arXiv:2304.00641v1 [cs.NE] 2 Apr 2023

使用 CMA-ES 降低稳定斜拉桥的成本

Gabriel Fernandes[1 [0000−0001−6662−8675]]、Nuno Lourenço[1 [0000−0002−2154−0642]] 和 JoãoCorreia[1 [0000−0001−5562−1996]]

葡萄牙科英布拉，科英布拉大学 CISUC DEI
gabrielf@student.dei.uc.pt、naml@dei.uc.pt、jncor@dei.uc.pt

摘要。 斜拉桥的设计需要确定若干设计变量的取值。土木工程师通常手动完成这项工作，逐步迭代，直到工程师对成本以及解满足结构约束的情况感到满意为止。问题的难点在于，改变一个变量可能会影响其他变量，这意味着这些变量并非相互独立，也表明我们面对的是一个欺骗性景观。

在这项工作中，我们将两种方法与基准解进行比较：遗传算法和 CMA-ES 算法。设计桥梁时有两个优化目标：降低成本，并使结构约束保持在可接受的范围内，从而确保安全。这两个目标相互冲突，也就是说，降低成本往往会导致桥梁无法满足结构安全要求。结果表明，在评估次数相同的情况下，CMA-ES 能够在搜索空间中找到优质解，优于基准方法，而遗传算法则未能做到。具体而言，CMA-ES 方法能够设计出成本更低且结构安全的桥梁。

关键词： 遗传算法 · CMA-ES · 优化 · 斜拉桥

1 引言

桥梁是每个交通网络基础设施中的关键组成部分。桥梁必须设计得安全、稳健、耐久，同时兼顾成本效益，有时还要美观，而这些目标往往彼此冲突 [18,17,27,3]。结构设计标准的限制因国家而异，并规定了桥梁必须满足的要求，例如桥梁安全，以及承受重型车辆荷载、高速风和地震的能力。桥梁还必须符合适用性要求，这些要求规定了在行人运动等动态作用下的最大挠度、应力和振荡。每座桥梁都由一家结构设计公司或由多家公司组成的联合体负责规划。流程通常从服务招标开始，选择公司时依据一系列评估标准，而通常情况下，最佳商业报价（价格最低的方案）

会中标。设计公司必须以尽可能少的资源（人时）交付解。因此，结构设计师没有时间评估所有可能的解，即使是较简单的设计也不例外。因此，任何有助于自动化和优化桥梁设计的技术或机制都极具价值，因为即便只实现小幅优化（且不影响桥梁安全性及相关要求），也能为公共财政节省大量资金。

斜拉桥（CSB）是设计最复杂的桥梁类型之一，因为它们具有高度静不定的结构。得益于计算技术的进步，如今我们能够建造更长、同时也更安全的斜拉桥。

在本研究中，我们扩展了 [5,4]开展的研究，该研究采用基于进化计算的方法来解决斜拉桥设计问题。具体而言，作者提出使用标准遗传算法（GA）[20]，并采用基于实数的表示方式来表示桥梁设计中需要优化的每个参数。所提出的方法取得了令人鼓舞的结果，因为遗传算法能够在满足结构约束的前提下优化这类桥梁（其中部分变量固定）。然而，与人工设计相比，该方法未能降低成本，除非进行一些调优。本研究采用协方差矩阵自适应进化策略算法（CMA-ES）[13] ，以检验在评估次数相同的情况下，它能否超越遗传算法取得的结果以及基准解。

具体而言，我们的贡献包括：(i) 研究了一个更复杂的问题，因为缆索数量也参与了进化，而非保持不变；(ii) 比较了两种优化算法：遗传算法和 CMA-ES；(iii) 结果表明，标准遗传算法可能不足以找到高效的解。

此外，CMA-ES 算法成功找到了一个桥梁，其成本比基准解低 4.656k = C。考虑到该解是在没有任何人为输入的情况下自动发现的，这一结果令人印象深刻，也为进化方法进一步应用于桥梁自动设计开辟了道路。

本文其余部分安排如下。第 2 节简要介绍相关工作。第 3 节定义问题，第 4 节说明遗传算法和 CMA-ES 实验的建模方式。第 5 节展示所得结果，第 6 节列出结论。

2 相关工作

关于斜拉桥优化设计的早期研究，重点是在几何形状和结构截面固定的条件下解决索力调整问题 [23,26,1]。近来，遗传算法（GA）也被用于解决这一问题 [14,16]。

