{Op}_{\Psi} \sigma\sigma' \tau A_2$$

现在假设 σ_S 除了是一个对合之外，还是 R_S 上的关系反同态。如果 Φ 是一组关系（反）同态，那么根据注释（26）， $\sigma\tau\Phi$ 也是一组关系（反）同态，因此完整集合 $\Psi(\Phi)$ 也是一组关系（反）同态。同理， $\sigma\Phi$、 $\tau\Phi$、 $\Psi(\sigma\Phi)$ 是关系反同态（同态）的集合。最后注意， Φ、 $\sigma\tau\Phi \subseteq \Psi(\Phi)$ 和 $\sigma\Phi$、 $\tau\Phi \subseteq \sigma\Psi(\Phi)\sigma\tau$。根据注释 30，如果这些关系中任意一个成立，我们就可以用任意子集替代完整集合，例如，由 $A_1 R_\Psi A_2$ 可以推出 $\sigma\sigma' A_1 R_\Phi \sigma\sigma' A_2$。

当 A_1， A_2 是 $\tau_{ST}\tau_T$ 的函数同态时， $\sigma'_{(ST)T} A_{(ST)T} = A \circ \tau_{ST}$ 与 $\tau_{(ST)T} A_{(ST)T} = \tau_T \circ A$ 之间通常不存在必然的关系。不过，当 A 是从 τ_{ST} 到 τ_T 的函数同态时，情况就有所不同；也就是说，它是从代数结构 (ST, τ_{ST}) 到 (T, τ_T) 的同态，即 $A(\tau_{ST}\phi) = \tau_T(A\phi)$

引理37。 $\sigma'_{(ST)T} = \tau_{(ST)T}$ 从 τ_{ST} 到 τ_T的函数同态

证明。 根据注记， 27 $A_{(ST)T}$是函数同态意味着 $A \circ \tau_{ST} = \tau_T \circ A$。于是

$$\sigma'_{(ST)T}(A) = A \circ \tau_{ST} = \tau_T \circ A = \tau_{(ST)T}(A)$$

□

当36 中 A_1， A_2 是函数同态时，定理的对偶形式可简化为：

$$A_1 R_\Psi A_2 \Leftrightarrow \sigma A_1 R_{\sigma\Psi} \sigma A_2 \Leftrightarrow \tau A_1 R_{\tau\Psi} \tau A_2 \Leftrightarrow \sigma\tau A_1 R_{\sigma\tau\Psi} \sigma\tau A_2 \tag{3.10}$$
$$\Leftrightarrow \tau A_1 R_\Psi^{Op} \tau A_2 \Leftrightarrow \sigma\tau A_1 R_{\sigma\Psi}^{Op} \sigma\tau A_2 \Leftrightarrow A_1 R_{\tau\Psi}^{Op} A_2 \Leftrightarrow \sigma A_1 R_{\sigma\tau\Psi}^{Op} \sigma A_2$$

合并情形 最后，我们来考察这两种特殊情形。于是，我们得到（3.10）的简化等价式，不过再加上 $\sigma\tau\Psi = \Psi$和 $\sigma\Psi = \tau\Psi$可得：

$$A_1 R_\Psi A_2 \Leftrightarrow \sigma A_1 R_{\tau\Psi} \sigma A_2 \Leftrightarrow \tau A_1 R_{\tau\Psi} \tau A_2 \Leftrightarrow \sigma\tau A_1 R_\Psi \sigma\tau A_2 \tag{3.11}$$
$$\Leftrightarrow \tau A_1 R_\Psi^{Op} \tau A_2 \Leftrightarrow \sigma\tau A_1 R_{\tau\Psi}^{Op} \sigma\tau A_2 \Leftrightarrow A_1 R_{\tau\Psi}^{Op} A_2 \Leftrightarrow \sigma A_1 R_\Psi^{Op} \sigma A_2$$

示例 我们所建立的理论有相当广泛的应用，但这里将给出一个简单示例，该示例将在第 7 节中派上用场。

设 S， T为两个实区间，它们具有关系 R_S， R_T，且二者均为 $'\leq'_{\mathbb{R}}$ 序关系的适当子集。设 σ_S 是 S 上的任意对合，且是 $\leq$的反态射，即对于 S中的 $s_1 \leq s_2$ ，$\sigma s_2 \leq \sigma s_1$，并设 τ_T 在 T上也具有相同性质。假设 $\Psi \subset ST$在 $\sigma\tau$下自共轭。

进一步假设 A_1, A_2 是 $(ST)T$ 中的泛函，并且将 R_T 提升到 R_Ψ 后，我们有 $A_1 R_\Psi A_2$，即对于所有 ϕ_Ψ ，都有 $A_1\phi \leq_T A_2\phi$。因此，我们可以写作 $R_\Psi = R_{\sigma\tau\Psi} = \leq_\Psi$ ，类似地也可以写作 $R_{\sigma\Psi} = R_{\tau\Psi} = \leq_{\sigma\Psi}$。这意味着我们用 $A_1 \leq_\Psi A_2$ 表示 Ψ 上的 $A_1 \leq A_2$ ，类似地，用 $A_1 \leq_{\sigma\Psi} A_2$ 表示 $\sigma\Psi$ 上的$A_1 \leq A_2$ 。于是，由 (3.9) 可知，当 $A_1 \leq_\Psi A_2$ 时，我们还有对偶结果（回想 $A_1 R^{Op} A_2 \Leftrightarrow A_2 R A_1$）：

$$\sigma A_1 \leq_{\sigma\Psi} \sigma A_2,\ \sigma' A_1 \leq_{\sigma\Psi} \sigma' A_2,\ \sigma\sigma' A_1 \leq_\Psi \sigma\sigma' A_2 \tag{3.12}$$
$$\tau A_2 \leq_\Psi \tau A_1,\ \sigma\tau A_2 \leq_{\sigma\Psi} \sigma\tau A_1,\ \sigma'\tau \leq_{\sigma\Psi} \sigma'\tau A_1,\ \sigma\sigma'\tau A_2 \leq_\Psi \sigma\sigma'\tau A_1$$

4. 伯克霍夫和中的关注点分离

4.1. 引言。 回想一下，给定一个具有值空间 $V_{Monoid} = (V, +_V)$ 的动力系统 (X, T_{XX})，我们将观测函数 ϕ_{XV} 的第 N 个伯克霍夫和定义为$S_N(\phi, x) := \sum_{r=1}^{N} \phi(T^r x)$（其中求和在 V 中进行）。正如我们所指出的，先前对这种形式的伯克霍夫和的研究，都将 ϕ 的性质与整个推理过程紧密绑定。我们的策略是将 ϕ 的作用与系统 (X, T) 的底层动力学分离。使我们能够做到这一点的关键结果是：

$$S_N(\phi, x) = (S_N \phi)x = \phi(S_N x) \tag{4.1}$$

这个恒等式的右侧使我们能够将合数伯克霍夫和 $S_N(\phi,\ x)$ 的研究分为两部分。首先，我们研究同名算子 S_N 对 x的影响。与原来的 S_N 不同，这个新构造的算子独立于 ϕ，且纯粹具有动力学性质。在第 5节中，我们利用它建立圆上轨道序列分布的理论。这项工作只需进行一次，之后所得结果便可用于任意观测函数 ϕ。

在第 6 节中，我们将研究无界观测函数的一般分类，并为一般伯克霍夫和建立一些初步估计。在第 5节中，我们将针对圆周无理旋转推导相应估计。最后，在第 8 节中，我们将应用所建立的理论，针对若干重要的特定类别观测函数的情形，为伯克霍夫和推导更具针对性的估计。

结果（4.1）或许最适合归入抽象代数中的一个结果。从本质上说，它揭示了关于一种结构性分解的一般见解；与许多此类结果一样，一旦理解便显得“显而易见”，因此也可以通过试探法更快地引出。不过，由于这一结果是我们所采用方法的基础，我们将给出两种证明：一种相对形式化的推导，以及一种基于试探法的简短证明。第一种证明篇幅长得多，但能让人更深入地理解其中发挥作用的机制。试探法则以尽可能简洁的方式得出结果，适合那些觉得结果直观、急于继续学习后续章节内容的读者。不过，两种方法之间的显著差异也有助于说明：尽管有些人可能觉得这一结果“直观”，这种直觉其实建立在相当多内化的数学工具之上。此外，与许多“抽象废话”一样，证明本身相对简单，难点在于建立恰当的定义和概念，使结果显得顺理成章。

4.2. 形式化推导。 接下来我们固定 $N \geq 0$，为简化记号，仅写作 $\sum x_r$ 来表示形式和 $x_1 + x_2 \ldots + x_N$（其中 $+$ 是结合的二元运算，但不一定可交换）。

回顾三种普适构造

给定集合 X，Y，Z，则 XY 是从 X 到 Y 的函数集 $\phi_{XY} := x_X \mapsto (\phi x)_Y$，而 $(X \times Y)Z$ 是双函数集（两个自变量的函数）$f := (x,\ y) \mapsto (f(x,\ y))_Z$。

C1: 由集合 X，我们可以通过 $X^* = (X^*, +_{X^*})$ 构造克莱尼星（或自由幺半群） X^*，其中 X^* 是 $k \geq 0$ 的形式和集合 $x_1 + x_2 \ldots + x_k$，而 $+$ 是形式和的连接（以空和作为

单位元）。我们将 X 视为 X^* 的子集，方法是将 x_X 视为长度为 1 的形式和。请注意，这里的“自由”是指没有关系，也就是说 $\sum_{r=1}^{m} x_r = \sum_{r=1}^{n} x_r'$ 表示 $m = n$ 和 $x_r = x_r'$。我们将用 $\sum^* x_r$ 表示形式和 $\sum_{r=1}^{N} x_i$ （回想一下， N 是固定的）。

C2: 对于一个元素 x_X，我们可以构造 x_X 的拉回函数（或泛函）$x_{(XY)Y}$： $x\phi = \phi x$，对每个 ϕ_{XY} 都成立。

C3: 对于一个双函数 $f_{(X\times Y)Z}$，我们可以构造两个柯里化函数 $f_X^{c1}{}_{(YZ)} := x \mapsto (y \mapsto f(x, y))$，使得 $(fx)(y) = f(x, y)$；以及 $f_Y^{c2}{}_{(XZ)} := y \mapsto (x \mapsto f(x, y))$，使得 $(fy)(x) = f(x, y)$。

我们为 Y 配备一个二元运算 $+_Y$，即双函数集合 $(Y \times Y)Y$ 中的一个元素，使得 $Y = (Y, +_Y)$ 构成一个半群。回想一下，我们总可以在必要时添加一个单位元，将半群变成幺半群，因此假设 Y 是一个幺半群。

C4: 由 $+_Y$，我们构造出定义在 XY 上的拉回（二元）算子 $(+_Y)_{XY}$，其定义为 $(\phi_1 +_Y \phi_2)x := \phi_1 x +_Y \phi_2 x$。我们将 $(XY, +_Y)$ 称为拉回幺半群。我们用 $\sum^Y \phi_r$ 表示利用拉回 $+_Y$ 在 XY 中求和。

注意，现在我们在 XY 上构造了两个幺半群，即自由幺半群 $((XY)^*, +_{(XY)^*})$ 和拉回幺半群 $(XY, +_{XY})$。$(XY)^*$ 的一般元素分别具有 $\left(\sum^* \phi_r\right)_{(XY)^*}$ 和 $\left(\sum^Y \phi_r\right)_{XY}$ 的形式。

C5: 给定底集 XY 上的两种幺半群构造 $(XY)^*$ 和 XY，我们构造自然同态 $\theta_{(XY)^*(XY)}$，定义为 $\theta\left(\sum^* \phi_r\right) := \sum^Y \phi_r$。该同态是满射，但通常不是单射。这也使我们能够定义 $\left(\sum^* \phi_r\right) x := \left(\sum^Y \phi_r\right) x = \sum(\phi_r x)$。一个重要情形是 $Y = W^*$，即 Y 已经是自由幺半群。此时，自然同态为 $\left(\sum^* \phi_r\right)_{(XY)_*} \mapsto \sum^* \phi_r$ 现在它是一个同构，即 $(XW^*)^* \cong XW^*$

C6: 最后，给定一个集合函数 ϕ_{XY}，我们构造幺半群同态 ϕ_{X^*Y}： $= \left(\sum^* x_i\right) \mapsto \sum(\phi x_i)$。注意，这一定义良好，因为 X^* 是自由的。如果不是这样， ϕ_{X^*Y} 可能是多值的（即不再严格是一个函数）。

定理 38. 设 X, Y 为集合，且 $Z = (Z, +_Z)$ 为一个幺半群，则对于任意一组双射函数 f_r，属于 $(X\times Y)Z$，都有 $\left(\sum^* f_r\right)(x, y) = \left(\left(\sum^* f_r^{c1}\right)(x)\right) y = x\left(\left(\sum^* f_r^{c2}\right)(y)\right)$

证明。 $\left(\sum^* f_r\right)(x, y) =_{C5} \left(\sum^Z f_r\right)(x, y) =_{C4} \sum f_r(x, y) =_{C3} \sum\left(\left(f_r^{c2} y\right)(x)\right) =_{C2} \sum\left(x\left(f_r^{c2} y\right)\right) =_{C5} x\left(\sum^*\left(f_r^{c2} y\right)\right) =_{C5} x\left(\left(\sum^* f_r^{c2}\right) y\right)$ □

推论 39。 给定一个动力系统 (X, T_{XX}) 及一个值系统 $(V, +_V)$，有 $S_N(\phi, x) = (S_N\phi) x = \phi(S_N x)$

证明。由 T 我们构造出 $T_{(\Phi\times X)V}(\phi, x) := \phi(Tx)$。由该定理可得 $\left(\sum^* T_r\right)(\phi, x) =_{Thm} \phi\left(\left(\sum^* T_r^{c2}\right)(x)\right) =_{C6} \sum \phi\left(T_r^{c_2} x\right)$。现在 $\phi\left(T_r^{c_2} x\right) =_{C2} \left(T_r^{c_2} x\right) \phi =_{C3} T_r(\phi, x) =_{\text{def}} \phi(Tx)$，因此 $\sum \phi\left(T_r^{c_2} x\right) = \sum \phi(T_r x) =_{C6} \phi\left(\sum^*(T_r x)\right) =_{C5} \phi\left(\left(\sum^* T_r\right) x\right)$。

现在令 $T_r = T^r$ 与 $S_N = \sum^* T_{XX}^r$, $S_N = \sum^*(T^r)_{(\Phi\times X)V}$·

另一种形式给出 $S_N(\phi, x) = (S_N\phi)x$ 其中 S_N 是 $\Phi\Phi^*$，但在 $\sim$ 下，这变为$\Phi\Phi$，即 $S_N\phi$ 可以简单地视为另一个观测函数。□

4.3. **试探法证明**。定义 $S_N x := \sum_{r=1}^{N} T^r x$ 为形式和，并且 $\phi(\sum_{r=1}^{N} x_r) := \sum_{r=1}^{N} \phi(x_r)$ 那么 $\phi(S_N x) = \sum_{r=1}^{N} \phi(T^r x) = S_N(\phi, x)$

5. 圆上的轨道片段分布

给定一个动力系统 (X, T)，我们现在发展上一节引入的轨道片段$S_N x$: $= \sum_{r=1}^{N} T^r x$ 理论，但具体针对 T 是圆周旋转 R_α 次的情形。此时，对于圆周上的点 $x_{\mathbb{T}}$，我们有 $S_N x = \sum_{r=1}^{N} T^r x = (T^r x)_{r=1}^{N} = (x +_{\mathbb{T}} r\alpha)_{r=1}^{N}$（其中 $+_{\mathbb{T}}$ 表示圆上的加法）。注意，我们会发现，在形式和符号表示$\sum_{r=1}^{N} T^r x$ 与序列符号表示 $(T^r x)_{r=1}^{N} = (x +_{\mathbb{T}} r\alpha)_{r=1}^{N}$之间切换很有用。

轨道 $(r\alpha)_{r=1}^{N} = (\alpha,\ 2\alpha,\ 3\alpha \ldots,\ N\alpha)$ 的分布作为一个集合来看时，经典上已有充分研究，也是均匀分布的主要例子。本节转而研究轨道作为序列时的分布。这会引入一些额外且颇为优美的结构。在后续章节中，我们将利用这种结构来推导非遍历伯克霍夫和的估计。不过，本节的结果本身似乎也颇具意义。

5.1. 准周期分解。引言／动机 直观地说，如果 α 和β 彼此“接近”，那么圆周上的点 x 在旋转R_α 和 R_β 作用下的轨道，在足够短的初始轨道片段内会始终彼此接近。我们将这一概念精确化。若 $\frac{p_r}{q_r}$ 是 α的一个渐近分数，则我们知道（见 2.1） $\alpha - \frac{p_r}{q_r} = (-1)^r$，因此，点 t–次的轨道在 x 作用下经R_α、 $R_{\frac{p_r}{q_r}}$旋转后，彼此相距 $\left\| t\alpha - t\frac{p_r}{q_r} \right\| = \left\| \frac{t}{q_r q'_{r+1}} \right\|$。此外，对于 $1 \le t \le q_r$，有 $0 < (-1)^r(t\alpha - \frac{tp_r}{q_r}) = \frac{t}{q_r q'_{r+1}} \le \frac{1}{q'_{r+1}} < \frac{1}{q_r}$。但由于序列 $(tp_r)_{t=1}^{q_r}$ 只是 $(u)_{u=1}^{q_r}$模 q_r 的一个置换，这说明轨道点 $\{t\alpha\}_{t=1}^{q_r}$ 被圆周划分“分隔”开来，该划分由点 $(\frac{u}{q_r})_{u=1}^{q_r}$定义：换言之，对每个 $1 \le u \le q_r$，划分区间 $(\frac{u-1}{q_r}, \frac{u}{q_r})$ 中恰好包含一个轨道点 $t\alpha$。回想一下，我们将每个 q_r 称为α的一个准周期。上述讨论启发我们将长度为 N 的初始轨道片段–分解为若干个拟周期长度的子片段。随后，我们将依据上述观察，把长度为 q_r的子片段与q_r的有理（周期）轨道联系起来。奥斯特罗斯基表示（见 2.5）将用于给出这一分解的精确形式。

迄今为止我们所述的是一种由 Koksma(##paper) 提出、后由 Herman(##paper) 进一步发展的经典策略。不过，我们现在引入两个新要素：

(1) 以往的方法直接用于分解所研究的伯克霍夫和。然而，我们的策略是将伯克霍夫和本身与无理旋转的底层动力学解耦。这是一个

重要的概念性区别，之后将证明其价值。为描述轨道的分解而非标量和，这种做法需要稍多一些理论和符号表示。

(2) 以往的方法要求伯克霍夫和中的求和函数具有有界变差。这是因为周期轨道可以自由移动，使其从某个准周期段的起点开始。为了研究无界函数，我们不得不改用锚定在同一个固定初始点上的周期轨道。这需要更多分析，但也让我们更深入地理解初始轨道片段中各点的分布。

轨道片段的奥斯特罗斯基分解 已知 α，奥斯特罗斯基表示（参见 2.5） $OR_\alpha(N)$ 为我们提供了一种将整数 $N \geq 0$ 表示为 α 的准周期之和的典范方法，我们将其记作 $N = \sum_{r=0}^{n} b_r q_r$。稍加注意符号表示，我们便可据此导出长度为 N 的轨道片段的相应典范分解，将其分解为若干准周期长度的片段。

我们首先介绍一种根据 N 的奥斯特罗斯基表示来表示其他整数 M 的方法:

定义 40 （奥斯特罗斯基三元组）。 设 α, N 固定，且 N 关于 α 的奥斯特罗斯基表示为 $OR_\alpha(N) = \sum_{r=0}^{n} b_r q_r$。 如果 $M = \sum_{u=r+1}^{n} b_u q_u + sq_r + t$，则称 (r, s, t) $\mathbb{Z}^3$ 是表示整数 $M_{\mathbb{Z}}$ （关于 α, N）的奥斯特罗斯基三元组。为方便起见，我们将使用同名符号表示法 rst ，同时表示三元组 (r, s, t) 和其所表示的整数 M，从而可以写作 $M = rst = \sum_{u=r+1}^{n} b_u q_u + sq_r + t$。

根据定义可知 $rst = rs0 + t = r00 + sq_r + t = \sum_{u=r+1}^{n} b_u q_u + sq_r + t$。特别地，$n00 = 0$、 $n01 = 1$、$(-1)00 = N$，且 $000 = \sum_{u=1}^{n} b_u q_u = N - b_0 q_0 = N - b_0$。对于 $0 \leq r \leq n-1$， $r00 = b_n q_n + b_{n-1} q_{n-1} \ldots + b_{r+1} q_{r+1}$，因此当 r 从 n 减小到 -1 时，rst 会增大 。还需注意，一般而言， M 可以由关于 N, α 的多个奥斯特罗斯基三元组表示；不过，我们可以如下定义一种特定表示。

定义 41. 对于 $1 \leq M \leq N$，我们将表示 M、由 $r = \min\{k : k00 < M\}$,$s = \left\lfloor \frac{M-1-r00}{q_r} \right\rfloor$, $t = M - rs0$ 定义的唯一 Ostrowski 三元组称为 M （关于 N， α）的 Ostrowski 三元组。对于 $M = 1..N$，我们称 M 的 Ostrowski 三元组为 (α, N) 的一个典范三元组。

注意，如果 rst 是一个典范三元组，那么根据定义， $sq_r \leq M - 1 - r00$给出 $t \geq 1$。特别地，容易看出，对于典范三元组，我们有$0 \leq r \leq n$, $0 \leq s \leq b_r - 1 < a_{r+1}$， $1 \leq t \leq q_r$，且与 $1 \leq rst \leq N$。 N 本身由典范三元组 $= 0(b_n - 1)q_n$ 表示，而 $rs0$ 绝不是一个典范三元组（因为 $t \geq 1$）。

现在我们可以将轨道片段 $S_N(x_0)$ 分解为长度为拟周期的片段。如果 $M = rst$ 我们采用等价的符号表示 $x_M = T^M x_0 = T^{rst} x_0 = x_{rst}$。

定义 42 (Ostrowski 分解)。 给定无理数 α 、 $N \geq 0$ 和动力系统 (X, T)，我们将轨道片段 $S_N(x_0) = \sum_{u=1}^{N} T^u x_0 = \sum_{u=1}^{N} x_u$ 的奥斯特罗斯基分解定义为反向形式和 $S_N(x_0) =$

$\sum_{r=0}^{n} S_{b_r q_r}(x_{r00})$。我们进一步将每个 $S_{b_r q_r}(y)$ 分解为长度为 q_r 的 b_r 个片段，从而得到扩展奥斯特罗斯基分解 $S_N(x_0) = \sum_{r=0}^{n} \left(\sum_{s=0}^{b_r-1} S_{q_r}(x_{rs0}) \right)$。

回想 $n00 = 0$，我们可以将其更明确地写成

$$\begin{aligned} S_N(x_0) &= S_{b_n q_n}(x_0) + S_{b_{n-1} q_{n-1}}(x_{b_n q_n}) + S_{b_{n-2} q_{n-2}}(x_{b_n q_n + b_{n-1} q_{n-1}}) + \dots S_{b_0 q_0}(x_{N - b_0 q_0}) \\ &= S_{q_n}(x_{n00}) + S_{q_n}(x_{n10}) + S_{q_n}(x_{n20}) \dots + S_{q_n}(x_{n(b_n-1)0}) \\ &+ S_{q_{n-1}}(x_{(n-1)00}) + S_{q_{n-1}}(x_{(n-1)10}) + S_{q_{n-1}}(x_{(n-1)20}) \dots + S_{q_{n-1}}(x_{(n-1)(b_{n-1}-1)0}) \\ &\vdots \\ &+ S_{q_0}(x_{000}) + S_{q_0}(x_{010}) + S_{q_0}(x_{020}) \dots + S_{q_0}(x_{0(b_n-1)0}) \end{aligned}$$

注意，若 $b_r = 0$，对应的行为空。

另请注意，$0s0 = (N - b_0 q_0) + s + 0$ 且 $q_0 = 1$，因此最后一行可简化为 $x_{001} + x_{011} + \dots + x_{0(b_n-1)1} = x_{(N-b_0)+1} + x_{(N-b_0)+2} + \dots + x_{N}$。

5.2. 无理旋转的应用。若 T 是圆上的无理旋转 R_α，则有 $T^M x_0 = \{x_0 + M\alpha\}$，因此若 $M = rst$，则有 $x_{rst} = \{x_0 + (rst)\alpha\}$。特别地，我们将记作 $\alpha_{rst} := \{(rst)\alpha\}$，此时奥斯特罗斯基分解为 $S_N(x_0) = \sum_{r=0}^{n} \sum_{s=0}^{b_r-1} S_{q_r}(x_0 + \alpha_{rs0})$，而 $S_{q_r}(x_0 + \alpha_{rs0})$ 是点序列 $(\{x_0 + \alpha_{rst}\})_{t=1}^{q_r}$。现在我们可以将讨论扩展到奥斯特罗斯基分解中的每个轨道片段 S_{q_r}。在第（5.1）节中，我们引入了借助拟周期划分来追踪 R_α 下轨道的准周期片段这一概念。我们引入一个量，以帮助衡量这种追踪行为的精确度。

定义 43（跟踪误差）。我们将 α_{rst} 的跟踪误差 $(\epsilon_{rst})_{\mathbb{R}}$ 定义为有符号实数

$$\epsilon_{rst} = (-1)^r \alpha_{r00} + \left(\frac{s}{q'_{r+1}} + \frac{t}{q_r q'_{r+1}} \right)$$

我们稍后将看到，跟踪误差 ϵ_{rst} 是圆周上的点 α_{rst} 到圆周上的点 $t\frac{p_r}{q_r}$ 之间带符号的最短距离。我们的目标是推导出界，证明这一误差始终足够小，尽管此时我们甚至无法排除 $|\epsilon_{rst}| > 1$。不过，我们可以立即观察到，对于 $r = n$，有 $\alpha_{n0t} = t\alpha$ 因此，正如我们之前的讨论（5.1）所述，对于 $t \in 1..q_n$，有 $0 < \epsilon_{n0t} = (-1)^n \left(t\alpha - t\frac{p_n}{q_n} \right) \leq \frac{1}{q'_{n+1}} < \frac{1}{\alpha_{n+1} q_n}$。。

一般情形更为复杂，因为我们必须考虑并非从原点开始的准周期片段所产生的影响。我们首先证明，实际上可以通过以下简单结果从 ϵ_{rst} 的定义中恢复 α_{rst}：

命题44。$\alpha_{rst} = \left\{ t\frac{p_r}{q_r} + (-1)^r \epsilon_{rst} \right\}$

证明。 根据定义 $\alpha_{rst} = \{\alpha_{r00} + (sq_r + t)\alpha\} = \alpha_{r00} + (sq_r + t)\alpha + M$ 对于某个整数 M。但是 $\alpha = \frac{p_r}{q_r} \pm \frac{(-1)^r}{q_r q'_{r+1}}$ 因此 $\alpha_{rst} = \alpha_{r00} + (-1)^r \left(\frac{s}{q'_{r+1}} + \frac{t}{q_r q'_{r+1}} \right) + t\frac{p_r}{q_r} + M = (-1)^r \epsilon_{rst} + t\frac{p_r}{q_r} + M$，结论由此得出，因为 $\alpha_{rst} = \{\alpha_{rst}\}$。□

现在我们分别考察 ϵ_{rst} 的两个组成部分，即 $(-1)^r \alpha_{r00}$ 和 $\frac{s}{q'_{r+1}} + \frac{t}{q_r q'_{r+1}}$。我们先从后者开始，因为它比较简单。

引理45. 对于典范的 rst，我们有 $0 < \frac{s}{q'_{r+1}} + \frac{t}{q_r q'_{r+1}} \leq \frac{s+1}{q'_{r+1}} < \frac{1}{q'_r}$

证明. 对于典范的 rst，我们有 $0 \leq s \leq b_r - 1$ 和 $1 \leq t \leq q_r$，因此 $0 < \frac{s}{q'_{r+1}} + \frac{t}{q_r q'_{r+1}} \leq \frac{s+1}{q'_{r+1}} \leq \frac{b_r}{q'_{r+1}} \leq \frac{a_{r+1}}{q'_{r+1}} < \frac{a'_{r+1}}{q'_{r+1}} = \frac{1}{q'_r}$ □

现在我们来考察项 α_{r00}。回顾定义 $\alpha_{r00} = \left\{\sum_{u=r+1}^{n} b_u q_u \alpha\right\}$。我们可能会预期这个和能够在 $[0, 1)$ 内取到很大范围的值，但幸运的是，就我们的目的而言，事实证明它受到出乎意料的严格限制，而这种刚性正是本节的基础性结果。

引理46. 若 $b_r \neq 0$ 则 $\|\alpha_{r00}\| < \frac{1}{q'_{r+1}}$，更精确地说 $\frac{-1}{q'_{r+1}} + \frac{1}{q'_{r+2}} < (-1)^r \{\{\alpha_{r00}\}\} < \frac{1}{q'_{r+2}}$

证明. 对于 $0 \leq r \leq n$，我们有 $\alpha_{r00} = \sum_{u=r+1}^{n} b_u q_u \alpha = \sum_{u=r+1}^{n} b_u p_u + \sum_{u=r+1}^{n} \frac{(E_u = O_u)}{q'_{u+1}}^{b_u}$。因此

$$\{\{\alpha_{r00}\}\} = \left\{ \left\{ \sum_{u=r+1}^{n} \frac{E_u b_u}{q'_{u+1}} - \sum_{u=r+1}^{n} \frac{O_u b_u}{q'_{u+1}} \right\} \right\} \tag{5.1}$$

现在我们来估计右侧的偶数项和奇数项求和。我们主要会用到这样一个事实：$b_u \leq a_{u+1}$ 但还需作一项重要的改进。回顾一下（引理 18）：若 $b_r \neq 0$ 那么 $b_{r+1} < a_{r+2}$ 于是我们有 $0 \leq \sum_{u=r+1}^{n} \frac{E_u b_u}{q'_{u+1}} \leq \left(\sum_{u=r+1}^{n} \frac{E_u a_{u+1}}{q'_{u+1}} \right) - \frac{E_{r+1}}{q'_{r+2}} = \left(\sum_{u=r+1+E_r}^{n-O_n} \frac{E_u a_{u+1}}{q'_{u+1}} \right) - \frac{O_r}{q'_{r+2}}$，以及 $0 \leq \sum_{u=r+1}^{n} \frac{O_u b_u}{q'_{u+1}} \leq \left(\sum_{u=r+1}^{n} \frac{O_u a_{u+1}}{q'_{u+1}} \right) - \frac{O_{r+1}}{q'_{r+2}} = \left(\sum_{u=r+1+O_r}^{n-E_n} \frac{O_u a_{u+1}}{q'_{u+1}} \right) - \frac{E_r}{q'_{r+2}}$。现在我们来估计关于 a_u 的求和。由于 $\frac{a_{u+1}}{q'_{u+1}} < \frac{1}{q'_u}$，并考虑到 r 的奇偶性，n 我们可以将这些求和进一步化简为：

$$\sum_{u=r+1}^{n} \frac{E_u a_{u+1}}{q'_{u+1}} < \sum_{u=r+1+E_r}^{n-O_n} \frac{E_u}{q'_u} < \frac{2}{q'_{r+1+E_r}} \tag{5.2}$$

$$\sum_{u=r+1}^{n} \frac{O_u a_{u+1}}{q'_{u+1}} < \sum_{u=r+1+O_r}^{n-E_n} \frac{O_u}{q'_u} < \frac{2}{q'_{r+1+O_r}} \tag{5.3}$$

现在 $r+1+E_r \geq 2$ 且 $q_2' > 2$，因此 $\sum_{u=r+1}^{n} \frac{E_u a_{u+1}}{q'_{u+1}} = \left\{ \sum_{u=r+1}^{n} \frac{E_u a_{u+1}}{q'_{u+1}} \right\}$。

类似地，对于 $r \geq 1$，有 $r+1+O_r \geq 2$，因此 $\sum_{u=r+1}^{n} \frac{O_u a_{u+1}}{q'_{u+1}} = \left\{ \sum_{u=r+1}^{n} \frac{O_u a_{u+1}}{q'_{u+1}} \right\}$，除非 $r=0$ 且 $q_1' < 2$。但在后一种情况下，$q_1 = 1$，因而 $\alpha > \frac{1}{2}$，这意味着 $b_0 = 0$。因此，只要 $b_r \neq 0$，就有 $\sum_{u=r+1}^{n} \frac{O_u a_{u+1}}{q'_{u+1}} = \left\{ \sum_{u=r+1}^{n} \frac{O_u a_{u+1}}{q'_{u+1}} \right\}$。现在我们知道这两个和都小于 1。

现在回忆一下 $\alpha = \frac{p_u}{q_u} + \frac{(-1)^u \theta}{q_u q'_{u+1}}$，于是 $\frac{1}{q'_{u+1}} = (-1)^u (q_u \alpha - p_u)$。因此 $\frac{a_{u+1}}{q'_{u+1}} = (-1)^u a_{u+1} (q_u \alpha - p_u) = (-1)^u (q_{u+1} - q_{u-1}) \alpha - (-1)^u a_{u+1} p_u$。对所有偶数 u 求和，得到望远镜求和：

$$\sum_{u=r+1}^{n} \frac{E_u a_{u+1}}{q'_{u+1}} = \left\{ \sum_{u=r+1}^{n} \frac{E_u a_{u+1}}{q'_{u+1}} \right\} = \left\{ \sum_{u=r+1+O_{r+1}}^{n-O_n} E_u \left(q_{u+1} - q_{u-1} \right) \alpha \right\} = \left\{ \left(q_{n+1-O_n} - q_{r+O_{r+1}} \right) \alpha \right\} = \left\{ -\frac{}{q'_{n+}} \right.$$

再次利用 $r+1+E_r \geq 2$，得到 $\frac{1}{q'_{r+1+E_r}} < \frac{1}{2}$，因此 $0 \leq \sum_{u=r+1}^{n} \frac{E_u b_u}{q'_{u+1}} < \frac{1}{q'_{r+1+E_r}} - \frac{E_{r+1}}{q'_{r+2}} < \frac{1}{2}$。对奇数 u 按照相同的论证，可得 $0 \leq \sum_{u=r+1}^{n} \frac{O_u b_u}{q'_{u+1}} < \frac{1}{q'_{r+1+O_r}} - \frac{O_{r+1+O_r}}{q'_{r+2}} < \frac{1}{2}$，但仍需附带条件 $b_r \neq 0$

现在我们可以将这些结果代入（5.1），从而得到（对于 $b_r \neq 0$）：

$$-\frac{1}{2} < \left(-\frac{1}{q'_{r+1+O_r}} + \frac{E_r}{q'_{r+2}} \right) < \left(-\sum_{u=r+1}^{n} \frac{O_u b_u}{q'_{u+1}} \right) < \{\{\alpha_{r00}\}\} < \left(\sum_{u=r+1}^{n} \frac{E_u b_u}{q'_{u+1}} \right) < \left(\frac{1}{q'_{r+1+E_r}} - \frac{O_r}{q'_{r+2}} \right) < \frac{1}{2}$$

容易验证，这只是对定理结论的另一种表述。 □

现在我们结合本节前面的引理，得到：

引理 47。对于 rst 典范的，ϵ_{rst} 具有下界 ϵ_{rst}^L 和上界 $\epsilon_{rst}^U = \epsilon_{rst}^L + \frac{1}{q'_{r+1}}$，分别满足：

$$-\frac{1}{q'_{r+1}} < \left(\frac{s-1}{q'_{r+1}} + \frac{1}{q'_{r+2}} \right) < \left(\frac{(s-1)q_r + t}{q_r q'_{r+1}} + \frac{1}{q'_{r+2}} \right) = \epsilon_{rst}^L < \epsilon_{rst} < \epsilon_{rst}^U = \left(\frac{sq_r + t}{q_r q'_{r+1}} + \frac{1}{q'_{r+2}} \right) \leq \left(\frac{s+1}{q'_{r+1}} + \frac{1}{q'_{r+}} \right.$$

.

