arXiv:2304.00646v1 [math.AP] 2 Apr 2023

H¨older稳定性与唯一性：基于Carleman估计的平均场博弈系统研究*

Michael V. Klibanov †，Jingzhi Li ‡，Hongyu Liu §

摘要

本文研究平均场博弈系统（MFGS）的数学问题。在传统设定中，MFGS是由两个二阶非线性抛物型偏微分方程组成的耦合系统，采用后向—前向形式，即分别为值函数和种群密度规定终端条件和初始条件。本文证明，在所有四种可能的终端条件和初始条件中，只要给定两个终端条件，或只给定两个初始条件，就能保证MFGS解的唯一性。对于这两种情形，均证明了H¨older稳定性估计。这意味着，解的精度可根据给定的数据进行估计。此外，这些估计可直接推出MFGS相应问题的唯一性。建立上述结果的主要数学工具是两个新的Carleman估计，它们也可能适用于其他与耦合抛物型偏微分方程相关的问题。

关键词：平均场博弈系统、H¨older稳定性估计、唯一性、病态问题与反问题、Carleman估计；2020年MSC分类号：35R30、91A16

1 引言

平均场博弈（MFG）理论最早由 Lasry 和 Lions [31, 28, 29] 以及 Huang、Caines 和 Malham´e [7, 8]在开创性著作中提出。该理论研究无穷多个参与者的行为，这些参与者试图使自身收益最优化。该理论在社会科学中有许多应用。这些应用的部分例子

*资助。本研究中 J. Li 的工作部分得到中国国家自然科学基金委员会（项目编号：11971221）、广东省自然科学基金重大项目（项目编号：2021ZDZX1001）、深圳市科技计划项目（项目编号：RCJC20200714114556020、JCYJ20200109115422828 和 JCYJ20190809150413261）、深圳国家应用数学中心以及南方科技大学国际数学中心的资助。H. Liu 的工作得到香港研究资助局一般研究基金（项目编号：12302919、12301420 和 11300821）以及法国—香港ANR/RGC联合研究资助（项目编号：A-CityU203/19）的资助。

†北卡罗来纳大学夏洛特分校数学与统计系，美国北卡罗来纳州夏洛特市，邮编28223，mklibanv@uncc.edu

‡数学系、深圳应用数学中心及南方科技大学数学国际中心，南方科技大学，中国深圳518055，li.jz@sustech.edu.cn§数学系，香港城市大学，九龙，香港特别行政区，中国，hongyliu@cityu.edu.hk

包括：金融、经济学、行人聚集以及电动汽车之间的交互，参见例如 [1, 5, 25, 29, 38]。我们还提到平均场博弈理论在反腐败 [24], [25, 前言] 和网络安全 [23]领域中的应用。

本文的方法论源自《病态问题与反问题》理论。作者在整个职业生涯中都深入从事这一领域的研究，参见例如 [3, 4], [11]-[19], [31, 32]。卡尔曼估计方法最早由 Bukhgeim 和 Klibanov 引入系数反问题领域，见 [4], ；随后，Klibanov 和 Averboukh 将其引入平均场博弈理论，见 [20], ，另请参见两篇后续论文 [21, 22]。

在 [20, 21, 22] 之前，平均场博弈理论中尚无关于平均场博弈系统（MFGS）解相对于输入数据的精度估计；作者也将此类估计称为“稳定性估计”。与此同时，这类估计十分重要，因为 MFGS 的输入数据存在误差。此外，这些估计还意味着 MFGS 对应问题解的唯一性。

设 $u(x,t)$ 为平均场博弈的值函数， $m(x,t)$ 为描述 [1, 29] 的主体密度的函数。其中， $x \in \mathbb{R}^n$ 和 t 分别为空间变量和时间变量，且 $t \in (0,T)$。二阶平均场博弈系统（MFGS）是平均场博弈理论的重要组成部分。MFGS 是关于函数 $u(x,t)$ 和 $m(x,t)$ 的一组耦合非线性抛物方程。MFGS 的一个重大复杂性在于，在这两个偏微分方程中，时间的演化方向不同。因此，传统的抛物方程理论不适用于 MFGS。

以下是 MFGS 的四种可能的终端条件和初始条件：

$$u(x,T), m(x,0), m(x,T), u(x,0). \tag{1.1}$$

在传统设置下，这四个函数中的以下两个函数是已知的：

$$u(x,T) \text{ and } m(x,0). \tag{1.2}$$

此外，通常假设函数 $u(x,t)$ 和 $m(x,t)$ 关于向量 x 的每个分量均具有周期性，参见例如 [1, 29]。然而，除非施加相当严格的所谓“单调性”条件 [2]，否则 MFGS 的解的唯一性将受到质疑。另一方面，如果假设两个向量函数中的任一个

$$(u(x,T), m(x,0), m(x,T)), \tag{1.3}$$

$$(u(x,T), m(x,0), u(x,0)) \tag{1.4}$$

已知，并且对两个函数 $u(x,t)$ 和 $m(x,t)$ 施加齐次诺伊曼边界条件，则对于情形 (1.3) 或 (1.4)，相应的 Lipschitz稳定性估计和唯一性 [20, 21] 均成立。在 [22] 中，当已知函数$u(x,t)$ 和 $m(x,t)$ 的狄利克雷和诺伊曼边界条件，而 (1.1) 中的所有函数均未知时，可同时得到 H¨older 稳定性估计和唯一性。

不过，在 (1.3) 或 (1.4) 中，三个函数是已知的，这意味着数据存在超定。因此，自然会提出以下问题：四个终端条件和初始条件 (1.1) 中，是否只需其中两个，就能为 MFGS 提供稳定性估计和唯一性？本文旨在对这一问题作出肯定回答。更准确地说，我们将在此证明，如果对以下两个函数都施加诺伊曼边界条件

函数 $u(x,t)$ 和 $m(x,t)$，那么用以下两个条件对中的任意一对替代传统条件对 (1.2)

$$(u(x,T),m(x,T)) \text{ or } (u(x,0),m(x,0)) \tag{1.5}$$

这同时带来了：H¨older 稳定性估计和唯一性。换言之，如果将常规的配对 (1.2) 替换为两种配对 (1.5) 之一，那么即使在非超定情形下，MFGS 的解也能恢复唯一性；此外，还能得到解的精度的 H¨older 估计。

假设函数 $m(x,T)$ 已知，实际上我们假设可以测量参与者的最终分布。接下来，利用终端数据 $(u(x,T)\quad m(x,T))$ 求解 MFGS，从而对过程 [20] 进行回顾性分析。另一方面，可以在过程开始时通过民意调查参与者对其值函数 [21] 的看法，来近似了解值函数的初始条件 $u(x,0)$。同时，由于民意调查成本高昂，因此合理的做法是只进行一次调查，而不是在多个时间点进行调查。

当前论文以及 [20, 21, 22]的研究结果均针对单次测量情形。至于无限次测量情形，我们请参阅 [33, 34], 近期的两项研究，它们证明了MFGS相互作用项重建的唯一性。

下文将用到[20, 21]中推导出的两个关于MFGS的新Carleman估计。传统上，Carleman估计用于证明各种偏微分方程不适定柯西问题的稳定性定理和唯一性定理，不过通常只考虑单个偏微分方程的情形，而不像我们这里考虑偏微分方程组的情形；例如参见[14, 15, 18, 30, 40]。自最初的研究 [4], 以来，Carleman估计一直被广泛用于证明系数反问题的全局唯一性和稳定性结果。由于本文并非一篇关于 [4], 方法的综述，我们在此仅列举其中少数几项研究及其所引文献 [3, 6, 9, 10, 11, 12,13, 14, 15, 18, 40]。此外， [4] 的思想也已拓展至系数反问题的数值方法，例如参见 [16]-[19]。

注 1.1. 本文不讨论最小光滑性问题。我们遵循《反问题》领域的惯例，参见例如 *[35, 36], [37,*定理 4.*1]*。

下文只考虑实值函数。我们在第 2 节表述两个问题，在第 3 节给出 [20, 21]的Carleman估计，并在第 4 节和第 5 节证明这两个问题的 H¨older 稳定性估计和唯一性。