考虑动力荷载会给设计问题带来额外约束。以往的研究主要关注地震 [25,8], 、风力空气动力学[2,19,22] 以及斜拉人行桥中的行人诱发作用 [9,10,11]。这些动力荷载可能导致桥梁振动，这是不利的。缓解这一问题有几种方法，例如：（i）通过增加桥梁质量来提高其稳固性。但这并不可取，因为可能增加成本，而且最终建成的桥梁可能达不到预期的美观效果；（ii）采用控制装置，例如用于改造伦敦千禧桥的装置， [7,6], 如黏滞阻尼器或调谐质量阻尼器（TMDs）。

基于梯度的优化技术已用于优化桥梁的几何形状、尺寸设计和拉索张力控制 [21,24]。遗传算法也被用于同时优化这些桥梁属性 [15], ，不过所采用的模型比本文及本文所依据的研究中的模型更简单[5,4]。这些研究基于 Ferreira 和 Simões 的工作 [10,11], ，从中获取了一个已优化的解（不一定是全局最优解），并将其用作基准，以帮助我们判断某个解是否确实足够好。文献表明，与遗传算法相比，基于梯度的方法能更快地获得较好的结果。然而，与遗传算法相比，基于梯度的方法更难参数化，需要投入更多时间和精力；而遗传算法则更容易上手并投入运行。

据我们所知，目前尚无研究将 CMA-ES 应用于斜拉桥设计优化。CMA-ES 通过利用基因型协方差矩阵的特性来探索搜索空间，这一能力有望在现有遗传算法方法的基础上进一步优化斜拉桥。

3 问题定义

在本研究中，我们对斜拉人行桥的配置进行优化，在保证结构安全性的同时，尽可能降低结构的总成本。当桥梁的结构约束值均不超过 1 时，即可认为其结构安全。若要深入了解该问题，建议读者阅读 [10]。

每个个体都由一个包含 22 个变量的数组表示，这些变量的说明及定义域见表 2。随后利用这些变量计算桥梁的价格及相应的结构约束值。由于桥梁只有在所有约束均小于或等于 1 时才可视为安全，因此我们采用这些约束中的最大值，而非各约束的单独值。除变量参数外，桥梁还具有固定参数，见表 1。

在实验中，我们将结果与基准解进行比较。该基准解是采用 Ferreira 等人研究 [10] 中相同的方法优化得到的桥梁配置，并使用了相同的固定参数。这座桥梁的成本为 91.354 k=C，结构约束的最大值为 0.9962。

表 1. 固定参数的取值。

桥梁长度 (LTotal)	220 米
桥梁宽度	4 米
桥面以下塔高	10 米

表 2. 斜拉桥设计变量描述和定义域取值。

变量类型	**描述**	**定义域取值**
离散		
DV0	缆索数量	3,4,5,6,7
几何形状		
DV1	结构的中央跨（塔间距）	[0.9, 1.2]
DV2	第一根与第二根缆索锚固点之间的距离 桥面侧跨内	[0.7, 1.3]
DV3	桥塔与中央跨中第一根拉索之间的距离 中央跨	[0.7, 1.3]
DV4	最后一个拉索锚固端与 桥梁对称轴之间的距离	[0.7, 1.3]
DV5	桥塔高度	[0.1, 2.0]
DV6	拉索分布的距离 桥塔顶部	[0.1, 4.0]
DV7	各桥塔顶部之间的距离	[0.1, 1.3]
DV8	塔底间距	[0.1, 1.13]
控制		
DV9	塔梁连接的横向刚度	[0.001, 1000]
DV10	塔梁连接的竖向刚度	[0.001, 1000]
DV11	塔梁连接的横向阻尼	[0.001, 1000]
DV12	塔梁连接的竖向阻尼	[0.001, 1000]
截面与张拉		
DV13	混凝土板的附加质量	[0.1, 7.0]
DV14	桥面段	[0.1, 80.0]
DV15	桥面段（三角形截面）	[0.5, 1.3]
DV16	塔柱段（矩形空心截面）	[0.4, 1.5]
DV17	塔柱段（矩形空心截面）	[0.1, 20.0]
DV18	塔柱段（矩形空心截面）	[0.3, 20.0]
DV19	塔柱段（矩形空心截面）	[0.3, 9.0]
DV20	缆索预应力	[0.7, 3.0]
DV21	缆索横截面	[0.5, 9.0]

4 方法

为了与先前的研究进行公平比较，我们复现了使用遗传算法开展的实验。该算法使用的参数与 [5]，中的几乎相同，代数除外；相关参数见表3。

本研究为这一问题带来的新意，是使用 Python 分布式进化算法框架（DEAP） [12] 实现 CMA-ES 并开展实验。所用参数见表3。由于种群规模不同，我们确保评估次数相同，以便比较结果。