特别地，$|\epsilon_{rst}| < \frac{1}{q'_r}$ 且若 $s \neq 0$ $\epsilon_{rst} > 0$。此外，对于 $r = n$ $\epsilon_{rst} = \frac{sq_r + t}{q_r q'_{r+1}} > 0$，以及对于 $r < n$，$s = 0$，$t = q_r$ $\epsilon_{rst} > \frac{1}{q'_{r+2}} > 0$

证明。利用 $0 \leq s \leq b_r - 1$，$1 \leq t \leq q_r$ 对于 rst 典范，得到 $0 < \frac{sq_r + t}{q_r q'_{r+1}} \leq \frac{s+1}{q'_{r+1}}$。此外 $\frac{1}{q'_{r+2}} + \frac{s+1}{q'_{r+1}} \leq \frac{1}{q'_{r+2}} + \frac{a_{r+1}}{q'_{r+1}} = \frac{1}{q'_r}$。因此 $\frac{-1}{q'_{r+1}} < \epsilon < \frac{1}{q'_r}$，而对于 $q_r \geq 2$，这意味着 $\frac{-1}{2} < \epsilon < \frac{1}{2}$，从而 $\epsilon_{rst} = \{\{\epsilon_{rst}\}\}$。第一个结果中的各种不等式由此得出，接下来我们讨论其余结果。对于 $r = n$，我们有

$\alpha_{n00}=0$ 因此 $\epsilon_{rst}=\frac{sq_r+t}{q_rq'_{r+1}}>0$。对于 $s\neq 0$，$\epsilon_{rst}>\frac{s-1}{q'_{r+1}}+\frac{1}{q'_{r+2}}>0$。如果 $s=0$，但$t=q_r$，$\epsilon_{rst}>\frac{(s-1)q_r+t}{q_rq'_{r+1}}+\frac{1}{q'_{r+2}}=\frac{1}{q'_{r+2}}>0$。

□

上述所有情形都可以归纳为一个简单而优雅的结果：

推论 48（奇偶对偶）。令 $l_{rst}=\left\{(-1)^r\frac{tp_r}{q_r}\right\}+\epsilon^L_{rst}$ 和 $u_{rst}=\left\{(-1)^r\frac{tp_r}{q_r}\right\}+\epsilon^U_{rst}$，则 $0<\frac{1}{q'_{r+2}}<l_{rst}=u_{rst}-\frac{1}{q'_{r+1}}$ 和 $u_{rst}\leq 1-\frac{1}{q_r}+\frac{1}{q'_r}<1(r>0)$ 以及 $u_{rst}\leq 1-\frac{1}{q'_{r+1}}<1(r=0)$。此外：

$$\begin{aligned} l_{rst}<\alpha_{rst}<u_{rst} \qquad & r \text{ even}\\ l_{rst}<\overline{\alpha_{rst}}<u_{rst} \qquad & r \text{ odd}\end{aligned}$$

证明。注意到 $\left\{(-1)^r\frac{tp_r}{q_r}\right\}\leq 1-\frac{1}{q_r}$ 并由 (47) $\epsilon^U_{rst}\leq\frac{1}{q'_r}$ 得到 $u_{rst}\leq 1-\frac{1}{q_r}+\frac{1}{q'_r}$。但是 $\frac{1}{q'_r}\leq\frac{1}{q_r}$ 对于 $r>0$，于是 $u_{rst}<1$。

对于 $r=0$，我们有 $\left\{(-1)^r\frac{tp_r}{q_r}\right\}=0$ 但现在我们有 $q'_0=q_0=1$，这并未得到所需结果。不过，根据（47），若 $r=0$ $\epsilon^U_{0st}\leq\frac{1}{q'_0}-\frac{1}{q'_1}=1-\frac{1}{q'_1}$，且$q'_1>1$ 使得 $u_{0st}<1$，于是 $u_{rst}<1$ 对任意 $r\geq 0$。现在我们考虑 l_{rst}。

如果 $\left\{\frac{tp_r}{q_r}\right\}\neq 0$，那么 $q_r>1$ 并且我们有 $\left\{(-1)^r\frac{tp_r}{q_r}\right\}\geq\frac{1}{q_r}$。由（47）可知 $\epsilon^U_{rst}>\frac{t}{q_rq'_{r+1}}+\frac{1}{q'_{r+2}}$，于是 $l_{rst}>\frac{1}{q_r}+\frac{1}{q'_{r+2}}-\frac{1}{q'_{r+1}}>\frac{1}{q'_{r+2}}>0$。

若 $\left\{\frac{tp_r}{q_r}\right\}=0$ 则 $l_{rst}=\epsilon^U_{rst}-\frac{1}{q'_{r+1}}$ 并且满足以下任一条件 $q_r=1$（进而 $t=1=q_r$）或$t=q_r$——无论哪种情况 $t=q_r$。于是 $\epsilon^U_{rsq_r}>\frac{1}{q'_{r+1}}+\frac{1}{q'_{r+2}}$ 因此 $l_{rst}>\frac{1}{q'_{r+2}}>0$。最后 $\epsilon^L_{rst}=\epsilon^U_{rst}-\frac{1}{q'_{r+1}}$ 见（47），这给出 $l_{rst}=u_{rst}-\frac{1}{q'_{r+1}}$。

第一个结果由此得出，接下来我们考察涉及 α_{rst}的结果。
回顾（44） $\alpha_{rst}=\left\{\frac{tp_r}{q_r}+(-1)^r\epsilon_{rst}\right\}$ 以及 $|\epsilon_{rst}|<\frac{1}{q'_r}$ 以及 $\epsilon^L_{rst}<\epsilon_{rst}<\epsilon^U_{rst}$
对于 $\left\{\frac{tp_r}{q_r}\right\}\neq 0$（使得 $q_r>1$） $\left\{\frac{tp_r}{q_r}+(-1)^r\epsilon_{rst}\right\}=\left\{\frac{tp_r}{q_r}\right\}+(-1)^r\epsilon_{rst}$。

对于 r，甚至可以得到 $\alpha_{rst}=\left\{\frac{tp_r}{q_r}\right\}+\epsilon_{rst}$。

如果 r 是奇数，那么
$\alpha_{rst}=1-\alpha_{rst}=1-\left(\left\{\frac{tp_r}{q_r}\right\}-\epsilon_{rst}\right)=\left\{-\frac{tp_r}{q_r}\right\}+\epsilon_{rst}$。
这两种情况下的结果均由 $\epsilon^L_{rst}<\epsilon_{rst}<\epsilon^U_{rst}$ 与u_{rst}，l_{rst}的定义得出。

若 $\left\{\begin{smallmatrix} tp_r \\ q_r \end{smallmatrix}\right\} = 0$，则有 $\left\{\begin{smallmatrix} tp_r \\ q_r \end{smallmatrix} + (-1)^r \epsilon_{rst}\right\} = \{(-1)^r \epsilon_{rst}\}$。此外还有 $u_{rst} = \epsilon^U_{rst}$，$l_{rst} = \epsilon^L_{rst}$。因此，$0 < l_{rst} = \epsilon^L_{rst} < \epsilon_{rst} < \epsilon^U_{rst} = u_{rst} < 1$，这也得出了 $\{\epsilon_{rst}\} = \epsilon_{rst}$。

当 r 为偶数时，这给出 $\alpha_{rst} = \{\epsilon_{rst}\} = \epsilon_{rst}$。

如果 r 为奇数，那么 $\alpha_{rst} = 1 - \{-\epsilon_{rst}\} = \{\epsilon_{rst}\} = \epsilon_{rst}$。

这些结果可直接得出。 □

注意，我们可以利用 $x = 1 - x$ 重写第二个不等式，从而得到关于奇数 r 的对偶结果 $l_{rst} > \alpha_{rst} > u_{rst}$。

我们现在已经深入了解了点 α_{rst} 在由点 $t\,\begin{smallmatrix} p_r \\ q_r \end{smallmatrix}$ 定义的划分中的位置，但还有一些重要的特殊情形可以进一步讨论（在考察非遍历伯克霍夫和的应用时，这些情形也很重要）。

推论 48 告诉我们，α_{rst} 始终位于$1/q_r$两侧长度为 tp_r/q_r的两个区间之一中；而在大多数情况下（$s \neq 0$或 $r = n$ 或 $t = q_r$），它位于主区间内。稍加推导，我们就能更精确地确定该区间。α_{rst}的划分区间是

定义 49. 固定 r，圆周上的点 $\begin{smallmatrix} k \\ q_r \end{smallmatrix}$ $(k = 1..q_r)$ 构成一个划分，定义了q_r 个不同的开区间，每个区间长度为 $\begin{smallmatrix} 1 \\ q_r \end{smallmatrix}$。当 $q_r = 1$时，只有这样一个点和区间；但当 $q_r > 1$ 时，每个点两侧各有一个不同的区间，我们将它们分别标记为 I_k 和 $-I_k$（点 $\begin{smallmatrix} k \\ q_r \end{smallmatrix}$ 的正向区间和负向区间），并统称为 $(-1)^u I_k$，其中 $u_{\mathbb{Z}}$。我们将 $(-1)^u I_k$具体定义为点集 $\left\{\begin{smallmatrix} k + (-1)^u \nu \\ q_r \end{smallmatrix}\right\}_{Set}$，其中 $\nu \in$ 属于 $(0,\ 1)$。

请注意，事实上，后一个定义对 $q_r = 1$ 也成立，但在这种情况下，两个区间重合（$I_k = -I_k$）。

回忆一下，对于任意整数$m_{\mathbb{Z}}$，圆周上的点 $\begin{smallmatrix} k \\ q_r \end{smallmatrix}$，$\begin{smallmatrix} k+mq_r \\ q_r \end{smallmatrix}$重合，因此（$-1$）$^u I_k =$（$-1$）$^u I_{k+mq_r}$。

正区间集合和负区间集合，是对构成该划分的同一底集区间进行标记的两种不同方式。因此，这两组标签之间存在自然双射。我们可以将其明确表述如下：

引理 50。 $(-1)^u I_k = (-1)^{u+1} I_{k+(-1)^u}$

证明。 $(-1)^u I_k = \left\{\begin{smallmatrix} k + (-1)^u \nu \\ q_r \end{smallmatrix}\right\} = \left\{\begin{smallmatrix} k+(-1)^u - (-1)^u \nu - 1 \\ q_r \end{smallmatrix}\right\} = ()() (-1)^{u+1} I_{k+(-1)^u}$。 □

引理 51. ，$\alpha_{rst} \in (-1)^r \mathrm{sgn}(\epsilon_{rst}) I_k$ 其中 $k = tp_r$ 模 q_r.

证明. 这由 $\alpha_{rst} = \left\{t\,\begin{smallmatrix} p_r \\ q_r \end{smallmatrix} + (-1)^r \epsilon_{rst}\right\}$ 与 $|\epsilon_{rst}| < \begin{smallmatrix} 1 \\ q_r \end{smallmatrix}$ 立即得出。 □

命题 52. 对于 $r \geq 0,\ p_r = (-1)^{r+1} q_{r-1}^{-1}$ 模 q_r

证明。 这可由恒等式$q_r p_{r-1} - p_r q_{r-1} = (-1)^r$对 $r \geq 0$ □ 立即推出

引理 *53.* 对于典范的 rst 以及任意整数 u，位于 $(-1)^u I_k$ 中的点 α_{rst} 恰好是满足以下条件之一的点：*(a)* $t = (-1)^{r+1} k q_{r-1}$ 模 q_r，且 $sgn(\epsilon_{rst}) = (-1)^{u+r}$；或 *(b)* $t = (-1)^{r+1}(k + (-1)^u) q_{r-1}$ 模 q_r，且 $sgn(\epsilon_{rst}) = (-1)^{u+r+1}$

证明。 由前面的 3 个引理可得 □

特殊情形——原点附近的区间

推论 54。 给定 r，使 α_{rst} 位于原点附近的区间（即 $\pm I_0$）中的典范三元组为：

(1) 对于 $(-1)^r I_0$：　$t = q_r$（对于任意 s）或 $r < n$，$s = 0$，$t = q_r - q_{r-1}$ 以及 $\mathrm{sgn}(\epsilon_{r0(q_r - q_{r-1})}) = -1$）。于是得到下界 $l_{r0(q_r-q_{r-1})} > \frac{1}{q_r} + \frac{-1}{q'_{r+1}} + \frac{1}{q'_{r+2}} > \frac{1}{2q_r}$。(2) 对于 $(-1)^{r+1} I_0$：　$t = q_{r-1} \bmod q_r$ 以及 $\mathrm{sgn}(\epsilon_{rst}) = +1$。于是得到上界 $u_{rsq_{r-1}} < 1 - \frac{a'_{r+1} - s}{q'_{r+1}}$。

证明。 对于典范的 rst，位于 $(-1)^u I_0$ 中的点 α_{rst} 恰好是满足以下任一条件的点：(a) $t = 0 \bmod q_r$ 且 $\mathrm{sgn}(\epsilon_{rst}) = (-1)^{u+r}$；或 (b) $t = (-1)^{r+1}((-1)^u) q_{r-1} \bmod q_r$ 且 $\mathrm{sgn}(\epsilon_{rst}) = (-1)^{u+r+1}$

(a) 对于 $t = q_r$，由（47）可知，始终有 $\mathrm{sgn}(\epsilon_{rst}) = +1$，因此 $u + r = 0$ 模 2 且 α_{rsq_r} 始终属于 $(-1)^r I_0$。

（b）若 $u = r$ 模 2，则可能的情况是 $\mathrm{sgn}(\epsilon_{rst}) = -1$ 与 $t = q_r - q_{r-1}$，从而在 $(-1)^r I_0$ 中得到 α_{rst}。但在这种情况下，只有当 $r < n$，$s = 0$ 时，才有可能出现 $\mathrm{sgn}(\epsilon_{rst}) = -1$。Then $l_{r0(q_r-q_{r-1})} > \frac{1}{q_r} + \left(\frac{-1}{q'_{r+1}} + \frac{q_r - q_{r-1}}{q_r q'_{r+1}} + \frac{1}{q'_{r+2}} \right) > \frac{1}{2q_r}$.

若 $u = r + 1$ 模 2，则可能的情况是 $\mathrm{sgn}(\epsilon_{rst}) = +1$ 与 $t = q_{r-1}$，从而在 $(-1)^{r+1} I_0$ 中得到 α_{rst}。但在这种情况下，只有当 $s = 0$ 时，才有可能出现 $\mathrm{sgn}(\epsilon_{rst}) \neq +1$。与 $u_{rsq_{r-1}} = \left(1 - \frac{1}{q_r}\right) + \left(\frac{sq_r + q_{r-1}}{q_r q'_{r+1}} + \frac{1}{q'_{r+2}} \right) < 1 - \frac{a'_{r+1} - s}{q'_{r+1}}$ by (48). □

6. 无界可观测量空间的分析

关于无界（且不可积）函数空间的分析尚未充分发展，因此本节将为我们的研究目的奠定一些基础。通过巴拿赫空间理论和绍德基开展泛函分析的常用方法，在这里似乎并不能立即派上用场。相反，鉴于我们从根本上关注的是对较长轨道上的函数求和，我们转而从初等积分理论中寻求帮助。尤其是，我们发现，推广有界变差和若尔当分解的思想，可以得到一类适用于我们研究的自然函数空间。

关于本节圆术语的精确定义，请参见 2.4。

6.1. **定义与基本拓扑**。 回顾一下，圆上的实值观测函数是一个（全）函数 $\phi_{\mathbb{TR}}$。我们最初可能会倾向于将无界观测函数定义为一个可以取扩展实数轴上的值 $\mathbb{R}\bigcup\{\pm\infty\}$ 的函数。然而，这并无必要；相反，出于以下原因，将无界观测函数的陪域限制为 $\mathbb{R}$ 在技术上更简单：

(1) 求和 $\sum_{i=1}^{n}\phi(x_i)$ 始终有定义（我们避免了定义 $\infty-\infty$ 的困难）。(2) 函数 $\sum_{i=1}^{n}\phi_i$ 始终有定义（同样，我们避免了定义 $\infty-\infty$ 的困难）。(3) 我们可以通过采用一个简单的约定，从偏函数导出可观测量（全函数） $\phi_{\mathbb{TR}}$ ：所得观测函数在偏函数的定义域之外取零。对于 $Y\subseteq X$ ，我们将写作 $\phi_{X\mathbb{R}}(x)=\psi_{Y\mathbb{R}}(x)$，表示 ϕ 在 Y 上与 ψ 一致，并在 Y 之外的 X 上取零。

例 55. 函数 $\phi_{\mathbb{IR}}(x)=\frac{1}{x}$ 在 $\mathbb{I}=(0,1)$ 上是定义在 $\mathbb{T}=[0,1)$ 上的偏函数，其定义域为 $(0,1)$。它延拓为观测函数 $\phi_{\mathbb{TR}}$；该函数通过 $\phi_{\mathbb{TR}}(0):=0$ 定义在整个 $[0,1)$ 上。观测函数 ϕ 无界，但在整个 $[0,1)$ 上都有定义，其陪域为 $\mathbb{R}$ （无需用无穷远点延拓 $\mathbb{R}$ ）。按照约定，当 $\frac{1}{x}$ 未定义时，我们写作 $\phi_{\mathbb{TR}}(x)=\frac{1}{x}$ ，且 $\phi(x)=0$ 。

下面对局部有界变差的处理略有不同寻常，但同样使我们能够避免一些技术上的困难。我们先将有界变差的定义推广到非闭区间：

定义 56 （区间上的有界变差）。 设 J 是实数轴或圆上的任意区间（不一定是闭区间）， $Part(J)$ 表示 J 的划分集合（即形如 $(x_i)_{i=1}^{n}$ 的有序序列，其中 $n\geq 1$）。给定一个函数 $\phi_{J\mathbb{R}}$，若 J 不是整个圆，则定义 ϕ 在 J 上的变差为 $\mathrm{Var}_J\phi=\sup_{Part(J)}\sum_{r=1}^{n-1}|\phi(x_{r+1})-\phi(x_r)|$。若 $\mathrm{Var}_J\phi$ 存在，则称 ϕ 在 J 上具有有界变差（ϕ 属于 BV）；否则称 ϕ 在 J 上具有无界变差（ϕ 属于 UBV）。若 J 是整个圆，则定义 $\mathrm{Var}_{\mathbb{T}}\phi=\sup_{Part(\mathbb{T})}\sum_{r=1}^{n}|\phi(x_{r+1})-\phi(x_r)|$ ，其中 $x_{n+1}:=x_1$。

请注意，这一定义与闭区间上以及整个圆上的经典有界变差定义一致。

例 57. 给定圆上的观测函数 $\phi x=\frac{1}{x}$ （按照我们的约定， $\phi(0)=0$），则 ϕ 在有向区间 $[\frac{1}{2},1)$ 上是有界变差的，$[\frac{1}{2},1]$ 但在 $[0,\frac{1}{2})$ 和 $(0,-1\,2)$ 上是上有界变差的。 -

现在我们给出一个简单但强有力的原理。它并非专门针对无界性，但涵盖了无界性。

定义 58 （局部化）。 给定一个拓扑空间 $(X,\mathscr{F})$，以及一个定义在 X 的开集上的命题 P。我们按如下方式导出该命题的局部形式 P_X （记作 LP_X），它定义在 X 的点上：x 在局部满足 P（即 $LP_X(x)$），当且仅当 x 有一个满足 $P_X(N_x)$ 的开邻域 $N_x\in\mathscr{F}$。特别地，如果该命题是关于函数 ϕ_{XY} 定义的，即 $P:=P(\phi_{XY})$，那么当 x 在局部满足 P（即 $LP(x)$）时，我们也称 ϕ 在 x 处局部满足 P。我们将 x 在局部满足 P 的点集记为 $LP(\phi)$。

例59. 设 $(J,\mathscr{F})$ 是实数轴的一个区间，或是赋有环境子空间拓扑的圆，并设 $\phi_{J\mathbb{R}}$ 是一个固定函数。令 $P = BV$ 为定义在每个 $K \in \mathscr{F}$ 上的命题： ϕ 在 K 上具有有界变差。则 $\phi_{J\mathbb{R}}$ 在 x_J 处具有局部有界变差（即 $LP = LBV$），当且仅当存在 x 的一个邻域 $K \in \mathscr{F}$，使得 ϕ 在其上具有有界变差。于是我们记作$LBV_J(x)$。注意，如果 ϕ 在 x处不满足 LBV，那么不存在包含 x 的 J的邻域，使得 ϕ 在其上满足 LBV；这尤其意味着， ϕ 在包含 x 的每个开区间上都具有 UBV，我们记作 $UBV(x)$。最后， $LBV_J(\phi)$ 是 J 中 ϕ 具有局部有界变差的点集，而 $UBV_J(\phi)$ 是 ϕ 具有无界变差的点集。

命题60。 给定拓扑空间 $(X,\mathscr{F})$、观测函数 $\phi_{X\mathbb{R}}$，以及定义在 X 的开集上的命题 P_X，则点集 $LP_X(\phi)$ （ ϕ 在局部满足 P 的点）是开集，其边界属于 $LP(\phi)$ 的补集； $LP(\phi)$ 是由 ϕ 在局部不满足 P 的点组成的闭集

证明。 设 $x \in LP(\phi)$，于是存在一个邻域 N_x，使得 $x \in N_x$ 且 $P(N_x)$。根据定义，存在一个开集 $O_x \in \mathscr{F}$，使得 $x \in O_x \subseteq N_x$。现在对任意 $y \in O_x$，N_x 也是 y的一个邻域；由于 $P(N_x)$，我们有 $y \in LP(\phi)$。因此$O_x \subseteq LP(\phi)$，所以 x 是 $LP(\phi)$的一个内点，而 $LP(\phi)$ 是开集。
现在，对每个 x_X， $LP(x)$都有定义，因此要么 $LP(x)$，要么!$LP(x)$。于是，满足!$LP(x)$的点构成 $LP(\phi)$的补集。由于 $LP(\phi)$是开集，其补集是闭集，而 $LP(\phi)$的边界完全包含在该补集中。□

推论61 (局部有界变差拓扑)。 在带有子空间拓扑的区间 J 中，函数 $\phi_{J\mathbb{R}}$ 在 J中局部有界变差的点 $LBV_J(\phi)$ 构成 J中的至多可数个互不相交的开区间，而这些区间在 J 中的边界具有无界变差。

证明。 将命题应用于例子59 可得， $LBV_J(\phi)$ (中满足具有局部有界变差的点的集合）是 J中的开集，因此（由命题8）它是至多可数个互不相交的开区间之并。集合 $LBV_J(\phi)$ 在 J 中的边界因而就是这些区间边界所构成的集合，而命题告诉我们，这些边界属于!$LBV(\phi)$，即它们属于 $UBV(\phi)$。

□

注意，区间 J 本身的端点在子空间拓扑中并非边界点，因此 J 的端点仍可能是 $LBV_J(\phi)$。 例如，设 $\phi x = 1/x$ 且 $J = [\frac{3}{4}, 1]$，那么 $\phi_{J\mathbb{R}}$在整个 J上（包括两个端点）都是 LBV，因此 $\bar{L}BV(\phi)$是区间 J，它在 J的子空间拓扑中是一个没有边界的开区间。对比一下 $J = [0, \frac{1}{4}]$的情形，此时$LBV(\phi)$现在是$(0, \frac{1}{4}]$，这个区间在 J中有边界点 0，且是 UBV；但是1_4 是 LBV，并且在 J中不是 $LBV(\phi)$的边界点。–
同样由推论 61 可得！ $LBV(\phi) = UBV(\phi)$，即 ϕ 在 $LBV(\phi)$ 的开区间之外的所有点（包括端点）处都具有无界变差。注意， $UBV(\phi)$ 本身可能具有正测度。例如，在 $[0,1)$ 上定义为有理数指示函数的狄利克雷观测函数处处 UBV，而 $LBV(\phi)$ 为空集。

我们将研究结果总结为以下定理：

定理 62. 对于圆或实数轴上的任意区间 J （赋予子空间拓扑），以及观测函数 $\phi_{J\mathbb{R}}$，J 可典范地分解为闭集 $UBV_J(\phi)$ 与至多可数个开子区间$\{I_k\}$ 的不交并，在这些区间上，ϕ 是 LBV。此外，记 $\phi_U = [\![x \in UBV(\phi)]\!]\,\phi, \phi_k = [\![x \in I_k]\!]\,\phi$，则有

$$\phi = \phi_U + \sum_k \phi_k \tag{6.1}$$

其中每个 ϕ_k 都是 LBV，且具有互不相交的开支集 I_k；每个 I_k 的边界（端点）都属于 $UBV(\phi)$

定义 63 （原函数）。给定区间 $I \subseteq J$，若函数 $\phi_{J\mathbb{R}}$ 在 上是原函数 I，则它在[8] 之外 I恒为零，在 I上单调，且在 I上有界（即 下确界$_I\,\phi$ 或 上确界$_I\,\phi$ 存在，或两者均存在）。若它同时具有上下界，则称为有界原函数；否则称为上有界或下有界原函数。

注：

（1）区间上的单调函数在该区间上是 LBV，因此该区间上的任意原函数在 I 上都是 LBV 的。（2）单调性约束排除了原函数为无界变差的有界函数的可能性（例如，sin $1/x$ 在 (0，1) 上）。（3）对于原函数和区间端点，我们也需要像对待任何 LBV函数一样谨慎。因此，原函数在不包含于区间内的端点处可能无界。例如，$\phi_{\mathbb{TR}}x = 1/x$ 是在 I =(0，1)上的一个下有界原函数，但在 0 处无界（其在该点的值为 0）。如果 I 包含一个端点a，那么 ϕ 在 I 的 a 处必须有界，尽管在I的 a处可能无界。例如，$\phi_{\mathbb{TR}}x = 1/x$ 也是$I = [\frac{1}{2}, 1]$上的一个有界原函数；它在 I中的 1 处有界，但在 $\mathbb{T}$中的 1 处无界。_

6.2. **一些初始函数类**。归一化函数

定义 64. 如果观测函数 ϕ 在 $UBV(\phi)$ 上满足 $\phi(x) = 0$，则称其为归一化函数。（注意，这要求 $UBV(\phi)$ 的内部为空。） ϕ 的规范化是归一化函数 $\phi^{Norm}(x) = [\![x \notin UBV(\phi)]\!]\,\phi(x)$。如果等价关系 $\phi^{Norm} = \psi^{Norm}$ 成立，则称 ϕ与 ψ 在规范化下等价。

例 65. 观测函数 $\phi x = 1/x$ 是归一化函数（因为 $UBV(\phi) = \{0\}$ 且$\phi 0 = 0$）。然而，狄利克雷函数不是归一化函数，因为它处处上有界变差，但并非处处为 0。它的规范化是零函数。

在考察伯克霍夫和 $S_N\phi = \sum_{r=1}^{N} \phi(x_0 + r\alpha)$ 时，我们主要只关注避开 ϕ 的无界点的轨道。在这些情况下，ϕ 在每个无界点处的取值不会影响伯克霍夫和，即 $S_N\phi = S_N\phi^{Norm}$。除非另有说明，以下我们均将可观测量视为已归一化。

[8]这意味着 I 包含 ϕ 在 J中的集合论支集，但不一定包含拓扑支集，因为后者是集合论支集的闭包）

注意，如果 ϕ 已归一化，那么 $\phi_U = 0$ 在（6.1）中，因此该方程可简化为 $\phi = \sum_k \phi_k$。下一节我们将研究函数 ϕ_k 的分解。

巴拿赫同余类 给定实值函数的加法群 G，令 $G_B = \{\phi : \sup|\phi| < \infty\}$ 为有界函数构成的巴拿赫空间（也是子群）。于是，G/G_B 的每个同余类都由无界函数组成，且它们的差属于 G_B。

定义 66。我们称两个可观测量 ϕ，ψ 具有有限差，如果 $\phi - \psi$ 有界，并记作 $(\phi \overset{B}{\sim} \psi)$，注意这是一种等价关系。

例 67。在 $[0,1)$ 上，很容易证明 $\pi\cot \pi x \overset{B}{\sim} \frac{1-2x}{x\,1-x}() \overset{B}{\sim} \frac{1}{\{\{x\}\}}$，~~但 $\csc \pi x \not\sim \cot \pi x$~~ 并非如此，因为当 $x \to 1$ 时它们的差是无界的。

如果 ϕ，ψ的差有界，这意味着 $S_N\phi - S_N\psi = O(N)$；进一步，如果$\oint(\phi-\psi) = 0$，那么对于几乎处处的 α，$S_N\phi - S_N\psi = O(\log N)^{2+\epsilon}$**。特别是，这意味着如果 $S_N\phi$具有超线性增长率（即大于 $O(N)$），那么 $S_N\psi$具有相同的增长率和相同的无界点集合；这种超线性增长率完全由 ϕ，ψ 在无界点处的行为决定。

现在，我们将进一步完善关于有界性的现有认识和术语，以便研究无界性。单调函数：除非另有说明，我们所说的“递增”始终指单调递增。“递减”与递增相对应，可替换下一段中的递增。