2 两个问题

下文，$\beta = const. > 0$. 令 $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ 表示一个智能体的位置，$t \geq 0$ 表示时间。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为边界为分段光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域，且 $T > 0$ 为一个数。记

$$Q_T = \Omega \times (0,T), S_T = \partial\Omega \times (0,T).$$

回顾一下，$u(x,t)$ 是值函数，$m(x,t)$ 是位置 x 和时间 t 的玩家密度。传统的二阶 MFGS

由两个时间演化方向不同 [1, 29] 的齐次非线性抛物型偏微分方程构成。然而，本文考虑两个非齐次抛物型偏微分方程这一更一般的情形。为此，我们在构成 MFGS 的传统偏微分方程右端项中加入非零项。因此，这是一个如下形式的广义 MFGS：

$$\begin{aligned} &u_t(x,t)+\beta\Delta u(x,t)-r(x)(\nabla u(x,t))^2/2+\\ &+F\left(\int_\Omega M(x,y)\,m(y,t)\,dy, m(x,t)\right)=G_1(x,t),\ (x,t)\in Q_T, \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$m_t(x,t)-\beta\Delta m(x,t)-\operatorname{div}(r(x)m(x,t)\nabla u(x,t))=G_2(x,t),\ (x,t)\in Q_T. \tag{2.2}$$

这里，系数 $r(x)\in C^1(\Omega)$ 与介质的弹性相似，函数 F 是相互作用项。我们假设零诺伊曼边界条件，即边界处完全反射

$$\partial_\nu u\mid_{S_T}=\partial_\nu m\mid_{S_T}=0, \tag{2.3}$$

其中，$\nu=\nu(x)$ 是点 (x,t) 处的单位外法向量 $\in S_T$. 本文考虑以下两个问题：

问题1. 假设函数 $u,m\in H^2(Q_T)$ 满足条件 (2.1)-(2.3)，当以下两个函数 $u_T(x)$ 和 $m_T(x)$ 已知时，求得一个 H ¨older 稳定性估计和唯一性定理：

$$u(x,T)=u_T(x),\ m(x,T)=m_T(x),\ x\in\Omega. \tag{2.4}$$

问题 2. 假设函数 $u,m\in H^2(Q_T)$ 满足条件 (2.1)-(2.3)，当以下两个函数 $u_0(x)$ 和 $m_0(x)$ 已知时，求得一个 H ¨older 稳定性估计和唯一性定理：

$$u(x,0)=u_0(x),\ m(x,0)=m_0(x),\ x\in\Omega. \tag{2.5}$$

注2.1. (2.4) 和 (2.5) 右端项中的数据存在测量误差，方程 (2.1) 和 (2.2) 的右端项也是如此。因此，稳定性估计（实际上是 MFGS 解的精度估计）对于问题 1、2 以及 *[20, 21, 22]* 中考虑的问题都很重要。

3 Carleman估计

偏微分算子的卡尔曼估计通常只针对该算子的主部进行证明，因为它与低阶项无关 [18, 引理 2.1。1]因此，本节将针对方程（2.1）、（2.2）中算子的主部$\partial_t+\beta\Delta$、 $\partial_t-\beta\Delta$ 表述卡尔曼估计。问题 1 和问题 2 的卡尔曼估计有所不同。其差异在于卡尔曼权函数的不同，即所得积分不等式中涉及的权函数不同。记

$$H_0^2(Q_T)=\left\{u\in H^2(Q_T):\partial_\nu u\mid_{S_T}=0\right\}.$$

3.1 问题1的 Carleman估计

引入三个参数 $b>0$、$\lambda>0$ 和 $k>2$。此外，引入我们的第一个卡尔曼权函数

$$\varphi_{\lambda,k}(t)=\exp\left(\lambda(t+b)^k\right), t\in(0,T). \tag{3.1}$$

定理 3.1 [20]。存在一个数 $C_1=C_1(b,T,\beta)>0$，它仅取决于列出的参数，使得以下卡尔曼估计成立：

$$\begin{aligned}\int\limits_{Q_T}(u_t+\beta\Delta u)^2\varphi_{\lambda,k}^2dxdt\geq C_1\int\limits_{Q_T}\left(u_t^2+(\Delta u)^2\right)\varphi_{\lambda,k}^2dxdt+\\ +C_1\lambda k\int\limits_{Q_T}(\nabla u)^2\varphi_{\lambda,k}^2dxdt+C_1\lambda^2k^2\int\limits_{Q_T}u^2\varphi_{\lambda,k}^2dxdt-\\ -e^{2\lambda(T+b)^k}\int\limits_{\Omega}\left[(\nabla_x u)^2+\lambda k(T+b)^k u^2\right](x,T)\,dx,\\ \forall\lambda>0,\forall k>2,\forall u\in H_0^2(Q_T).\end{aligned} \tag{3.2}$$

定理 3.2 [20]。存在一个充分大的数 $k_0=k_0(\beta,T,b)>2$ 和一个数 $C=C(T,b)>0$，它们仅取决于列出的参数，使得以下卡尔曼估计成立：

$$\begin{aligned}\int\limits_{Q_T}(u_t-\beta\Delta u)^2\varphi_{\lambda,k}^2dxdt\geq\\ \geq C_1\sqrt{k}\beta\int\limits_{Q_T}(\nabla u)^2\varphi_{\lambda,k}^2dxdt+C_1\lambda k^2\int\limits_{Q_T}u^2\varphi_{\lambda,k}^2dxdt-\\ -C_1\lambda k(T+b)^{k-1}e^{2\lambda(T+b)^k}\int\limits_{\Omega}u^2(x,T)\,dx-C_1e^{2\lambda b^k}\int\limits_{\Omega}\left[(\nabla u)^2+\sqrt{\nu}u^2\right](x,0)\,dx,\\ \forall\lambda>0,\forall k\geq k_0(\beta,T,b)>2,\forall u\in H_0^2(Q_T),\end{aligned} \tag{3.3}$$

其中，数 $C_1=C_1(a,T,\beta)>0$ 取决于与定理3.1中相同的参数。

此外，我们给出一个新的积分恒等式，该恒等式已在 [20] 中证明。过去已知的只有一个类似的不等式，而非恒等式，见 [26, 第2章 §6]。

引理 3.1。设区域 Ω 为一个矩形棱柱，则以下积分恒等式成立：

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega}(\Delta u)^2dx=\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega}u_{x_ix_j}^2dx,\\ \forall u\in\left\{u\in H^2(\Omega):\partial_\nu u\mid_\Omega=0\right\}.\end{aligned}$$

3.2 问题 2 的 Carleman估计

设 $c>2$ 为一个数。设 $\lambda>2$ 为一个充分大的参数。参数 c 和 λ 将在后文选取。引入第二个卡尔曼权函数 $\varphi_\lambda(t)$，

$$\varphi_\lambda(t)=\exp\left((T-t+c)^\lambda\right),\ t\in(0,T). \tag{3.4}$$

定理 3.3 [21]。将式 (3.4) 中的数 c 选为: $c > 2$. 定义数 λ_0 为:

$$\lambda_0 = \lambda_0(T,c) = 16(T+c)^2 > 16c^2 > 64. \tag{3.5}$$

那么，以下卡尔曼估计成立:

$$\int_{Q_T} (u_t + \beta\Delta u)^2 \varphi_\lambda^2 dxdt \geq$$

$$\geq C_2\sqrt{\lambda}\int_{Q_T} (\nabla u)^2 \varphi_\lambda^2 dxdt + C_2\lambda^2 c^{\lambda-2}\int_{Q_T} u^2\varphi_\lambda^2 dxdt + \tag{3.6}$$

$$-C_2 e^{2c^\lambda}\int_\Omega \left((\nabla u)^2 + u^2\right)(x,T) - C_2\lambda(T+c)^{\lambda-1} e^{2(T+c)^\lambda}\int_\Omega u^2(x,0)\,dx,$$

$$\forall \lambda \geq \lambda_0, \forall u \in H_0^2(Q_T),$$

其中，常数 $C_2 = C_2(c,T,\beta) > 0$ 仅取决于所列参数。

定理 3.4 并非严格意义上的卡尔曼估计，而是拟卡尔曼估计。这是因为其中涉及两个测试函数 u 和 v，而非仅涉及一个测试函数。

定理 3.4（拟卡尔曼估计） [21]。设数值 c 和 λ_0 与定理 3.3 中的相同。设函数 $g \in H^1(Q_T)$ 和

$$\sup_{Q_T}|g|, \sup_{Q_T}|\nabla g| < \infty.$$

那么 对任意两个函数 $u, v \in H_0^2(Q_T)$，以下拟卡尔曼估计成立:

$$\int_{Q_T} (u_t - \beta\Delta u + g\Delta v)^2 \varphi_\lambda^2 \geq$$

$$\geq C_3\lambda c^{\lambda-1}\int_{Q_T} (\nabla u)^2 \varphi_\lambda^2 dxdt + C_3\lambda^2 c^{2\lambda-2}\int_{Q_T} u^2\varphi_\lambda^2 dxdt -$$

$$- C_3\lambda(T+c)^{\lambda-1}\int_{Q_T} (\nabla u)^2 \varphi_\lambda^2 dxdt - \tag{3.7}$$

$$-\lambda(T+c)^{\lambda-1} e^{2(T+c)^\lambda}\int_\Omega u^2(x,0)\,dx,\ \forall \lambda \geq \lambda_0,$$