用于启动进化过程的初始个体，是通过对每个变量的定义域区间进行均匀采样生成的。遗传算法中使用的变异算子也采用了这一思路：选中某个基因进行变异时，新值同样从该变量的定义域中均匀采样。为处理 CMA-ES 生成的不可行解，如果某个变量低于其定义域的最小值，我们便将其修正为最小值；如果高于最大值，则修正为最大值。遗传算法中不会执行这一过程，因为其变异算子会从定义域中采样新值，而交叉操作不会改变变量值；因此，变异算子和交叉操作都能确保变量值处于所需的定义域内。CMA-ES 则需要进行这一修正，因为它无法保证生成的值处于定义域边界之内。

两种算法所使用的适应度函数如式 1 所示。 $C(x)$ 和 $S(x)$ 分别是个体 x 的成本和结构约束值。 $C(x)$ 返回的价格基于预先确定的材料价格，而 $S(x)$ 返回个体 [10] 的结构约束最大值。在实际应用中，我们需要确保 $S(x)$ 返回的值最多为 1.0。

$$f(x) = \begin{cases} c_r / C(x), & \text{if } C(x) > c_r \\ 1 + 1/S(x), & \text{if } C(x) < c_r \wedge S(x) > 1.0 \\ 2 - (1.0 - S(x)) + c_r / C(x), & \text{if } C(x) < c_r \wedge S(x) \leq 1.0 \end{cases} \tag{1}$$

适应度函数旨在引导种群趋向于结构约束不超过 1.0 且成本尽可能低的个体。首先，将成本降低到更易接受的数值（c_r，该数值在我们的实验中是固定的，见表3，但可以更改）；然后，通过奖励具有更接近 1.0 的 $S(x)$ 值的个体，搜索在结构上可行的个体；最后，寻找同时满足可行性和成本效益的个体（我们希望成本尽可能低）。虽然我们的目标是使结构的成本最小化，但需要注意的是，我们希望最大化适应度值，因此将该问题定义为最大化问题。在第一个分支中，适应度范围为 0 到 1；在第二个分支中，范围为 1 到 2；在第三个分支中，适应度大于 2。

表3。算法的参数。

参数	**值**
GA	
代数	40 000
种群规模	10
锦标赛规模	3
交叉算子	均匀交叉
交叉率（每个基因）	0.5
变异算子	按基因替换
每基因突变率	0.1
CMA-ES	值
代数	8 000
μ	25
λ	50
σ	0.5
常见	值
运行次数	30
精英规模	1
c_r 适应度常数	150
评估次数	400 000

5 实验结果

进化过程中最佳个体针对结构约束 $S(x)$ 的表现如图1所示。图3展示了有关成本 $C(x)$ 的结果，而图5展示了适应度函数 $f(x)$ 的结果。结果为 30 次独立运行的平均值。

从图1可以看出，两种方法都逐渐改善了结构约束的值，逐步接近上限值1。从右侧面板可以看出，遗传算法的结构约束值下降较为陡峭，而CMA-ES的下降速度较慢。在优化过程结束时，两种方法都达到了大致相同的结构约束值。为了更好地理解两种方法之间的差异，我们针对最佳个体的结构约束结果绘制了箱线图。从图2可以看出，CMA-ES能够优化这一优化目标，但在某些运行中会出现较大幅度的失败，从而导致较大的均值。遗传算法也会失败（30个种子中有1个），但失败幅度较小。两条曲线都在接近1.0处收敛，这正是期望的行为，意味着桥梁的结构安全性正在得到优化。

关于成本，结果如图3所示。从结果可以看出，在最初的1500代中，CMA-ES（左图）似乎没有改善初始解的数值。事实上，从图中可以看出，成本略有上升。然而，1500代之后，该方法开始迅速降低桥梁成本。