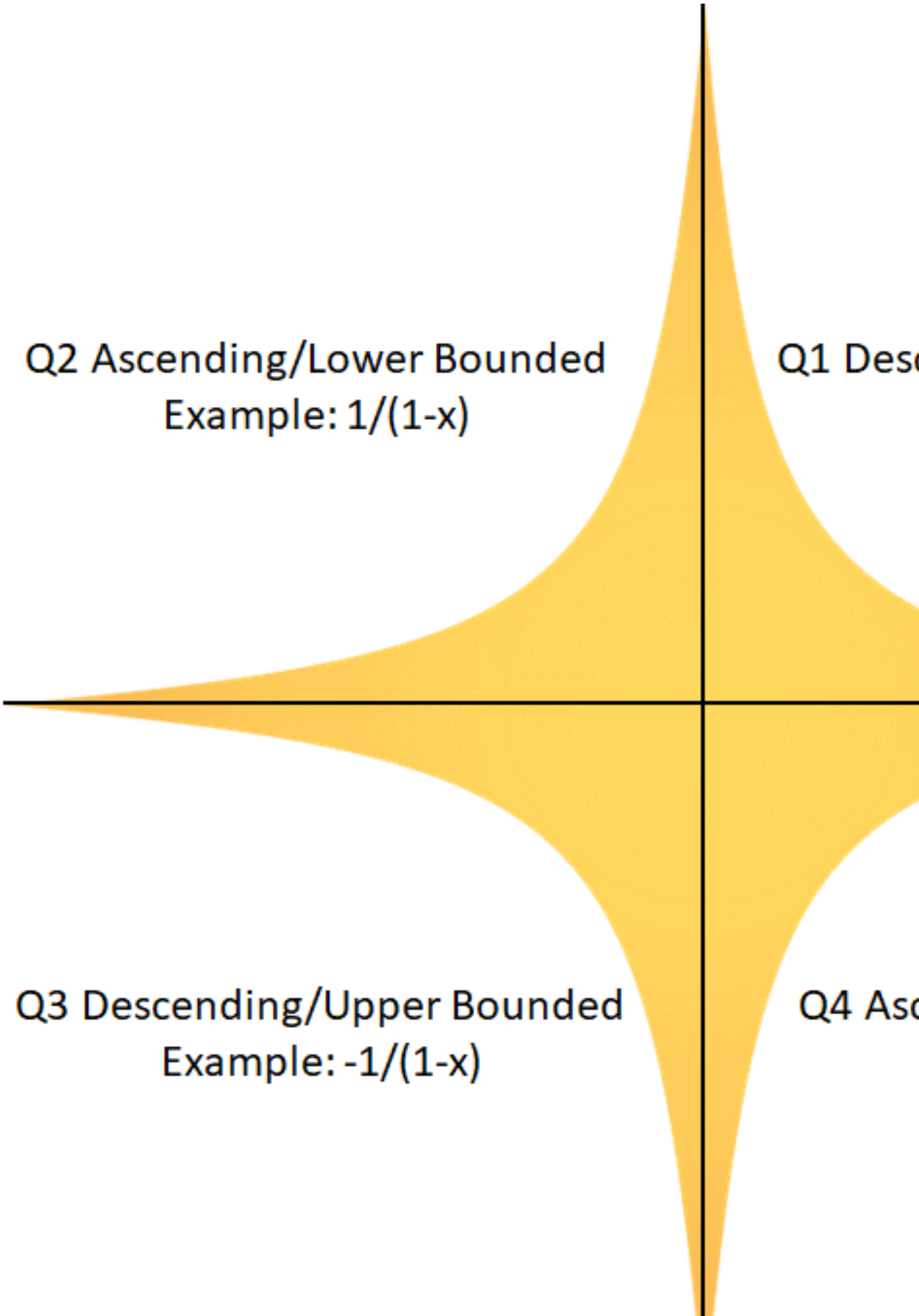
6.3. **区间上的原函数分类**。设 $I \subseteq J$ 为一个区间，端点坐标为 a，b，且 J 包含端点 a，b。（如果 J 是圆，我们允许 a，b 表示同一个圆周上的点，但要求 $b = a+1$。）回顾一下，如果原函数 $\phi_{J\mathbb{R}}$ 满足：在 I 上，ϕ 在 I之外为零、在 I上单调，且有界（即 $\inf \phi$ 或 $\sup \phi$ 至少有一个存在），那么 $\phi_{J\mathbb{R}}$ 就是 I 上的原函数。注意，常数原函数在 I上既是递增的，也是递减的；而任何其他原函数则必定是递增或递减的。

若 $\sup \phi$ 存在，则称原函数上有界；若 $\inf \phi$存在，则称原函数下有界。若上下界都存在，则称其为有界原函数；否则称为无界原函数。因此，我们可以根据无界原函数是递增还是递减（A 或 D），以及是上有界还是下有界（U 或 L），对其进行分类。

将 I 上递减、下有界原函数的集合记为 DL，并类似地定义集合 AL、AU 和 DU。无界原函数恰好属于这些集合中的一个；而有界原函数既上有界又下有界，因此既属于 AU 和 AL，也属于 DU 和 DL，但常函数除外，它属于全部 4 个集合。注意，DL 在加法下封闭，并包含常原函数 0。因此，它构成一个交换幺半群。此外，它还是半环 $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ 上的模。其他 3 个集合也同样如此。

注意，如果 ϕ 是 I 上的原函数，那么 $-\phi$ 也是如此。此外，如果 I 是开集或闭集（即非半开集），那么 $\phi(x) := \overline{\phi}(a + \overline{b} - x)$ 也是 I 上的原函数，因此 $-\phi$ 也是如此。最后，$-\phi(x) = (-\phi)(a + b - x) = -\phi(x)$。

旋转上的非遍历伯克霍夫和的丢番图逼近49



设 $\mathcal{F}$ 是 I的一族原函数。那么 $-\mathcal{F} := \{\phi : -\phi \in \mathcal{F}\}$ 显然也是 I的一族原函数。若 I 是开集或闭集，我们还可以定义另一族原函数 $\mathcal{F} := \{\phi : \phi(a+b-x) \in \mathcal{F}\}$，于是 $-\mathcal{F} = -\mathcal{F} = \{\phi : -\phi \in \mathcal{F}\}$ 是第四族原函数。我们称集合 $\{\mathcal{F}, -\mathcal{F}.\mathcal{F}, -\mathcal{F}\}$ 为 $\mathcal{F}$的对偶象限（在对偶关系 $-$，下）。注意，当 I 是开集或闭集（但不是半开集）时，集合 $\{DL, AU, DU, AL\}$ 包含其四个成员各自的对偶象限；固定 DL 后，这给出 $AU = -DL$， $AL = DL$， $DU = -DL$。

若 ϕ 是 I 的原函数，且其下界为0（即 I上的 $\phi \geq 0$），则称ϕ 是 I上的正原函数；若 $\phi \leq 0$，则称 ϕ 为负原函数。我们将 I 上的递减正原函数集合记为 $\Phi(I)$，并注意到它是 DL ($\Phi(I) \subset DL(I)$)的子幺半群。于是，对偶象限 $-\Phi(I) \subset AU(I)$就是递增负原函数的幺半群。若 I 是开集或闭集，我们还可以将其他对偶象限识别为幺半群 $\Phi(I) \subset AL(I)$ $-\Phi(I) \subset DU(I)$。

正原函数和负原函数具有一项重要性质：它们可以在 J 中扩张和平移。

如果 $\phi \in \Phi(I)$，且 K 是 I 的右扩张（即 $x \in K \backslash I \Rightarrow x \geq b$，其中 b 是 I 的右端点），那么 $\phi \in \Phi(K)$，使得 $\Phi(I) \subset \Phi(K)$。类似地， $-\Phi(I) \subset -\Phi(K)$；如果 K' 是 I 的左扩张（并且在 I 下为开或闭），那么也有 $\Phi(I) \subset \Phi(K')$ $-\Phi(I) \subset -\Phi(K')$。

现在假设 $I = (a, b)$ 是开的。令 $K = |c, d|$（其中当 K 是圆 $[0, 1$ 时，我们令 $c = 0$, $d = 1$）。如果 $\phi \in \Phi(I)$，我们可以定义平移 $T\phi(x) = \phi(x + (a - c))$，然后得到 $T\phi \in \Phi(c, c + (b - a))$。根据上文关于扩张的说明，我们可以写成 $T\phi \in \Phi(c, d)$ 和 $-T\phi \in -\Phi(c, d)$。特别地，当 K 是圆时， $T\phi \in \Phi(0, 1)$ $-T\phi \in -\Phi(0, 1)$。类似地，如果 $\phi \in \Phi(I)$，我们定义平移 $T\phi(x) = \phi((d - b) + x))$，然后得到 $T\phi \in \Phi(d - (b - a)$ $d)$，并可将其扩张为 $T\phi \in \Phi(c, d)$ 和 $-T\phi \in -\Phi(c, d)$。特别地，当 J 是圆时，$\overline{T}\phi \in \overline{\Phi}(0, 1)$ $-\overline{T}\phi \in -\overline{\Phi}(0, 1)$。总之，开区间 I 上的正原函数和负原函数可以平移为定义在 K 内部上的原函数。

注意，闭区间上的单调函数属于有界变差。由于原函数 ϕ 在I 之外为零 I，若 I 是闭的， ϕ 在整个 J上属于有界变差（因此也属于局部有界变差）。若I 是开的，那么 ϕ 在 I 上属于局部有界变差（根据61），且在 LBV 的闭包之外 I也如此；此外，LBV 在 I的有界端点处也如此。

6.4. 函数的原函数表示。回顾一下，我们用 $LBV(\phi)$ 表示局部有界变差点的集合，其补集记为 $UBV(\phi)$。我们已经证明， $LBV(\phi)$ 是互不相交的开区间之并，不过需要注意，这也包括以下情形： $LBV(\phi) = \mathbb{T}$ （此时 ϕ 在整个圆上属于有界变差），以及 $LBV = \emptyset$（例如 $\phi(x) = \left[\!\left[x = \frac{p}{q}, (p, q) = 1\right]\!\right] q$ 在处处无界，因此处处都不局部有界）。否则，存在至多可数个互不相交的开区间 $I_k = (x_k^L, x_k^R)$，满足 $LBV(\phi) = \bigcup_k I_k$ 和 $x_k^L, x_k^R \in UBV(\phi)$。接下来我们假设 $LBV(\phi)$ $UBV(\phi)$ $\neq \emptyset$。现在可以定义可观测量 $\phi_U x = [\![x \in UBV(\phi)]\!] \phi x$ 和 $\phi_i = [\![x \in (x_i^L, x_i^R)$ $]\!] \phi$，从而可以将 $\phi = \phi_U + \sum_i \phi_i$ 写成 $UBV(\phi_i) = \{x_i^L, x_i^R\}$。在 ϕ 只有一个上有界变差点 x 的特殊情形下，我们得到 $x_1^L = x_1^R = x$；否则，所有端点都互不相同。

注意，根据定义，对于归一化函数，有 $\phi_U = 0$。

现在，我们可以将若尔当分解定理从有界变差函数推广到 LB V 函数：

引理 *68*（局部有界变差函数的若尔当分解）。若 ϕ 在非空开区间 $I=(a,b)$ 上属于局部有界变差，则对于每个点 $m\in(a,b)$，在 I 上都存在一个典范的原函数分解，即 $\phi=\phi(m)+\sum_{i=1}^{4}\phi_i$，其中 $\phi_1\in\Phi(a,m)$ $\phi_2\in\Phi(a,m)$ $\phi_3\in\Phi(m,b)$ $\phi_4\in-\Phi(m,b)$。

证明。我们将 ϕ 划分为左侧函数和右侧函数 $\phi^L=[\![x\in(a,m)]\!](\phi(x)-\phi(m))$ $\phi^R=[\![x\in(m,b)]\!](\phi(x)-\phi(m))$。现在对 ϕ 在 $a<x<b$ 上定义左侧变差和右侧变差：$V^L(x)=[\![x\in(a,m)]\!]\mathrm{Var}_{[x,m]}\phi, V^R(x)=[\![x\in(m,b)]\!]\mathrm{Var}_{[m,x]}\phi$（$\phi$ 分别在 (x,m)、(m,x) 上的全变差）。这些函数定义良好，因为 ϕ 在每个区间 (x,m) 或 (m,x) 上都属于有界变差。现在定义差函数 $D^L(x)=V^L(x)-\phi^L(x)$ $D^R(x)=V^R(x)-\phi^R(x)$。注意，这四个定义的函数在 (a,m) 或 (m,b) 之外均为零，并且单调且为正，因此是其定义域上的正原函数。V^L、D^L 均递减，因此 V^L、$D^L\in\Phi(a,m)$；而 V^R、D^R 均递增，因此 V^R、$D^R\in\Phi(m,b)$。然而，$[\![x\in(a,b)]\!]\phi(x)=\phi(m)+V^L(x)-D^L(x)+V^R(x)-D^R(x)$，结论得证。□

我们可以结合（6.1）与引理（68）得到：

定理 *69*（分解定理）。给定一个观测函数 $\phi_{J\mathbb{R}}$，则 $LBV(\phi)$ 是互不相交的开区间 $I_k=(a_k,b_k)$ 的至多可数并，且 $\phi=\phi_U+\sum_k\phi_k$，其中 $\phi_U=[\![x\in UBV(\phi)]\!]\phi$，并且 ϕ_k 是 I_k 上的局部有界变差函数。此外，给定 $m_k\in I_k$，我们可以用 $\phi_k=\phi(m_k)+\sum_{j=1}^{4}\phi_{kj}$ 所给出的原函数来表示 ϕ_k，其中 $\phi_{k1}\in\Phi(a_k,m_k)$ $\phi_{k2}\in-\Phi(a_k,m_k)$ $\phi_{k3}\in\Phi(a_k,m_k)$ $\phi_{k4}\in-\Phi(a_k,m_k)$。

7. 无界观测函数的齐次伯克霍夫和

7.1. 引言。 在上一节中，我们证明了，若 $\phi_{\mathbb{TR}}$ 是圆上的一个观测函数，则可将其分解为至多可数个支集互不相交的函数 $\phi=\phi_U+\sum_{k\in K}\phi_k$，其中每个 ϕ_k 都是局部有界变差的，且其支集包含于某个开区间 I_k中。我们还证明，可以将每个 ϕ_k 分解为来自 Φ的每个象限的 4 个原函数 ϕ_{ki} 之和（I）。由于 S_N 是线性的，这意味着我们已将对 $S_N(\phi,\ x)$ 的研究化归为对 $S_N(\phi_U,\ x)$ 以及对 $S_N(\phi_{ki},\ x)$（其中 ϕ_{ki} 为原函数）的研究。我们通常关注这样的求和：$x+r\alpha$ 从不与 ϕ的无界点重合，因此 $S_N(\phi_U,\ x)=0$。这意味着我们可以将 ϕ 替换为其规范化形式 ϕ^{Norm}（它在 ϕ的无界点集合上为零），而不改变总和。本节将重点研究原函数 ϕ 对应的 $S_N(\phi,\ x)$。

现在设 ϕ 是有向区间（$a,\ b$）上的一个原函数。如果 ϕ 在 a 处无界，那么 $\phi_a:=x_{\mathbb{T}}\to\phi\{x+a\}$ 是 (0，1) 上的一个原函数，并在 0^+ 处无界。同样地，如果 ϕ 在 b 处无界，那么 $\phi_b:=x_{\mathbb{T}}\to\phi\{x-b\}$ 是 (0，1) 上的一个原函数，并在 1^- 处无界。于是 $S_N(\phi,\ x_0)=S_N(\phi_a,\ x_0-a)$，且 $S_N(\phi,\ x_0)=S_N(\phi_b,\ x_0+b)$，这意味着我们可以将一般原函数的伯克霍夫和研究化为 (0，1) 上原函数的伯克霍夫和研究。下面我们假设 ϕ 是 (0，1) 上的一个原函数。

回顾一下，当 $x = 0$ 时，我们将 $S_N(\phi, x)$ 称为齐次和，否则称为非齐次和。

非齐次和 $S_N(\phi, x)$ 的一般情形颇具挑战。这或许令人意外，因为我们可以通过定义 $\phi_c(x) = \phi(x + c)$，轻易地将非齐次和转化为齐次和，进而得到 $S_N(\phi, x_0) = S_N(\phi_{x_0}, 0)$。问题在于，一般而言 ϕ_{x_0} 因而不会是 $(0, 1)$ 上的原函数，因此原有问题并未得到简化。

幸运的是，齐次和足以处理很大一部分值得关注的问题（包括本文摘要中所述的情形）。鉴于本文篇幅已经颇长，我们因此暂且将非齐次和留待另一篇论文讨论，而将本文限定于齐次情形。

现在，我们将运用第 5 节关于 $(r\alpha)$ 序列分布的结果，来估计齐次和 $S_N\phi := S_N(\phi, 0) = \sum_{r=1}^{N} \phi(r\alpha)$，其中 ϕ 是 $(0, 1)$ 上的单调函数。我们将使用另一种符号表示变体 $S_N(x) := S_N(\phi, x) = \sum_{r=1}^{N} \phi(x + r\alpha)$，并仔细注意到，这在语义上不同于第4节中的同名符号表示 $S_N(x) := \sum_{r=1}^{N} x_r$。

对单调函数的限制乍看之下似乎过于严格。关于有界函数求和的经典研究，往往将有界变差函数作为主要研究对象。然而，由于任何有界变差函数都可以表示为两个单调函数（一个递增，一个递减）之和，因此聚焦于单调函数并非限制，而是认识到单调函数实际上具有更深层的内涵。

我们将首先确立一些对偶性结果，以减少需要考虑的情形数量。我们将运用第 3 节提出的源-目标幺半群理论，其中源为 $S = (0, 1)$，其对合为 $\sigma_S := x \mapsto (1 - x)$；目标为 $T = \mathbb{R}$，其对合为 $\tau_S := x \mapsto -x$。

7.2. **伯克霍夫泛函的对偶关系**。 本节将探讨如何利用对偶性，减少研究伯克霍夫和的界时需要考虑的情形。我们将运用第 3 节探讨的较为一般的源与目标对偶性，以及连分数理论语境中出现的一种更为专门的拟周期对偶性。

这些对偶性是在各种对合的作用下产生的，我们将对合的不动点称为关于该对合的自共轭点。
我们还将定义一种结合源对合与准周期对合效果的对偶性。由于这对我们而言将是一种重要的对偶性，我们将其简称为双重对偶，而其不动点则是双重自共轭点。

圆周上伯克霍夫和的源-目标对偶 回顾一下，伯克霍夫和$S_N\phi$可视为作用于函数 $\phi_{\mathbb{TR}}$的泛函算子 $(S_N)^{(\mathbb{TR})\mathbb{R}}$。注意，由于轨道 $(r\alpha)$避开原点，求和 $S_N\phi_{\mathbb{TR}} = \sum_1^N \phi_{\mathbb{TR}}(r\alpha)$ 的值与求和 $S_N\phi_{S\mathbb{R}}\{r\alpha\}$ 相同，其中 $\phi_{\mathbb{TR}}$ 已替换为其在区间 $S = (0, 1)$ 上的限制，而伯克霍夫和泛函 $(S_N)^{(\mathbb{TR})\mathbb{R}}$ 则变为 $(S_N)^{(S\mathbb{R})\mathbb{R}}$。

利用这一观察，我们现在可以应用第 3 节中建立的理论。特别是，我们将以第 3.4 小节给出的示例应用为基础。我们取实区间 $S:=(0,1)$ 以及 $T:=\mathbb{R}$（同样配备自关系$R_S=R_T=\leq_{\mathbb{R}}$）。现在，我们将源对合 σ_S 设为圆周对合。：$x\mapsto\{1-x\}$ 但限制在 $(0,1)$（注意，它仍是一个对合，可写作 $x\mapsto 1-x$），并将目标对合设为 $\tau_T:=x_{\mathbb{R}}\mapsto -x$。

注意，现在 σ_S 的源提升为 $\sigma_{ST}=$（。）$_{ST}:=\phi_{ST}\mapsto\phi\circ\sigma_S$，即 $\phi\alpha:=\phi\alpha$。类似玛，τ_T的目标提升为 $\tau_{ST}=-_{ST}:=\phi\mapsto -_T\circ\phi$，即（$-_{ST}\phi$）$\alpha:=-_{\mathbb{R}}$（$\phi\alpha$）。同样，我们可以提升到第2层，得到$^{\sigma_{(ST)T}}:=A_{(ST)\ T}\mapsto A\circ\sigma_{ST}$，即$A\phi:=A\phi$，类似地还有 $\left(-_{(ST)T}A\right)\phi:=-_{\mathbb{R}}$（$A\phi$）。

如果我们进一步假设 A 是一个 τ–态射，这意味着 A（$-_{ST}\phi$）$=-_{\mathbb{R}}$（$A\phi$）。

在这个源-目标环境中，我们还拥有比3。4 更多的结构，$T=$（$\mathbb{R}$，$+_{\mathbb{R}}$，$\times_{\mathbb{R}}$）是一个域。将 T的二元运算提升到 ST会在 T 上诱导出一个函数代数（其中 $\lambda_T\phi_{ST}+_{ST}\mu_T\psi_{ST}$ 和 $\phi\times_{ST}\psi$ 具有其自然含义）。容易验证，对合 σ_{ST}，τ_{ST} 随后在 $+_{ST}$，$\times_{ST}$上均为线性。同样的论证也类似地适用于（ST）T上的泛函代数 T。

如果 $\Psi\subset ST$ 在 $\sigma\tau$下是自共轭的，则第 3.4小节的示例应用现在适用，从而得到：

$$(7.1)\qquad A_1\leq_\Psi A_2\Leftrightarrow\sigma A_1\leq_{\overline{\Psi}}\sigma A_2\Leftrightarrow\sigma' A_1\leq_{\overline{\Psi}}\sigma' A_2\Leftrightarrow\sigma\sigma' A_1\leq_\Psi\sigma\sigma' A_2$$
$$\Leftrightarrow\tau A_1\leq^{Op}_{\overline{\Psi}}\tau A_2\Leftrightarrow\sigma\tau A_1\leq^{Op}_{\overline{\Psi}}\sigma\tau A_2\Leftrightarrow\sigma'\tau A_1\leq^{Op}_{\overline{\Psi}}\sigma'\tau A_2\Leftrightarrow\sigma\sigma'\tau A_1\leq^{Op}_{\Psi}\sigma\sigma'\tau A_2$$

当 A_1、A_2是 τ–态射时，我们可以进一步推进。利用（3.10）中的结果，从 $A_1\leq_\Psi A_2$ 得到：

$$(7.2)\qquad A_1\leq_\Psi A_2\Leftrightarrow\sigma A_1\leq_{\overline{\Psi}}\sigma A_2\Leftrightarrow\tau A_1\leq_{\overline{\Psi}}\tau A_2\Leftrightarrow\sigma\tau A_1\leq_\Psi\sigma\tau A_2$$
$$\Leftrightarrow\tau A_1\leq^{Op}_{\Psi}\tau A_2\Leftrightarrow\sigma\tau A_1\leq^{Op}_{\overline{\Psi}}\sigma\tau A_2\Leftrightarrow A_1\leq^{Op}_{\overline{\Psi}}A_2\Leftrightarrow\sigma A_1\leq^{Op}_{\Psi}\sigma A_2$$

我们挑出第一和最后一个对偶关系，因为它们在本节后续内容中特别有用：

$$(7.3)\qquad A_1\leq_\Psi A_2\Leftrightarrow\sigma A_2\leq_\Psi\sigma A_1$$

注 70. 设 $\Theta\subset ST$ 是一个在S上递减（递增）的函数集。现在 $\sigma_{ST}\tau_{ST}\Theta=-\Theta$，而这也是一个递减（递增）函数集。回想 $\Psi(\Theta):=\Theta\bigcup\sigma\tau\Theta=\Theta\bigcup-\Theta$在 $\sigma\tau$下是自共轭的，$\sigma\Psi=\Psi=\Theta\bigcup-\Theta$也一样。因此，在这些 Φ、Ψ的情形下，Ψ 是一个由递减（递增）函数组成的自共轭集合，而 Ψ 是一个由递增（递减）函数组成的自共轭集合，适用（7.1）中的对偶关系；此外，当 A_1、A_2 是τ–态射时，（7.2）也适用。有两个重要的特殊情形：

(1) 当 $\Theta=\Psi$ 是所有单调递减（或单调递增，或仅指所有单调）函数的集合时；(2) 当 $\Psi=\Phi\bigcup\sigma\tau\Phi$，其中 Φ 是由（**）中的正递减原函数构成的幺半群时。

准周期对偶

本节探讨一种在连分数展开的语境中出现的特殊对偶性。我们将采用上一节中的一些源/目标对偶理论，但现在是在旋转上的伯克霍夫和这一特定环境中。指标族回想一下，有时将函数 $\iota_{IX}: I \to X$ 称为指标函数会很方便。于是，我们将 I 称为指标集，并将 $x_i := \iota(i)$ 称为带指标元素。我们将集合 $(x_i)_{i\in I}$ 称为指标族（以 I 为指标）。如果 $I = \{i\}_{i=1}^n$，我们也将该指标族记作 $(x_i)_{i=1}^n$。

注记 71。特别重要的是要注意，如果 ι 不是单射，那么 (x_i) 就不是一个集合（它是一个包含相同元素的集合体）。这意味着，如果我们想利用指标 i 在集合 $X = \{x_i\}$ 上定义函数，就必须格外小心。例如，给定 I 的一个自同态 f_{II}，我们可以定义拉回函数 $g_{IX} = \iota \circ f$，它是一个从 I 到 X 的良定义指标函数。于是，我们很容易认为也可以定义一个导出自同态 $h_{XX}: x_i \mapsto x_{f(i)}$，但一般来说并非如此：如果 h 存在，且 $\iota(i) = \iota(j)$，那么 $x_{f(i)} = h(x_i) = h(x_j) = x_{f(j)}$；对于一般的 f 而言，情况并非如此，即使 f 是双射。总的来说，h_{XX} 是一种关系（或多值函数）。

准周期指标族回顾 (10)，我们将 $\alpha_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$ 的准周期序列记为 $(q_r^\alpha)_{r=0}^\infty$，并且对于 $\alpha \in (0,1/2)\setminus\mathbb{Q}$，有 $q_r^\alpha = q_r^\alpha$，其中 $\alpha = \{1-\alpha\}$ 且 $r = \bar{r}+1$。这个结果揭示了一种非平凡的对偶性，我们将在本节中加以探讨。

首先注意，这里有两个映射使用了同名符号表示 $'.'$。我们可以将二者都扩展为对合，如下所示。第一个定义在 $\mathbb{I} = [0,1)$ 上，定义为 $(\circ)_{\mathbb{I}} := \alpha \mapsto \{1-\alpha\}$（注意，$0 = 0$ 是不动点）。第二个的定义需要稍加斟酌：回顾 $\mathbb{N} = \mathbb{N}^+ \bigcup \{0\}$，我们取不交并 $\mathbb{N}_2 = \mathbb{N} \bigsqcup \mathbb{N}^+$，并定义对合 $(\circ)_{\mathbb{N}_2}$ 如下：$r_{\mathbb{N}} := (r+1)_{\mathbb{N}^+}$，以及 $r_{\mathbb{N}^+} := (r-1)_{\mathbb{N}}$。现在，我们可以用这两个对合在适当的集合上定义乘积对合 $(\circ)_{\mathbb{I}} \times (\circ)_{\mathbb{N}_2}$，如下所示：

定义 72。 拟周期指标集 $QPI = (QPI_{Set}, .)$ 的底层集合是真子集 $QPI_{Set} \subset \mathbb{I} \times \mathbb{N}$，定义如下

$$QPI := \left\{ (\alpha, r) : \alpha \in \mathbb{I}\setminus\mathbb{Q} \,\&\, r \geq \left[\!\left[\alpha \geq \frac{1}{2} \right]\!\right] \right\}$$

它配备了拟周期对合 Q_{QPI}，定义为 $Q(\alpha, r) := (\alpha, r) = (\alpha, r)$，其中 $\alpha := \{\overline{1-\alpha}\}$，且 $\bar{r} := r + (-1)^{[\![\alpha > \frac{1}{2}]\!]}$。

准周期指标族（QPI族） $X = \left\{(x_r^\alpha)_{\iota_{(QPI)X}}\right\}$ 是一个由准周期指标集 QPI 通过指标映射 $\iota_{(QPI)X}: (\alpha, r)_{QPI} \mapsto x_r^\alpha$ 索引的族 $X = (x_r^\alpha)$。通常无需指定指标映射，此时我们只写作 $X = (x_r^\alpha)$。满足 $x_r^\alpha = x_r^\alpha$ 的点称为拟周期自共轭点。若指标映射与 α 无关，即对每个 r，$\iota(\alpha, r) = x_r$ 对任意 α 均成立，我们也允许将该族写作 $(x_r^\alpha) = (x_r)$。类似地，若 ι 与 r 无关，我们将该族写作 (x^α)；若 ι 是常数映射，则写作 (x)。

注73。注意，$(\alpha, r) \in QPI$ 表示：$r \geq 0$ 对 $\alpha < \frac{1}{2}$ 成立，$r \geq 1$ 对 $\alpha > \frac{1}{2}$ 成立。特别是，这意味着 QPI 族 (x_r^α) 不包含任何满足 $\alpha > \frac{1}{2}$ 的元素 x_0^α。

注意，准周期指标族还可以由其他指标集进一步索引，例如，族 (x^α_{rz}) 由 $QPI \times Z$ 索引，但 QP 对合只影响该族中的准周期指标，即 $x^\alpha_{rz} = \iota((\alpha, r)\ z)$ 与 $\iota((\alpha, r)\ z) = x^\alpha_{rz}$。

与注释 71 一致，我们不能假设存在诱导 QP 对合 $Q_X := x^\alpha_r \mapsto x^\alpha_r$ 在一个 QPI 族上 $X = (x^\alpha_r)$ 如果指标映射不是单射。然而，在许多（但并非所有）重要情形下，函数 $x^\alpha_r \mapsto x^\alpha_r$ 是良定义的（此时诱导函数也是一个对合，因为 Q_{QPI} 本身就是一个对合）。在这种情况下，下面的一些单独证明可以简化。不过，若采用一套无论诱导对合是否有定义都适用的证明，整体呈现会更加简洁。因此，在下文中，我们通常不假设 $Q := x^\alpha_r \mapsto x^\alpha_r$ 是良定义的。

现在我们定义一种对偶性，它将在后续章节中发挥重要作用。这是一种混合形式，同时使用了 QP 对合和源对合（。）$^{\mathbb{I}} := \alpha \mapsto 1 - \alpha$。

定义 74（双对偶）。给定一个函数 QPI族 (ϕ^α_r)，我们将导出的族 $\left(\phi^\alpha_r\right)$ 称为 (ϕ^α_r) 的双重对偶函数族。为方便起见，我们将使用简化的符号表示 $\phi^\alpha_r := \phi^\alpha_r$。当 $\phi^\alpha_r = \phi^\alpha_r$ 时，我们称 ϕ^α_r 是双重自共轭的。

备注 75。需要注意的是，根据备注 (**)，我们不能将双对偶视为函数映射，因为 $\phi^\alpha_r \mapsto \phi^\alpha_r$ 可能是多值的。

例 76。QPI族的重要例子

(1) 拟周期指标集 QPI 本身就是一个准周期指标族，其指标映射为 Id_{QPI}。由于 Id 是单射，因此在这种情况下，对合 $Q\colon(\alpha, r) \mapsto (\alpha, r)$ 显然存在。(2) 标量准周期族 (λ^α_r)，其中每个 $\lambda^\alpha_r \in \mathbb{R}$。重要的例子有 q^α_r、a^α_{r+1}、b^α_r（这些符号具有其标准含义）。注意，这些特定例子也是准周期自共轭的（例如 $q^\alpha_r = q^\alpha_r$），唯一例外是当 $a^\alpha_2 = a^\alpha_1 - 1$ 时，a^α_{r+1} 对于 $\alpha < \frac{1}{2}, r = 0$。标量族通常不具有单射指标映射（$Q_{(\lambda^\alpha_r}$ 并未定义良好），不过，将恒等函数限制在自共轭元素集合上时，它可充当部分准周期对合。(3) 特定的标量准周期族 (E^α_r)，其中 $E^\alpha_r := E_r = [\![r \text{为偶数}]\!]$（因此族 (E^α_r) 与 α 无关）。注意 $E^\alpha_r = O^\alpha_r$ 和 $O^\alpha_r = E^\alpha_r$，因此 $(E^\alpha_r) = (O^\alpha_r)$。指标映射 $\iota\colon(\alpha, r) \mapsto E^\alpha_r = E_r$ 显然不是单射，但实际上，诱导对合 $Q_{(E^\alpha_r)}$ 确实存在。(4) 给定标量准周期族 $\{\lambda^\alpha_r\}$，我们可以构造新的标量族，例如 $\{f_{\mathbb{R}\mathbb{R}}(\lambda^\alpha_r)\}$ 或 $\{\phi_{\mathbb{I}\mathbb{R}}(\lambda^\alpha_r)\}$（当 $\lambda^\alpha_r \in \mathbb{I}$ 时），以及 $[\![P(\lambda^\alpha_r)]\!]$（其中 P 是一个命题）。如果 λ^α_r 是拟周期自共轭的，那么 $f(\lambda^\alpha_r)$、$\phi(\lambda^\alpha_r)$ 和 $[\![P(\lambda^\alpha_r)]\!]$ 也都是拟周期自共轭的。特别地，当 $r > 0$ 时，$\phi\left(\frac{1}{q^\alpha_r}\right)$ 是拟周期自共轭的。(5) 准周期指标函数的准周期族 $n^\alpha : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}$ 由 $n^\alpha(N) := \max\{t : q^\alpha_t \le N\}$ 定义。注意，我们在符号表示中省略了 r，以表示这些函数与 r 无关，即对于任意 r，$n^\alpha_r = n^\alpha$。另请注意，现在我们可以将 N 的奥斯特罗斯基表示写作 $N = \sum^{n^\alpha(N)}_{r=[\![\alpha > \frac{1}{2}]\!]} b_r q_r$，也可以将以下关系写作

指标 n^α，n^α之间的关系表示为 $n^\alpha(N) = n^\alpha(N) + (-1)^{[\![\alpha > \frac{1}{2}]\!]}$。特别地，这给出$q^\alpha_{n^\alpha} = q^\alpha_{n^\alpha}$.