其中数值 $C_3 = C_3\left(\beta, c, \|g\|_{C^1(\overline{Q}_T)}\right) > 0$ 仅取决于列出的参数。

4 H¨older 稳定性与问题1的唯一性

对于任意数值 $\varepsilon \in (0,T)$，定义区域 $Q_{\varepsilon,T}$ 如下：

$$Q_{\varepsilon,T} = \Omega \times (\varepsilon, T) \subset Q_T. \tag{4.1}$$

定理 4.1. 设 $D_1, D_2, D_3, D_4 > 0$ 为某些数。设 (2.1)、(2.2) 中的函数 $G_1, G_2 \in L_2(Q_T)$。设 F 为 (2.1) 中的函数。假设函数 $F(y,z) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 具有导数 $F_y, F_z \in C(\mathbb{R}^2)$，使得

$$\max\left(\sup_{\mathbb{R}^2} |F_y(y,z)|, \sup_{\mathbb{R}^2} |F_y(y,z)|\right) \leq D_1. \tag{4.2}$$

在 (2.1)、(2.2) 中，设函数 $M(x,y)$ 和 $r \in C^1(\Omega)$ 满足

$$\sup_{\Omega\times\Omega} |M(x,y)|, \|r\|_{C^1(\overline{\Omega})} \leq D_2. \tag{4.3}$$

定义函数集合 $K_3(D_3)$ 和 $K_4(D_4)$ 如下

$$K_3(D_3) = \left\{u \in H_0^2(Q_T) : \sup_{Q_T} |u|, \sup_{Q_T} |\nabla u|, \sup_{Q_T} |\Delta u| \leq D_3\right\}, \tag{4.4}$$

$$K_4(D_4) = \left\{u \in H_0^2(Q_T) : \sup_{Q_T} |u|, \sup_{Q_T} |\nabla u| \leq D_4\right\}. \tag{4.5}$$

Let

$$D = \max(D_1, D_2, D_3, D_4). \tag{4.6}$$

假设两对函数 (u_1, m_1) 和 (u_2, m_2) 分别与两对函数 $(G_{1,1}, G_{2,1})$ 和 $(G_{1,2}, G_{2,2})$ 满足方程 (2.1)- (2.3)，且满足

$$(u_1, m_1), (u_2, m_2) \in K_3(D_3) \times K_4(D_4). \tag{4.7}$$

假设这两对函数 (u_1, m_1) 和 (u_2, m_2) 满足以下终端条件（见 (2.4)）：

$$u_1(x,T) = u_T^{(1)}(x), \ m_1(x,T) = m_T^{(1)}(x), \ x \in \Omega, \tag{4.8}$$

$$u_2(x,T) = u_T^{(2)}(x), \ m_2(x,T) = m_T^{(2)}(x), \ x \in \Omega. \tag{4.9}$$

令数值为 $\varepsilon \in (0,T)$，并令 $Q_{\varepsilon,T}$ 为 (4.1) 中定义的区域。则存在一个数值 $C_4 = C_4(\beta, D, T, \Omega\ \varepsilon) > 0$，以及一个充分小的数值 $\delta_0 = \delta_0(\beta, D, T, \Omega\ \varepsilon) \in (0,1)$，它们仅依赖于所列参数，使得如果 $\delta \in (0, \delta_0)$ 且

$$\left\|u_T^{(1)} - u_T^{(2)}\right\|_{H^1(\Omega)}, \left\|m_T^{(1)} - m_T^{(2)}\right\|_{L_2(\Omega)} \leq \delta, \tag{4.10}$$

$$\|G_{1,1} - G_{1,2}\|_{L_2(Q_T)}, \|G_{2,1} - G_{2,2}\|_{L_2(Q_T)} \leq \delta, \tag{4.11}$$

则存在一个仅依赖于所列参数的数 $\rho = \rho(\beta, D, T, \Omega\ \varepsilon) \in (0, 1/6)$，使得以下两个 Hölder 稳定性估计成立：

$$\begin{aligned}\|\partial_t u_1 - \partial_t u_2\|_{L_2(Q_{\varepsilon,T})} + \|\Delta u_1 - \Delta u_2\|_{L_2(Q_{\varepsilon,T})} + \|u_1 - u_2\|_{H^{1,0}(Q_{\varepsilon,T})} \leq \\ \leq C_4\left(1 + \|m_1 - m_2\|_{H^2(Q_T)}\right)\delta^\rho, \ \forall \delta \in (0, \delta_0),\end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\|m_1 - m_2\|_{H^{1,0}(Q_{\varepsilon,T})} \leq C_4 \left(1 + \|m_1 - m_2\|_{H^2(Q_T)}\right) \delta^\rho. \tag{4.13}$$

此外，如果区域 Ω 是一个矩形棱柱，则估计（4.12）可以加强为：

$$\|u_1 - u_2\|_{H^{2,1}(Q_{\varepsilon,T})} \leq C_4 \left(1 + \|m_1 - m_2\|_{H^2(Q_T)}\right) \delta^\rho. \tag{4.14}$$

此外，如果在 (4.8) 和 (4.9) 中

$$u_T^{(1)}(x) \equiv u_T^{(2)}(x), \; m_T^{(1)}(x) \equiv m_T^{(2)}(x), \; x \in \Omega, \tag{4.15}$$

$$G_{1,1}(x,t) \equiv G_{1,2}(x,t), \; G_{2,1}(x,t) \equiv G_{2,2}(x,t), \; (x,t) \in Q_T, \tag{4.16}$$

那么 $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$ 以及 $m_1(x,t) \equiv m_2(x,t)$ 在 Q_T 中成立，这意味着问题1至多有一个解 $(u,m) \in K_3(D_3) \times K_4(D_4)$。

注 4.1：考虑该定理中的条件，即两个对 (u_1,m_1)、(u_2,m_2) 属于预先选定的有界集合 $K_3(D_3) \times K_4(D_4)$。这类条件在不适定问题理论中是典型的，参见例如 *[3, 30]*。

定理 4.1 的证明。在本证明中，我们将取决于 β、D、$\widetilde{G}_4$、T、Ω 的不同数值，而 $C_4 = C_4(\beta, D, T, \Omega\ \varepsilon) > 0$ 表示不仅取决于参数 β、D、T、Ω，还取决于 ε 的不同数值。任取四个数 y_1、z_1、y_2、$z_2 \in \mathbb{R}$.。令 $\widetilde{y} = y_1 - y_2$ 和 $\widetilde{z} = z_1 - z_2$.。因此，

$$y_1 z_1 - y_2 z_2 = \widetilde{y} z_1 + \widetilde{z} y_2. \tag{4.17}$$

记

$$v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t), \; p(x,t) = m_1(x,t) - m_2(x,t), (x,t) \in Q_T, \tag{4.18}$$

$$v_T(x) = u_T^{(1)}(x) - u_T^{(2)}(x), \; p_T(x) = m_T^{(1)}(x) - m_T^{(2)}(x), \; x \in \Omega, \tag{4.19}$$

$$\widetilde{G}_1(x,t) = (G_{1,1} - G_{1,2})(x,t), \quad \widetilde{G}_2(x,t) = (G_{2,\ 1} - G_{2,\ 2})(x,t), \quad (x,t) \in Q_T. \tag{4.20}$$

利用 (4.2)-(4.7) 以及泰勒公式的多维类比 [39], ，我们得到

$$\begin{aligned} &F\left(\int_\Omega M(x,y)\, m_1(y,t)\, dy, m_1(x,t)\right) - \\ &-F\left(\int_\Omega M(x,y)\, m_2(y,t)\, dy, m_2(x,t)\right) = \\ &= f_1(x,t) \int_\Omega M(x,y)\, p(y,t) + f_2(x,t)\, p(x,t), \end{aligned} \tag{4.21}$$