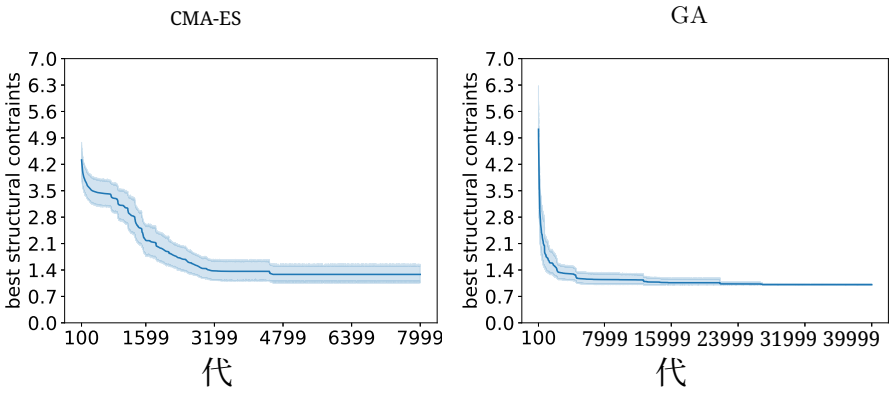


图1。 CMA-ES（左）和遗传算法（右）从第100代开始，分别运行至第7 999代和第39 999代期间，30次运行中最佳个体的结构约束均值。可以看到，CMA-ES在约第4 800代时趋于稳定，而遗传算法则在约第28 000代时趋于稳定。由于前100代（[0： 100[）中成本和结构约束的数值极大，导致图表无法阅读，因此未绘制这些代数的数据。

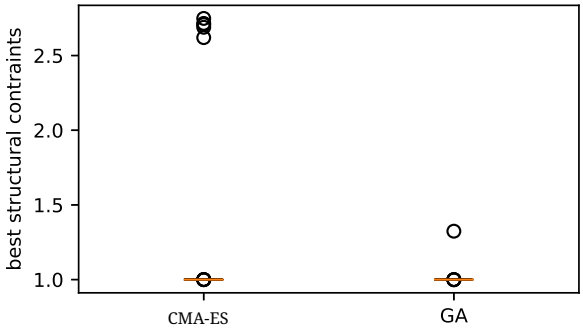


图2。 CMA-ES（左）和遗传算法（右）每次运行（共30次）中最佳个体的结构约束箱线图。

曲线在第 6000 代左右趋于稳定，这可能表明 CMA-ES 已达到最优解。就优化趋势而言，遗传算法（右图）表现出大致相同的行为。这些结果或许可以解释为：两种方法在最初几代都着重于获得满足结构约束且性能良好的桥梁。在获得这类桥梁后，它们便开始降低成本，同时不损害桥梁的完整性和安全性。

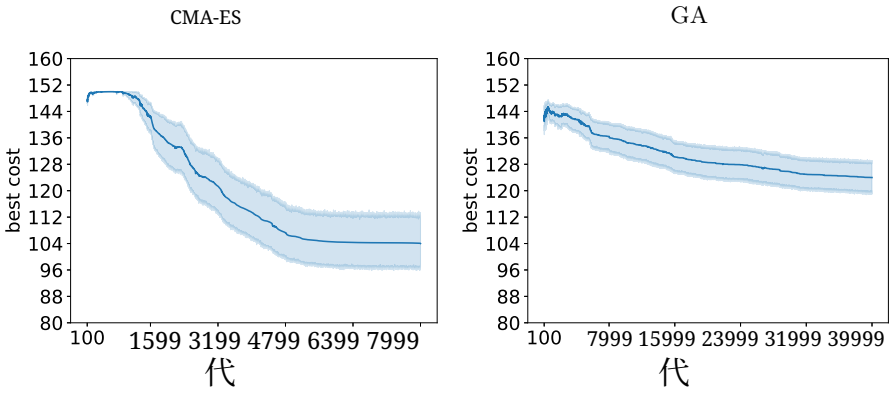


图3. 从第 100 代开始，分别截至第 7 代、第 999 代、第 39 代、第 999 代以及相应的代数，CMA-ES（左图）和遗传算法（右图）30 次运行中最佳个体的均值成本值。可以看出，CMA-ES 能够实现更低的成本值，但不同运行之间的变异性更高。它似乎也正在趋于稳定（我们将在实验结果部分讨论这一主题）。遗传算法则似乎恰恰相反，即使经过 40 000 代，仍在继续优化成本。关于为何未绘制最初 100 代的解释，请参见图1的图注。

另一个有趣的结果是，在进化过程结束时，CMA-ES 获得的最佳解的成本远低于遗传算法发现的解。为了辅助分析，我们绘制了两种方法成本值的箱线图，并在图4中展示。尽管 CMA-ES 在优化结构约束方面不如遗传算法，但它在成本方面取得了出色的结果。事实上，可以看出，CMA-ES 方法不仅能够找到成本更低的桥梁，而且由于其方差低于遗传算法，还能持续稳定地找到这些桥梁。