(6) 对于某个符号 c的QP标量族 c^α_{rst}：(a) 当 c 是零符号时，我们将简记为 α_{rst}。QP 共轭为 α_{rst}，且由于 $\alpha_{rst} = \{1 - \alpha_{rst}\} = \alpha_{rst}$ 在 $\mathbb{I}\backslash\mathbb{Q}$上，QP对合与源对合重合。(b) 当 c 是可观测符号，例如 ϕ时，我们写作 $\phi^\alpha_{rst} := \phi(\alpha_{rst})$，其QP共轭为 $\phi^\alpha_{rst} = \phi(\alpha_{rst}) = \phi(\alpha_{rst}) = \phi^\alpha_{rst}$，并且QP对合与源对合再次重合

。QPI 算子族

令 $\mathscr{X}$ 为泛函的QPI族的集合（其元素属于$(ST)T$的族），并令(X^α_r)、(Y^α_r)为 $\mathscr{X}$的两个成员。定义 $Z^\alpha_r := \lambda X^\alpha_r + \mu Y^\alpha_r$。根据此定义，$Z^\alpha_r := \lambda X^\alpha_r + \mu Y^\alpha_r$，因此$(Z^\alpha_r)$也是一个QPI族；我们可以用$(Z^\alpha_r) = \lambda_T(X^\alpha_r) +_{\mathscr{X}} \mu_T(Y^\alpha_r)$表示，对于每个$(\alpha、r)$，都有 $Z^\alpha_r = \lambda X^\alpha_r + \mu Y^\alpha_r$。注意，$\mathscr{X}$ 是关于 T 的向量空间，而 $+_{\mathscr{X}}$ 是将 $+_T$ 提升到 $\mathscr{X}$后的结果。类似地，我们也可以将 $\times_T$提升到 $\mathscr{X}$，使得$(X^\alpha_r) \times (Y^\alpha_r)$仍是一个QPI族，因此 $\mathscr{X}$ 也是关于 T的代数。

还要回顾一下，当 ST配备了一个对合 υ_{ST}时，这会诱导出一个拉回对合 $\upsilon_{(ST)T}$，其定义为 $\upsilon_{(ST)T}(X) := X \circ \upsilon_{ST}$，它关于 $+_{ST}$，$\times_{ST}$ 也是线性的。同样，给定一个 QPI 族 (X^α_r)，我们可以定义拉回对合 $\upsilon_{\mathscr{X}}$，其定义为 $\upsilon_{\mathscr{X}}((X^\alpha_r)) = \left(\upsilon_{(ST)T} X^\alpha_r\right)$；同样，它关于 $+_{\mathscr{X}}$，$\times_{\mathscr{X}}$ 是线性的，因此 $\upsilon_{\mathscr{X}}$ 是一个代数自同构。

特别地，我们已经证明：

命题 77 (双对偶的线性性)。若 $Z^\alpha_r = \sum_{i=1}^k X^\alpha_{ir} \times Y^\alpha_{ir}$，则 (Z^α_r) 是一个 *QPI*族，且 $Z^\alpha_r = \sum_{i=1}^k X^\alpha_r \times \overline{Y}^\alpha_r$，即由 $\overline{QPI}$ 族作代数组合所得对象的双对偶，等于这些族的双对偶所作的同一代数组合。

证明。我们在上文证明了，(Z^α_r) 是一个 QPI族。Z^α_r 的双对偶是 $\sigma_{(ST)T} Z^\alpha_r$，根据 Z^α_r 的定义，它是 $\sigma_{(ST)T}\left(\sum_{i=1}^k X^\alpha_r \times Y^\alpha_r\right)$；由于 σ 是一个代数同态，结论即得。□

例 78。qp算子族的重要例子

(1) 给定一个算子 X，我们可以定义常值qp族 $\mathscr{Z}_X$，其中$X^\alpha_r \phi = X\phi$对所有 $(\alpha, r) \in QPI$均成立。该族自动是 QP自共轭的（$X^\alpha_r \phi = X\phi = X^\alpha_r \phi$）。(2) 分割和算子族$P_{q^\alpha_r}$（详情见第 7 节第 7.3 小节）是一个线性算子族，它是Source自共轭的（$P_{q^\alpha_r} = P_{q^\alpha_r}$）、QP自共轭的（$P_{q^\alpha_r} = P_{q^\alpha_r}$），因此也是双重自共轭的（$P_{q^\alpha_r} = P_{q^\alpha_r} := P_{q^\alpha_r}$）。(3) $\phi \mapsto \phi^\alpha_{rst} := \phi(\alpha_{rst})$ 是一个（匿名的）线性算子族，既非源自共轭，也非准周期自共轭，但它是双重自共轭的（$\phi^\alpha_{rst} = \phi^\alpha_{rst} := \phi^\alpha_{rst}$）。(4) 族 $S^\alpha_{rs}\phi = S^\alpha_{q_r}(\phi, \alpha_{rs}) := \sum_{t=1}^{q_r} \phi^\alpha_{rst}$ 是双重自共轭的，因为$\phi \mapsto \phi^\alpha_{rst}$是双重自共轭的，因此其和 $\sum_{s=0}^{b_r - 1} S^\alpha_{rs}$ 也是双重自共轭的。

(5) $\phi \mapsto \phi(f(q_r^\alpha))$ 是一个（匿名的）线性算子族，它不是源自共轭的，但它是准周期自共轭的，因为准周期族 (q_r^α) 是 QP自共轭的（$q_r^\alpha = q_r^\alpha$）。特别地，$\phi \mapsto \phi(\frac{1}{q_r^\alpha})$ 是 QP自共轭的。

回顾一下，本节考虑的是源-目标幺半群，其中$S = (0,\ 1)\ T = \mathbb{R}$。

定义 79. 给定两个 QPI 算子族 (X_r^α)，(Y_r^α)，我们称 (X_r^α) 在 $\Theta \subseteq ST$ 上被 (Y_r^α) 支配，如果对于每个 $(\alpha,\ r) \in QPI$，都有 $X_r^\alpha \leq_\Theta Y_r^\alpha$。记作 $(X_r^\alpha) \leq_\Theta (Y_r^\alpha)$

引理 80 (支配对偶)。设 $\Psi \subset ST$ 在对合 $\sigma_{ST}\tau_{ST}$ 下自共轭。给定两个来自 (ST) T的泛函 *QPI* 线性算子族(X_r^α)、(Y_r^α)，则有以下对偶结果：

$$(X_r^\alpha) \leq_\Psi (Y_r^\alpha) \Leftrightarrow \left(X_{\overline{r}}^{\overline{\alpha}}\right) \leq_\Psi \left(Y_{\overline{r}}^{\overline{\alpha}}\right) \Leftrightarrow \left(\overline{Y_r^\alpha}\right) \leq_\Psi \left(\overline{X_r^\alpha}\right) \Leftrightarrow \left(\overline{Y_{\overline{r}}^{\overline{\alpha}}}\right) \leq_\Psi \left(\overline{X_{\overline{r}}^{\overline{\alpha}}}\right)$$

证明。$(1 \Leftrightarrow 2)$：根据定义 $(X_r^\alpha) = \left(X_r^\alpha\right)$，因此显然有 $(X_r^\alpha) \leq_\Psi (Y_r^\alpha) \Leftrightarrow \left(X_r^{\overline{\alpha}}\right) \leq_\Theta \left(Y_r^{\overline{\alpha}}\right)$。
$(1 \Leftrightarrow 3)$：由于 Ψ 是自共轭的，且 X_r^α、Y_r^α是线性的（因而是 τ–态射），由 7.3 可得 $X_r^\alpha \leq_\Psi Y_r^\alpha \Leftrightarrow Y_r^\alpha \leq_\Psi X_r^\alpha$，结论随即成立。
$(2 \Leftrightarrow 4)$：由对偶性 $(1 \Leftrightarrow 3)$ 得到，再应用对偶性 $(1 \Leftrightarrow 2)$ 即可。□

Ψ也有类似的结果。

回顾一下，$S_{rs}^\alpha \phi := \sum_{t=1}^{q_r} \phi_{rst}^\alpha$

推论81。若 Ψ 是自共轭的，且(X_r^α) 是线性的，则 $\left(\sum_{s=0}^{b_r^\alpha - 1} S_{rs}^\alpha\right) \leq_\Psi (X_r^\alpha)$ *on* Ψ *if and only if* $\left(\overline{X_{\overline{r}}^{\overline{\alpha}}}\right) \leq_\Psi \left(\sum_{s=0}^{b_r^\alpha - 1} S_{rs}^\alpha\right)$

证明。这可由引理直接得出，令 $Y_r^\alpha = \sum_{s=0}^{b_r - 1} S_{rs}^\alpha$，并利用 b_r^α和 S_{rs}^α 均为双自共轭这一事实；因此，由双对偶的线性（命题 77），其和 Y_r^α也具有此性质。□

7.3. **分割和**。现在我们引入一组作用于观测函数的线性泛函，它们将构成伯克霍夫和估计的重要部分。

定义 82. 分割和。考虑将 $[0, 1)$ 划分为从 0 开始的 $k \geq 1$ 个相等子区间。我们将坐标为 $\left\{\frac{t}{k}\right\}_{t=1}^{k-1}$ 的 $k - 1$ 个点（即不包括 0）称为内部点，并将 ϕ 在该划分上的分割和定义为 ϕ 在这些内部点上的值之和，即 $P_k(\phi) = \sum_{t=1}^{k-1} \phi(\frac{t}{k})$。

注 83。注意，P_k 是 ϕ 的线性泛函，$P_1(\phi)$ 是取值为 0 的空和，并且 $P_2(\phi) = \phi(\frac{1}{2})$。

回顾上一节，我们使用符号表示 $(.)^{\mathbb{T}^\circ}$ 表示圆 $x \mapsto x = \{1 - x\}$ 的源对合。它有如下拉回 $(.)^{(\mathbb{TR})^\circ}$：$\phi \mapsto \phi$，$(.)^{((\mathbb{TR})T)^\circ}$：$A \mapsto A$，定义为 $\phi x = \phi x, A\phi = A\phi$

命题 84。 P_k 在源对合 $(.)_{\mathbb{T}}$ 下自共轭；若 $\phi_{\mathbb{TR}}$ 反对称，则 $P_k(\phi) = 0$

证明。 根据定义，令 $u = k - t$:

$$\overline{P_k}(\phi) = P_k(\overline{\phi}) = \sum_{t=1}^{k-1} \phi(1 - \frac{t}{k}) = \sum_{u=1}^{k-1} \phi(\frac{u}{k}) = P_k(\phi)$$

现在，若 ϕ 在圆上反对称，则有 $\phi = -\phi$。由于 P_k 是线性的，$P_k(\phi) = P_k\left(-\phi\right) = -P_k\left(\phi\right) = -P_k(\phi)$，因此 $P_k(\phi) = 0$。□

我们通常关注分割和 $P_{q_r^\alpha}$，其中 q_r^α 是$\alpha_{\mathbb{T}}$的准周期。

命题 85。 $P_{q_r^\alpha}$ 在拟周期对合 $(\alpha, r) \mapsto (\alpha, r)$下自共轭

证明。 回想一下， q_r^α 本身是自共轭的，即 $q_r^\alpha = q_r^\alpha$，结论由此显然成立。□

7.4. 区间 $(0,1)$ 上单调函数的伯克霍夫和。 回忆 $S_N^\alpha \phi = \sum_{r=0}^{n^\alpha} \sum_{s=0}^{b_r-1} S_{rs}^\alpha \phi$其中 $S_{rs}^\alpha \phi = S_{q_r^\alpha}(\phi, \alpha_{rs}) = \sum_{t=1}^{q_r^\alpha} \phi(\alpha_{rs} + t\alpha) = \sum_{t=1}^{q_r^\alpha} \phi_{rst}^\alpha$。我们暂时固定 α，并在符号表示中省略它。

当 $q_r = 1$ 时，我们可能有 $q_1 = q_0 = 1$。不过在这种情况下，我们还有 $\alpha > \frac{1}{2}$。此外，由(18) $b_0 = 0$，因此 S_{q_0} 项无关紧要，我们可以写成 $S_N^\alpha \phi = \sum_{r=[\![\alpha > \frac{1}{2}]\!]}^{n} \sum_{s=0}^{b_r-1} S_{rs}^\alpha \phi$

现在，对于 $q_r = 1$, $t \in (1..q_r)$ 得到 $t \in (1)$，因此 $S_{q_r}(\alpha_{rs}) = \sum_{t=1}^{q_r} \phi_{rst} = \phi_{rsq_r}$; 类似地，对于 $q_r = 2$，我们有 $S_{q_r}(\alpha_{rs}) = \sum_{t=1}^{q_r} \phi_{rst} = \phi_{rsq_r} + \phi_{rsq_{r-1}}$（因为 $q_{r-1} = 1$）。结合这些结果，对于 $q_r \le 2$，我们有（其中 $b_r = 0$ 给出空和 0）：

$$\sum_{s=0}^{b_r-1} S_{rs}^\alpha \phi = \sum_{s=0}^{b_r-1} \left(\phi_{rsq_r^\alpha}^\alpha + [\![q_r^\alpha > 1]\!] \, \phi_{rsq_{r-1}^\alpha}^\alpha \right) \tag{7.4}$$

定义 86（界算子）。 给定 α, N，界泛函（B_r^α）构成一个作用于（$\mathbb{TR}$）$\mathbb{R}$ 上的算子准周期族，其定义在观测函数 ϕ 上如下:

(7.5)

$$B_r^\alpha \phi = [\![b_r^\alpha > 0]\!] \left([\![q_r^\alpha > 1]\!] \, b_r^\alpha \left(P_{q_r^\alpha}(\phi) - \overline{\phi}(\frac{1}{q_r^\alpha}) \right) + [\![2 < q_r^\alpha < q_{n^\alpha}^\alpha]\!] \, E_r^\alpha \left(\phi_{r0,q_r - q_{r-1}}^\alpha - \overline{\phi}\left(\frac{2}{q_r^\alpha}\right) \right) + \sum_{s=0}^{b_r^\alpha - 1} \left(\phi_{rsq_r}^\alpha + \right.$$

注 87。 注意，这对于 $q_r^\alpha \le 2$ 时即化为（7.4）。

还需注意，每个界泛函都是其他线性 QPI 泛函的代数组合，因此是线性的。

引理88。 界泛函 (B_r^α) 具有 *QP*对偶 B_r^α 和双重对偶 $\left(\overline{B_{\overline{r}}^{\overline{\alpha}}}\right)$ *which can be written (when* α *is fixed):*

(7.6)

$$B_{\overline{r}}^{\overline{\alpha}}\phi = [\![b_r > 0]\!]\left([\![q_r > 1]\!]\, b_r\left(P_{q_r}(\phi) - \overline{\phi}(\frac{1}{q_r})\right) + [\![2 < q_r < q_n]\!]\, O_r\left(\overline{\phi}_{r0,q_r-q_{r-1}} - \overline{\phi}\left(\frac{2}{q_r}\right)\right) + \sum_{s=0}^{b_r-1}\left(\overline{\phi}_{rsq_r} + [\![q_r$$

(7.7)

$$\overline{B_{\overline{r}}^{\overline{\alpha}}}\phi = [\![b_r > 0]\!]\left([\![q_r > 1]\!]\, b_r\left(P_{q_r}(\phi) - \phi(\frac{1}{q_r})\right) + [\![2 < q_r < q_n]\!]\, O_r\left(\phi_{r0,q_r-q_{r-1}} - \phi\left(\frac{2}{q_r}\right)\right) + \sum_{s=0}^{b_r-1}\left(\phi_{rsq_r} + [\![q_r >\right.$$

证明。 将QP对合应用于定义（7.5），得到QP对偶:

$$B_{\overline{r}}^{\overline{\alpha}}\phi = [\![b_{\overline{r}}^{\overline{\alpha}} > 0]\!]\left([\![q_{\overline{r}}^{\overline{\alpha}} > 1]\!]\, b_{\overline{r}}^{\overline{\alpha}}\left(P_{q_{\overline{r}}^{\overline{\alpha}}}(\phi) - \overline{\phi}(\frac{1}{q_{\overline{r}}^{\overline{\alpha}}})\right) + [\![2 < q_{\overline{r}}^{\overline{\alpha}} < q_{n^\alpha}^{\overline{\alpha}}]\!]\, E_{\overline{r}}^{\overline{\alpha}}\left(\phi_{\overline{r}0,q_{\overline{r}}^{\overline{\alpha}}-q_{\overline{r}-1}^{\overline{\alpha}}}^{\overline{\alpha}} - \overline{\phi}\left(\frac{2}{q_{\overline{r}}^{\overline{\alpha}}}\right)\right) + \sum_{s=0}^{b_{\overline{r}}^{\overline{\alpha}}-1}\left(\phi_{\overline{r}sq_{\overline{r}}}^{\overline{\alpha}}\right.$$

但现在，根据（**），b_r^α、q_r^α、$P_{q_r^\alpha}$和 $q_{n^\alpha}^\alpha$ 在QP对合下都是自共轭的，因此例如 $b_r^\alpha = b_r^\alpha$，而且我们可以并将把它们中的任一个记为 b_r，其中 α 固定。此外，$E_r^\alpha = O_r^\alpha = O_r$ 和 $\phi_{rst}^\alpha = \phi_{rst}^\alpha$ 以及QP对偶结果（7.6）随之成立。对于双对偶，我们有 $B_r^\alpha\phi := B_r^\alpha\phi$。由（7.6），我们进而得到:

$$\overline{B_{\overline{r}}^{\overline{\alpha}}\phi} = [\![b_r > 0]\!]\left([\![q_r > 1]\!]\, b_r\left(P_{q_r}(\overline{\phi}) - \phi(\frac{1}{q_r})\right) + [\![2 < q_r < q_n]\!]\, O_r\left(\phi_{r0,q_r-q_{r-1}} - \phi\left(\frac{2}{q_r}\right)\right) + \sum_{s=0}^{b_r-1}\left(\phi_{rsq_r} + [\![q_r >\right.$$

现在注意到，P_{q_r} 在 $\phi \mapsto \phi$ 下也自共轭，因此（7.7）成立。 □

定理89（单调函数的界）。 给定 α、N、r 以及相应的界泛函 B_r^α、B_r^α，设 ϕ 是 （0,1）上的单调递减观测函数。则有:

$$\overline{B_{\overline{r}}^{\overline{\alpha}}\phi} \le \sum_{s=0}^{b_r-1} S_{rs}^\alpha\phi \le B_r^\alpha\phi \tag{7.8}$$

此外，当 ϕ 为常数时（以及当 $b_r = 0$ 或 $q_r \le 2$时），这些都是等式。

证明。 由右侧不等式 $\sum_{s=0}^{b_r-1} S_{rs}^\alpha\phi \le B_r^\alpha\phi$，根据支配引理的推论，推论 81，可以推出左侧不等式。接下来只需证明右侧不等式。我们首先处理等式的断言以及 $q_r \le 2$。

如果 $b_r = 0$，那么我们有等式 $0 = B_r^\alpha\phi = B_r^\alpha\phi = \sum_{s=0}^{b_r-1} S_{q_r}(\alpha_{rs})$。对于 $q_r \le 2$，我们有 $P_2 = \phi(1\,2) = \phi(1,2)$ 和 $P_1 = 0$，因此对于 $q_r \le 2$，B_r^α 的首项和中间项都消失了，我们得到 (7.4)，这是一个等式。如果 $q_r > 2$ 且 $\phi(x) = c$，那么中间项消失，首项为 $b_r((q_r-1)c - c)$，末项变为 $b_r(c + c)$，因此 $A_r\phi = B_r\phi = b_r q_r c$，这同样是 $\sum_{s=0}^{b_r-1} S_{q_r}(\alpha_{rs})$。现在我们讨论 $q_r > 2$ 的一般情形。

现在我们利用第 5 节的结果，来了解 α_{rst} 在正则 q_r圆的分割中的位置。

情况： $s > 0$ 或 $s = 0\&r = n$。

在这种情况下，对每个 t，共址条件都成立，即 α_{rst} 位于 $I(t\alpha)$ 中，因此 ϕ_{rst}位于区间端点处 ϕ 的值之间。按 α_{rst} 的递增值求和（即沿着从 0 到 1 的方向）可得：

For r even we have $S_{q_r}(\alpha_{rs}) = \sum_{t=1}^{q_r} \phi(\alpha_{rst}) \geq \phi_{rsq_r} + \left(P_{q_r} - \phi(\frac{1}{q_r})\right) + \phi_{rsq_{r-1}}$ and $S_{q_r}(\alpha_{rs}) \leq \phi_{rsq_r} + \left(P_{q_r} - \phi(1 - \frac{1}{q_r})\right) + \phi_{rsq_{r-1}}$.
类似地，对于奇数 r，有 $\phi_{rsq_{r-1}} + \left(P_{q_r} - \phi(1 - \frac{1}{q_r})\right) + \phi_{rsq_r} \geq S_{q_r}(\alpha_{rs}) \geq \phi_{rsq_{r-1}} + \left(P_{q_r} - \phi(\frac{1}{q_r})\right) + \phi_{rsq_r}$，其结构与偶数 r 的情况完全相同，尽管 α_{rsq_r}，$\alpha_{rsq_{r-1}}$ 在 0 周围的位置互换了。

情形： $s = 0\&\ r < n,\ q_r > 1$。

在这种情形下，对于每个 $t \neq q_r$， α_{rst} 都可能相对于$I(t\alpha)$移动一个划分区间。特别地，$\alpha_{rs(q_r - q_{r-1})}$ 可能移动到与α_{rsq_r}相同的划分区间。

当 r 为偶数时，可能向后移动（朝向 0），因此下界不受影响，但上界增加到 $S_{q_r}(\alpha_{rs}) \leq \left(P_{q_r} - \phi(1 - \frac{1}{q_r})\right) + \phi_{r0q_r} + \phi_{r0,\ q_r - q_{r-1}} + \left(\phi_{rsq_{r-1}} - \phi(1 - \frac{2}{q_r})\right) = \left(P_{q_r} + \phi_{rsq_r} + \phi_{rsq_{r-1}} - \phi(1 - \frac{1}{q_r})\right) + \left(\phi_{r0,q_r - q_{r-1}} - \phi(1 - \frac{2}{q_r})\right)$。

当 r 为奇数时，可能的移位方向是向前（朝向 1），因此上界不受影响，但下界降至 $S_{q_r}(\alpha_{rs}) \geq P_{q_r} - \phi\left(\frac{1}{q_r}\right) + \left(\phi_{rsq_{r-1}} - \phi(\frac{2}{q_r})\right) + \phi_{rsq_r} + \phi_{r0,q_r - q_{r-1}} = \left(\phi_{rsq_r} + P_{q_r} - \phi(\frac{1}{q_r}) + \phi_{rsq_{r-1}}\right) + \left(\phi_{r0,q_r - q_{r-1}} - \phi(\frac{2}{q_r})\right)$.

重新整理各项后即可得到这些结果。

□

推论 90. $\sum_{r=0}^{n} B_r^{\alpha}\phi \leq \overline{S_N\phi} \leq \sum_{r=0}^{n} B_r^{\alpha}\phi$

证明。 这由 $S_N\phi = \sum_{r=0}^{n} \sum_{s=0}^{b_r - 1} S_{rs}^{\alpha}\phi$ 得出 □

推论 91 (对偶性结果)。 设 $\Psi \subset ST$ 是定义在$(0,1)$上的递减函数的<*style id='v8'*>自共轭集。则有：

$$\begin{aligned}
\overline{B_{\overline{r}}^{\overline{\alpha}}} &\leq_{\Psi} \sum_{s=0}^{b_r-1} S_{rs}^{\alpha} \leq_{\Psi} B_r^{\alpha} \\
\sigma\overline{B_{\overline{r}}^{\overline{\alpha}}} &\leq_{\overline{\Psi}} \sigma \sum_{s=0}^{b_r-1} S_{rs}^{\alpha} \leq_{\overline{\Psi}} \sigma B_r^{\alpha} \\
\tau\overline{B_{\overline{r}}^{\overline{\alpha}}} &\leq_{\overline{\Psi}} \tau \sum_{s=0}^{b_r-1} S_{rs}^{\alpha} \leq_{\overline{\Psi}} \tau B_r^{\alpha} \\
\sigma\tau\overline{B_{\overline{r}}^{\overline{\alpha}}} &\leq_{\Psi} \sigma\tau \sum_{s=0}^{b_r-1} S_{rs}^{\alpha} \leq_{\Psi} \sigma\tau B_r^{\alpha}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau\overline{B_{\overline{r}}^{\overline{\alpha}}} &\geq_{\Psi} \tau \sum_{s=0}^{b_r-1} S_{rs}^{\alpha} \geq_{\Psi} \tau B_r^{\alpha} \\
\tau\sigma\overline{B_{\overline{r}}^{\overline{\alpha}}} &\geq_{\overline{\Psi}} \tau\sigma \sum_{s=0}^{b_r-1} S_{rs}^{\alpha} \geq_{\overline{\Psi}} \tau\sigma B_r^{\alpha} \\
\overline{B_{\overline{r}}^{\overline{\alpha}}} &\geq_{\overline{\Psi}} \sum_{s=0}^{b_r-1} S_{rs}^{\alpha} \geq_{\overline{\Psi}} B_r^{\alpha} \\
\sigma\overline{B_{\overline{r}}^{\overline{\alpha}}} &\geq_{\Psi} \sigma \sum_{s=0}^{b_r-1} S_{rs}^{\alpha} \geq_{\Psi} \sigma B_r^{\alpha}
\end{aligned}$$

证明。 这是第 7.2 小节中对偶性的一个应用。 □

推论 92。 如果 ϕ 是单调递减反对称函数，那么

(7.9)

$$B_r^{\alpha}\phi = [\![b_r > 0]\!] \left(\sum_{s=0}^{b_r-1} \left(\phi_{rsq_r} + [\![q_r > 1]\!] \left(\phi_{rsq_{r-1}} + \phi(\frac{1}{q_r}) \right) \right) + [\![2 < q_r < q_n]\!] E_r \left(\phi_{r0,q_r-q_{r-1}} + \phi\left(\frac{2}{q_r}\right) \right) \right)$$

(7.10)

$$\overline{B_{\overline{r}}^{\overline{\alpha}}}\phi = [\![b_r > 0]\!] \left(\sum_{s=0}^{b_r-1} \left(\phi_{rsq_r} + [\![q_r > 1]\!] \left(\phi_{rsq_{r-1}} - \phi(\frac{1}{q_r}) \right) \right) + [\![2 < q_r < q_n]\!] O_r \left(\phi_{r0,q_r-q_{r-1}} - \phi\left(\frac{2}{q_r}\right) \right) \right)$$

此外，对于 $q_r > 1$，每个求和 $\sum_{s=0}^{b_r-1} \left(\phi_{rsq_r} + \phi_{rsq_{r-1}} \right)$ 在 r 为偶数时为正，在 r 为奇数时为负。

.