其中函数 f_1、f_2 满足

$$|f_1(x,t)|, |f_2(x,t)| \leq D, \quad (x,t) \in Q_T. \tag{4.22}$$

用对应的 (u_1,m_1) 方程减去关于 (u_2,m_2) 的方程 (2.1)、(2.2)。然后使用 (4.7)-(4.9)、(4.17)-(4.22)，并回顾 Carleman估计

可以同时处理方程和不等式 [3, 14, 18, 30, 40]。因此，将所得方程替换为以下两个不等式会更为方便:

$$|v_t+\beta\Delta v|(x,t)\le \widetilde{C}_4\left(|\nabla v|+\int\limits_\Omega |p(y,t)|\,dy+|p|+\left|\widetilde{G}_1\right|\right)(x,t),\ \ (x,t)\in Q_T, \tag{4.23}$$

$$|p_t-\beta\Delta p|(x,t)\le \widetilde{C}_4\left(|\nabla p|+|p|+|\Delta v|+|\nabla v|+\left|\widetilde{G}_2\right|\right)(x,t),\ \ (x,t)\in Q_T, \tag{4.24}$$

$$\partial_\nu v\mid_{S_T}=0,\ \partial_\nu p\mid_{S_T}=0, \tag{4.25}$$

$$v(x,T)=v_T(x),\ p(x,T)=p_T(x),\ x\in\Omega. \tag{4.26}$$

将等式 (4.23) 和 (4.24) 两边平方，应用柯西-施瓦茨不等式，乘以式 (3.1) 中定义的卡莱曼权函数 $\varphi^2_{\lambda,\ k}(t)$，并在 Q_T 上积分，得到

$$\begin{aligned}\int\limits_{Q_T}(v_t+\beta\Delta v)^2\varphi^2_{\lambda,k}dxdt\le \widetilde{C}_4\int\limits_{Q_T}(\nabla v)^2\varphi^2_{\lambda,k}dxdt+\\ +\widetilde{C}_4\int\limits_{Q_T}\left(p^2+\int\limits_\Omega p^2(y,t)\,dy+\widetilde{G}_1^2\right)\varphi^2_{\lambda,k}dxdt,\end{aligned} \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}\int\limits_{Q_T}(p_t-\beta\Delta p)^2\varphi^2_{\lambda,k}dxdt\le \widetilde{C}_4\int\limits_{Q_T}\left((\nabla p)^2+p^2\right)\varphi^2_{\lambda,k}dxdt+\\ +\widetilde{C}_4\int\limits_{Q_T}\left((\Delta v)^2+(\nabla v)^2+v^2+\widetilde{G}_2^2\right)\varphi^2_{\lambda,k}dxdt.\end{aligned} \tag{4.28}$$

注意到

$$\int\limits_{Q_T}\left(\int\limits_\Omega p^2(y,t)\,dy\right)\varphi^2_{\lambda,k}(t)\,dxdt\le\widetilde{C}_4\int\limits_{Q_T}p^2\varphi^2_{\lambda,k}(t)\,dxdt. \tag{4.29}$$

Set

$$b=1 \tag{4.30}$$

在卡尔曼权函数 $\varphi_{\lambda,k}(t)$ 中。将卡尔曼估计 (3.2) 应用于 (4.27) 的左侧，并使用 (4.25)、(4.26) 和 (4.29)。我们得到

$$\begin{aligned}\widetilde{C}_4\int\limits_{Q_T}\left(p^2+\widetilde{G}_1^2\right)\varphi^2_{\lambda,k}dxdt\ge\\ \ge\int\limits_{Q_T}\left(v_t^2+(\Delta v)^2\right)\varphi^2_{\lambda,k}dxdt+\\ +\lambda k\int\limits_{Q_T}(\nabla v)^2\varphi^2_{\lambda,k}dxdt+\lambda^2k^2\int\limits_{Q_T}v^2\varphi^2_{\lambda,k}dxdt-\\ -\widetilde{C}_4e^{2\lambda(T+1)^k}\int\limits_\Omega\left[(\nabla_x v_T)^2+\lambda k(T+1)^k v_T^2\right]dx,\\ \forall\lambda>0,\forall k>2.\end{aligned} \tag{4.31}$$

取 $\lambda_1 = \lambda_1(\beta, D, T, \Omega) \geq 1$ 足够大，使得

$$\lambda_1 > 2\widetilde{C}_4 \tag{4.32}$$

并回想起 $k > 2$，由 (4.31) 可得

$$\begin{gathered}
\widetilde{C}_4 \int\limits_{Q_T} p^2 \varphi_{\lambda,k}^2 dxdt + \widetilde{C}_4 \int\limits_{Q_T} \widetilde{G}_1^2 \varphi_{\lambda,k}^2 dxdt \geq \\
\geq \int\limits_{Q_T} \left(v_t^2 + (\Delta v)^2\right) \varphi_{\lambda,k}^2 dxdt + \\
+\lambda k \int\limits_{Q_T} (\nabla v)^2 \varphi_{\lambda,k}^2 dxdt + \lambda^2 k^2 \int\limits_{Q_T} v^2 \varphi_{\lambda,k}^2 dxdt - \\
-\widetilde{C}_4 e^{2\lambda(T+1)^k} \int\limits_{\Omega} \left[(\nabla_x v_T)^2 + \lambda k (T+1)^k v_T^2\right] dx, \\
\forall \lambda \geq \lambda_1, \forall k > 2.
\end{gathered} \tag{4.33}$$

W现在将卡尔曼估计 (3.3) 应用于 (4.28) 的左侧。我们得到 n

$$\begin{gathered}
\widetilde{C}_4 \int\limits_{Q_T} \left((\Delta v)^2 + v^2 + \widetilde{G}_2^2\right) \varphi_{\lambda,k}^2 dxdt + \widetilde{C}_4 \int\limits_{Q_T} \left((\nabla p)^2 + p^2\right) \varphi_{\lambda,k}^2 dxdt \geq \\
\geq \sqrt{k} \int\limits_{Q_T} (\nabla p)^2 \varphi_{\lambda,k}^2 dxdt + \lambda k^2 \int\limits_{Q_T} p^2 \varphi_{\lambda,k}^2 dxdt - \\
-\lambda k (T+b)^{k-1} e^{2\lambda(T+b)^k} \int\limits_{\Omega} p_T^2(x) dx - e^{2\lambda b^k} \int\limits_{\Omega} \left[(\nabla p)^2 + \sqrt{k} p^2\right](x,0) dx, \\
\forall \lambda > 0, \forall k \geq k_0 = k_0(\beta, T) > 2.
\end{gathered} \tag{4.34}$$

选择数 $k_0 = k_0(\beta, T)$ 足够大，使得

$$k_0 > \max\left(2, 4\widetilde{C}_4^2\right), \tag{4.35}$$

并且，在 (4.48) 之前，令 $k = k_0$. 此外，令 $\lambda \geq \lambda_1$，其中数 $\lambda_1 = \lambda_1(\beta, D, T, \Omega) \geq 1$在 (??) 中定义。于是 (4.34) 意味着

$$\begin{gathered}
\widetilde{C}_4 \int\limits_{Q_T} \left((\Delta v)^2 + v^2 + \widetilde{G}_2^2\right) \varphi_{\lambda,k}^2 dxdt \geq \\
\geq \int\limits_{Q_T} (\nabla p)^2 \varphi_{\lambda,k}^2 dxdt + \lambda \int\limits_{Q_T} p^2 \varphi_{\lambda,k}^2 dxdt - \\
-\widetilde{C}_4 \lambda (T+1)^{k-1} e^{2\lambda(T+1)^k} \int\limits_{\Omega} p_T^2(x) dx - \widetilde{C}_4 e^{2\lambda} \int\limits_{\Omega} \left[(\nabla p)^2 + p^2\right](x,0) dx, \\
\forall \lambda \geq \lambda_1.
\end{gathered} \tag{4.36}$$

特别地，由 (4.36) 可得

$$\begin{gathered}
\int\limits_{Q_T} p^2 \varphi_{1,\lambda,k}^2 dxdt \leq \widetilde{C}_4 \lambda^{-1} \int\limits_{Q_T} \left((\Delta v)^2 + v^2 + \widetilde{G}_2^2\right) \varphi_{\lambda,k}^2 dxdt + \\
+\widetilde{C}_4 e^{2\lambda(T+1)^k} \int\limits_{\Omega} p_T^2(x) dx + \widetilde{C}_4 e^{2\lambda} \int\limits_{\Omega} \left[(\nabla p)^2 + p^2\right](x,0) dx, \ \forall \lambda \geq \lambda_1.
\end{gathered} \tag{4.37}$$