我们还展示了适应度图（图5和图6），以呈现结合成本 $C(x)$和结构约束 $S(x)$的 $f(x)$的结果。

最后，表6总结了结果。从这些数值来看，CMA-ES的平均表现似乎与遗传算法相差不大。尽管结构约束的曲线相似，而成本的曲线差异很大，但我们的适应度函数在拉伸方面似乎并不是很好

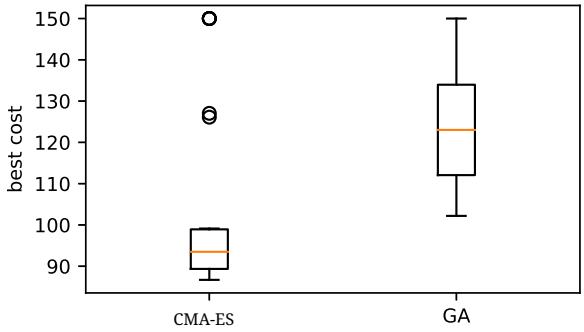


图4. CMA-ES（左）和遗传算法（右）每次运行（共 30 次）中最佳个体成本的箱线图。

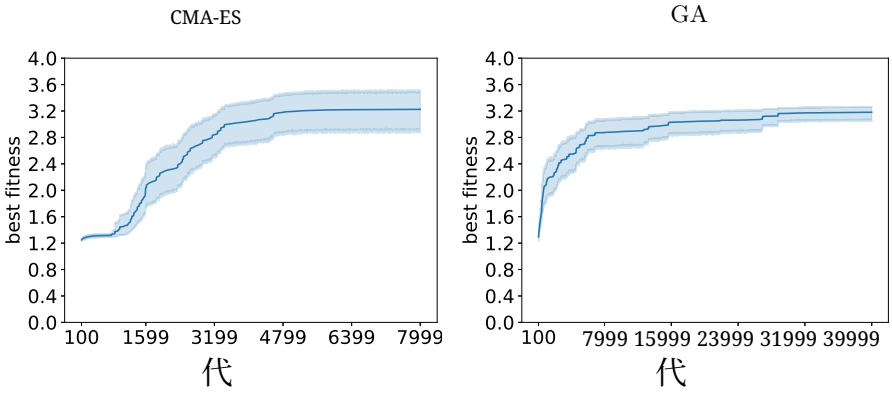


图5. 从第100代开始，分别截至第7 999代和第39 999代，CMA-ES（左）和遗传算法（右）进行30次运行所得最佳个体的均值适应度值。可以看出，CMA-ES能够达到更高的适应度值，但不同运行之间的差异也更大。遗传算法似乎是一种更加稳定的算法，表现出的差异没有那么明显。图1的图注解释了为何未绘制前100代。

在结构约束已满足时，适应度值会趋于相近（但不相同），因此成本相差较大的候选解也会得到相近的适应度值。就优化本身而言，适应度仍能将更优的个体归类为具有更高适应度；然而，绘制出来后，这种差异并不十分明显。

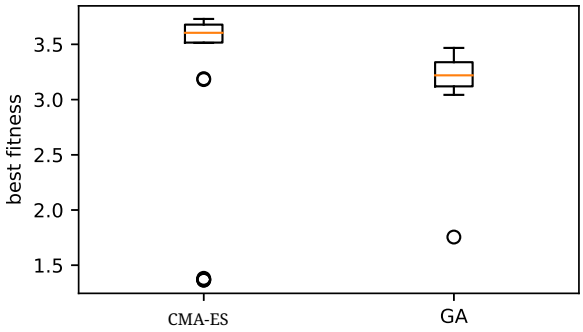


图6. CMA-ES（左）和遗传算法（右）每次运行中最佳个体的适应度箱线图（总计30次运行）。

为了了解这两种方法之间是否存在有意义的差异，我们进行了统计分析。由于样本不服从正态分布，我们采用显著性水平为 $\alpha = 0.05$ 的曼-惠特尼非参数检验。效应量见表4；可以看出，所有指标的效应量均较大，这意味着两种方法之间的差异显著。

表4. 使用 Mann Whitney U 检验进行统计分析的结果，显著性水平为 $\alpha = 0.05$。

特征	效应量
适应度	-0.510
$C(x)$	0.510
$S(x)$	-0.702

表5列出了每种方法所得最佳解的成本和结构约束值。CMA-ES 能够找到多个优于基准的解（见表4中的改进率），且这些解具有良好的多样性，因为它们的缆索数量各不相同；而遗传算法一次也未能做到（见表6）。通过这些差异可以看出，两种方法都对结构约束进行了优化，但是，CMA-