证明。 注意，如果 ϕ 是反对称的，那么 $\phi = -\overline{\phi}$ 与 $P_{q_r}(\phi) = 0$。表达式 (7.9, 7.10) 便可由该定理轻易推出。现在我们考察 $X_r = \sum_{s=0}^{b_r-1} \left(\phi_{rsq_r} + \phi_{rsq_{r-1}} \right)$。对于 r 偶数 $\phi_{rsq_r} + \phi_{rsq_{r-1}} \leq \phi \binom{s+1/a'_{r+2}}{q'_{r+1}} - \phi \binom{a_{r+1}-s}{q'_{r+1}}$。

将第二项的顺序反转后，我们得到 $X_r = \sum_{s=0}^{b_r-1} \left(\phi\left({}^{s+1/a'_{r+2}}_{q'_{r+1}} \right) - \phi\left({}^{a_{r+1}-(\ b_r-1\ +s}_{q'_{r+1}} \right) \right)$。由于 $b_r \le a_{r+1}$，该和式中的每一项均为正，因此 $X_r \ge 0$ 对于 r 偶数成立。类似地，$X_r \le 0$ 对于 r 奇数成立。□

7.5. **原函数的进一步界**。上一节的结果适用于任意单调递减的 ϕ。本节将进一步发展下界有界函数的上界结果，尤其是 Φ 中的正原函数。回顾第 6.4 小节，我们可以将任意无界观测函数化为原函数之和。

关键的新要点源于这样一个事实：如果 ϕ_Φ 在例如 1^-处下有界，下界为 c，那么对于无理数 $0 < \alpha < \frac{1}{2}$，极值点序列 α_{rsq_r}在 r 为奇数时趋于 1^-，因此 $\phi_{rsq_r} \to c$。

回顾我们对极限的符号表示（在极限存在时），例如 $\phi(1^-) = \lim_{x\uparrow 1} \phi(x)$。注意，当 ϕ 在 1 的左侧属于局部有界变差时，该极限存在，尤其是对于 $\phi \in \Phi \bigcup -\Phi$。还要注意，此时 $\phi \mapsto \phi(1^-)$ 是一个线性泛函，特别地，$(-\phi)(1^-) = -\phi(1^-)$。类似的说明也适用于 $\phi(0^+) = \lim_{x\downarrow 0} \phi(x)$。注意，如果 $\phi(1^-)$ 存在，那么 $\phi(0^+)$ 也存在，且两个极限相等。

最后，对于 ϕ 单调递减且满足 $\phi(1^-) = C < 0$，则 $\phi - C \in \Phi$ 与$S_N\phi = S_N(\phi - C) + CN$，这意味着我们可以将注意力限制在 $\phi \in \Phi$ 上。类似的说明适用于所有象限。

引理93（原函数的上界）。设 $\phi \in \Phi$。则对于 $q_r > 2$，有：

(7.11)

$$B_r^\alpha(\phi) \le [\![b_r > 0]\!] \left(b_r P_{q_r} + [\![2 < q_r < q_n]\!] E_r \left(\phi_{r0,q_r-q_{r-1}} - \overline{\phi}\left(\frac{1}{q_r}\right) \right) + \sum_{s=0}^{b_r-1} \left(E_r \phi_{rsq_r} + O_r \phi_{rsq_{r-1}} \right) \right)$$

(7.12)

$$\overline{B_r^\alpha}\overline{\phi} \le [\![b_r > 0]\!] \left(b_r P_{q_r} + [\![2 < q_r < q_n]\!] O_r \left(\overline{\phi}_{r0,q_r-q_{r-1}} - \overline{\phi}\left(\frac{1}{q_r}\right) \right) + \sum_{s=0}^{b_r-1} \left(O_r \overline{\phi}_{rsq_r} + E_r \overline{\phi}_{rsq_{r-1}} \right) \right)$$

此外，在对偶性 $\phi \mapsto -\phi$ 下，这些不等式反向，对于常数 ϕ（对于 $b_r = 0$ 显然也同样如此）则为等式。

证明。所有项都是线性泛函，因此 $-\phi$ 的结果由对偶性得出。等式的证明与引理 89 的证明相同。

由于 $\phi \in \Phi$，ϕ 是递减的，并且由引理89 可得 $q_r > 2$

(7.13)

$$B_r^{\alpha}(\phi) = [\![b_r > 0]\!] \left(b_r \left(P_{q_r} - \overline{\phi}(\frac{1}{q_r}) \right) + [\![2 < q_r < q_n]\!] E_r \left(\phi_{r0,q_r-q_{r-1}} - \overline{\phi} \left(\frac{2}{q_r} \right) \right) + \sum_{s=0}^{b_r-1} \left(\phi_{rsq_r} + \phi_{rsq_{r-1}} \right) \right)$$

(7.14)

$$\overline{B_r^{\alpha}}(\phi) = [\![b_r > 0]\!] \left(b_r \left(P_{q_r} - \phi(\frac{1}{q_r}) \right) + [\![2 < q_r < q_n]\!] O_r \left(\phi_{r0,q_r-q_{r-1}} - \phi \left(\frac{2}{q_r} \right) \right) + \sum_{s=0}^{b_r-1} \left(\phi_{rsq_r} + \phi_{rsq_{r-1}} \right) \right)$$

此外，由于 ϕ 是递减的，对于 $q_r > 1$，我们有 $O_r\phi_{rsq_r} \le O_r\phi(\frac{1}{q_r})$；对于 $s > 0$ 或$r = n$，我们也有$E_r\phi_{rsq_{r-1}} \le E_r\overline{\phi}(\frac{1}{q_r})$。然而，对于 $s = 0\&r < n$，我们可以将$\alpha_{r0q_{r-1}}$ 拉回到其另一个区间。
然而在这种情况下，由于 $q_r > 2$ 我们有 $E_r\phi_{r0q_{r-1}} \le E_r\phi(\frac{2}{q_r})$ 这进而给出 $\phi_{rsq_r} + \phi_{rsq_{r-1}} - \phi(\frac{+}{q_r}) \le E_r\phi_{rsq_r} + O_r\phi_{rsq_{r-1}} + [\![s = 0\&r < n]\!] E_r(\phi(\frac{2}{q_r}) - \phi(\frac{1}{q_r}))$。对于 $b_r > 0$ 我们现在可以将这个结果代入 (7.13) 中，得到 (7.12)。对于 $B_r(\phi)$ 在 (7.12)) 中的结果，可用类似论证并使用 ϕ 递增性得到。

□

引理 94. 设 $\phi \in \Phi$。那么对于 $q_r = 2$，我们有：

(7.15)

$$B_r^{\alpha}\phi \le [\![b_r > 0]\!] \left(b_r P_{q_r} + [\![2 = q_r < q_n]\!] E_r(\phi_{r0q_{r-1}}^{\alpha} - \overline{\phi}(\frac{1}{q_r})) + \sum_{s=0}^{b_r-1} \left(E_r\phi_{rsq_r}^{\alpha} + O_r\phi_{rsq_{r-1}}^{\alpha} \right) \right)$$

(7.16)

$$\overline{B_r^{\alpha}}\overline{\phi} \le [\![b_r > 0]\!] \left(b_r P_{q_r} + [\![2 = q_r < q_n]\!] O_r(\overline{\phi}_{r0q_{r-1}}^{\alpha} - \overline{\phi}(\frac{1}{q_r})) + \sum_{s=0}^{b_r-1} \left(O_r\overline{\phi}_{rsq_r}^{\alpha} + E_r\overline{\phi}_{rsq_{r-1}}^{\alpha} \right) \right)$$

记 $X_r^{\alpha}(\phi) = [\![2 = q_r < q_n]\!] E_r \left(\phi_{r0q_{r-1}}^{\alpha} - \phi(\frac{1}{q_r}) \right)$ 为 $q_r = 2$，则有 $|X_r(\phi)| < \phi(\frac{1}{3}) - \phi(\frac{1}{2})$。若 $X_r\phi \ne 0$，则 $-sgn\ X_r\phi = [\![\{\alpha\} < \frac{1}{2}]\!] = sgn\ X_r\phi$，因此对于 $[\![\{\alpha\} < \frac{1}{2}]\!]$，7.16 中的 X_r项可忽略；对于 $[\![\{\alpha\} > \frac{1}{2}]\!]$，7.16 中的该项也可忽略。

此外，在对偶性 $\phi \mapsto -\phi$ 下，这些不等式的方向相反；当 ϕ 为常数时，不等式取等号（$b_r = 0$ 时也显然如此）。

证明。所有项都是线性泛函，因此关于 $-\phi$ 的结果可由对偶性推出。等式同样可用与上文引理 89 相同的论证得到。
由于 $\phi \in \Phi$，ϕ 是递减的，根据引理 89 可得 $q_r = 2$

(7.17)
$$B_r(\phi) = [\![b_r > 0]\!] \left(b_r \left(P_{q_r} - \overline{\phi}(\frac{1}{q_r}) \right) + \sum_{s=0}^{b_r-1} \left(\phi_{rsq_r} + \phi_{rsq_{r-1}} \right) \right)$$

(7.18)
$$\overline{B}_r(\phi) = [\![b_r > 0]\!] \left(b_r \left(P_{q_r} - \phi(\frac{1}{q_r}) \right) + \sum_{s=0}^{b_r-1} \left(\phi_{rsq_r} + \phi_{rsq_{r-1}} \right) \right)$$

此外，由于 ϕ 是递减的，对于 $q_r > 1$，我们有 $O_r\phi_{rsq_r} \le O_r\overline{\phi}(\frac{1}{q_r})$；对于 $s > 0$ 或 $r = n$，我们也有 $E_r\phi_{rsq_{r-1}} \le E_r\phi(\frac{1}{q_r})$。然而，对于 $s = 0\&r < n$，我们可能有 $\alpha_{r0q_{r-1}}$ 被拉回到其替代区间，从而得到 $\phi_{rsq_r} + \phi_{rsq_{r-1}} - \phi(\frac{1}{q_r}) \le E_r\phi_{rsq_r} + O_r\phi_{rsq_{r-1}} + [\![s = 0\&r < n]\!]\, E_r(\phi_{r0q_{r-1}} - \phi(\frac{1}{q_r}))$。这就证明了 7.15，随后 7.16 可由其 qp 对偶得到。

如果 ϕ 是常函数，中间项为零。现在我们研究使中间项为零或为正（非负）的条件。注意，如果 $q_r = 2$，我们有 $q_{r-1} = 1$ 和 $r \in \{1, 2\}$。

对于 $r = 1$，我们有 $E_r = 0$，因此中间项在 $B_1\phi$ 中消失。然而，$O_r = 1$，因此 $B_1^\alpha\phi$ 中的中间项为 $\phi_{101}^\alpha - \overline{\phi}(\{12\}) = X_1^\alpha\phi$，当 $\alpha_{101} \ge \frac{1}{2}$ 时该项非负。但 $\alpha_{101} < 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{q'_{r+2}} - \frac{1}{2q'_{r+1}}\right) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2q'_2}$ 且 $q'_2 > 3$，所以 $\alpha_{101} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{2}{3}$。

此外，对于 $\alpha_{101} \ge \frac{1}{2}$，我们必须有 $\frac{1}{q'_{r+2}} \le \frac{1}{2q'_{r+1}}$，从而得到 $a'_{r+2} \ge 2$，这要求 $a_3 \ge 2$。最后，$q_1 = q_r = 2$，这意味着 $a_1 = 2$，因此 $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$。

对于 $r = 2$，我们有 $O_r = 0$，因此 $B_2\phi$ 中的中间项消失。然而，$E_r = 1$，因此 $B_2\phi$ 中的中间项为 $\phi_{201} - \phi(\{12\})$。现在利用恒等式 $\phi_{rst}^\alpha = \phi_{rst}^\alpha$，得到 $\phi_{201}^\alpha - \overline{\phi}(\{12\}) = \phi_{101}^\alpha - \phi(\{12\})$。但这是 $B_1^\alpha\phi$ 的中间项，因此根据前面的结果，非负性要求 $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$，$\frac{1}{2} \le \alpha_{101} < \frac{2}{3}$ 且 $a_1^\alpha = 1$，$a_2^\alpha = a_1^\alpha - 1 = 1$，$a_4^\alpha = a_3^{\alpha f} \ge 2$，由此得证。□

请注意，常数 $X_r\phi$ 在（7.16）中通常是一个较小的常数，在大多数情况下无关紧要，而且往往为负，此时可以在这些不等式中完全忽略。它为正的条件是必要条件，但并非充分条件。在下面的例子中，$X_2\phi > 0$ 对于严格递减的 ϕ，这表明在该不等式中这一项不能消去。

例 95。 $\alpha = [2, 1, 3, 100, ...] \approx 0.36$，$N = 8 = 2*3 + 1*2 + 0*1$，$(101) = 7$，$\alpha_{101} = \{7\alpha\} \approx 0.54 > \frac{1}{2}$。

上界分量分析

(7.19)

$$B_r^\alpha\phi \le [\![b_r > 0]\!] \left(b_r P_{q_r} + [\![2 < q_r < q_n]\!]\, E_r \left(\phi^\alpha_{r0,q_r-q_{r-1}} - \overline{\phi}\left(\frac{1}{q_r}\right)\right) + \sum_{s=0}^{b_r-1} \left(E_r\phi^\alpha_{rsq_r} + [\![q_r > 1]\!]\, O_r\phi^\alpha_{rsq_{r-1}}\right)\right)$$

(7.20)

$$\overline{B_r^\alpha\phi} \le [\![b_r > 0]\!] \left(b_r P_{q_r} + [\![2 < q_r < q_n]\!]\, O_r \left(\overline{\phi}^\alpha_{r0,q_r-q_{r-1}} - \overline{\phi}\left(\frac{1}{q_r}\right)\right) + \sum_{s=0}^{b_r-1} \left(O_r\overline{\phi}^\alpha_{rsq_r} + [\![q_r > 1]\!]\, E_r\overline{\phi}^\alpha_{rsq_{r-1}}\right)\right)$$

我们现在进一步分析上述第三项。利用 α_{rst} 我们现在利用关于 α_{rst} 在第5节中推导出的界。

首先，我们需要单独处理 $q_r = 1$ 的情形。

引理 96. 对于 $q_r = 1$，我们有 $P_{q_r} = 0$，进而得到 $B_r^\alpha \phi = \sum_{s=0}^{b_r-1} E_r \phi_{rsq_r}^\alpha$

(7.21)
$$\sum_{s=0}^{b_r-1} \phi\left(\frac{s+1}{q'_{r+1}} + \frac{1}{q'_{r+2}}\right) \le \overline{B}_r(\phi) = \sum_{s=0}^{b_r-1} \phi_{rsq_r} = B_r(\phi) \le \sum_{s=0}^{b_r-1} \phi\left(\frac{s}{q'_{r+1}} + \frac{1}{q'_{r+2}}\right)$$

在对偶性 $\phi \mapsto -\phi$、$\phi \mapsto \phi$ 下，不等式方向相反；当 ϕ 为常数时，不等式变为等式。上界还给出 $\sum_{s=0}^{b_r-1} \phi_{rsq_r} = B_r\phi \le \phi\left(\frac{1}{q'_{r+2}}\right) + \sum_{s=1}^{b_r-1} \phi\left(\frac{s}{q'_{r+1}}\right)$ *and* $\sum_{s=0}^{b_r-1} \overline{\phi}_{rsq_r} = B_r\overline{\phi} \le \sum_{s=1}^{b_r} \overline{\phi}\left(\frac{a'_{r+1}-s}{q'_{r+1}}\right)$

证明。由于 $\phi \in \Phi$，ϕ 是单调递减的，并且根据定义（见 7.5），对任意单调递减的 ϕ 和 $q_r = 1$:

(7.22)
$$B_r(\phi) = \overline{B}_r(\phi) = [\![b_r > 0]\!] \sum_{s=0}^{b_r-1} \phi_{rsq_r}$$

若 $b_r = 0$，则该和为空，因此条件 $[\![b_r > 0]\!]$ 变得多余，从而得到 (7.21) 中的核心等式。(7.21) 的其余部分随即由 (48) 得出。对偶结果由 (2.4) 得出。

关于 $\sum_{s=0}^{b_r-1} \phi_{rsq_r}$ 的第二个上界只是对 (7.21) 的改写。利用对偶性可得 $\sum_{s=0}^{b_r-1} \phi_{rsq_r} \le \sum_{s=0}^{b_r-1} \phi\left(\frac{s+1}{q'_{r+1}} + \frac{1}{q'_{r+2}}\right)$ ——

Now using $\frac{1}{q'_{r+2}} + \frac{a_{r+1}-s}{q'_{r+1}} = \frac{a'_{r+1}-s}{q'_{r+1}}$ from (16) we get $\frac{s+1}{q'_{r+1}} + \frac{1}{q'_{r+2}} = \frac{a'_{r+1}-(a_{r+1}-s-1)}{q'_{r+1}} = \frac{a'_{r+1}-u}{q'_{r+1}}$ where $u = a_{r+1}-s-1$ so $\sum_{s=0}^{b_r-1} \overline{\phi}\left(\frac{s+1}{q'_{r+1}} + \frac{1}{q'_{r+2}}\right) = \sum_{u=a_{r+1}-b_r}^{a_{r+1}-1} \overline{\phi}\left(\frac{a'_{r+1}-u}{q'_{r+1}}\right) \le \sum_{u=a_{r+1}-b_r-t}^{a_{r+1}-1-t} \overline{\phi}\left(\frac{a'_{r+1}-u}{q'_{r+1}}\right)$ for $t \ge 0$. We put $t = a_{r+1}-b_r-1$ to get $\sum_{u=1}^{b_r} \overline{\phi}\left(\frac{a'_{r+1}-u}{q'_{r+1}}\right)$.

□

现在我们考察 $q_r > 1$ 的一般情形。为方便起见，我们定义一些进一步的简写记号:

定义 97。 定义 $C_{rs}^\alpha \phi := E_r \phi_{rsq_r}^\alpha + [\![q_r > 1]\!] O_r \phi_{rsq_{r-1}}^\alpha$（来自（7.20）及其双对偶 $C_{rs}^\alpha \phi := \overline{O}_r \overline{\phi}_{rsq_r}^\alpha + \overline{[\![q_r > 1]\!]} E_r \phi_{rsq_{r-1}}^\alpha$

对于 $\phi \in \Phi$（即单调递减且有下界），我们现在研究 $C_{rs}\phi$ 中 $q_r > 1$ 项的上界。

利用 α_{rst} 来自44 (**需要在此处清晰概述 α_{rst} 相关结果！！)可得:

(7.23)

$$
\begin{aligned}
C_{rs}\phi = \left(\phi^E_{rsq_r} + \phi^O_{rsq_{r-1}}\right) &= \phi^E\left(\frac{s+1}{q'_{r+1}}\right) + \phi^O\left(\frac{1}{q'_{r+2}} + \frac{a_{r+1}-s}{q'_{r+1}}\right) && r = n \\
&\geq \phi^E\left(\frac{1}{q'_{r+2}} + \frac{s+1}{q'_{r+1}}\right) + \phi^O\left(\frac{a_{r+1}-(s-1)}{q'_{r+1}}\right) && r < n \\
&\leq \phi^E\left(\frac{1}{q'_{r+2}} + \frac{s}{q'_{r+1}}\right) + \phi^O\left(\frac{a_{r+1}-s}{q'_{r+1}}\right) && r < n
\end{aligned}
$$

and

(7.24)

$$
\begin{aligned}
\overline{C}_{rs}\overline{\phi} = \left(\overline{\phi}^O_{rsq_r} + \overline{\phi}^E_{rsq_{r-1}}\right) &= \phi^O\left(\frac{s+1}{q'_{r+1}}\right) + \phi^E\left(\frac{1}{q'_{r+2}} + \frac{a_{r+1}-s}{q'_{r+1}}\right) && r = n \\
&\geq \phi^O\left(\frac{1}{q'_{r+2}} + \frac{s+1}{q'_{r+1}}\right) + \phi^E\left(\frac{a_{r+1}-(s-1)}{q'_{r+1}}\right) && r < n \\
&\leq \phi^O\left(\frac{1}{q'_{r+2}} + \frac{s}{q'_{r+1}}\right) + \phi^E\left(\frac{a_{r+1}-s}{q'_{r+1}}\right) && r < n
\end{aligned}
$$

按准周期对各项分组

在求和式（7.23）中，每个分数的分母的量级为 q'_{r+1}，但 $\phi^E_{rsq_r}$、$\phi^O_{rsq_r}$ 的上界是例外；对于 $s = 0$、$r < n$ (**checkr=0???)，其量级为 q'_{r+2}。

但是，当 ϕ 在 0^+ 处无界时，$\phi\left(\frac{1}{q'_r}\right)$ 的大小会敏感地依赖于 q'_r 的大小，因此我们现在将各项按分母分组，如下所示。

定义 98。令 C_r 表示双重和 $DS\phi = \sum_{r=0}^{n}\sum_{s=1}^{b_r-1} C_{rs}\phi$ 中分母为 q'_{r+1} 的各项之和，使得 $DS(\phi) = \sum_{r=0}^{n} C_r(\phi)$。

For $q_r = 1$, we have from (7.21) $C_r(\phi) = \sum_{s=1}^{b_r-1}\phi\left(\frac{s}{q'_{r+1}}\right)$ and $\overline{C}_r(\phi) = \sum_{s=1}^{b_r}\overline{\phi}\left(\frac{a_{r+1}-s}{q'_{r+1}}\right)$.

根据对（7.23）的观察，将分母为 q'_{r+2} 的项移项，可得 $r \geq 1$:

(7.25)

$$
\begin{aligned}
C_n(\phi) &= \sum_{s=0}^{b_n-1}\phi^E\left(\frac{s+1}{q'_{n+1}}\right) + \sum_{s=0}^{b_n-1}\phi^O\left(\frac{a'_{n+1}-s}{q'_{n+1}}\right) + [\![b_{n-1} > 0]\!]\, O_r\phi\left(\frac{1}{q'_{n+1}}\right) && r = n \\
C_r(\phi) &\leq \sum_{s=1}^{b_r-1}\phi^E\left(\frac{1}{q'_{r+2}} + \frac{s}{q'_{r+1}}\right) + \sum_{s=0}^{b_r-1}\phi^O\left(\frac{a_{r+1}-s}{q'_{r+1}}\right) + [\![b_{r-1} > 0]\!]\, O_r\phi\left(\frac{1}{q'_{r+1}}\right) && r < n
\end{aligned}
$$

注意，此时我们只是利用原始不等式（7.23）重新排列了各项。然而，除非处于周期部分商等特殊情形，否则很难利用（7.25）中的全部信息。本文关注一般情形，因此我们现在对（7.25）作一些放宽处理，得到的结果虽不够精确，但更便于使用。由于 ϕ 是递减的，我们有 $\phi^E\left(\begin{smallmatrix}1\\ q'_{r+2}\end{smallmatrix}+\begin{smallmatrix}s\\ q'_{r+1}\end{smallmatrix}\right)\le\phi^E\left(\begin{smallmatrix}s\\ q'_{r+1}\end{smallmatrix}\right)$ 且 $\phi^O\left(\begin{smallmatrix}a'_{r+1}-s\\ q'_{r+1}\end{smallmatrix}\right)\le\phi^O\left(\begin{smallmatrix}a_{r+1}-s\\ q'_{r+1}\end{smallmatrix}\right)$，

经过一些改写后，可得以下精度稍低但形式更统一的不等式：

$$(7.26)\quad C_n(\phi)\le\sum_{s=1}^{b_n}\phi^E\left(\frac{s}{q'_{n+1}}\right)+[\![b_{n-1}>0]\!]\,\phi^O\left(\frac{1}{q'_{n+1}}\right)+\sum_{s=0}^{b_n-1}\phi^O\left(\frac{a_{n+1}-s}{q'_{n+1}}\right)$$

$$C_r(\phi)\le\sum_{s=1}^{b_r-1}\phi^E\left(\frac{s}{q'_{r+1}}\right)+[\![b_{r-1}>0]\!]\,\phi^O\left(\frac{1}{q'_{r+1}}\right)+\sum_{s=0}^{b_r-1}\phi^O\left(\frac{a_{r+1}-s}{q'_{r+1}}\right)$$

注意，对于 r 偶数的情况，C_r 有 b_r-1 或 b_r（仅对于 $r=n$）个非零项；而对于 r 奇数的情况，C_r 有 b_r 或 b_r+1（对于 $b_{r-1}>0$）个非零项。下一节中我们将在一个特定应用中使用这种形式，但在许多情况下，我们可以进一步放宽不等式，直至消除这种不对称性。

我们首先利用 ϕ 递减这一事实，因此对于 $b_r<a_{r+1}$，有 $\sum_{s=0}^{b_r-1}\phi^O\left(\begin{smallmatrix}a_{r+1}-s\\ q'_{r+1}\end{smallmatrix}\right)=\sum_{s=a_{r+1}-(b_r-1)}^{a_{r+1}}\phi^O\left(\begin{smallmatrix}s\\ q'_{r+1}\end{smallmatrix}\right)\le\sum_{s=2}^{b_r+1}\phi^O\left(\begin{smallmatrix}s\\ q'_{r+1}\end{smallmatrix}\right)$。利用 $[\![b_{r-1}>0]\!]=1-[\![b_{r-1}=0]\!]$ 和 ϕ 递减这一事实，可得

$$[\![b_{r-1}>0]\!]\,\phi^O\left(\frac{1}{q'_{r+1}}\right)+\sum_{s=0}^{b_r-1}\phi^O\left(\frac{a_{r+1}-s}{q'_{r+1}}\right)\le\sum_{s=1}^{b_r+1}\phi^O\left(\frac{s}{q'_{r+1}}\right)-[\![b_{r-1}=0]\!]\,\phi^O\left(\frac{1}{q'_{r+1}}\right)$$

若 $b_r=a_{r+1}$ 我们有 $\sum_{s=0}^{b_r-1}\phi^O\left(\begin{smallmatrix}a_{r+1}-s\\ q'_{r+1}\end{smallmatrix}\right)=\sum_{s=1}^{a_{r+1}}\phi^O\left(\begin{smallmatrix}s\\ q'_{r+1}\end{smallmatrix}\right)$，并且还有

由（18）可知 $b_{r-1}=0$ 因此 $\sum_{s=0}^{b_r-1}\phi^O\left(\begin{smallmatrix}a_{r+1}-s\\ q'_{r+1}\end{smallmatrix}\right)=\sum_{s=1}^{a_{r+1}}\phi^O\left(\begin{smallmatrix}s\\ q'_{r+1}\end{smallmatrix}\right)$。

此外，我们有 $\phi^E\left(\begin{smallmatrix}1\\ q'_{r+2}\end{smallmatrix}+\begin{smallmatrix}s\\ q'_{r+1}\end{smallmatrix}\right)\le\phi^E\left(\begin{smallmatrix}s\\ q'_{r+1}\end{smallmatrix}\right)$ 和 $\phi^O\left(\begin{smallmatrix}a'_{r+1}-s\\ q'_{r+1}\end{smallmatrix}\right)\le\phi^O\left(\begin{smallmatrix}a_{r+1}-s\\ q'_{r+1}\end{smallmatrix}\right)$。因此，令 $c_r^\alpha=c(N,\ \alpha,\ r)=E_r(b_r-1+[\![r=n]\!])+O_r\min(b_r+1,\ a_{r+1})$，我们可以将关于 $2\le r\le n$ 的所有这些结果合并为：

$$(7.27)\qquad C_r(\phi)\le\sum_{s=1}^{c_r^\alpha}\phi\left(\frac{s}{q'_{r+1}}\right)-[\![b_{r-1}=0]\!]\,\phi^O\left(\frac{1}{q'_{r+1}}\right)$$

最后，如果 $\phi\left(\begin{smallmatrix}1\\ q'_{r+1}\end{smallmatrix}\right)\ge0$，我们可以将其化简为 $C_r\le\sum_{s=1}^{c_r}\phi\left(\begin{smallmatrix}s\\ q'_{r+1}\end{smallmatrix}\right)$。注意，对于$r$ 为奇数的情况，若 $b_{r-1}=0$，这会引入显著的误差；但如果我们不知道 $b_{r-1}=0$，就无法利用这一信息，而通常我们并不知道。

关于 ϕ 的论证完全类似，可得对于 $c_r^\alpha = c_r^\alpha = O_r(b_r - 1 + [\![r = n]\!]) + E_r \min(b_r + 1,\ a_{r+1})$，以及 $1 \le r \le n$：

$$\overline{C}_r^\alpha(\overline{\phi}) \le \sum_{s=1}^{\overline{c}_r^\alpha} \phi\left(\frac{s}{q'_{r+1}}\right) - [\![b_{r-1} = 0]\!]\,\phi^E\left(\frac{1}{q'_{r+1}}\right) \tag{7.28}$$

7.6. 结果总结。为方便起见，我们在此总结本节的结果。

回忆一下，$S_N\phi = \sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^{b_r-1} S_{rs}^\alpha \phi$ 其中 $S_{rs}^\alpha \phi = S_{q_r}^\alpha(\phi,\ \alpha_{rs}) = \sum_{t=1}^{q_r} \phi(\alpha_{rs} + t\alpha) = \sum_{t=1}^{q_r} \phi_{rst}^\alpha$。

引理 99 (单调函数的界)。 设 ϕ 为单调递减观测函数。那么对于 $r \ge 0$，我们有 $B_r^\alpha \phi \le \sum_{s=0}^{b_r-1} S_{rs}^\alpha \phi \le B_r^\alpha \phi$，其中 $\overline{B_r^\alpha}$、B_r^α 为界泛函：

(7.29)

$$B_r^\alpha \phi = [\![b_r > 0]\!] \left([\![q_r > 1]\!]\, b_r \left(P_{q_r} - \overline{\phi}(\frac{1}{q_r}) \right) + [\![2 < q_r < q_n]\!]\, E_r \left(\phi_{r0,q_r-q_{r-1}} - \overline{\phi}\left(\frac{2}{q_r}\right)\right) + \sum_{s=0}^{b_r-1} \left(\phi_{rsq_r} + [\![q_r > 1\right.\right.$$

(7.30)

$$\overline{B_{\overline{r}}^{\overline{\alpha}}}\phi = B_{\overline{r}}^{\overline{\alpha}}\overline{\phi} = [\![b_r > 0]\!] \left([\![q_r > 1]\!]\, b_r \left(P_{q_r} - \phi(\frac{1}{q_r}) \right) + [\![2 < q_r < q_n]\!]\, O_r \left(\phi_{r0,q_r-q_{r-1}} - \phi\left(\frac{2}{q_r}\right)\right) + \sum_{s=0}^{b_r-1} \left(\phi_{rsq_r} + \right.\right.$$

引理 100 （原函数的上界）。 设 $\phi \in \Phi$ 为定义在 $(0,1)$ 上的单调递减正函数集合。则对于 $q_r > 2$，我们有：

(7.31)

$$B_r^\alpha \phi \le [\![b_r > 0]\!] \left(b_r P_{q_r} + [\![2 < q_r < q_n]\!]\, E_r \left(\phi_{r0,q_r-q_{r-1}}^\alpha - \overline{\phi}\left(\frac{1}{q_r}\right)\right) + \sum_{s=0}^{b_r-1} \left(E_r \phi_{rsq_r}^\alpha + O_r \phi_{rsq_{r-1}}^\alpha \right) \right)$$

(7.32)

$$\overline{B_{\overline{r}}^{\overline{\alpha}}}\overline{\phi} \le [\![b_r > 0]\!] \left(b_r P_{q_r} + [\![2 < q_r < q_n]\!]\, O_r \left(\overline{\phi}_{r0,q_r-q_{r-1}}^\alpha - \overline{\phi}\left(\frac{1}{q_r}\right)\right) + \sum_{s=0}^{b_r-1} \left(O_r \overline{\phi}_{rsq_r}^\alpha + E_r \overline{\phi}_{rsq_{r-1}}^\alpha \right) \right)$$

定义 101. 我们定义 $C_{rs}^\alpha \phi := E_r \phi_{rsq_r}^\alpha + O_r \phi_{rsq_{r-1}}^\alpha$ 及其拟周期对偶 $\overline{C}_{rs}^\alpha \phi$：$= \overline{O_r}\phi_{rsq_r}^\alpha + \overline{E_r}\phi_{rsq_{r-1}}^\alpha$。令 C_r 为双重和 $DS\phi = \sum_{r=0}^n \sum_{s=1}^{b_r-1} C_{rs}\phi$ 中分母为 q'_{r+1} 的项之和，使得 $DS(\phi) = \sum_{r=0}^n C_r(\phi)$。并且 $S_N^\alpha \phi \le \sum_r B_r^\alpha \phi \le \sum_r SS_r^\alpha \phi + C_r^\alpha \phi$

(7.33)

$$C_n(\phi) = \sum_{s=1}^{b_n} \phi^E\left(\frac{s}{q'_{n+1}}\right) + \sum_{s=0}^{b_n-1} \phi^O\left(\frac{a'_{n+1}-s}{q'_{n+1}}\right) + [\![b_{n-1} > 0]\!]\, O_r\phi\left(\frac{1}{q'_{n+1}}\right) \qquad r = n$$

$$C_r(\phi) \le \sum_{s=1}^{b_r-1} \phi^E\left(\frac{1}{q'_{r+2}} + \frac{s}{q'_{r+1}}\right) + \sum_{s=0}^{b_r-1} \phi^O\left(\frac{a_{r+1}-s}{q'_{r+1}}\right) + [\![b_{r-1} > 0]\!]\, O_r\phi\left(\frac{1}{q'_{r+1}}\right) \quad r < n$$

将 $c_r^\alpha = c(N,\alpha,r) = E_r(b_r - 1 + [\![r=n]\!]) + O_r\min(b_r+1, a_{r+1})$ 写出后，得到

$$C_r(\phi) \le \sum_{s=1}^{c_r^\alpha} \phi\left(\frac{s}{q'_{r+1}}\right) - [\![b_{r-1}=0]\!]\,\phi^O\left(\frac{1}{q'_{r+1}}\right) \tag{7.34}$$

8. 函数族 $\theta^\beta(x) = x^{-\beta}$，$\beta \ge 1$ 的应用

也可以涵盖 $0 \le \beta < 1$，但这很繁琐，值得吗？？？

上一节中，我们建立了适用于任意合适的递减观测函数 ϕ 的不等式。本节将进一步针对特殊函数族 $\theta^\beta(x) = x^{-\beta}$（其中 $\beta \ge 1$.）发展这些不等式。（对于 $\beta \le 1$ $S_N\theta^\beta$，可以结合观测函数 $0 < \beta < 1$ 的截断形式技巧，利用 Denjoy-Koksma(**) 结果进行估计。）

我们回顾上一节的结论：$S_N\phi$ 的下界可以用直接的方法研究，但上界则更复杂，我们将分部分讨论。具体而言，S_N 自然地分解为三部分之和：
$S_N\phi \le \left(S_N^1 + S_N^2 + S_N^3\right)\phi$ 其中

$$S_N^1\phi = \sum_{r=0}^{n} [\![b_r > 0]\!]\, b_r P_{q_r}(\phi) \tag{8.1}$$

$$S_N^2\phi = \sum_{r=0}^{n} [\![b_r > 0]\!]\,[\![2 < q_r < q_n]\!]\, E_r\left(\phi_{r0,q_r-q_{r-1}} - \overline{\phi}\left(\frac{1}{q_r}\right)\right) \tag{8.2}$$

$$S_N^3\phi = \sum_{r=0}^{n} [\![b_r > 0]\!] \sum_{s=0}^{b_r-1} \left(E_r\phi_{rsq_r} + O_r\phi_{rsq_{r-1}}\right) = \sum_{r=0}^{n} C_r\phi \tag{8.3}$$

注意，前两个是单重和，而第三个是双重和。此外，当 ϕ 反对称时，$S_N^1\phi$ 恒为零（**）。
从此处起，我们假设 α 固定不变，可以从符号表示中省略，并且 N 的典范 Ostrowski 表示为$N = \sum_{r=0}^{n} b_r q_r$。

8.1. **一些辅助引理**。下面的函数将在本节中发挥重要作用：

定义 102（广义调和函数）。对于 $y > 0$，我们定义 $H_k^\beta(y) := \sum_{s=0}^{k-1}(y+s)^{-\beta}$（其中 $H_k^\beta(y) := 0$，适用于 $k \le 0$）。我们还记作 $H_k^\beta := H_k^\beta(1)$。

注意，这是一个关于 y 递减、关于 k递增的正函数。因此，对于 $y \ge 1$，有 $H_k^\beta(y) \le H_k^\beta < H_\infty^\beta = \zeta(\beta)$。所以，对于 $\beta > 1$ $H_k^\beta(y)$，其为 $O(1)$，但随着 $\beta \downarrow 1$，常数会变得任意大。

命题 103. $N \ge b_n q_n > \frac{b_n}{b_n+1} N \ge \frac{1}{2} N$ –

证明。根据定义 $N < (b_n+1)\,q_n$，左侧不等式立即成立。右侧不等式则由 $b_n \ge 1$ 得出。□

这样得到的结论虽然不够精确，但更易于理解。

引理 104. 假设 $\beta \geq 1$ 那么 $\sum_{r=0}^{n-1} [\![b_r > 0]\!] q_r^\beta \leq \sum_{r=0}^{n-1} b_r q_r^\beta < q_n^\beta$