将 (4.33) 第一行的第一项替换为不等式 (4.37) 的右端，我们得到

$$\widetilde{C}_4\lambda e^{2\lambda(T+1)^k}\int\limits_\Omega \left[p_T^2+\left(\nabla_x v_T\right)^2+v_T^2\right](x)\,dx+\widetilde{C}_4\int\limits_{Q_T}\left(\widetilde{G}_1^2+\widetilde{G}_2^2\right)\varphi_{\lambda,k}^2 dxdt+$$

$$+\widetilde{C}_4 e^{2\lambda}\int\limits_\Omega \left[\left(\nabla p\right)^2+p^2\right](x,0)\,dx+$$

$$+\frac{\widetilde{C}_4}{\lambda}\int\limits_{Q_T}\left(\left(\Delta v\right)^2+v^2\right)\varphi_{\lambda,k}^2 dxdt\geq \tag{4.38}$$

$$\geq\int\limits_{Q_T}\left(v_t^2+\left(\Delta v\right)^2\right)\varphi_{\lambda,k}^2 dxdt+$$

$$+\lambda\int\limits_{Q_T}\left(\nabla v\right)^2\varphi_{\lambda,k}^2 dxdt+\lambda^2\int\limits_{Q_T}v^2\varphi_{\lambda,k}^2 dxdt,\ \forall\lambda\geq\lambda_1.$$

由 (4.32) $C_4/\lambda<1/2,\,\forall\lambda\geq\lambda_1$. 因此，(4.38) 的第 4th 行和第 5th 行中的项吸收了 (4.38) 的第 3rd 行中的项。因此，

$$\widetilde{C}_4\lambda e^{2\lambda(T+1)^k}\int\limits_\Omega \left[p_T^2+\left(\nabla_x v_T\right)^2+v_T^2\right](x)\,dx+\widetilde{C}_4\int\limits_{Q_T}\left(\widetilde{G}_1^2+\widetilde{G}_2^2\right)\varphi_{\lambda,k}^2 dxdt+$$

$$+\widetilde{C}_4 e^{2\lambda}\int\limits_\Omega \left[\left(\nabla p\right)^2+p^2\right](x,0)\,dx\geq$$

$$\geq\int\limits_{Q_T}\left(v_t^2+\left(\Delta v\right)^2\right)\varphi_{\lambda,k}^2 dxdt+ \tag{4.39}$$

$$+\lambda\int\limits_{Q_T}\left(\nabla v\right)^2\varphi_{\lambda,k}^2 dxdt+\lambda^2\int\limits_{Q_T}v^2\varphi_{\lambda,k}^2 dxdt,\ \forall\lambda\geq\lambda_1.$$

将 (4.39) 的最后两行与 (4.36) 的第一行进行比较，我们得到

$$\widetilde{C}_4\lambda e^{2\lambda(T+1)^k}\int\limits_\Omega \left[p_T^2+\left(\nabla_x v_T\right)^2+v_T^2\right](x)\,dx+\widetilde{C}_4\int\limits_{Q_T}\left(\widetilde{G}_1^2+\widetilde{G}_2^2\right)\varphi_{\lambda,k}^2 dxdt+$$

$$+\widetilde{C}_4 e^{2\lambda}\int\limits_\Omega \left[\left(\nabla p\right)^2+p^2\right](x,0)\,dx\geq \tag{4.40}$$

$$\geq\int\limits_{Q_T}\left(\nabla p\right)^2\varphi_{\lambda,k}^2 dxdt+\lambda\int\limits_{Q_T}p^2\varphi_{\lambda,k}^2 dxdt,\ \forall\lambda\geq\lambda_1.$$

将 (4.39) 和 (4.40) 相加，得到

$$\int\limits_{Q_T}\left(v_t^2+\left(\Delta v\right)^2+\left(\nabla v\right)^2+v^2+\left(\nabla p\right)^2+p^2\right)\varphi_{\lambda,k}^2 dxdt\leq$$

$$\leq \widetilde{C}_4 e^{3\lambda(T+1)^k} \int\limits_\Omega \left[p_T^2 + (\nabla_x v_T)^2 + v_T^2\right](x)\, dx \tag{4.41}$$

$$+\widetilde{C}_4 e^{2\lambda} \int\limits_\Omega \left[(\nabla p)^2 + p^2\right](x,0)\, dx + \widetilde{C}_4 \int\limits_{Q_T} \left(\widetilde{G}_1^2 + \widetilde{G}_2^2\right) \varphi_{\lambda,k}^2 dxdt,\ \forall \lambda \geq \lambda_1.$$

由于由 (4.1) 可知 $Q_{\varepsilon,\ T} \subset Q_T$，因此在 (4.41) 的第一行中用 $Q_{\varepsilon,\ T}$ 替换 Q_T，可加强此不等式。因此，

$$\int\limits_{Q_{\varepsilon,T}} \left(v_t^2 + (\Delta v)^2 + (\nabla v)^2 + v^2 + (\nabla p)^2 + p^2\right) \varphi_{1,\lambda,k}^2 dxdt \leq$$

$$\leq \widetilde{C}_4 e^{3\lambda(T+1)^k} \int\limits_\Omega \left[p_T^2 + (\nabla_x v_T)^2 + v_T^2\right](x)\, dx \tag{4.42}$$

$$+\widetilde{C}_4 e^{2\lambda} \int\limits_\Omega \left[(\nabla p)^2 + p^2\right](x,0)\, dx + \widetilde{C}_4 \int\limits_{Q_T} \left(\widetilde{G}_1^2 + \widetilde{G}_2^2\right) \varphi_{\lambda,k}^2 dxdt,\ \forall \lambda \geq \lambda_1.$$

接下来，由 (3.1)、(4.1) 和 (4.30)

$$\min_{\overline{Q}_{\varepsilon,T}} \varphi_{\lambda,k}^2(t) = e^{2\lambda(\varepsilon+1)^k}, \tag{4.43}$$

$$\max_{\overline{Q}_T} \varphi_{\lambda,k}^2(t) = e^{2\lambda(T+1)^k}. \tag{4.44}$$

此外，由 (4.10)、(4.11)、(4.19)、(4.20) 和 (4.44)

$$\widetilde{C}_4 e^{3\lambda(T+1)^k} \int\limits_\Omega \left[p_T^2 + (\nabla_x v_T)^2 + v_T^2\right](x)\ dx + \widetilde{C}_4 \int\limits_{Q_T} \left(\widetilde{G}_1^2 + \widetilde{G}_2^2\right) \varphi_{\lambda,k}^2 dxdt \leq$$

$$\leq \widetilde{C}_4 e^{3\lambda(T+1)^k} \delta^2. \tag{4.45}$$

根据迹定理

$$\widetilde{C}_4 e^{2\lambda} \int\limits_\Omega \left[(\nabla p)^2 + p^2\right](x,0)\, dx \leq \widetilde{C}_4 e^{2\lambda} \|p\|_{H^2(Q_T)}^2. \tag{4.46}$$

因此，利用 (4.42)、(4.43)、(4.45) 和 (4.46)，我们用 C_4 替换 $\widetilde{C}_4$（见本证明开头），从而对所有 $\lambda \geq \lambda_1$ 得到：

$$\|v_t\|_{L_2(Q_{\varepsilon,T})}^2 + \|\Delta v\|_{L_2(Q_{\varepsilon,T})}^2 + \|v\|_{H^{1,0}(Q_{\varepsilon,T})}^2 + \|p\|_{H^{1,0}(Q_{\varepsilon,T})}^2 \leq \tag{4.47}$$

$$\leq C_4 e^{3\lambda(T+1)^k} \delta^2 + C_4 \exp\left[-2\lambda(\varepsilon+1)^k \left(1 - \frac{1}{(\varepsilon+1)^k}\right)\right] \|p\|_{H^2(Q_T)}^2,$$

回顾（4.35），将 $k_1 = k_1(\beta, T, \varepsilon)$ 选取得足够大，使得

$$\frac{1}{(\varepsilon+1)^{k_1}} < \frac{1}{2} \tag{4.48}$$

并令 $k=k_1$. 。于是（4.47）蕴含

$$\|v_t\|^2_{L_2(Q_{\varepsilon,T})}+\|\Delta v\|^2_{L_2(Q_{\varepsilon,T})}+\|v\|^2_{H^{1,0}(Q_{\varepsilon,T})}+\|p\|^2_{H^{1,0}(Q_{\varepsilon,T})}\leq \tag{4.49}$$

$$\leq C_4e^{3\lambda(T+1)^k}\delta^2+C_4e^{-\lambda(\varepsilon+1)^k}\|p\|^2_{H^2(Q_T)},\ \lambda\geq\lambda_1.$$