ES 能够将桥梁成本降低 4 k=C 以上，这是一个相当可观的数额。

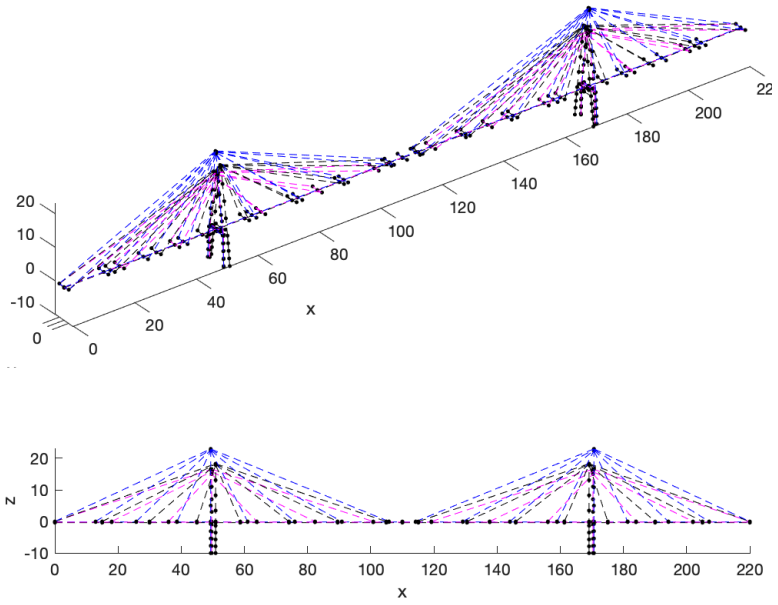


图 7. 基准桥梁（黑色），以及经遗传算法（粉色）和 CMA-ES（蓝色）优化的桥梁。

图 7 展示了两种算法演化出的最佳桥梁与基准解以及彼此之间的比较。可以看出，CMA-ES 演化出的桥梁因其高度而在视觉上明显区别于基准解；而遗传算法演化出的桥梁则与其他桥梁有显著差异，因为它使用了 3 根拉索，而其他桥梁使用了 4 根。

表5. 每种方法的最佳解，以及相较于基准方法的成本和结构约束差异。成本和结构约束的最佳值以粗体显示。

	基准（B）	与基准的差异（遗传算法）	遗传算法最佳解	与基准的差异（CMA-ES）	CMA-ES 最佳解
$C(x)$	91.354	-10.840	102.194	4.656	**86.698**
$S(x)$	**0.996**	-0.004	1.000	-0.004	1.000

CMA-ES 能为这个问题找到非常好的解，但表现似乎有些极端：它有时能找到极好的解，但有时却无法做到，结果并不理想，既成本高昂，结构上也不安全。

表6进一步证实了前文所述：平均而言，CMA-ES 在优化 $S(x)$ 方面表现较差，但与遗传算法相比，能够大幅降低结构的成本。不过，遗传算法更为稳定，波动较小，这一点可从标准差数值看出。

表6。 实验统计数据。均值(...)为30次运行的平均值，改进率是指能够优于基准的运行所占比例。文中列出了平均值及其相应的标准差。

	均值(适应度)	均值($C(x)$)	均值($S(x)$)	改进率
CMA-ES	3.225 ($\pm$ 0.862)	104.005 ($\pm$ 23.042)	1.282 ($\pm$ 0.652)	11/30
GA	3.181 ($\pm$ 0.296)	123.987 ($\pm$ 13.124)	1.01 ($\pm$0.059)	$0/30$

我们决定加入图8，以展示 CMA-ES 相较于基准将成本降低了多少。该图仅纳入了优于基准的 11 个随机种子的结果。我们没有展示结构约束的图表，因为如前所述，我们只采用了优于基准的随机种子的结果；鉴于成本与结构约束之间呈反向关系，结构约束的值均不超过 1.0。

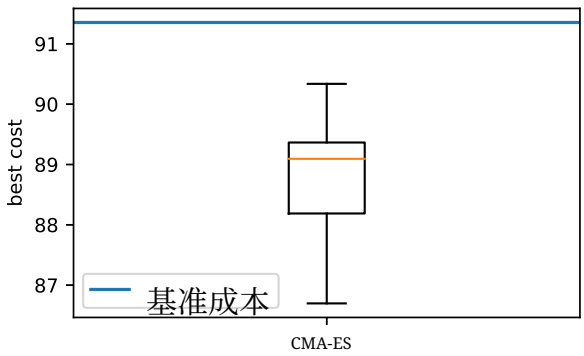


图8。 CMA-ES 的最佳 11 个随机种子的成本箱线图，并与基准成本进行对比。这更清楚地突出了 CMA-ES 超越基准的程度。所有超越基准的解，其结构约束值均不超过 1.0，因此这里未绘制这些数值，因为它们基本上都相同。