证明. 第一个不等式显然成立。对于 $\beta \geq 1$, $\sum_{r=0}^{n-1} b_r q_r^\beta \leq \left(\sum_{r=0}^{n-1} b_r q_r\right)^\beta$ 和 $\sum_{r=0}^{n-1} b_r q_r = N - b_n q_n < q_n$。 □

推论 105. $\sum_{r=0}^{n} [\![b_r > 0]\!] q_r^\beta \leq$ 最小值 $\left(2q_n^\beta,\ N^\beta\right)$ 和 $\sum_{r=0}^{n-1} [\![b_r > 0]\!] q_r^\beta <$ 最小值 $\left(2q_{n-1}^\beta, q_n^\beta\right)$

推论 106. 对于 $\phi x = (1-x)^{-\beta}$, $\beta \geq 1$ 由 *(48)*，对于 $r > 0$，我们有 $\phi^E_{r0,\ q_r - q_{r-1}} \leq \phi\left(\frac{1}{2q_r}\right) = (2q_r)^\beta$，并且还有 $\phi^O_{r0,\ q_r - q_{r-1}} \leq \phi\left(\frac{1}{2q_r}\right)$，因此也有 $\sum_{r=0}^{n-1} [\![b_r > 0]\!] \left(\phi^E_{r0, q_r - q_{r-1}} + \phi^O_{r0, q_r - q_{r-1}}\right) \leq \sum_{r=0}^{n-1} [\![b_r > 0]\!] \phi\left(\frac{1}{2q_r}\right) \leq 2^\beta q_n^\beta$. 由引理 $\sum_{r=1}^{n-1} \phi^E_{r0,\ q_r - q_{r-1}} + \phi^O_{r0,\ q_r - q_{r-1}} \leq 2^\beta q_n^\beta$。</output>

同样 $\sum_{r=1}^{n-1} \phi^E\left(\frac{2}{q_r}\right) + \phi^O\left(\frac{2}{q_r}\right) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^\beta q_n^\beta$

引理107 (广义调和函数)。 有以下结果：

$P_{q_r} \theta^\beta \leq \sum_{t=1}^{q_r - 1} \frac{q_r^\beta}{t^\beta} = q_r^\beta H^\beta_{q_r - 1}$.
对于 $\beta = 1$, $k \geq 1$ 我们有对数 $\left(1 + \frac{k}{y}\right) < H_k(y) \leq \frac{1}{y} +$ 对数 $\left(1 + \frac{k-1}{y}\right)$。对于 $y = 1$，这给出对数 $(1+k) < H_k \leq 1 +$ 对数 k

For $\beta > 1, k \geq 1$ we have $\frac{1}{\beta - 1}\left(\frac{1}{y^{\beta-1}} - \frac{1}{(y+k)^{\beta-1}}\right) < H_k^\beta(y) \leq \frac{1}{y^\beta} + \frac{1}{\beta - 1}\left(\frac{1}{y^{\beta-1}} - \frac{1}{(y+k-1)^{\beta-1}}\right)$.
最后，一个有用的平凡估计适用于 $n \geq 0$ $H_n^\beta \leq [\![n > 0]\!] \left(1 + \left(\frac{1}{2^\beta}\right)(n-1)\right)$（当 $n \in \{1, 2\}$ 时取等号），它还给出 $H_{n+1} \leq 1 + \frac{1}{2}n$ 和 $H_{n-1} \leq \frac{1}{2}n$

根据定义， $H_n^\beta = 0$ 对于 $n \leq 0$。

对于 $i \geq j \geq 0$,

$$H^\beta_{i-j}(j+1) = H_i^\beta - H_j^\beta = \sum_{k=j+1}^{i} \frac{1}{t^\beta} \leq \frac{1}{(j+1)^\beta}(i-j) \tag{8.4}$$

并且对于 $i \geq 1$， $H_i^\beta \leq 1 + \sum_{t=2}^{i} \frac{1}{t^\beta} \leq 1 + \frac{1}{2^\beta}$（$i \geq 1$）。特别是，对于 $\beta = 1$，我们得到对于 $n \geq 0$

$$H_n \leq [\![n > 0]\!] \frac{1}{2}(n+1)) \tag{8.5}$$

（$n \leq 2$ 的等式），这也给出了 $H_{n+1} \leq 1 + \frac{1}{2}n$ 与 $H_{n-1} \leq \frac{1}{2}n$

$Q_r \leq E_r\left(\frac{1}{2}b_r + 1\right) + O_r\left(\frac{1}{2}b_r\right) = E_r + \frac{1}{2}b_r$

8.2. 的下界利用广义调和函数 H^{β}。数学界对这些求和的上界最为关注，因此我们也将主要讨论这些上界。不过，我们先花一点时间推导一些关于下界的简单结果。

由于 $\theta^{\beta}>0$我们有简单而粗略的下界 $S_N\theta^{\beta}=\sum_{r=0}^{n}S_{b_rq_r}\theta^{\beta}\geq S_{b_nq_n}\theta^{\beta}$ （其中 $N=\sum_{r=0}^{n}b_rq_r$）。回想一下，我们将 α 视为固定量，并在符号表示中省略它，因此由（7.8）、（7.7）可得：

$$\sum_{s=0}^{b_r-1}S_{rs}\phi\geq\overline{B}_r\phi=$$

$$[\![b_r>0]\!]\left([\![q_r>1]\!]\,b_r\left(P_{q_r}-\phi(\frac{1}{q_r})\right)+[\![2<q_r<q_n]\!]\,O_r\left(\phi_{r0,q_r-q_{r-1}}-\phi\left(\frac{2}{q_r}\right)\right)+\sum_{s=0}^{b_r-1}\left(\phi_{rsq_r}+[\![q_r>1]\!]\,\phi_{rsq_{r-}}\right.\right.$$

$$\sum_{s=0}^{b_r-1}S_{rs}\overline{\phi}\geq B_r^{\alpha}\overline{\phi}=$$

$$[\![b_r>0]\!]\left([\![q_r>1]\!]\,b_r\left(P_{q_r}-\phi(\frac{1}{q_r})\right)+[\![2<q_r<q_n]\!]\,E_r\left(\overline{\phi}_{r0,q_r-q_{r-1}}-\phi\left(\frac{2}{q_r}\right)\right)+\sum_{s=0}^{b_r-1}\left(\overline{\phi}_{rsq_r}+[\![q_r>1]\!]\,\overline{\phi}_{rsq_{r-}}\right.\right.$$

因此 $S_N\theta^{\beta}\geq S_{b_nq_n}\theta^{\beta}=\sum_{s=0}^{b_n-1}S_{ns}\theta^{\beta}\geq B_n\theta^{\beta}$。
注意，对于 $q_n>1$, $B_n\theta^{\beta}=b_n\left(P_{q_n}-\theta^{\beta}(\frac{1}{q_n})\right)+\sum_{s=0}^{b_n-1}\left(\theta^{\beta}_{nsq_n}+\theta^{\beta}_{nsq_{n-1}}\right)$。对于任意 $1<q_r\leq q_n$, $P_{q_r}-\theta^{\beta}(\frac{1}{q_r})=q_r^{\beta}H^{\beta}_{q_r-1}-q_r^{\beta}=q_r^{\beta}\left(H^{\beta}_{q_r-1}-1\right)$。

对于 n 偶数 $\sum_{s=0}^{b_n-1}\theta^{\beta}_{nsq_n}=q'^{\beta}_{n+1}H^{\beta}_{b_n}$ 且 $\sum_{s=0}^{b_n-1}\theta^{\beta}_{nsq_{n-1}}>\sum_{s=0}^{b_n-1}1=b_n$。对于 n 奇数 $\sum_{s=0}^{b_n-1}\theta^{\beta}_{nsq_n}\geq b_n$ 且 $\theta^{\beta}_{nsq_{n-1}}>\binom{q'_{n+1}}{a'_{n+1}-s}>q'^{\beta}_n$，得到

$\sum_{s=0}^{b_n-1}\theta^{\beta}_{nsq_{n-1}}>b_nq'^{\beta}_n$。因此，对于 $q_n>1$

$$S_{b_nq_n}\theta^{\beta}>b_nq_n^{\beta}\left(H^{\beta}_{q_n-1}-1\right)+E_nq'^{\beta}_{n+1}H^{\beta}_{b_n}+O_nb_nq'^{\beta}_n+b_n \tag{8.6}$$

利用 QP 对偶，这也给出 $q_n>1$

$$S_{b_nq_n}\overline{\theta}^{\beta}>b_nq_n^{\beta}\left(H^{\beta}_{q_n-1}-1\right)+O_nq'^{\beta}_{n+1}H^{\beta}_{b_n}+E_nb_nq'^{\beta}_n+b_n \tag{8.7}$$

$$S_{b_nq_n}\left(\theta^{\beta}+\overline{\theta}^{\beta}\right)>2b_nq_n^{\beta}\left(H^{\beta}_{q_n-1}-1\right)+q'^{\beta}_{n+1}H^{\beta}_{b_n}+b_nq'^{\beta}_n+2b_n \tag{8.8}$$

我们推导出了 H 式（107）中各项的估计。

8.3. 利用广义调和函数 $S_N\theta^\beta$ 给出的上界 H^β。回想一下，我们已将伯克霍夫和 $S_N\phi$ 分解为三个分量和$S_N^1\phi + S_N^2\phi + S_N^3\phi$,。现在我们来研究函数$\theta^\beta$的这三个分量和。

单和分量 $S_N^1\theta^\beta$与 $S_N^2\theta^\beta$由 **(8.1)** 可得 $S_N^1(\theta^\beta) = \sum_{r=0}^n b_r P_{q_r}(\theta^\beta) \le \sum_{r=0}^n b_r q_r^\beta H_{q_r-1}^\beta$。由于 P_{q_r}是对称的，因此 S_N^1也对称，即 $S_N^1(\theta^\beta) = S_N^1(\theta^\beta)$。此外，由 (8.2) 可得 $S_N^2(\theta^\beta) = \sum_{r=0}^n [\![b_r > 0]\!] [\![2 < q_r < q_n]\!] E_r\left(\theta_{r0,q_r-q_{r-1}}^\beta - \theta^\beta\left(\frac{1}{q_r}\right)\right) \le \sum_{r=0}^n [\![b_r > 0]\!] [\![2 < q_r < q_n]\!] E_r\left(\theta^\beta\left(\frac{1}{2q_r}\right) - 1\right)$

注意到 $E_r\left(\theta^\beta\left(\frac{1}{2q_r}\right) - 1\right) = E_r\left((2q_r)^\beta - 1\right)$，并运用 QP对偶性，可得：

$$\left(S_N^1 + S_N^2\right)\theta^\beta \le \sum_{r=0}^n [\![b_r > 0]\!] \left(b_r q_r^\beta H_{q_r-1}^\beta + [\![2 < q_r < q_n]\!] E_r\left((2q_r)^\beta - 1\right)\right)$$

$$\left(S_N^1 + S_N^2\right)\overline{\theta}^\beta \le \sum_{r=0}^n [\![b_r > 0]\!] \left(b_r q_r^\beta H_{q_r-1}^\beta + [\![2 < q_r < q_n]\!] O_r\left((2q_r)^\beta - 1\right)\right)$$

双重和分量 $S_N^3\theta^\beta$ 使用调和函数的初步估计 由 **(**)** 可得 $S_N^3\theta^\beta = \sum_{r=0}^n C_r\theta^\beta$ 并且由 **(**)** 可得

(8.9)

$$C_n(\phi) = E_n \sum_{s=1}^{b_n} \phi\left(\frac{s}{q'_{n+1}}\right) + O_n\left(\sum_{s=0}^{b_n-1} \phi\left(\frac{a'_{n+1}-s}{q'_{n+1}}\right) + [\![b_{n-1} > 0]\!]\,\phi\left(\frac{1}{q'_{n+1}}\right)\right) \qquad r = n$$

$$C_r(\phi) \le E_r \sum_{s=1}^{b_r-1} \phi\left(\frac{s + (a'_{r+1} - a_{r+1})}{q'_{r+1}}\right) + O_r\left(\sum_{s=0}^{b_r-1} \phi\left(\frac{a_{r+1}-s}{q'_{r+1}}\right) + [\![b_{r-1} > 0]\!]\,\phi\left(\frac{1}{q'_{r+1}}\right)\right) \quad r < n$$

由于 $\theta^\beta\left(\frac{s}{q'_{r+1}}\right) = \frac{1}{s^\beta} q'^\beta_{r+1}$，将 $\phi = \theta^\beta$代入上述方程可得$C_r\left(\theta^\beta\right) = Q_r q'^\beta_{r+1}$ 其中某个系数为 Q_r。现在可以用广义调和函数表示上式右端的求和：

(8.10)

$$C_n(\phi) = Q_n q'^\beta_{n+1} \le \left(E_n H_{b_n}^\beta + O_n\left(H_{b_n}^\beta(a'_{n+1} - b_n + 1) + [\![b_{n-1} > 0]\!]\right)\right) q'^\beta_{n+1}$$

(8.11)

$$\le \left(E_n H_{b_n}^\beta + O_n\left(H_{b_n}^\beta(a_{n+1} - b_n + 1) + [\![b_{n-1} > 0]\!]\right)\right) q'^\beta_{n+1} \qquad r = n$$

$$C_r(\phi) = Q_r q'^\beta_{r+1} \le \left(E_r H_{b_r-1}^\beta(1 + (a'_{r+1} - a_{r+1})) + O_r\left(H_{b_r}^\beta(a_{r+1} - b_r + 1) + [\![b_{r-1} > 0]\!]\right)\right) q'^\beta_{r+1}$$

(8.12)

$$\le \left(E_r H_{b_r-1}^\beta + O_r\left(H_{b_r}^\beta(a_{r+1} - b_r + 1) + [\![b_{r-1} > 0]\!]\right)\right) q'^\beta_{r+1} \qquad r < n$$

一些改进的估计

对于 r 奇数，我们有 $Q_r = H^{\beta}_{b_r}(a_{r+1} - b_r + 1) + [\![b_{r-1} > 0]\!]$，现在将对此进行更仔细的考察。回顾可知，若 $b_r = a_{r+1}$，则 $b_{r-1} = 0$，因此 $Q_r = H^{\beta}_{a_{r+1}}$。若 $b_r < a_{r+1}$，则 $H^{\beta}_{b_r}(a_{r+1} - b_r + 1) \le H^{\beta}_{b_r}(2) = H^{\beta}_{b_r+1} - 1$，因此（对于 r 奇数）$Q_r \le H^{\beta}_{b_r+1} - [\![b_{r-1} = 0]\!]$。于是我们可以设

(8.13)

$c^{\alpha}_r = c(N, \alpha, r) = E_r(b_r - [\![b_r > 0]\!] + [\![r = n]\!]) + O_r$ 最小值$(b_r + [\![b_{r-1} > 0]\!], a_{r+1}) \le b_r + 1$

得到

$$Q_r \le H^{\beta}_{c_r} - O_r [\![b_{r-1} = 0]\!] \tag{8.14}$$

并且我们有 $H^{\beta}_{c_r} \le \min\left\{\zeta(\beta)\ [\![c_r > 0]\!] + \text{对数}^{+}\ c_r\right\} \le \min\{\zeta(\beta)\ 1 + \text{对数}\ a_{r+1}\}$ 以及 $H_{c_r} \le [\![c_r > 0]\!]\ \frac{1}{2}(1 + c_r)$ ——见引理 107 因此，对于 $\beta = 1$ 与 $r < n$ 我们有

$$Q_r \le E_r \frac{1}{2}(1 + (b_r - 1)) + O_r\left(\frac{1}{2}b_r + [\![b_{r-1} > 0]\!]\right) \le O_r + \frac{1}{2}b_r \tag{8.15}$$

.

注意，在偶数和奇数情形下，Q_r 的估计都会随 b_r增加。然而，偶数情形的估计从 $H_1 = 1$ 开始，且增量逐渐减小；而奇数情形的估计起点较低，为 $H^{\beta}_1(a^{/}_{r+1}) = \frac{1}{a^{/\beta}}$ $\overline{}_{r}$ $_{+1}$ 但增量逐渐增大。

随着 b_r 增加，估计值会收敛。因此，每个 Q_r 估计值在$b_r = a_{r+1}$时达到最大。然而，对于每个 r，和 $\sum Q_r q^{/\beta}_{r+1}$ 可能不会在 $b_r = a_{r+1}$ 时达到最大，因为每个 $b_r = a_{r+1}$ 都会迫使 $b_{r-1} = 0$，从而减小 Q_{r-1}的大小。因此，为了使双重和分量最大化，我们还需要考察 $b_r = a_{r+1} - 1$的情形：

对于 $a_{r+1} > 1$，当 r 为奇数时，我们便有 $Q_r < H^{\beta}_{b_r}(2) + [\![b_{r-1} > 0]\!]$；若 $b_{r-1} > 0$，则得出 $Q_r \le H^{\beta}_{a_{r+1}-1}$（等号仅在 $a_{r+1} = 1$，$b_{r-1} > 0$时成立）。

当 r 为偶数时，我们得到 $Q_r \le H^{\beta}_{a_{r+1}-2}$。

在所有情况下：

$$Q_r \le H^{\beta}_{c_r} \le \min\{\zeta(\beta), 1 + \log^{+} c_r\} \le \min\{\zeta(\beta), 1 + \log a_{r+1}\} \tag{8.16}$$

现在，对于 $\beta > \beta_0 \approx 1.73$，$\zeta(\beta) < 2$；对于 $a_{r+1} \ge 3$，$\log a_{r+1} > 1$。因此，当 β 的值较大时，$Q_r < \zeta(\beta)$ 是更好的估计；但当 β 的值接近 1 时，$Q_r < 1 + \log c_r$ 是更好的估计。当然，对于 $\beta = 1$ $Q_r \le 1 +$，$\log^{+} c_r$（仅当 $c_r \le 1$ 时取等号）始终是更好的估计。$a_{r+1} = 1$ 的情况还需要进一步考虑。

因此，当 $N = \sum b_r q_r$ 且 $b_r = a_{r+1} - 1$ 时，估计达到最大值（$a_{r+1} = 1$ 除外）

8.4. **利用调和函数的估计**。 这里我们使用小节 8.1 中建立的辅助估计。单和分量 $S^1_N\theta^{\beta}$，$S^2_N\theta^{\beta}$我们有 $SS_r(\theta^{\beta})$

$= S^1_N\theta^{\beta} + S^2_N\theta^{\beta} \le [\![b_r > 0]\!]\left(b_r q^{\beta}_r H^{\beta}_{q_r-1} + [\![2 < q_r < q_n]\!]\, E_r\left((2q_r)^{\beta} - 1\right)\right)$当 $q_r \ge 1$。

现在，对于 $\beta \ge 1$、$H^{\beta}_{q_r-1} < \zeta(\beta)$，因此有 $\sum_{r=0}^{n} b_r q^{\beta}_r H^{\beta}_{q_r-1} < \sum_{r=0}^{n} b^{\beta}_r q^{\beta}_r \zeta(\beta) \le N^{\beta}\zeta(\beta)$，以及 $\sum_{r=0}^{n} b_r q^{\beta}_r H^{\beta}_{q_r-1} \le \sum_{r=0}^{n} b_r q_r H_{q_r-1} \le N(1 + \text{对数}\ q_n)$，从而得到：

$$S^1_N\theta^{\beta} = S^1_N\overline{\theta}^{\beta} < N^{\beta}\min\{\zeta(\beta), 1 + \log q_n\} \tag{8.17}$$

由（105）可得 $\sum_{r=0}^{n}[\![b_r>0]\!][\![2<q_r<q_n]\!]E_rq_r^{\beta}<\sum_{r=0}^{n-1}[\![b_r>0]\!]E_rq_r^{\beta}\le O_n$ 最小值 $\left(\frac{1}{1-2^{-\beta}}q_{n-1}^{\beta},q_n^{\beta}\right)+E_n$ 最小值 $\left(\frac{1}{1-2^{-\beta}}q_{n-2}^{\beta},q_{n-1}^{\beta}\right)$

来自小节 8。1 $\sum_{r=0}^{k}\frac{1}{2^{r\beta}}<\frac{1}{1-\frac{1}{2^{\beta}}}=\frac{2^{\beta}}{2^{\beta}-1}=1+\frac{1}{2^{\beta}-1}$ 因此

(8.18)

$$S_N^2\theta^{\beta}\le\sum_{r=0}^{n}[\![b_r>0]\!][\![2<q_r<q_n]\!]E_r\left((2q_r)^{\beta}-1\right)<2^{\beta}\left(O_n\min\left\{\frac{q_{n-1}^{\beta}}{1-2^{-\beta}},q_n^{\beta}\right\}+E_n\min\left\{\frac{q_{n-2}^{\beta}}{1-2^{-\beta}},q_{n-1}^{\beta}\right\}\right)\le$$

注意，由于 $q_r=a_rq_{r-1}+q_{r-2}$，如果 $a_r>1$ 那么 $q_r^{\beta}>(2q_{r-1})^{\beta}\ge\frac{q_{r-1}^{\beta}}{1-2^{-\beta}}$ 对于 $\beta\ge1$。如果 $a_r=1$，情况就更加复杂。然而，在 $\beta=1$ 的情况下，我们确实有 $q_r<2q_{r-1}$，对于 $a_r=1$。根据对偶性，对于 θ^{β} 也有相同的结果，但需将E_n，O_n 互换。这也给出了

(8.19)

$$S_N^2\left(\theta^{\beta}+\overline{\theta}^{\beta}\right)<2^{\beta}\left(\min\left\{\frac{q_{n-1}^{\beta}}{1-2^{-\beta}},q_n^{\beta}\right\}+\min\left\{\frac{q_{n-2}^{\beta}}{1-2^{-\beta}},q_{n-1}^{\beta}\right\}\right)\le2^{\beta}(q_n^{\beta}+q_{n-1}^{\beta})$$

双重和分量 $S_N^3\theta^{\beta}$ - 初步朗道估计 本节将介绍估计双重和的三种主要方法，并用它们通过朗道（大O）记号得出快速估计。下一节中，我们将更仔细地使用这些方法来估计显式常数。

现在我们来考察 $S_N\theta^{\beta}$ 的双重和分量，即 $S_N^3\theta^{\beta}=\sum_{r=0}^{n}C_r\left(\theta^{\beta}\right)=\sum_{r=0}^{n}Q_rq_{r+1}^{/\beta}$。这显然是所有待估计项中最复杂的一项，部分原因是它不规则，部分原因是其估计在审美上相当不尽如人意。若你追求估计之美，那还是另请高明吧！

另一个问题是，尽管对于 $r<n$，$q_{r+1}^{/}=O(N)$，但对于 $r=n$，项 $q_{n+1}^{/}$ 可以任意大于 N。这意味着，除非我们对 α 的类型施加限制（例如，常型的 α 给出 $q_{n+1}^{/\beta}=O(N)$），否则无法期望仅用 N 来建立一般估计；这种方法过去经常被采用。否则，估计就必须同时依赖于 N 和 α。我们首先研究一般的 α，然后也考察限制 α 所产生的影响。

文献中已发展出多种方法，用于研究函数 θ 以及若干相关函数。这些方法在不同语境中的呈现方式差异很大，因此在概念、术语和符号表示方面难以比较。不过，我们在本文中发展出的理论结构表明，可以将它们有意义地归为两大类方法之一。本文还将探讨第三种方法，它往往能得到稍好的结果。然而，每种方法都有其优缺点；事实上，对于每种方法，我们都能找到一些 α，N 的组合，使该方法得出最佳估计。

我们首先注意到，可以写成 $S_N^3\theta^{\beta}=\sum_{r=0}^{n}C_r\theta^{\beta}=\sum_{r=0}^{n}Q_rq_{r+1}^{/\beta}$，其中 Q_r 是一个正实数。这意味着我们要估计乘积和 $\sum_{r=0}^{n}Q_rq_{r+1}^{/\beta}$，其中所有项均为正。最显而易见的方法是分部求和，但遗憾的是，这似乎并不能给我们带来太大帮助

。因此，我们只能满足于不那么复杂的方法，我们将其称为提取估计：

定义 108. 给定正实数序列 a_i，b_i，c_i (其中 $c_i \neq 0$)，以及乘积和 $\sum_{i=0}^{n} a_i b_i$，则我们将“通过提取c_i得到的估计”定义为 $\left(\max^{i\leq n}\binom{b_i}{c_i}\right)\sum_{i=0}^{n} a_i c_i$。在特殊情形 $c_i = 1$ 下，该定义变为 $(\max_{i\leq n} b_i)\sum_{i=0}^{n} a_i$，我们将其改称为“通过提取 b_i得到的估计”。

注意，$\sum_{i=0}^{n} a_i b_i = \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{b_i}{c_i} c_i \leq \left(\max^{i\leq n}\binom{b_i}{c_i}\right) \sum_{i=0}^{n} a_i c_i$，因此该估计是 $\sum_{i=0}^{n} a_i b_i$ 的上界。

现在回到求和式 $\sum_{r=0}^{n} Q_r q_{r+1}^{/\beta}$，我们可以立即看出，通过提取来估计这个求和式有 3 种自然方法：即令 $c_i = 1$，然后提取 Q_r 或 $q_{r+1}^{/\beta}$；或者提取另一项 $c_i \neq 1$。文献中的大多数方法会提取拟周期项 $q_{r+1}^{/\beta}$，其余方法则提取 α 的一种“类型”（回想一下，类型给出了拟周期 q_r 的增长界）。由此分析可见，还有一个显而易见的第 3 种候选方法，即提取 Q_r，也就是 $q_{r+1}^{/\beta}$ 的系数。我们将看到，后一种方法往往能给出最佳结果，但我们尚未在文献中发现这种方法。这似乎令人惊讶，因此也可能只是我们遗漏了它。

我们将这些方法分别称为拟周期提取、类型提取和系数提取，即 A、B、C。下文将看到，从一般意义上说，这也使它们按准确性逐步提高的顺序排列。为方便起见，对于实数序列 (x_i)，我们还引入如下符号表示 $M_n x_i := \max\{x_i : i \leq n\}$。

现在，我们对这 3 种方法分别作一些总体评述 A，B，C。
方法 A（准周期提取）：$S_N^3 \theta^\beta = \sum_{r=0}^{n} Q_r q_{r+1}^{/\beta} \leq q_{n+1}^{/\beta} \sum_{r=0}^{n} Q_r$这种方法会提取最大的项，即拟周期项（$q_{n+1}^{/\beta}$），通常不会得出最佳结果。不过，它历来是最常用的方法，而且对于 $\beta = 1$，它可以使用优雅的不等式 $\sum_{r=0}^{n} \log a_{r+1} = \log \prod_{r=0}^{n} a_{r+1} \leq \log q_{n+1}$（仅当 n =0 时取等号）。这个不等式在形式上更简洁，但遗憾的是并不能提高精度。$S_N^{3A}\theta^\beta$ 的数量级：$= q_{n+1}^{/\beta} \sum_{r=0}^{n} Q_r$ 我们有 $\sum_{r=0}^{n} Q_r \leq \min\{(n+1)\zeta(\beta), (n+1) + \sum_{r=0}^{n} \log c_r\}$。现在，对于 $q_n > 1$，$n = O(\log q_n)$，且$\sum_{r=0}^{n} \log c_r \leq \sum_{r=0}^{n} \log a_{r+1} \leq \log q_{n+1}$。因此，利用 $q_{n+1}^{/} = O(q_{n+1})$，我们得到：对于 $\beta > 1$，$S_N^{3a}\theta^\beta = O(q_{n+1}^{/\beta} \log q_n)$；而对于 $\beta = 1$ $S_N^{3A}\theta^\beta = O$，则为$(q_{n+1}^{/} \log q_{n+1})$
方法 B（类型提取）：$\sum_{r=0}^{n} Q_r q_{r+1}^{/\beta} \leq \left(\max_{r\leq n} \frac{q_{r+1}^{/\beta}}{q_r^\beta}\right) \sum_{r=0}^{n} Q_r q_r^\beta$。此方法提取上类型函数 $A_{n+1}^{/\beta} = \max_{r\leq n} q_{r+1}^{/\beta}/q_r^\beta$，这是一个比方法 A 中的项 $q_{n+1}^{/\beta}$ 小得多的项。它不如方法 C 提取的项小，但其优点是自然会得到涉及 N 而非 q_n 的结果。此方法由 Lang 提出，但我们将以不同于 Lang 的方式应用它，以得出改进后的结果（比较见 ##pa- per）。$S_N^{3B}\theta^\beta$ 的数量级：$= A_{n+1}^{/\beta} \sum_{r=0}^{n} Q_r q_r^\beta$ Note $A_{n+1}^{/} = O(A_{n+1})$，且对于 $\beta \geq 1$ $\sum_{r=0}^{n} Q_r q_r^\beta = O\left(\sum_{r=0}^{n}(1+b_r)q_r^\beta\right) = O(N^\beta) =$

$O(q_{n+1}^{\beta})$。因此 $S_N^{3b}\theta^{\beta} = O(A_{n+1}^{\beta}q_{n+1}^{\beta})$ $(\beta \geq 1)$。方法 C（系数提取）：$\sum_{r=0}^{n} Q_r q_{r+1}^{/\beta} \leq (\max_{r\leq n} Q_r)\sum_{r=0}^{n} q_{r+1}^{/\beta}$ 此方法提取最小的项，即最大系数（$\max_{r\leq n} Q_r$），通常会得出最准确的结果。遗憾的是，它得出的结果也最不优雅。$S_N^{3C}\theta^{\beta}$ 的数量级：$= (\max_{r\leq n} Q_r)\sum_{r=0}^{n} q_{r+1}^{/\beta}$ 注意 $\sum_{r=0}^{n} q_{r+1}^{/\beta} = O(q_{n+1}^{\beta})$，且对于 $\beta > 1 \max_{r\leq n} Q_r = O(1)$，对于 $\beta = 1$ $Q_r \leq 1 + \log^{+} c_r \leq 1 + \log A_{n+1}\}$。因此$S_N^{3C}\theta^{\beta} = O(q_{n+1}^{\beta})$ $(\beta > 1)$，且 $S_N^{3C}\theta = O(q_{n+1}\log A_{n+1})$ $(\beta = 1)$。 总结 我们在下表中总结了各方法的数量级估计：

关于 $S_N^3\theta^{\beta}$ 的阶估计

	$\beta = 1$	$\beta > 1$
方法 A	q_{n+1} 对数 q_{n+1}	q_{n+1}^{β} 对数 q_n
方法 B	$q_{n+1}A_{n+1}$	$q_{n+1}^{\beta}A_{n+1}^{\beta}$
方法 C	q_{n+1} 对数 A_{n+1}	q_{n+1}^{β}

精细双重求和估计 现在，我们将介绍对上一节中各方法的优化，这些优化可以改进基础方法的结果。首先，我们介绍两种适用于多种方法的优化类型。

首尾项优化：对于每个 $r < n$，我们都有 $q_{r+1}^{/\beta} = O(N^{\beta})$，但当 $r = n$ 时，项 $q_{n+1}^{/\beta}$ 相较于 N 可能会任意大。因此，我们通常会将求和 $\sum_{r=0}^{n} Q_r q_{r+1}^{/\beta}$ 拆分为首项 $H = Q_n q_{n+1}^{/\beta}$ 和尾和 $T = \sum_{r=0}^{n-1} Q_r q_{r+1}^{/\beta}$。

常数提取：如果 $a_r = c + d_r$ 其中 c 是一个常数，且 d_r 递增，那么$\sum_n a_r b_r \leq c\sum b_r + (\max b_r)\sum d_r$ 比简单地提取$\sum_n a_r b_r \leq \max b_r \sum a_r$ 是更好的估计。

现在我们可以详细考察每一种方法了。

（8.10）中的估计包含了足够的信息，使我们能够利用系数分布 b_r 中的特定模式（例如，如果给定 $b_r = 0$ 对于 r 偶数成立，我们就可以利用这一点）。这里我们只关注一般估计，并舍弃部分信息，以简化结果。

为得到更简洁的结果，我们将使用一般估计 $Q_r \leq \min\{\zeta(\beta)\ 1 + \text{对数}^{+} c_r\}$。

Also for $r < n$ we have $Q_r \leq E_r \frac{1}{2}(1 + (b_r - 1)) + O_r\left(\frac{1}{2}(b_r) + 1\right) = O_r + \frac{1}{2}b_r$

方法 A：准周期提取 我们使用该方法来估计尾和$T = \sum_{r=0}^{n-1} Q_r q_{r+1}^{/\beta}$. 注意 $\max_{r\leq n-1}\left(q_{r+1}^{/\beta}\right) = q_n^{/\beta}$。
估计 $Q_r \leq \zeta(\beta)$ 给出 $T \leq n\zeta(\beta)q_n^{/\beta} < \zeta(\beta)q_n^{/\beta}\left(\frac{\log q_n}{\text{对数 } \phi} + 1\right)$。