选取 $\lambda=\lambda(\delta)$，使得

$$e^{3\lambda(\delta)(T+1)^k}\delta^2=\delta. \tag{4.50}$$

因此，

$$\lambda(\delta)=\ln\left[\delta^{(3(T+1))^{-1}}\right], \tag{4.51}$$

$$e^{-\lambda(\varepsilon+1)^k}=\delta^{2\rho},\ 2\rho=\frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon+1}{T+1}\right)^k<\frac{1}{3}. \tag{4.52}$$

选取 $\delta_0=\delta_0(\beta,D,T,\Omega\ \varepsilon)\in(0,1)$，使其足够小，以便

$$\lambda(\delta_0)=\ln\left[\delta^{(3(T+1))^{-1}}\right]\geq\lambda_1. \tag{4.53}$$

那么 (4.47)-(4.53) 可推出

$$\begin{gathered}\|v_t\|_{L_2(Q_{\varepsilon,T})}+\|\Delta v\|_{L_2(Q_{\varepsilon,T})}+\|v\|_{H^{1,0}(Q_{\varepsilon,T})}+\|p\|_{H^{1,0}(Q_{\varepsilon,T})}\leq\\ \leq C_4\left(1+\|p\|_{H^2(Q_T)}\right)\delta^\rho,\ \forall\delta\in(0,\delta_0),\ \rho\in(0,1/6).\end{gathered} \tag{4.54}$$

目标 Hölder 稳定性估计 (4.12)-(4.14) 的其余证明可由 (4.8)、(4.9)、(4.18)、(4.19)、(4.54) 和引理 3.1 立即得出。

现在证明唯一性。假设恒等式 (4.15) 和 (4.16) 成立。那么由 (4.10) 和 (4.11) $\delta=0$. 因此，(4.12) 和 (4.13) 推出 $u_1(x,t)=u_2(x,t)$ 且$m_1(x,t)=m_2(x,t)$，其中 $(x,t)\in Q_{\varepsilon,\ T}$. 令 $\varepsilon\to0$，得到 $u_1(x,t)=u_2(x,t)$ 且$m_1(x,t)=m_2(x,t)$，其中 $(x,t)\in Q_T$. □

5 问题 2 的 Hölder 稳定性与唯一性

与 (4.1) 类似，对于任意数 $\varepsilon\in(0,T)$，定义区域 $P_{\varepsilon,T}$如下：

$$P_{\varepsilon,T}=\Omega\times(0,T-\varepsilon)\subset Q_T. \tag{5.1}$$

定理 5.1. 与定理 4.1 中一样，设 $D_1,D_2,D_3,D_4>0$ 为某些数。设函数 G_1, $G_2\in L_2(Q_T)$ 为方程 (2.1)、(2.2) 的右端项。设函数F,M,r 满足 (2.1)、(2.2) 中的条件。沿用定理 4.1 的记号 (4.4)-(4.6)。假设两对函数 (u_1,m_1) 和 (u_2,m_2) 分别与两对函数 ($G_{1,1}$,$G_{2,1}$) 和 ($G_{1,2}$,$G_{2,2}$) 一起满足方程 (2.1)-(2.3)，并且满足

$$(u_1,m_1),(u_2,m_2)\in K_3(D_3)\times K_4(D_4). \tag{5.2}$$

假设这两对函数 (u_1,m_1) 和 (u_2,m_2) 满足以下初始条件（见 (2.5)）：

$$u_1(x,0)=u_0^{(1)}(x),m_1(x,0)=m_0^{(1)}(x),\ x\in\Omega. \tag{5.3}$$

$$u_2(x,0)=u_0^{(2)}(x),\ m_2(x,0)=m_0^{(2)}(x),\ x\in\Omega. \tag{5.4}$$

令数值为 $\varepsilon\in(0,T)$，并令 $P_{\varepsilon,T}$ 为 (5.1) 中定义的区域。则存在一个数值 $C_5=C_5(\beta,D,T,\Omega,\varepsilon)>0$，以及一个充分小的数值 $\delta_0=\delta_0(\beta,D,T,\Omega,\varepsilon)\in(0,1)$，它们仅依赖于所列参数，使得若 $\delta\in(0,\delta_0)$，

$$\left\|u_0^{(1)}-u_0^{(2)}\right\|_{H^1(\Omega)},\left\|m_0^{(1)}-m_0^{(2)}\right\|_{L_2(\Omega)}\leq\delta, \tag{5.5}$$

此外，如果不等式 (4.11) 成立，则存在一个仅依赖于所列参数的数 $\eta=\eta(\beta,D,T,\Omega,\varepsilon)\in(0,1/6)$，使得以下 Hölder 稳定性估计成立：

$$\begin{gathered}\|u_1-u_2\|_{H^{1,0}(P_{\varepsilon,T})}+\|m_1-m_2\|_{H^{1,0}(P_{\varepsilon,T})}\leq\\ \leq C_5\left(1+\|u_1-u_2\|_{H^2(Q_T)}+\|m_1-m_2\|_{H^1(Q_T)}\right)\delta^{\eta},\ \forall\delta\in(0,\delta_0).\end{gathered}$$

此外，如果 (5.3) 和 (5.4) 中

$$u_0^{(1)}(x)\equiv u_0^{(2)}(x),\ m_0^{(1)}(x)\equiv m_0^{(2)}(x),\ x\in\Omega,$$

并且 (4.16) 也成立，则在 Q_T 中有 $u_1(x,t)\equiv u_2(x,t)$ 且 $m_1(x,t)\equiv m_2(x,t)$，即问题 2 至多有一个解 $(u,m)\in K_3(D_3)\times K_4(D_4)$。

证明。与定理 4.1 的证明类似，在本证明中，$C_5=C_5(\beta,D,T,\Omega)>0$表示仅依赖于 β,D,T,Ω 的不同数值，而 $C_5=C_5(\beta,D,T,\Omega,\varepsilon)>0$表示不仅依赖于参数 β,D,T,Ω，还依赖于 ε 的不同数值。下面我们将 (3.4) 中的数 $c=c(T)>2$ 选为：

$$c=c(T)=2+\sqrt{T+\frac{1}{4}}. \tag{5.6}$$

我们引入数值 $\xi=\xi(T)$，

$$\xi=\xi(T)=\frac{T+c}{c^2}=\frac{T+2+\sqrt{T+1/4}}{\left(2+\sqrt{T+1/4}\right)^2}\in(0,1). \tag{5.7}$$

选择 (5.6)、(5.7) 的原因将在下面的证明中解释。

保留记号 (4.18) 和 (4.20)，并将 (4.19) 替换为

$$v(x,0)=v_0(x)=u_0^{(1)}(x)-u_0^{(2)}(x),\ x\in\Omega, \tag{5.8}$$

$$p(x,0)=p_0(x)=m_0^{(1)}(x)-m_0^{(2)}(x),\ x\in\Omega. \tag{5.9}$$

与 (4.23)-(4.26) 类似，我们得到两个不等式：

$$|v_t+\beta\Delta v|(x,t)\leq\widetilde{C}_5\left(|\nabla v|+\int_\Omega|p(y,t)|\,dy+|p|+\left|\widetilde{G}_1\right|\right)(x,t),\ (x,t)\in Q_T, \tag{5.10}$$

$$\begin{gathered}|p_t-\beta\Delta p+r^2(x)m_1\Delta v|(x,t)\leq\\ \leq\widetilde{C}_5\left(|\nabla p|+|p|+|\nabla v|+\left|\widetilde{G}_2\right|\right)(x,t),\ (x,t)\in Q_T,\end{gathered} \tag{5.11}$$

$$\partial_\nu v\mid_{S_T}=0,\ \partial_\nu p\mid_{S_T}=0, \tag{5.12}$$

$$v(x,0)=v_0(x),\ p(x,0)=p_0(x). \tag{5.13}$$

请注意，(5.11) 与 (4.24) 的区别在于，含有 Δv 的项位于 (5.11) 的左边，而非 (4.24) 的右边。这是因为将定理 3.4 的拟卡尔曼估计应用于 (5.11) 的左边，有助于处理这一项。