6 结论

斜拉桥（CSB）的设计是桥梁工程中最复杂的设计之一，因为其具有高度静不定的结构，无法在短时间内通过手工计算完成。这项工作大多由土木工程师手动完成，而关于 CSB 的大部分研究采用基于梯度的优化技术，这些技术需要对问题的灵敏度进行编程。本研究比较了两种进化方法——标准遗传算法和 CMA-ES——在成本和结构约束方面的性能。我们还将两者的结果与文献中已有的一种基于梯度优化得到的方案进行比较，以进一步完善这项分析。

在我们的结果中，CMA-ES 将成本降至 86.698 k=C，优于基准和遗传算法的成本，后两者分别为 91.354 k=C 和 102.194 k=C，同时按照安全规范，将结构约束维持在可接受范围内。我们分析了遗传算法和 CMA-ES 方法在 30 次不同带种子运行中的表现。在评估次数预算相同的情况下，遗传算法一次也未能在成本方面优于基准解，尽管与 CMA-ES 相比，它在优化结构约束方面更加稳定。CMA-ES 有 11 次以显著优势超过基准。我们对每种算法 30 次运行的结果进行了统计检验，发现两者之间的差异具有显著性。结果表明，在此设置下，对于该问题，CMA-ES 的表现优于标准遗传算法。

在未来的工作中，我们计划采用质量-多样性算法，在优化目标的同时探索不同的解，以拓展我们对搜索空间的认知，并能够通过一次运行获取多个高性能解，避免陷入可能存在的局部最优解。

致谢

本研究部分由项目拨款桥梁工程信息系统（BEIS）资助。该项目由竞争力与国际化运营计划（COMPETE 2020）支持，属于葡萄牙2020伙伴关系协议的一部分，资金来自欧洲区域发展基金（ERDF）。此外，本研究还通过国家资金（PIDDAC）获得科学与技术基金会（FCT）/科学、高等教育与创新部（MCTES）的资助，资助范围为CISUC研发部门——UIDB/00326/2020或项目代码UIDP/00326/2020*

参考文献

1. Baldomir, A., Hernandez, S., Nieto, F., Jurado, J.：拉科鲁尼亚（西班牙）大跨度斜拉桥的拉索优化。《工程软件进展》41(7-8)，931–938（2010年7月）。https://doi.org/10.1016/J.ADVENGSOFT.2010.05. 001