由估计 $Q_r \leq 1 + \log^{+} c_r$，利用常数分离可得 $T \leq \sum_{r=0}^{n-1} q_{r+1}^{/\beta} + q_n^{/\beta}\sum_{r=0}^{n-1} \log^{+} c_r$。现在 $c_r \leq a_{r+1}$ 与 $q_n \geq \Pi_{r=1}^{n} a_r$ （仅当 $r \leq 1$ 时取等号），因此 $\sum_{r=0}^{n-1} \log^{+} c_r \leq \log q_n$。

因此 $T \le \min\left\{n\zeta(\beta)q_n^{/\beta},\ \sum_{r=0}^{n-1} q_{r+1}^{/\beta} + q_n^{\beta}\log\ q_n\right\}$。且 $\sum_{r=0}^{n-1} q_{r+1}^{/\beta} \le \frac{1}{1-2^{-\beta}}\left(q_n^{/\beta} + q_{n-1}^{/\beta}\right)$ 即 $O\left(q_n^{/\beta}\right)$。

由此可知，这两个估计分别渐近于 $n\zeta(\beta)q_n^{/\beta}$ 和 $q_n^{/\beta}\log q_n$，而哪一个是较低的估计，取决于 $\zeta(\beta)$ 与 $\log q_n^{1/n}$ 的相对大小。

方法 B：类型提取。回想一下，上类型函数定义为 $A_{n+1}^{/} = \max_{r\le n}{}^{q_{r+1}^{/}}_{q_r} = \max_{r\le n}\left(a_{r+1}^{/} + {}^{q_{r-1}}_{q_r}\right)$，并且 $a_{r+1}^{/} + {}^{q_{r-1}}_{q_r} < a_{r+1}^{/} + \frac{1}{a_r} < a_{r+1} + 2$，由此得到 — $\sum_{r=0}^{n} Q_r q_{r+1}^{/\beta} \le A_{n+1}^{/\beta}\sum_{r=0}^{n} Q_r q_r^{\beta}$。

采用这种方法，结果自然会涉及 N，因此把首部和尾部拆开反而适得其反。我们将使用 (**) 中针对 Q_r 的替代估计

估计：

奇数：对于 $r \le n$ $O_r Q_r \le O_r\left(\llbracket b_{r-1} > 0\rrbracket + \frac{1}{2}b_r + \frac{1}{2}\llbracket b_r = a_{r+1}\rrbracket\right) \le O_r\left(1 + \frac{1}{2}b_r\right)$

偶数：对于 $r = n$ (此时 $b_r \ge 1$) $Q_r^E \le E_r\left(1 + \frac{1}{2}(b_r - 1)\right) = E_r\frac{1}{2}(1 + b_r)$

并且对于 $r < n$ $Q_r^E \le E_r\llbracket b_r > 1\rrbracket\left(1 + \frac{1}{2}(b_r - 2)\right) = E_r\llbracket b_r > 1\rrbracket\frac{1}{2}b_r$。合并得到 $E_r Q_r \le E_r\llbracket b_r > 1\rrbracket\frac{1}{2}b_r + \llbracket r = n\rrbracket\frac{1}{2}(1 + \llbracket b_r = 1\rrbracket)$。或者对于 $r < n$ $Q_r \le O_r + \frac{1}{2}b_r$

因此，对于 n 偶数 $\sum_{r=0}^{n} Q_r q_r^{\beta} \le \frac{1}{2}(1 + b_r))\ q_n^{\beta} + \sum_{r=0}^{n-1}\left(O_r + \frac{1}{2}b_r\right)q_r^{\beta} = \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{n} b_r q_r^{\beta} + \sum_{r=0}^{n-1} O_r q_r^{\beta} \le \frac{1}{2}N^{\beta} + \frac{1}{2}q_n^{\beta} + \frac{1}{1-2^{-\beta}}q_{n-1}^{\beta}$ 以及对于 n 奇数 $\frac{1}{2}N^{\beta} + \frac{1}{1-2^{-\beta}}q_n^{\beta}$

此外 $Q_r^E \le E_r(b_r - \llbracket r < n,\ b_r > 0\rrbracket)$，且 $Q_r^O \le O_r(b_r + \llbracket b_{r-1} > 0\rrbracket)$，因此 $Q_r \le b_r + O_r\llbracket b_{r-1} > 0\rrbracket - E_r\llbracket r < n,\ b_r > 0\rrbracket$ 这给出对于 r 奇数 $Q_r q_r^{\beta} + Q_{r-1}q_{r-1}^{\beta} < b_r q_r^{\beta} + \llbracket b_{r-1} > 0\rrbracket\left(q_r^{\beta} - q_{r-1}^{\beta}\right)$。

因此 $\sum_{t=0}^{2k+1} Q_t q_t^{\beta} = \sum_{r=0}^{k}\left(Q_{2r+1}q_{2r+1}^{\beta} + Q_{2r}q_{2r}^{\beta}\right) \le \sum_{r=0}^{2k+1} b_r q_r^{\beta} + \sum_{r=0}^{k}\llbracket b_{2r} > 0\rrbracket\left(q_{2r+1}^{\beta} - q_{2r}^{\beta}\right)$。

令 q_L 为第二个求和中的最大准周期（若该求和为空，则取 0），这样我们就可以对第二个求和进行望远镜求和，得到 $\sum_{r=0}^{k}\llbracket b_{2r} > 0\rrbracket\left(q_{2r+1}^{\beta} - q_{2r}^{\beta}\right) \le q_L^{\beta}$，因此 $\sum_{t=0}^{2k+1} Q_t q_t^{\beta} \le \sum_{r=0}^{2k+1} b_r q_r^{\beta} + q_L^{\beta}$。形式上

$$L = \max_{-1\le r\le n}\{r \text{ odd} : (r = -1)|(b_{r-1} > 0)\} \tag{8.20}$$

（回忆 $q_{-1} = 0$）。若 n 为奇数，取 $k = (n-1)/2$；若 n 为偶数，取 $k = (n/2) - 1$，并注意到 $Q_n \le b_n$，由 (**) 可得两种情况下都有 $\sum_{r=0}^{n} Q_r q_r^{\beta} \le \sum_{r=0}^{n} b_r q_r^{\beta} + q_L^{\beta} \le N^{\beta} + q_L^{\beta}$。注意，$n$ 为奇数时 $q_L \le q_n$，而 n 为偶数时 $q_L \le q_{n-1}$。

方法 C：系数提取。在这种情况下 $T < (\max_{r\le n-1} Q_r)\ \sum_{r=0}^{n-1} q_{r+1}^{/\beta}$。现在 $\max_{r\le n-1} Q_r \le \max_{r\le n-1} H_{c_r}^{\beta} \le \min\left(\zeta(\beta) \ 1 + \text{对数}\ \left(c_{n-1}^{max}\right)\right)$，并且 $c_{n-1}^{max} = \max_{r\le n-1} c_r \le \max_{r\le n-1} a_{r+1} = a_n^{\max}$。

因此 $T \le \min\left(\zeta(\beta)\ 1 + \text{对数}\ c_n^{max}\right)\ \sum_{r=0}^{n-1} q_{r+1}^{/\beta}$。除非 $a_r = 1$ 对 $r \le n$，否则我们有 $A_n \ge 2$ 这给出 $1 + \text{对数}\, A_n \ge 1.69$，而 $\zeta(2) = \pi^2/6 < 1.65$，因此当 $a_n \ge 2$ 时，$\zeta(\beta)$ 形式在 $\beta \ge 2$ 的情况下更好。

与提取 $A_n^{/\beta}$ 的方法 B 相比，这里我们提取的是 $1 + \text{对数}\ c_{n-1}^{max} < 1 + \text{对数}\, A_n$。当 A_n 较小时，差异不大，但可能会很显著

对于可良好逼近的 α。另一方面，我们还需要处理求和 $\sum_{r=0}^{n-1} q_{r+1}^{/\beta}$，而事实证明，这种求和难以得到形式优美的估计。

8.5. $S_N\theta^\beta$**上界结果总结**。我们有 $S_N\theta^\beta \leq \left(S_N^1 + S_N^2 + S_N^3\right)\theta^\beta$其中：

$$S_N^1\theta^\beta < N^\beta \min\left\{\zeta(\beta), 1 + \log q_n\right\}$$

$$S_N^2\theta^\beta < 2^\beta \left(O_n \min\left\{\frac{2^\beta}{2^\beta - 1} q_{n-1}^\beta, q_n^\beta\right\} + E_n \min\left\{\frac{2^\beta}{2^\beta - 1} q_{n-2}^\beta, q_{n-1}^\beta\right\}\right)$$

使用 3 种方法，我们为 $S_N^3\theta^\beta$ 推导出了若干估计，每种方法在特定情况下都可能是最佳选择。不过，方法 C 往往会给出最佳结果。

$S_N^3\theta^\beta = \sum_{r=0}^n Q_r q_{r+1}^{/\beta} = Q_n q_{n+1}^{/\beta} + \sum_{r=0}^{n-1} Q_r q_{r+1}^{/\beta}$。高阶项 $Q_n q_{n+1}^{/\beta}$ 在方法 A 和方法 C 中被单独列出，并且我们有

$$\begin{aligned} Q_n &= \left(E_n H_{b_n}^\beta + O_n\left(\llbracket b_{n-1} > 0\rrbracket + H_{a_{n+1}^{/}}^\beta - H_{a_{n+1}^{/} - b_n}^\beta\right)\right) \\ &\leq \min\left\{\zeta(\beta),\ E_n\left(1 + \log b_n\right) + O_n\left(\llbracket b_{n-1} > 0\rrbracket + \llbracket b_n < a_{n+1}\rrbracket \log\frac{a_{n+1}}{a_{n+1} - b_n} + \llbracket b_n = a_{n+1}\rrbracket\left(1 + \log a_{n+1}\right)\right)\right\} \end{aligned}$$

(8.21)

$$\text{Method A} \quad S_N^{3A}\theta^\beta \leq Q_n q_{n+1}^{/\beta} + \min\begin{cases} n\zeta(\beta) q_n^{/\beta} \\ \left(\sum_{r=0}^{n-1} q_{r+1}^{/\beta}\right) + q_n^{/\beta}\log q_n \\ q_n^{/\beta}\left(1 + \left(1 + \frac{1}{\log\phi}\right)\log q_n\right) \end{cases}$$

(8.22)

$$\text{方法 B} \quad S_N^{3B}\theta^\beta \leq A_{n+1}^{/\beta} \min\begin{cases} \frac{1}{2}N^\beta + O_n\left(\frac{1}{1-2^{-\beta}} q_n^\beta\right) + E_n\left(\frac{1}{2}q_n^\beta + \frac{1}{1-2^{-\beta}} q_{n-1}^\beta\right) \\ N^\beta + q_L^\beta \end{cases}$$

(8.23)

$$\text{Method C} \quad S_N^{3C}\theta^\beta \leq Q_n q_{n+1}^{/\beta} + \left(\sum_{r=0}^{n-1} q_{r+1}^{/\beta}\right) \min\begin{cases} \zeta(\beta) \\ 1 + \log^+ c_{n-1}^{max} \end{cases}$$

其中：

并且由 (8.13) 可得 $c_{n-1}^{\max} \leq \max_{r\leq n-1}\left(E_r\left(b_r - \llbracket b_r > 0\rrbracket\right) + O_r \min(b_r + 1, a_{r+1})\right) \leq a_n^{\max}$。进一步注意到 $a_n^{\max} < A_n = \max_{r\leq n} q_r/q_{r-1}$，因此 $\log^+ c_{n-1}^{max} \leq \max_{r\leq n}(\log q_r - \log q_{r-1})$；由 (8.20) 得 $L = \max_{-1\leq r\leq n}\left\{r \text{ odd} : (r = -1)|(b_{r-1} > 0)\right\}$，从而得到 $q_L \leq O_n q_n + E_n q_{n-1} \leq q_n \leq N$。

并且由 (2.3) $n \leq \log q_n \log\phi + 1$

and $\sum_{r=0}^n q_r^{/\beta} < \sum_{r=0}^n E_r q_r^{/\beta} + \sum_{r=0}^n O_r q_r^{/\beta} < \frac{1}{1-2^{-\beta}}\left(q_n^{/\beta} + q_{n-1}^{/\beta}\right) < \frac{2^\beta}{1-2^{-\beta}}\left(q_n^\beta + q_{n-1}^\beta\right)$.

对于 $\beta = 1$，我们可以使用 $q_n < q_r + q_{r-1}$ 改进 t is s ig t y y，从而得到 $\sum_{r=0}^n q_r^{/} <$

$\sum_{r=0}^{n} E_r(q_r + q_{r-1}) + \sum_{r=0}^{n} O_r(q_r + q_{r-1}) < 2(q_n + q_{n-1}) + 2(q_{n-1} + q_{n-2}) < 3q_n + 4q_{n-1}$。需要注意的是，这些都是非常保守的最坏情况估计。

8.6. **对偶性结果**。最后，对偶性结果（见 91）表明 $S_N\theta^{-\beta}$（对于 $n \geq 2$ 对于 $\alpha > \frac{1}{2}$ 以确保 a_{n+1} 是自共轭的）具有相同的上界，只是 E_n，O_n 的对应项互换了。

当然，我们可以结合适当的估计，得到关于 $S_N(\theta^{\beta}+\theta^{\beta})$ 的估计。最后，$\theta^{\beta} \geq 1$ 在 (0，1) 上，使得 $S_N(\theta^{\beta} - \theta^{\beta}) \leq S_N\theta^{\beta}- N$。不过，采用 (**) 可以得到更好的结果。

9. 与已有结果的比较

9.1. **引言**。正如我们在本文引言中所述，已有许多研究针对圆上的特定非遍历伯克霍夫和，采用的技术各不相同，且专门针对所研究的可观测函数和。本节旨在说明，本文提出的通用方法如今可以相对轻松、快速地应用于这些特定的和，从而得到相当或更好的结果。主要挑战不在于得出结果，而在于将其与已有研究进行比较，因为迄今为止使用的形式和符号表示各不相同。

这些估计通常并不美观！采用兰道记号（即不提供所涉及常数的具体细节），可以省去一些繁琐的细节。有些情况下，常数本身也可能不容易估计。无论出于这些还是其他原因，许多研究都仅限于给出朗道型结果。大多数情况下，我们的方法很容易给出常数的具体细节；对于文献中已有常数计算结果的情况，我们也表明，大多数时候可以得到更优的常数。不过，对于文献中只有兰道型结果的情况，我们也满足于给出此类结果。这样，证明和结果就不会被令人分心的细节所遮蔽；但如果需要，通常也很容易扩展这些证明以求得具体常数。

我们通常会发现，为了推导出可比较的结果，必须在某些方面牺牲精度。必要时，我们会牺牲自己的结果，而非文献中的结果。这意味着，我们的结果以原始形式呈现时通常会好一些，而为了便于比较而调整后的形式则略逊一筹。

我们将沿用上一节的约定，令 $\theta x = \frac{1}{x}$，$\theta x = 1\ (1-x)$ 取值于 (0,1)，并用 α 表示一个无理旋转数。回顾一下，若 $\phi - \psi$ 在 (0,1) 上有界，则称 ϕ, ψ 等价，因此 $S_N\phi - S_N\psi = O(N)$（即它们的伯克霍夫和相差不超过 N 的某个固定倍数）。

本节将回顾以下伯克霍夫和的估计及已有研究：

(1) 小数部分倒数和 $\sum_{r=1}^{N} \frac{1}{\{r\alpha\}}$ (2) 到最近整数距离的倒数和 $\sum_{r=1}^{N} \frac{1}{\|r\alpha\|}$
(3) 带符号余数和 $\sum_{r=1}^{N} \frac{1}{\{\{r\alpha\}\}}$ (4) 余切和 $\sum_{r=1}^{N} \cot \pi r\alpha$ (5) 双重指数和 $\sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} e^{2\pi i u v \alpha}$

此外，我们还将讨论若干密切相关、看似颇具研究价值的求和问题，但据我们所知，此前尚无相关研究。

9.2. **我们对 $\theta x = \frac{1}{x}$ 的结果总结如下。我们将看到，上述列表中的所有函数都等价于** $S_N\theta$（即 $S_N\theta^\beta$ 且 $\beta = 1$）的一种形式，可以是其原始形式（θ）、对称形式（$\theta + \theta$）或反对称形式（$\theta - \theta$）。因此，我们在此列出第 8.5 小节中关于 θ^β 的估计汇总表，并将其简化为仅展示 $\beta = 1$ 的情形。

我们有:

$$S_N\theta \le \left(S_N^1 + S_N^2 + S_N^3\right)\theta \tag{9.1}$$

$$S_N^1\theta < N\left(1+\log q_n\right) \tag{9.2}$$

$$S_N^2\theta < 2\left(O_n \min\left\{2q_{n-1}, q_n\right\} + E_n \min\left\{2q_{n-2}, q_{n-1}\right\}\right) \tag{9.3}$$

我们使用标记为 A、B、C 的 3 种方法，得出了若干关于 $S_N^3\theta$ 的估计。每种方法在特定情况下都可能得出最佳结果，不过平均而言，方法 C 往往效果最好。

我们从恒等式 $S_N^3\theta = \sum_{r=0}^{n} Q_r q'_{r+1} = Q_n q'_{n+1} + \sum_{r=0}^{n-1} Q_r q'_{r+1}$ 出发（右侧的表达式只是将高阶项分离出来），其中:

$$Q_n = \left(E_n H_{b_n} + O_n\left(\llbracket b_{n-1} > 0\rrbracket + H_{a'_{n+1}} - H_{a'_{n+1}-b_n}\right)\right) \le$$
$$E_n\left(1+\log b_n\right) + O_n\left(\llbracket b_{n-1}>0\rrbracket + \llbracket b_n < a_{n+1}\rrbracket \log\frac{a_{n+1}}{a_{n+1}-b_n} + \llbracket b_n = a_{n+1}\rrbracket\left(1+\log a_{n+1}\right)\right)$$

方法 A 和方法 C 将高阶项 $Q_n q'_{n+1}$ 分离出来，并得到以下上界:

$$\text{(9.4)}\quad \text{Method A}\quad S_N^{3A}\theta \le Q_n q'_{n+1} + \min\begin{cases}\left(\sum_{r=0}^{n-1} q'_{r+1}\right) + q'_n \log q_n \\ q'_n\left(1+\left(1+\frac{1}{\log\phi}\right)\log q_n\right)\end{cases}$$

$$\text{(9.5)}\quad \text{Method B}\quad S_N^{3B}\theta \le A'_{n+1}\min\begin{cases}\frac{1}{2}N + O_n\left(2q_n\right) + E_n\left(\frac{1}{2}q_n + 2q_{n-1}\right) \\ N + q_L\end{cases}$$

$$\text{(9.6)}\quad \text{Method C}\quad S_N^{3C}\theta \le Q_n q'_{n+1} + \left(\sum_{r=0}^{n-1} q'_{r+1}\right)\left(1+\log^+ c_{n-1}^{max}\right)$$

其中:

并由式（8.13）可得 $c_{n-1}^{\max} \le$ 最大值$_{r\le n-1}$ $\left(E_r\ \left(b_r - \llbracket b_r>0\rrbracket\right)\ + O_r$ 最小值 $\left(b_r+1,\ a_{r+1}\right)\right) \le a_n^{\max}$。另注意 $a_n^{\max} \le$ 最大值$_{r\le n}\, q_r/q_{r-1} \ge$ 因此也有 对数$^+ c_{n-1}^{max} \le$ 最大值$_{r\le n}$ (对数 $q_r -$ 对数 q_{r-1})

并且由（8.20） $L =$ 最大$_{-1\le r\le n}\{r$ 奇数: $(r=-1) \mid (b_{r-1}>0)\}$ 得到 $q_L \le O_n q_n + E_n q_{n-1} \le q_n \le N$。

并且由（2.3） $n \le \frac{\text{对数}\, q_n}{\text{对数}\,\phi} + 1$，且 ϕ 是黄金比例。

并且使用 $q'_r < q_r + q_{r-1}$ 我们得到 $\sum_{r=0}^{n} q'_r < \sum_{r=0}^{n} E_r(q_r+q_{r-1}) + \sum_{r=0}^{n} O_r(q_r + q_{r-1}) < 2(q_n+q_{n-1}) + 2(q_{n-1}+q_{n-2}) < 3q_n + 4q_{n-1}$。需要注意的是，这些是非常保守的最坏情况估计。

9.3. **小数部分倒数和** $\sum_{r=1}^{N}\frac{1}{\{r\alpha\}}$。 分析 这是最简单的比较情形，因为我们有直接等式 $\sum_{r=1}^{N}\frac{1}{\{r\alpha\}}=S_N\theta$。已有研究

尽管 Lang 对这个和的估计可追溯至1966年 [8] 但至今仍然成立：

$$\sum_{r=1}^{N}\frac{1}{\{r\alpha\}}<2N\log N+20Ng(N)+K_0 \tag{9.7}$$

这里， $k_0\geq 0$ 是任意整数， $K_0=\sum_{r=1}^{k_0}\frac{1}{\{r\alpha\}}$ 而 $g(N)$是 $N>k_0$的 α的“余型”，定义如下：

定义 109。（Lang）如果 g 是单调递增函数，并且对于任意 $N>k_0$ ，总存在 α 的准周期 q_n，使得 $N<q_n\leq Ng(N)$，那么函数 $g(N)$就是 $N>k_0$ 的 α 的余型。

备注：
$k_0=0$ 的最小余型实际上是我们在11中定义的型函数 $A(N)$。为此，设 g 是 $N>0$的一个余型。若选择 $N=q_n$，则有 $N<q_{n+1}=\frac{q_{n+1}}{q_n}q_n\leq Ng(N)$，因此 $g(q_n)\geq\frac{q_{n+1}}{q_n}$。由于 g递增，所以对于任意 $q_n\leq N<q_{n+1}$、 $r\leq n$，都有 $g(N)\geq g(q_n)\geq g(q_r)\geq\frac{q_{r+1}}{q_r}$，因此我们的型序列$A_{n+1}=$至多为$\max_{r\leq n}\frac{q_{r+1}}{q_r}\leq g(N)$。

常数项 k_0,K_0 只是让我们能够忽略初始集合 $\{a_r\}_{r\leq k_0}$ 中较大的初始离群值（例如，考虑将 $a_1=10^{100},a_r=1$设为 $r>1$ 时的影响）。只需定义并使用精细化的型函数 $A_{n+1}^{k_0}=\max_{n\geq r>k_0}\{q_{r+1}/q_r\}$，便可将这一改进直接引入我们的结果。不过，为使核心比较更清晰，我们将此留作读者的练习。实际上，这意味着我们将取 $k_0=0$ ，使得 $K_0=0$，而（9.7）在比较时变为：

$$\sum_{r=1}^{N}\frac{1}{\{r\alpha\}}<2N\log N+20NA_{n+1}$$

Lang 的估计简单而优美。它将选择 α 的影响集中体现在型函数 g 中。我们将通过方法 B 将其与我们的估计进行比较。尽管我们知道方法 B 通常不如方法 C 精确，但在这里它能让比较更为简便。

根据上述说明，我们将重点比较我们的方法所得结果与估计 $2N\log N+20NA_{n+1}$。

用于比较的结果如下（采用方法 B）：

引理 110。 $\sum_{r=1}^{N}\frac{1}{\{r\alpha\}}=S_N\theta<N$对数 $q_n+(N+q_n)\ A_{n+1}+(2N+3q_n)$

证明。由（9.1）可得 $S_N\theta\leq\left(S_N^1+S_N^2+S_N^{3B}\right)\theta=N$（1+对数 q_n）+2（$E_nq_n+O_nq_{n-1}$）$+A_{n+1}^{/}$（$N+q_L$） $\leq N$对数 $q_n+N+2q_n+A_{n+1}^{/}$（$N+q_n$）。现在由 11 $A_{n+1}^{/}<A_{n+1}+1$ 即可得出结论。□

请注意，为了得到这一结果，我们采用了最不利的假设，即 $n$even,$N \leq 2q_n$, $A'_{n+1} = A_{n+1} + 1$，但只需稍加努力，该结果便能给出比 $2N$对数 $N + 20NA_{n+1}$ 更好的常数。

9.4. **到最近整数函数的距离的倒数之和**$\sum_{r=1}^{N} \frac{1}{\|r\alpha\|}$ 伯克霍夫和 $\sum_{r=1}^{N} \frac{1}{\|r\alpha\|}$ 已被许多作者研究。最近一次重要研究由 Beresnevich 等人完成[2]，其中给出了带有常数的显式上界和下界。

事实上，这是我们所知唯一研究过下界的和，因此 Beresnevich 等人的结果是我们检验下界方法的唯一案例。

我们将分别处理上界和下界。分析 首先，我们将问题恰当地转化为一个合适的非遍历和。

命题 111. $\sum_{r=1}^{N} \frac{1}{\|r\alpha\|} = S_N\left(\theta + \theta - \psi\right)$ 其中 $\theta x = \frac{1}{x}$ 且 $S_N\psi \in 2N$对数 $2 \pm 2d_\alpha(N)$

证明。 回想一下，我们将实数上的最近整数函数定义为 $\|x\| = \min_{n\in\mathbb{Z}} |x - n| = \left[\!\left[0 \leq \{x\} < \frac{1}{2}\right]\!\right] x + \left[\!\left[\frac{1}{2} \leq \{x\} < 1\right]\!\right] 1 - x$。由于 $\|x\| = \|\{x\}\|$我们可以假设 $0 < x < 1$，从而 $\frac{1}{\|x\|} = \frac{\left[\!\left[0\leq x<\frac{1}{2}\right]\!\right]}{x} + \frac{\left[\!\left[\frac{1}{2}\leq x<1\right]\!\right]}{1-x} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right) - \left(\frac{\left[\!\left[0\leq x<\frac{1}{2}\right]\!\right]}{1-x} + \frac{\left[\!\left[\frac{1}{2}\leq x<1\right]\!\right]}{x}\right)$。我们令 $\psi x = \frac{\left[\!\left[0\leq x<\frac{1}{2}\right]\!\right]}{1-x} + \frac{\left[\!\left[\frac{1}{2}\leq x<1\right]\!\right]}{x}$，使得 $\sum_{r=1}^{N} \frac{1}{\|r\alpha\|} = S_N(\theta + \theta - \psi)$。现在， ψ的积分为 2log 2，变差为 2，因此可立即由 Denjoy-Koksma(**) 估计为 $S_N\psi \in 2N$对数 $2 \pm 2d_\alpha(N)$，其中$d_\alpha(N) = \sum_0^n b_r$是 N 的奥斯特罗斯基表示中的数字和，且$1 \leq d_\alpha(N) < q_n^{1/n}\left(\text{对数 } q_n\text{对数 } \phi + 1\right)$(当 $N = q_n$时取等号)。□

已有研究 - 上界 在本节中，求和的所有项都出现因子 2，因此为方便起见，我们将估计半和 $\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{N} \frac{1}{\|r\alpha\|}$

$$\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{N} \frac{1}{\|r\alpha\|} \leq 2q_{n+1}\left(1 + \log\left(1 + \frac{N}{q_n}\right)\right) + 32N\log q_n + q_3 N \tag{9.8}$$

我们注意到，这是 $O\left(q_{n+1}\text{对数 }\left(1 + \frac{N}{q_n}\right) + N\text{对数 } q_n\right)$，其中任一项都可能占主导，因为 $\frac{q_{n+1}}{N}$ 可以任意大，或者 $O(q_n)$，具体取决于 α。我们的理论结果 我们首先使用自己的方法推导一个估计。

引理112。 $\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{N} \frac{1}{\|r\alpha\|} \leq (1 + \text{对数 } c_n)q'_{n+1} + N\text{对数 } q_n + (1 + \text{对数 } c_{n-1}^{max})\sum_{r=1}^{n} q'_n + ((1 - \text{对数 } 2)\ N + q_n + q_{n-1}) + d_\alpha(N)$

证明。 由命题 111 可得 $\sum_{r=1}^{N} \frac{1}{\|r\alpha\|} = S_N\left(\theta + \theta - \psi\right) \leq S_N\left(\theta + \theta\right) - 2N$对数 $2 + 2d_\alpha(N)$。现在（9.5）给出了 $S_N\theta$ 的上界，而根据对偶性（小节 8.6），$S_N\theta$ 在与 E_n/O_n 互换后具有相同的上界。将这些部分结果结合起来即可得到完整结论 □

比较 为了将我们的结果与（9.8）进行比较，我们首先注意到 $c_n \le b_n + 1 = 1 + \left\lfloor \frac{N}{q_n} \right\rfloor$，并且 $q'_{n+1} < q_{n+1} + q_n$ 从而 (1+对数 c_n)$q'_{n+1} < (q_{n+1} + q_n)\left(1 + \text{对数}\left(1 + \frac{N}{q_n}\right)\right)$。接下来根据（**），$\sum_{r=1}^{n} q'_n < 3q_n + 4q_{n-1}$ 以及 $d_\alpha(N)$ <**?。将这些结果汇总可得

$$\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{N}\frac{1}{\|r\alpha\|} < (q_{n+1}+q_n)\left(1+\log\left(1+\frac{N}{q_n}\right)\right)+N\log q_n+(3q_n+4q_{n-1})\log c_{n-1}^{max}+(N(1-\log 2)+4q_n+5q_{n-1})$$

目前，与 Beresnevich 进行比较的主要障碍在于第三项，尤其是分量 $c_{n-1}^{\max}$。

注意，对于几乎处处的 α，我们有 $c_n = O(\text{对数}\, q_n)^{1+\epsilon}$，因此对于几乎处处的 α，对数 $c_{n-1}^{\max} = O(L^2 q_{n-1})$，所以与前两项相比，该项在渐近意义下可以忽略，于是我们得到

$$\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{N}\frac{1}{\|r\alpha\|} \le (q_{n+1}+q_n)\left(1+\log\left(1+\frac{N}{q_n}\right)\right)+N\log q_n+O(q_nL^2q_{n-1}+N)$$

对于所有 α，我们都可以得到一个（非常）粗略的估计 $c_{n-1}^{\max} \le a_n^{\max}$ <max——$_{r\le n}\frac{q_r}{q_{r-1}} < q_n$，从而得出

$$\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{N}\frac{1}{\|r\alpha\|} < (q_{n+1}+q_n)\left(1+\log\left(1+\frac{N}{q_n}\right)\right)+(N+3q_n+4q_{n-1})\log q_n+O(N)$$

这表明其渐近阶与 Beresnevich 的结果相同，但界有所改进。Beresnevich 指出，他们并未追求尽可能好的结果，而我们也没有——这些结果只是从我们更一般的结果中直接读出的简化形式。

已有研究——下界 Beresnevich 等人（同样使用初等方法）证明了 $\sum_{r=1}^{N}\frac{1}{\|r\alpha\|} \ge LB2$，其中

$$LB2 = q_{n+1}\log\left(1+\left\lfloor\frac{N}{q_n}\right\rfloor\right)+\frac{1}{24}N\log q_n-(\frac{1}{3}\log q_2+\frac{1}{2})N \tag{9.9}$$

9

他们还利用 Minkowski 凸体定理推导出另一项结果，表明对于 $N \ge 2$，我们有 $\sum_{r=1}^{N}\frac{1}{\|r\alpha\|} \ge LB3$，其中：——

$$LB3 = N\log N + N(1-\log 2)+2 \tag{9.10}$$

后者是一个有趣的结果，因为它是以截然不同的方式推导出来的——它利用了特定 $\frac{1}{\|x\|}$ 函数的凸性，却没有用到旋转数的任何性质 α。因此，我们预计，当旋转数的具体性质变得重要时，它给出的结果会不那么理想，而事实也确实如此。我们理论的结果 给定奥斯特罗斯基表示$N = \sum_{r=0}^{n} b_r q_r$，我们将采用式（8.8）中的较粗略估计，其中利用了以下事实： $\phi \ge 0$ 因此 $S_N\phi \ge S_{b_nq_n}\phi$。显然，这个 $S_{b_nq_n}\phi$ 下界在

[9]严格来说，该论文给出的是$\frac{N}{q_n}$而不是 $\left\lfloor\frac{N}{q_n}\right\rfloor$，但这一区别可以忽略不计，而且似乎

属于排印错误 ** 请与 Sebastian 核实此处的措辞

当 $N = b_n q_n$ 时达到最佳；随着 N 增大并趋近其最大值 $(b_n+1)q_n - 1$，估计会变得不那么理想（若 $b_n = a_{n+1}$，最大值则为 $q_{n+1}-1$）。当 $b_n = 1$ 且 $N = 2q_n - 1$时，比例误差最大。通过考察奥斯特罗斯基表示中的更多项，可以得到更精细的估计。不过，正如我们将看到的，这个初步估计已经优于其他已发表的结果。