下文中，(3.4) 里的卡尔曼权函数 $\varphi_\lambda(t)$ 的参数 $c=c(T)$ 与 (5.6) 中相同。对 (5.10) 和 (5.11) 应用定理 4.1 证明中相同的步骤，可得 (4.27) 和 (4.28) 的以下类似结果：

$$\begin{aligned}\int\limits_{Q_T}(v_t+\beta\Delta v)^2\varphi_\lambda^2dxdt\le\widetilde{C}_5\int\limits_{Q_T}(\nabla v)^2\varphi_\lambda^2dxdt+\\ +\widetilde{C}_5\int\limits_{Q_T}\left(p^2+\int\limits_\Omega p^2(y,t)\,dy+\widetilde{G}_1^2\right)\varphi_\lambda^2dxdt,\end{aligned} \tag{5.14}$$

$$\begin{aligned}\int\limits_{Q_T}\left(p_t-\beta\Delta p+r^2(x)m_1\Delta v\right)^2\varphi_\lambda^2dxdt\le\widetilde{C}_5\int\limits_{Q_T}\left((\nabla p)^2+p^2\right)\varphi_\lambda^2dxdt+\\ +\widetilde{C}_5\int\limits_{Q_T}\left((\nabla v)^2+\widetilde{G}_2^2\right)\varphi_\lambda^2dxdt.\end{aligned} \tag{5.15}$$

取与 (3.5) 中相同的 $\lambda_0=\lambda_0(T)$，并将卡尔曼估计 (3.6) 应用于 (5.14) 的左端。可得

$$\begin{aligned}\widetilde{C}_5e^{2c\lambda}\int\limits_\Omega\left((\nabla v)^2+v^2\right)(x,T)+\widetilde{C}_5\lambda(T+c)^{\lambda-1}e^{2(T+c)^\lambda}\int\limits_\Omega v^2(x,0)\,dx+\\ +\widetilde{C}_5\int\limits_{Q_T}(\nabla v)^2\varphi_\lambda^2dxdt+\widetilde{C}_5\int\limits_{Q_T}\left(p^2+\int\limits_\Omega p^2(y,t)\,dy+\widetilde{G}_1^2\right)\varphi_\lambda^2dxdt\ge\\ \ge\sqrt{\lambda}\int\limits_{Q_T}(\nabla v)^2\varphi_\lambda^2dxdt+\lambda^2c^{\lambda-2}\int\limits_{Q_T}v^2\varphi_\lambda^2dxdt,\ \forall\lambda\ge\lambda_0.\end{aligned} \tag{5.16}$$

选择 $\lambda_2=\lambda_2(\beta,D,T,\Omega)\ge\lambda_0>64$，使得

$$\sqrt{\lambda_2}\ge2\widetilde{C}_5. \tag{5.17}$$

于是，左侧（5.16）中含有 $\widetilde{C}_5(\nabla v)^2$ 的项可被右侧（5.16）中含有 $\sqrt{\lambda}(\nabla v)^2$ 的项吸收。因此，我们得到

$$\begin{aligned}\widetilde{C}_5e^{2c\lambda}\int\limits_\Omega\left((\nabla v)^2+v^2\right)(x,T)+\widetilde{C}_5\lambda(T+c)^{\lambda-1}e^{2(T+c)^\lambda}\int\limits_\Omega v^2(x,0)\,dx+\\ +\widetilde{C}_5\int\limits_{Q_T}\left(p^2+\int\limits_\Omega p^2(y,t)\,dy+\widetilde{G}_1^2\right)\varphi_\lambda^2dxdt\ge\\ \ge\sqrt{\lambda}\int\limits_{Q_T}(\nabla v)^2\varphi_\lambda^2dxdt+\lambda^2c^{\lambda-2}\int\limits_{Q_T}v^2\varphi_\lambda^2dxdt,\ \forall\lambda\ge\lambda_2.\end{aligned} \tag{5.18}$$

由于

$$\int\limits_{Q_T}\left(\int\limits_{\Omega}p^2\left(y,t\right)dy\right)\varphi_\lambda^2 dxdt\leq\widetilde{C}_5\int\limits_{Q_T}p^2\varphi_\lambda^2 dxdt,$$

那么（5.18）意味着

$$\begin{aligned}\widetilde{C}_5e^{2c^\lambda}\int\limits_{\Omega}\left(\left(\nabla v\right)^2+v^2\right)\left(x,T\right)+\widetilde{C}_5\lambda\left(T+c\right)^{\lambda-1}e^{2(T+c)^\lambda}\int\limits_{\Omega}v^2\left(x,0\right)dx+\\+\widetilde{C}_5\int\limits_{Q_T}\left(p^2+\widetilde{G}_1^2\right)\varphi_\lambda^2 dxdt\geq\\\geq\sqrt{\lambda}\int\limits_{Q_T}\left(\nabla v\right)^2\varphi_\lambda^2 dxdt+\lambda^2c^{\lambda-2}\int\limits_{Q_T}v^2\varphi_\lambda^2 dxdt,\ \forall\lambda\geq\lambda_2.\end{aligned}\tag{5.19}$$

现在的问题是如何估计（5.19）左侧包含 p^2 的积分。我们将通过处理（5.15）来完成这一步。

利用卡尔曼估计（3.7），我们对（5.15）左侧进行估计，得到:

$$\begin{aligned}\int\limits_{Q_T}\left(p_t-\beta\Delta p+r^2\left(x\right)m_1\Delta v\right)^2\varphi_\lambda^2 dxdt\geq\\\geq\widetilde{C}_5\lambda c^{\lambda-1}\int\limits_{Q_T}\left(\nabla p\right)^2\varphi_\lambda^2 dxdt+\widetilde{C}_5\lambda^2c^{2\lambda-2}\int\limits_{Q_T}p^2\varphi_\lambda^2 dxdt-\\-\widetilde{C}_5\lambda\left(T+c\right)^{\lambda-1}\int\limits_{Q_T}\left(\nabla v\right)^2\varphi_\lambda^2 dxdt-\\-\lambda\left(T+c\right)^{\lambda-1}e^{2(T+c)^\lambda}\int\limits_{\Omega}p^2\left(x,0\right)dx,\ \forall\lambda\geq\lambda_0.\end{aligned}$$

将其与（5.15）比较，我们得到

$$\begin{aligned}\lambda\left(T+c\right)^{\lambda-1}e^{2(T+c)^\lambda}\int\limits_{\Omega}p^2\left(x,0\right)dx+\\+\widetilde{C}_5\int\limits_{Q_T}\left(\left(\nabla p\right)^2+p^2\right)\varphi_\lambda^2 dxdt+\\+\widetilde{C}_5\int\limits_{Q_T}\left(\left(\nabla v\right)^2+\widetilde{G}_2^2\right)\varphi_\lambda^2 dxdt+\widetilde{C}_5\lambda\left(T+c\right)^{\lambda-1}\int\limits_{Q_T}\left(\nabla v\right)^2\varphi_\lambda^2 dxdt\geq\\\geq\lambda c^{\lambda-1}\int\limits_{Q_T}\left(\nabla p\right)^2\varphi_\lambda^2 dxdt+\lambda^2c^{2\lambda-2}\int\limits_{Q_T}p^2\varphi_\lambda^2 dxdt,\ \forall\lambda\geq\lambda_0.\end{aligned}\tag{5.20}$$

由 (5.6) 可知 $\lambda_2\geq\lambda_0>64$ 和 $c>2$，因此 (5.17) 推出

$$\lambda\left(T+c\right)^{\lambda-1}>2\widetilde{C}_5\text{ and }\lambda c^{\lambda-1}>2\widetilde{C}_5,\ \forall\lambda\geq\lambda_2.$$

因此，(5.20) 可改写为：

$$\begin{gathered}\widetilde{C}_5\lambda\left(T+c\right)^{\lambda-1}e^{2(T+c)^\lambda}\int\limits_\Omega p^2\left(x,0\right)dx+\widetilde{C}_5\int\limits_{Q_T}\widetilde{G}_2^2\varphi_\lambda^2dxdt+\\+\widetilde{C}_5\lambda\left(T+c\right)^{\lambda-1}\int\limits_{Q_T}\left(\nabla v\right)^2\varphi_\lambda^2dxdt\geq\\\geq\lambda c^{\lambda-1}\int\limits_{Q_T}\left(\nabla p\right)^2\varphi_\lambda^2dxdt+\lambda^2c^{2\lambda-2}\int\limits_{Q_T}p^2\varphi_\lambda^2dxdt,\ \forall\lambda\geq\lambda_2.\end{gathered}\tag{5.21}$$