2. Baldomir, A., Kusano, I., Hernandez, S., Jurado, J.：考虑实验和数值数据不确定性，针对颤振现象对墨西拿大桥开展的可靠性研究。Computers & Structures**128**, 91–100（2013年11月）。https://doi.org/10 004 3 1016 2013 07 . /J.COMPSTRUC. . . . Chen, W.F., Duan, L.（编）：《桥梁工程手册》。CRC出版社（2014年1月）。https://doi.org/10 16467 4 1201. /b . Correia, J., Ferreira, F.：使用遗传算法设计斜拉桥。载于：Castillo, P.A., Laredo, J.L.J., de Vega, F.F.（编）《进化计算应用——第23届欧洲会议，EvoApplications 2020，作为EvoStar 2020的一部分举办，西班牙塞维利亚，2020年4月15日至17日，论文集》。计算机科学讲义，卷12104，第228–243页。施普林格（2020）。https://doi.org/10.1007/978-3-030-43722-0_15, https://doi.org/10.1007/ 978-3-030-43722-0_155。Correia, J., Ferreira, F., Maçãs, C.：斜拉桥优化解空间探索。载于：Coello, C.A.C.（编）《GECCO '20：遗传与进化计算会议，配套论文集》，墨西哥坎昆，2020年7月8日至12日，第261–262页。ACM（2020）。https://doi.org/ . / .3390033，https://doi.org/10 3390033 6 1145 3377929 . / . . Dallard, P.：伦敦千禧桥。Structural Engineer **79**(22)，17–21（2001）7. Dallard, P., Fitzpatrick, T., Flint, A., Low, A., Smith, R.R., Willford, M., Roche, M.：伦敦千禧桥：行人诱发的横向振动。Journal of Bridge Engineering **6**(6)，412–417（2001年12月）。https://doi.org/10.1061/(ASCE) 1084-0702(2001)6:6(412) 8. Ferreira, F., Simoes, L.：地震作用下受控斜拉桥的最优设计。Structural and Multidisciplinary Optimization **44**(4)，517–528（2011年10月9日）。https://doi.org/ . /s - - - . Ferreira, F., Simões, L.：受控斜拉人行桥的最优成本设计。Computers & Structures **106-107**，135–143（2012年9月）。https://doi.org/10.1016/J.COMPSTRUC.2012.04.013 10. Ferreira, F., Simões, L.：采用三维建模和控制装置的钢斜拉人行桥最优设计。Engineering Structures **180**，510–523（2019年2月）。https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.11.038，https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0141029618314275 11. Ferreira, F., Si mões, L.：采用半主动与被动质量阻尼器、针对跑步活动的受控斜拉人行桥最优设计。Journal of Performance of Constructed Facilities **33**(3)，04019025（2019年6月）。https:// doi.org/10 0001285 12 1061 1943 5509 . /(ASCE)CF. - . . Fortin, F.A., De Rainville, F.M., Gardner, M.A., Parizeau, M., Gagné, C.：DEAP：让进化算法变得简单。Journal of Machine Learning Research **13**，2171–2175（2012年7月）13. Hansen, N., Ostermeier, A.：进化策略中的完全去随机化自适应。Evol. Comput. **9**(2)，159–195（2001）。https://doi.org/10.1162/ 106365601750190398, 106365601750190398 14 10 1162 https://doi.org/ . / . Hassan, M.M.：斜拉桥最优设计。博士学位，西安大略大学（2010年）15. Hassan, M.M., El Damatty, A.A., Nassef, A.O.：基于遗传算法的半扇形组合斜拉桥最优设计数据库。Structure and Infrastructure Engineering **11**(8)，1054–1068（2015年8月）。https://doi.org/10.1080/15732479.2014.931976

16. Hassan, M.：采用有限元法、遗传算法和 B样条相结合的技术优化斜拉桥中的斜拉索。《Engineering Structures》**49**，643–654（2013年4月）。https://doi.org/10.1016/J.ENGSTRUCT.2012.11.036 17. Hibbeler, R.C.、Kiang, T.：《结构分析》。培生普伦蒂斯·霍尔（2015年） 18. Holgate Alan：《结构工程艺术：Jorg Schlaich 及其团队的作品》。Axel Menges 出版社，斯图加特；伦敦（1997年） 19. Jurado, J.Á.、Nieto, F.、Hernández, S.、Mosquera, A.：基于气动弹性行为敏感性分析的斜拉桥高效斜拉索布置。《工程软件进展》**39**(9)，757–763（2008年9月）。https://doi.org/10.1016/J.ADVENGSOFT.2007.10.004 20. Mitchell, M.：《遗传算法导论》。麻省理工学院出版社，伦敦（1996年） 21. Negrão, J.、Simões, L.：采用三维建模优化斜拉桥。《Computers & Structures》**64**(1-4)，741–758（1997年7月）。https://doi.org/10.1016/S0045-7949(96)00166-6 22. Nieto, F.、Hernández, S.、Jurado, J.Á.、Mosquera, A.：考虑可变桥面质量的桥梁颤振速度敏感性分析解析方法。《工程软件进展》**42**(4)，117–129（2011年4月）。https://doi.org/10.1016/J.ADVENGSOFT.2010.12.003 23. Qin, C.：斜拉桥施工中的斜拉索张拉规划优化。《工程优化》**19**(1)，1–20（1992年2月）。https://doi.org/10.1080/03052159208941217 24. Simões, L.、Negrão, J.：采用箱梁桥面优化斜拉桥。《工程软件进展》**31**(6)，417–423（2000年6月）。https://doi.org/10.1016/S0965-9978(00)00003-X 25. Simões, L.M.C.、Negrão, J. H.J.O.：优化遭受地震作用且具有非线性行为的斜拉桥。《工程优化》**31**(4)，457–478（1999年3月）。https://doi.org/10.1080/03052159908941382 26. Sung, Y.C.、Chang, D.W.、Teo, E.H.：Mau-Lo Hsi 斜拉桥的最佳后张拉索力。《Engineering Structures》**28**(10)，1407–1417（2006年8月）。https://doi.org/10.1016/J.ENGSTRUCT.2006.01.009 27. Zienkiewicz, O.、Taylor, R.、Fox, D.：《固体与结构力学有限元法》。爱思唯尔（2014年）。https://doi.org/10.1016/C2009-0-26332-X