引理 113. 对于 $q_n > 1$，我们有下界 $\sum_{r=1}^{b_n q_n} \frac{1}{\|r\alpha\|} > LB1$，其中

$$LB1 = q'_{n+1}\log^*(1+b_n) + b_n q_n\,(2\log^* q_n - (1+2\log 2)) \tag{9.11}$$

其中 对数$^* x =$最大值$\{1,$对数 $x\}$。（注意，对于 $q_n^2 > 4e$，$(1+2$对数 $2) > 0$ 为 2 对数$^* q_n -$，因此对于 $q_n > 3$ 也成立。）

证明。由命题 111 $\sum_{r=1}^{N} \frac{1}{\|r\alpha\|} = S_N(\theta+\theta-\psi) \geq S_{b_n q_n}(\theta+\theta-\psi)$其中 $\psi(x) = [\![x < \frac{1}{2}]\!]\frac{1}{1-x} + [\![x \geq \frac{1}{2}]\!]\frac{1}{x}$。注意 方差 $\psi = 2$，因此由 Denjoy-Koksma(**) 可得 $S_N\psi < 2N$对数 $2 + 2d_\alpha(N)$。现在 $d_\alpha(b_n q_n) = b_n$，故得到 $S_{b_n q_n}\psi < 2b_n q_n$ 对数 $2 + 2b_n$。

由（8.8）$S_{b_n q_n}(\theta+\theta) > 2b_n q_n$（$H_{q_n-1} - 1$）$+q'_{n+1}H_{b_n} + b_n q'_n + 2b_n > 2b_n q_n$（对数$^* q_n - 1$）$+q'_{n+1}$对数*（$1+b_n$）$+ b_n q_n + 2b_n$（因为 $q'_n > q_n$）。结论得证。□

下界结果比较 $LB1$与 $LB2$:

我们来比较我们的结果 $LB1$ 与 Beresnevich 的结果 $LB2$。比较第一项时，我们注意到 $\left\lfloor \frac{N}{q_n} \right\rfloor = b_n$，并且 $q'_{n+1} - q_{n+1} = (a'_{n+1} - a_{n+1})\,q_n = \frac{1}{a'_{n+2}}q_n$。比较第二项和第三项时，我们使用 $N < (b_n+1)q_n$。

这给出：$LB1 - LB2 > \frac{1}{a'_{n+2}}q_n$对数$^*(1+b_n) + \left(2 - \frac{1+\frac{1}{b_n}}{24}\right)b_n q_n$对数$^* q_n + b_n q_n\left(($13对数 $q_2 + \frac{1}{2})(1+\frac{1}{b_n}) - 1 - 2$对数 $2\right)$。这为正数 $q_n \geq q_2$，且由中央项主导，其最小值为$\frac{23}{12}b_n q_n$对数 q_n。

$LB1$与 $LB3$:

为比较 $LB1$与 $LB3$，我们定义 $b = \frac{N}{q_n}$，使得 $b_n \leq b < b_n + 1$（也有 $b < a_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n}$）。这给出 $LB3 = bq_n$（对数 $q_n +$对数 b）$+ bq_n$（$1-$对数 2）$+2$，因此 $LB1 - LB3 = \left(q'_{n+1}\right.$对数$^*($ $1+b_n) - bq_n$对数 $b\left.\right) + q_n((2b_n$对数$^* q_n - b$对数 $q_n) - b_n(1+2$对数 $2) - b(1-$对数 $2))-2$。

现在 $bq_n = N < q'_{n+1}$ 和 $b < 1 + b_n$，使得第一项始终为正。我们现在研究第二个（q_n）项的系数，将其记为$C =$（$2b_n$对数$^* q_n - b$对数 q_n）$- b_n$（$1+2$对数 2）$- b$（$1-$对数 2）。注意，$Cq_n > 2$给出$LB1 > LB3$。

引理114。如果 $b_n > 1$，那么 $LB1 > LB3$ 对于 $q_n \geq 27$

证明。由 $b < b_n + 1$ 得到 $C \geq (b_n - 1)$对数 $q_n - b_n(2+$对数 $2) - (1-$对数 $2)$。因此，对于 $b_n > 1$ C，由项 $(b_n-1)q_n$对数 q_n 支配。此外，当对数$q_n \geq \frac{1}{b_n - 1}(b_n(2+$对数 $2) - (1-$对数 $2)) + \frac{2}{q_n} = 2+$对数 $2 + \frac{1}{b_n-1} + \frac{2}{q_n}$ 或 $q_n \geq 2e^{2.5+2/q_n}$ 时，$C \geq 0$成立，这对整数 $q_n \geq 27$ 成立。□

如上所述，使用 $S_{b_n q_n}$ 作为下界所导致的相对误差，在 $b_n = 1$ 且 N 接近其最大值 $2q_n - 1$ 时最大。事实上，我们的下一个引理保证，当 $b_n = 1$ 时，对于大多数 N 的值， $LB1 > LB3$ 成立，但最大的那些值除外。

引理115. 如果 $b_n = 1$，那么 $LB1 > LB3$；如果 $a'_{n+1} \geq (3 + 2\text{对数 } 2) - \frac{q_{n-1}-2}{q_n}$，或者如果 $N/q_n \leq 2 - \frac{3}{\text{对数 } q_n+1-\text{对数 } 2}$。如果两个条件都不成立，我们仍可能有 $LB1 > LB3$，但这不再有保证。

证明。 对于 $b_n = 1$ 我们有 $C \geq -3$

$C = (2 - b)$ 对数 $q_n - b(1 - \text{对数 } 2) - (1 + 2\text{对数 } 2)$ 与 $b < 2$。令 $b = 2 - \lambda$ then$C = \lambda$ 对数 $q_n + \lambda(1 - \text{对数 } 2) - 3$，则 $C \geq 0$ 对于 $\lambda \geq \frac{3}{\text{对数 } q_n+1-\text{对数 } 2}$。因此，对于任意给定的固定$\lambda$，当 q_n足够大时，我们总有 $C > 0$；但当 λ 足够小时， $C < 0$也成立。令 $\lambda = 2 - \frac{N}{q_n} = \frac{k}{q_n}$，其中某个 $1 \leq k \leq q_n$，因此当 q_n足够大时，总会有一些 $N \leq 2q_n - 1$ 的取值使得 $C < 0$，即 $N = 2q_n - k$，其中 $k < \frac{3q_n}{\text{对数 } q_n+1-\text{对数2}}$，且 $k \leq q_n$。对于这些取值，取 $b < 2$ 可得 $LB1 - LB3 > \left(q'_{n+1} - 2q_n \text{ 对数 } 2\right) - 3q_n - 2$，当 $q'_{n+1} \geq (3 + 2\text{对数 } 2)q_n + 2$时，该值为正。这给出 $a'_{n+1}q_n + q_{n-1} \geq (3 + 2\text{对数 } 2)q_n + 2$，或者 $a'_{n+1} \geq (3 + 2 \text{ 对数 } 2) - \frac{q_{n-1}-2}{q_n}$；对于 $a_{n+1} > 4$，这必然成立；对于 $a_{n+1} = 4$，这通常成立（具体而言，当 $\frac{1}{a'_{n+2}} > 2\text{对数 } 2 - 1 - \frac{q_{n-1}-2}{q_n}$ 时）。若不成立，我们仍可能有 $LB1 > LB3$，但不再能保证这一点。□

总之 $LB1 > LB3$ 如果 $b_n > 1$ 或者如果 $b_n = 1$ 且 $a'_{n+1} \geq (3 + 2\text{对数 } 2) - \frac{q_{n-1}-2}{q_n}$ 或者 $N/q_n \leq 2 - \frac{3}{\text{对数 } q_n+1-\text{对数 } 2}$。有可能，在给定 α 并考虑奥斯特罗斯基展开中的更多项后，我们能够得到一个更精细的下界，并且该下界始终保证超过 $LB3$，只要 N足够大。另一方面， $LB3$利用了 $\frac{1}{\|x\|}$ 的凸性，而我们的方法没有利用这一点。这可能在某些情况下保证$LB3 \geq LB1$。我们将此留作一个猜想。

猜想 116。 对$S_N \frac{1}{\|x\|}$ 在 (8.8) 的估计可以改进，超过目前对 $S_{b_n q_n} \frac{1}{\|x\|}$ 的估计，达到始终超过 $LB3$ 的程度，只要 N足够大。

9.5. **倒数的反对称化之和** $S_N(\theta - \theta) = \sum_{r=1}^{N} \frac{1}{\{r\alpha\}} - \frac{1}{1-\{r\alpha\}}$。 分析：与上述研究的下有界函数相比，反对称函数尚未得到充分研究。据我们所知，迄今发表的结果尚未包含渐近常数的估计。我们也将仅使用兰道记号，而着重说明如何快速得到这类结果。请注意，对于反对称函数，我们可以预期下界与上界的负值相近，因此这里仅考虑上界。

回顾一下，如果 g 是一个正函数， $f = O(g)$表示 $|f| < Cg$ 对某个常数C成立，特别是 f 可以取负值。

以下结果显然但很有用：

注记 117。 回忆 $S_N\phi := \sum_1^N \phi(r\alpha)$，因此只取决于 ϕ沿轨道 $(r\alpha)$ 的值。因此，如果 ϕ，ψ 在（可数的）轨道点集合上相同，则有 $S_N\phi = S_N\psi$。特别地，如果 α是无理数，并且 ϕ，ψ仅在某个有理点集合上不相同，则有 $S_N\phi = S_N\psi$。

引理118. 对于常型的 α，设 ϕ 是单调递减函数，满足 $\phi(x) = O\left(\frac{1}{\|x\|}\right)$ 在$(0, 1)$上成立，则 $B_r\phi = \overline{b_r}P_{q_r} + O(q_r)$，且 $B_r\phi$也有相同的结果

证明。 回顾 $B_r\phi$的定义：9
(.12)

$$B_r\phi = [\![b_r > 0]\!]\left([\![q_r > 1]\!]\, b_r\left(P_{q_r} - \overline{\phi}(\frac{1}{q_r})\right) + [\![2 < q_r < q_n]\!]\, E_r\left(\phi_{r0,q_r-q_{r-1}} - \overline{\phi}\left(\frac{2}{q_r}\right)\right) + \sum_{s=0}^{b_r-1}(\phi_{rsq_r} + [\![q_r > 1]\!]$$

我们需要以下结果:
由于 $\phi(x) = O(\frac{1}{\|x\|})$，对于 $q_r > 1$，有 $\phi(\frac{1}{q_r}) = \phi(1 - \frac{1}{q_r}) = O(q_r)$，对于 $q_r > 2$，$\phi\left(\frac{2}{q_r}\right) = O(q_r)$也同样成立。

由于 α 是常型的，因此 $q'_{r+2} = O(q_r)$。但 $\|\alpha_{rst}\| > \frac{1}{q'_{r+2}}$，所以 $\phi_{rst} = \phi(\alpha_{rst}) = O(q_r)$.
此外，由于 α 是常型 $b_r \le a_{r+1} = O(1)$，因此 $\sum_{s=0}^{b_r-1}\phi_{rst} = O(q_r)$
将这些结果代入（9.12）可得 $B_r\phi = b_rP_{q_r} + O(q_r)$。类似的论证还可得 $B_r\phi = b_r\overline{P}_{q_r} + O(q_r)$ □

注意，在 (0，1) 上的单调递减反对称实值函数必须满足$\phi(\frac{1}{2}) = 0$，因此在 $(0, \frac{1}{2}]$ 上有$\phi(x) \ge 0$。此外，在这种情况下，由于 $\phi(x) = -\phi(1 - x)$，约束条件 $\phi(x) = O\left(\frac{1}{\|x\|}\right)$ 在 (0，1) 上等价于 $\phi(x) = O\left(\frac{1}{x}\right)$ 在 (0，$\frac{1}{2}$) 上成立。

定理119。 对于常型的 α，设 ϕ 是满足 $\phi(x) = O\left(\frac{1}{x}\right)$的单调递减反对称函数，定义在$(0, \frac{1}{2})$上，则 $S_N\phi = O(N)$

证明。 由引理89，对于任意递减的 ϕ，有 $S_N\phi \le \sum_{r=0}^n B_r(\phi)$。
由于 ϕ 是反对称的，因此有 $P_{q_r} = \sum_{t=1}^{q_r-1}\phi(\frac{t}{q_r}) = 0$。因此，在这种情况下，应用引理118 可得 $B_r\phi = O(q_r)$。
现在 $\sum_{r=0}^n q_r < 2(q_n + q_{n-1}) < 4q_n$，因此 $S_N\phi \le \sum_{r=0}^n B_r\phi = O(\sum_{r=0}^n q_r) = O(q_n) = O(N)$。
类似的论证可得$S_N\phi \ge \sum_{r=0}^n B_r\phi = O(N)$，于是 $S_N\phi = O(N)$。 □

推论 120。 对于 α常型，则 $S_N\phi = O(N)$对每个 $\phi_1(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}$, $\phi_2(x) =$余切 πx, $\phi_3(x) = \frac{1}{\{\{x\}\}}$

证明。 注意， ϕ_1、ϕ_2 均为本征反对称函数，因此导出函数 $\phi'_3(x) = [\![x \ne \frac{1}{2}]\!]\,\phi_3(x)$ 也具有本征反对称性。三者均为单调递减函数。我们还有:

(1) $\phi_1(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} < \frac{1}{x}$ on $(0, \frac{1}{2})$
(2) $\pi\cot\pi x < \frac{1}{x}$ on $(0, \frac{1}{2})$

(3) $\frac{[\![x\neq\frac{1}{2}]\!]}{\{\{x\}\}}=\frac{1}{x}$ on $(0,\frac{1}{2})$

因此定理 119 适用，并且结果已对 ϕ_1、ϕ_2、ϕ_3' 得到证明。现在 ϕ_3' 与 ϕ_3 仅在有理点 $x=\frac{1}{2}$处不同，因此根据备注 117 $S_N\phi_3=S_N\phi_3'=O$（N）。□

9.6. **级数** $\sum_{r=1}^{N}\frac{1}{r^\gamma}\phi(r\alpha)$。 分析 注意，这个级数本身不是伯克霍夫和（因为 r^γ 不是 $r\alpha$取值的函数），但我们可以用伯克霍夫和来估计它。

定理 121. 设 ϕ是任意满足 $S_N\phi=O\left(N^\beta\right)$的函数，其中某个 $\beta\geq1$，那么对任意 $\gamma_{\mathbb{R}}$，级数 $S=\sum_{r=1}^{N}\frac{1}{r^\gamma}\phi(r\alpha)$当 $\gamma>\beta$时为 $O(1)$，当 $\gamma=\beta$时为 O(对数 N)，当 $\gamma<\beta$时为 $O(N^{\beta-\gamma})$。

证明。 由分部求和，$\sum_{r=1}^{N}\frac{1}{r^\gamma}\phi(r\alpha)=\sum_{r=1}^{N-1}(S_r\phi)\left(\frac{1}{r^\gamma}-\frac{1}{1+r()^\gamma}\right)+(S_N\phi)\left(\frac{1}{N^\gamma}\right)$。注意最后一项为 $O(N^{\beta-\gamma})$。现在 $\left(\frac{1}{r^\gamma}-\frac{1}{1+r()^\gamma}\right)=r^{-\gamma}\left(1-(1+r)^{-\gamma}\right)=\gamma r^{-(\gamma+1)}+O(r^{-(\gamma+2)})$。因此 $\sum_{r=1}^{N-1}(S_r\phi)\left(\frac{1}{r^\gamma}-\frac{1}{1+r()^\gamma}\right)=O\left(\sum_{r=1}^{N-1}r^\beta r^{-(\gamma+1)}\right)$。现在，$\sum_{r=1}^{N-1}r^{-(\gamma+1-\beta)}$在 $\gamma+1-\beta>1$时收敛；在 $\gamma+1-\beta=1$时为 O(对数 N)，而在 $\gamma+1-\beta<1$时为 $O(N^{\beta-\gamma})$，如所需。□

推论122。 对于函数 $\phi(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x}$, $\phi(x)=$余切 πx, $\phi(x)=\frac{1}{\{\{x\}\}}$，我们有 $\sum_{r=1}^{N}\frac{1}{r}\phi(r\alpha)=O$(对数 N)

证明。 这是推论 120 和定理 121 的直接推论，其中 $\gamma=\beta=1$ □

9.7. **双重指数和** $Exp2(N)=\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}e^{2\pi iuv\alpha}$。 为方便起见，我们记作 $e(x):=e^{2\pi ix}$，注意到 $|1-e(x)|\leq2$。

分析 此和由 Sinai & Ulcigrai 研究 [15] (与量子计算中的一个问题有关)他们证明，对于 α 有界类型的 $N=q_n$，该和为 $O(q_n)$。尽管双重和本身不是伯克霍夫和，但在对其进行估计时涉及若干伯克霍夫和。

内层对 v 的 求和是一个伯克霍夫和，不过这一点并不重要，因为我们只需将其作为等比数列求和，得到 $\sum_{v=0}^{N-1}e(uv\alpha)=[\![u=0]\!]N+[\![u\neq0]\!]\frac{1-e(uN\alpha)}{1-e((u\alpha)}$。

因此， $Exp2(N)=N+\sum_{u=1}^{N-1}\frac{1-e(uN\alpha)}{1-e((u\alpha)}$，而第二项现在可以写成另一个伯克霍夫和 $S_{N-1}f$，其中 $f(x)=\frac{1-e(Nx)}{1-e((x)}$。接下来只需证明 $S_{N-1}f=O(N)$，其中 $N=q_n$。

现在$\frac{1}{1-e(x)}=\frac{1-e(-x)}{2-(e((x)+e(-x))}=\frac{1-\cos2\pi x+i\sin2\pi x}{2-2\cos2\pi x}=\frac{1}{2}(1+i\cot\pi x)$与因此$f(x)=\frac{1}{2}(1-e(Nx))+\frac{i}{2}\cot\pi x-\frac{i}{2}\cot\pi x\,e(Nx)$。将 f的 3 项记为T_1,T_2,T_3，我们有 $|T_1(x)|=\frac{1}{2}|1-e(Nx)|\leq1$，于是 $S_{N-1}T_1=O(N)$；根据推论 120 $S_{N-1}\cot\pi x=O(N)$，也有此结果。因此 $Exp2(N)=O(N)+S_{N-1}T_3$。我们还需要证明，当 $N=q_n$时， $S_{N-1}T_3=O(N)$。事实上，这是 Sinai & Ulcigrai 证明的核心结果，证明过程运用了大量复杂工具。更具体地说，他们

将 $S_{N-1}T_3$ 化为一个涉及 $\{\{x\}\}$ 而非 $\cot \pi x$ 的和，然后证明结果 $S_{q_n-1}\left(\frac{e(q_n x)}{\{\{x\}\}}\right) = O(q_n)$。我们将证明一个更一般的结果，它将 $N = q_n$ 的 $Exp2(N) = O(N)$ 和 $S_{N-1}T_3 = O(N)$ 都作为特例。

回顾一下：如果存在一个 $C \geq 0$，使得对于任意 $x_1, x_2 \in X$，都有 $d_Y(y_1, y_2) \leq C d_X(x_1, x_2)$，那么 $\theta : X \to Y$ 就是两个度量空间之间的 Lipschitz连续映射。特别地，当 $X = \mathbb{T}$ 时，我们将取度量为 $\|.\|$，并注意到由于 $\mathbb{T}$ 是紧的，θ 有界。

引理 123 (部分伯克霍夫求和)。设 ψ, ϕ 是圆 $\mathbb{T}$ 上两个取复值的可观测函数，满足 ψ 是常数为 C 的 *Lipschitz*连续映射，并且 $|S_N\phi| \leq BN$ 对某个常数 B 成立（即 $S_N\phi$ 是 $O(N)$）。给定一个无理旋转数 α，则有 $|S_N(\psi_M\phi) | < BN\left(\frac{1}{2}C\|M\alpha\|(N-1) + |\psi|\right)$ 其中 $\psi_M(x) := \psi(\{Mx\})$

证明。利用分部求和，我们得到 $S_N(\psi_M\phi) = \sum_{r=1}^{N} \psi(rM\alpha)\phi(r\alpha) = \sum_{r=1}^{N-1}(S_r\phi)(\psi(Mr\alpha) - \psi(r+1)M\alpha) + (S_N\phi)(\psi(NM\alpha))$. 现在，Lipschitz 条件保证 $|\psi| = \sup_{x\in\mathbb{T}}|\psi(x)| < \infty$，并且 $|\psi(Mr\alpha) - \psi(r+1)M\alpha| < C\|rM\alpha - (r+1)M\alpha\| = C\|M\alpha\|$。此外 $|S_r\phi| \leq Br$，因此 $\left|\sum_{r=1}^{N-1}(S_r\phi)(\psi(Mr\alpha) - \psi(r+1)M\alpha)\right| \leq \sum_{r=1}^{N-1}(Br)(C\|M\alpha\|) = \frac{1}{2}N(N-1)B(C\|M\alpha\|)$。最后 $|(S_N\phi)(\psi(NM\alpha))| \leq BN|\psi|$，结论由此得证。

□

推论 124. 当 $|S_N(\psi_M\phi)| = O(N)$ 成立时，$\|M\alpha\| = O(\frac{1}{N})$ 也成立。给定 k_0, c_0，则当 $N < q_{n+1}$ 时，若 $\|M\alpha\| < \frac{k_0}{q_{n+1}}$，该结论成立；特别地，当 $k \leq k_0$ 时，若 $M = kq_n$，该结论成立。

证明。这是引理和 $q_{n-c} > A^{-c}q_n$ 的直接推论

现在我们可以推出 Sinai & Ulcigrai 的主要结果：

推论 125 (Sinai & Ulcigrai). $S_{q_n-1}(\cot \pi x\, e(q_n x)) = O(q_n)$ 与 $S_{q_n-1}\left(\frac{e(q_n x)}{\{\{x\}\}}\right) = O(q_n)$ 与 $Exp2(q_n) = \sum_{u=0}^{q_n-1}\sum_{v=0}^{q_n-1} e^{2\pi iuv\alpha} = O(q_n)$

□

证明。$e(x)$ 在圆上是 Lipschitz连续的，其常数为 $C = 2$。对于 α 具有常型的情形，根据推论 120 $S_N(\cot \pi x) = O(N)$，且 $S_N\frac{1}{\{\{x\}\}} = O(N)$。结论立即得出。□

请注意，上述结果的关键要素是 $M\alpha$ 足够小，这限制了 M的取值。不过，这并不一定意味着，对于 M的其他取值，$S_N(\psi_M\phi)$的增长率会更高。事实上，Sinai & Ulcigrai 想知道，对于所有 N，是否都有 $Exp2(N) = O(N)$（这等价于 $S_N(\psi_N\phi) = O(N)$），更一般地说，我们想知道是否

猜想 126. 在引理 *84* 的条件下，$S_N(\psi_M\phi) = O(N)$ 对任意固定的 M 均成立，且该常数与 M 无关

我们的这些方法似乎不太可能回答这个问题。看来这取决于证明 $\psi_M\phi$ 的符号分布得足够均匀，从而不会抵消对反对称函数求和所产生的消去效应。

10. 结论

我们为非遍历情形下的级数 $\sum_{r=1}^{N}\phi(r\alpha)$ 提出了一种通用估计方法，其中 ϕ 在 0 处具有无界奇点。尽管文献中已有许多此类级数的逐案研究，本文提出了一种统一的方法，在许多情况下还可得出更好的结果。

我们概述了若干显而易见的后续研究方向：

(1) 将理论推广到更一般的圆周映射，这些映射与旋转“足够”接近，因而可以应用本文发展的理论。(2) 将理论推广到非齐次情形 $\sum_{r=1}^{N}\phi(x_0+r\alpha)$，其中有 $x_0\neq 0$。从具体的值开始可能更简单，例如 $x_0=\frac{1}{2}$、x_0 为有理数。(3) 推广到更高维。在这里，分离问题的总体策略仍然适用，但还需克服一个障碍：由于缺乏连分数理论向高维的简便推广，类似于 $S_{q_r}\phi$ 的求和难以估计。

参考文献

[1] Heinrich Behnke。丢番图逼近理论。载于《汉堡大学数学研讨会论文集》第3卷，第261–318页。Springer，1924年。4[2] Victor Beresnevich、Alan Haynes 和 Sanju Velani。小数部分倒数之和与乘法丢番图逼近。美国数学会回忆录，263(1276)：vii + 77，2020年。4，83[3] P. Erdős 和 G. Szekeres。关于乘积 $\Pi_{k=1}^{n}(1-z^{a}k)$。塞尔维亚科学院数学研究所出版物，13：29–34，1959年。4[4] G. H. Hardy 和 J. E. Littlewood。丢番图逼近的一些问题：直角三角形的格点。伦敦数学会会刊 (2)，20(1)：15–36，1921年。4[5] G. H. Hardy 和 J. E. Littlewood。丢番图逼近的一些问题：直角三角形的格点。（第二篇论文。）《汉堡大学数学研讨会论文集》，1 1 211 248, 1922 4 ( )： –。[6] G. H. Hardy 和 E. M. Wright。《数论导引》。牛津，第四版，1975年。21，23[7] E Hecke。关于解析函数与模 1 的数的分布。载于《汉堡大学数学研讨会论文集》第1卷，第54–76页。Springer，1922年。4[8] Serge Lang。《丢番图逼近导论》。Springer-Verlag，纽约，1995年。[9] C. G. Lekkerkerker。自然数表示为斐波那契数之和。Simon Stevin，29：190–195，1952年。4[10] 1547 11 145 146, 1904 4 M. Lerch。[11] q q n q 问题。《数学家中介》，： –。D. S. Lubinsky。单位圆上 (;) 的大小。《数论杂志》，( )：217 247, 1999 4 – 。[12]Alexander Ostrowski。关于丢番图逼近理论的评注。载于《汉堡大学数学研讨会论文集》第1卷，第77–98页。Springer，1922年。4

[13] W. Sierpiński。关于无理数的一个定理。克拉科夫通报。 [2], 725-727 (1909)。, 1909年。4[14] W. Sierpiński。关于某个和的渐近值。克拉科夫通报。(A) 1910, 9-11 (1910 1910 4)。, .
[15] Yakov G. Sinai 和 Corinna Ulcigrai。某些双重三角和的上界估计。《不动点理论与应用杂志》, 6 1 93 113, 2009 4, 88 ( ): – 。C.
[16] Sudler, Jr. 一个受限划分函数的估计。《牛津季刊数学杂志》系列 (2 15 1 10, 1964 4), : – 。
[17] Paul Verschueren。准周期重整化：准周期和、乘积与复合和算子。开放大学，2016年。博士论文 https://doi.org/10.21954/ou. ro.0000ef50。4[18] Paul Verschueren 和 Ben Mestel。正弦 Sudler 乘积在黄金旋转数处的增长。《数学分析与应用杂志》, 433 1 200 226, 2016 4 ( ): – 。E. M. Wright。Sudler 猜想的
[19] 证明。《牛津季刊数学杂志》系列 (2 15, 196415114), : – 。[20] E. Zeckendorf。用斐波那契数或卢卡斯数之和表示自然数。列日皇家科学学会通报，41：179–182，1972年。4

附录 A. 上下文注释

这篇注释是在撰写本文期间发展出来的，旨在提供一种更高效的方式，以便在处理相关空间和相关态射时标示语境。这种注释似乎用途广泛，尤其适用于高阶范畴（即需要讨论诱导函数或函数的函数的情形）。其主要优点是，在需要时可以灵活地引入形式上的精确性，而在不需要时又不必受繁重符号体系的束缚。当然，这也要求作者更加负责地作出恰当的文风选择！

数学记号极为简略——数学家倾向于使用非常简短的能指（通常是单个符号）来指代数学对象。由于可用能指的数量十分有限（“字母不够用”综合征），我们最终会“滥用符号”，即用同一个能指指代不同的数学对象。若按字面理解，“滥用”一词并不公平——“重复使用符号”或许是更恰当的说法：我们只是在重复利用稀缺的符号资源。用得恰当，这样做很有好处；用得不当，则可能造成混淆，甚至令人无法理解。若不拘泥于字面，“滥用”一词可用来提醒我们，这里需要权衡：符号表示的简洁是以歧义为代价的。处理得当时，读者可以轻易地从语境中消解歧义；但有时明确说明语境既有用，甚至也是必要的。

我们简要比较两种经典的消歧方法。给定两个群 $(X,+)$，$(Y,+)$，如何明确 $x+y$ 的含义？较常见的方法是写作“对于 $x,y\in X$, $x+y$”。较少见的方法是写作“ $x+_X y$ 表示 $+$ 取自 $(X,+)$，因此读者可以推断， x,y 必须属于 X。”后一种方法不太常见，但可以说写起来、读起来都更简洁。通常这种方法仅用于二元运算，但我们将在此将其扩展并形式化，使之适用于所有数学对象。

定义 127. 如果我们希望记录由 $'x'$ 表示的数学对象“受”由 $'X'$ 表示的另一对象“语境化”这一事实，可以通过

用第二个能指标注第一个能指来实现，例如写作 $'x'_X$。我们称X 为 x的语境。

稍后我们会讨论“由语境限定”的语义，但首先需要对定义做一些拆解。

必须注意，这是一种注释，而非符号表示的一部分：它是作者可以从文体角度选择使用的附加内容，无须严格遵循。

例如，我们可以写作匿名函数 $x_{\mathbb{R}} \mapsto x^2$，而不是 $x_{\mathbb{R}} \mapsto x^2_{\mathbb{R}}$。我们也可以灵活安排注释的位置：给定一个对象 x_i，例如可以将其写作 x_i^X 或 $(x_i)_X$。

此外，尽管符号表示 $'x', 'x'_i$ 通常表示不同的对象，$'x'$和注释 $'x'_X$ 通常表示同一对象。一个重要的例外是符号滥用，例如使用 $'x'$ 表示两个不相交集合 X_1, X_2 中的元素。此时，写作 x_{X_1}, x_{X_2}可以成功消除歧义；但如果我们选择 $x = x_{X_1}$，那么我们就选择了 x, x_{X_2} 作为不同的对象。

“由 X语境化”的语义需要针对任意给定语境 X加以定义，而 x 通常有许多可供采用的语境。不过，合适的语境往往显而易见，其语义也是如此。

如果 X 是一个集合，显而易见的默认语义是 $'x'_X$ 表示 $x \in X$；但更专门的能指有不同的显而易见的默认语义。例如，对于 $'f'$这样的经典函数符号，f_X默认表示 $f \in X^X$，也就是说，f 是定义在 X上的函数。类似地，$+_X$ 表示 $+_X \in X^{X^2}$，也就是说，$+_X$ 是 X上的二元运算；一般而言，如果 $\circ$ 是 X上的一个 $n_{\mathbb{N}}$元运算，即$\circ \in X^{X^n}$，我们仍然写作 $\circ_X$。

如果 X 不是集合，我们可以自由地赋予 x_X 自己选择的含义，不过通常含义显而易见。例如，如果 $'Set'$、$'Grp'$ 分别是集合范畴和群范畴的能指，那么 G_{Grp} 非正式地表示 G是一个群；更正式地说，它表示 G 满足真类 $ob(Grp)$的谓词（当然，类 $ob(Grp)$ 本身也是范畴 Grp中的一个对象）。我们可以正式定义 $G_{Grp} \coloneqq (X_{Set}, +_X)$，但根据符号滥用，当我们觉得含义清楚时，也可以写作$G \coloneqq (G, +)$。我们还可以定义 $x \in_G G_{Grp}$表示 $x \in G_{Set}$，然后根据符号滥用，简单地写成 $x \in G$。这样一来，我们既可以在需要时引入形式上的精确表述，也不必在不需要时拘泥于繁复的符号表示。同时，这也让作者肩负起更大的责任，必须做出恰当的选择。

最后，我们引入一种实用的简写。给定范畴中的对象 X 和 Y，从 X到 Y的态射通常记作 $Hom(X, Y)$，因此态射$\phi\colon X \to Y$可以标注为 $\phi_{Hom(X,Y)}$。我们将 $Hom(X, Y)$ 简写为 XY，并用 ϕ_{XY} 表示 $\phi\colon X \to Y$。请注意，现在写出 $\phi_{XY}x$ 就表示我们有 x_X 和 $(\phi_{XY}x)_Y$。我们还可以用 $\phi_{YZ}\phi_{XY} = \phi_{XZ}$ 表示态射的复合（当然，用逆波兰表示法会更具表现力，可以写成 $\phi_{XY}\phi_{YZ} = \phi_{XZ}$）。

电子邮件地址：paul@verschueren.org.uk