特别　　地，(5.21) 给出了包含 p^2 的积分所需的估计：

$$\begin{gathered}\int\limits_{Q_T}p^2\varphi_\lambda^2dxdt\leq\widetilde{C}_5\xi^{\lambda-1}\int\limits_{Q_T}\left(\nabla v\right)^2\varphi_\lambda^2dxdt+\\+\widetilde{C}_5\left(T+c\right)^{\lambda-1}e^{2(T+c)^\lambda}\int\limits_\Omega p^2\left(x,0\right)dx+\widetilde{C}_5\int\limits_{Q_T}\widetilde{G}_2^2\varphi_\lambda^2dxdt,\ \forall\lambda\geq\lambda_2,\end{gathered}\tag{5.22}$$

其中，数 $\xi=\xi(T)\in(0,1)$ 在 (5.7) 中定义，这也是我们前面选择 (5.6)、(5.7) 的原因。因此，

$$\begin{gathered}-\widetilde{C}_5\int\limits_{Q_T}p^2\varphi_\lambda^2dxdt\geq-\xi^{\lambda-1}\int\limits_{Q_T}\left(\nabla v\right)^2\varphi_\lambda^2dxdt-\\-\widetilde{C}_5\left(T+c\right)^{\lambda-1}e^{2(T+c)^\lambda}\int\limits_\Omega p^2\left(x,0\right)dx+\widetilde{C}_5\int\limits_{Q_T}\widetilde{G}_2^2\varphi_\lambda^2dxdt,\ \forall\lambda\geq\lambda_2.\end{gathered}\tag{5.23}$$

选择 $\lambda_3=\lambda_3(\beta,D,T,\Omega)\geq\lambda_2$ 使得

$$\xi^{\lambda-1}\leq\frac{\sqrt{\lambda}}{2},\ \forall\lambda\geq\lambda_3.$$

然后将 (5.23) 代入 (5.19)。我们得到

$$\begin{gathered}\int\limits_{Q_T}\left(\left(\nabla v\right)^2+v^2\right)\varphi_\lambda^2dxdt\leq\\\leq\widetilde{C}_5e^{2c^\lambda}\int\limits_\Omega\left(\left(\nabla v\right)^2+v^2\right)(x,T)+\widetilde{C}_5e^{3(T+c)^\lambda}\int\limits_\Omega v^2\left(x,0\right)dx+\\+\widetilde{C}_5e^{3(T+c)^\lambda}\int\limits_\Omega p^2\left(x,0\right)dx+\widetilde{C}_5\int\limits_{Q_T}\left(\widetilde{G}_1^2+\widetilde{G}_2^2\right)\varphi_\lambda^2dxdt,\ \forall\lambda\geq\lambda_3.\end{gathered}\tag{5.24}$$

因此，(5.21) 左侧含有 $(\nabla v)^2$ 的积分可以通过 (5.24) 右侧进行估计。这反过来意味着，右侧的积分

(5.21) 也可以通过 (5.24) 右侧进行估计。因此，我们得到

$$\begin{gathered}\int\limits_{Q_T}\left((\nabla p)^2+p^2\right)\varphi_\lambda^2 dxdt\leq\\ \leq\widetilde{C}_5e^{2c^\lambda}\int\limits_\Omega\left((\nabla v)^2+v^2\right)(x,T)+\widetilde{C}_5\lambda\left(T+c\right)^{\lambda-1}e^{2(T+c)^\lambda}\int\limits_\Omega v^2\left(x,0\right)dx+\\ +\widetilde{C}_5\left(T+c\right)^{\lambda-1}e^{2(T+c)^\lambda}\int\limits_\Omega p^2\left(x,0\right)dx+\widetilde{C}_5\int\limits_{Q_T}\left(\widetilde{G}_1^2+\widetilde{G}_2^2\right)\varphi_\lambda^2 dxdt,\ \forall\lambda\geq\lambda_3.\end{gathered}\tag{5.25}$$

现在回顾在（5.1）中定义的区域 $P_{\varepsilon,\ T}\subset Q_T$ 因此，利用（4.11）、（5.5）、（5.8）、（5.9）、（5.24）、（5.25）和迹定理，我们得到

$$\begin{gathered}\int\limits_{P_{\varepsilon,T}}\left((\nabla v)^2+v^2+(\nabla p)^2+p^2\right)\varphi_\lambda^2 dxdt\leq\\ \leq\widetilde{C}_5e^{3(T+c)^\lambda}\delta^2+\widetilde{C}_5e^{2c^\lambda}\left(\|v\|_{H^2(Q_T)}^2+\|p\|_{H^1(Q_T)}^2\right),\ \forall\lambda\geq\lambda_3.\end{gathered}\tag{5.26}$$

由（3.4）和（5.1）

$$\min_{\overline{P}_{\varepsilon,T}}\varphi_\lambda\left(t\right)=e^{(c+\varepsilon)^\lambda}.$$

因此，利用（5.26），我们得到

$$\begin{gathered}\|v\|_{H^{1,0}\left(P_{\varepsilon,T}\right)}^2+\|p\|_{H^{1,0}\left(P_{\varepsilon,T}\right)}^2\leq C_5e^{3(T+c)^\lambda}\delta^2+\\ +C_5\exp\left[-2\left(c+\varepsilon\right)^\lambda\left(1-\left(c/\left(c+\varepsilon\right)\right)^\lambda\right)\right]\left(\|v\|_{H^2(Q_T)}^2+\|p\|_{H^1(Q_T)}^2\right),\\ \forall\lambda\geq\lambda_3.\end{gathered}\tag{5.27}$$

取 $\lambda_4=\lambda_4(\beta,D,T,\Omega\ \varepsilon)\geq\lambda_3$ 使得

$$\left(\frac{c}{c+\varepsilon}\right)^\lambda\leq\frac{1}{2},\ \forall\lambda\geq\lambda_4.$$

于是（5.27）推出

$$\begin{gathered}\|v\|_{H^{1,0}\left(P_{\varepsilon,T}\right)}^2+\|p\|_{H^{1,0}\left(P_{\varepsilon,T}\right)}^2\leq\\ \leq C_5e^{3(T+c)^\lambda}\delta^2+C_5e^{-(c+\varepsilon)^\lambda}\left(\|v\|_{H^2(Q_T)}^2+\|p\|_{H^1(Q_T)}^2\right),\ \forall\lambda\geq\lambda_4.\end{gathered}\tag{5.28}$$

设 $\lambda=\lambda(\delta)$ 使得

$$e^{3(T+c)^\lambda}\delta^2=\delta.\tag{5.29}$$

因此，

$$\lambda\left(\delta\right)=\ln\left[\delta^{-\left(3(T+c)^{-1}\right)}\right].\tag{5.30}$$

Then

$$e^{-(c+\varepsilon)^\lambda}=\delta^\eta,\ 2\eta=\frac{c+\varepsilon}{3\left(T+c\right)}<\frac{1}{3}.\tag{5.31}$$

选取足够小的 $\delta_0 = \delta_0(\beta, D, T, \Omega\ \varepsilon) \in (0, 1)$，使得

$$\ln\left[\delta_0^{-\left(3(T+c)^{-1}\right)}\right] \geq \lambda_4. \tag{5.32}$$

因此，利用 (5.28)-(5.32)，我们得到

$$\begin{aligned} &\|v\|_{H^{1,0}\left(P_{\varepsilon,T}\right)} + \|p\|_{H^{1,0}\left(P_{\varepsilon,T}\right)} \leq \\ &\leq C_5\left(1 + \|v\|_{H^2(Q_T)} + \|p\|_{H^1(Q_T)}\right)\delta^{\eta},\ \forall \delta \in (0, \delta_0)\,. \end{aligned}$$

证明的其余部分与定理 4.1 中 (4.54) 之后的证明部分相同。 □

参考文献

[1] Y. Achdou、P. Cardaliaguet、F. Delarue、A. Porretta 和 F. Santambrogio，《平均场博弈》，意大利切特拉罗，2019年，《数学讲义》，C.I.M.E. 基金会丛书，第2281卷，施普林格，2019年。[2] M. Bardi 和 M. Fischer，关于有限时域平均场博弈中解的非唯一性与唯一性，ESAIM 控制、优化与变分计算，25（2019年），44。[3] L. Beilina 和 M.V. Klibanov，《系数反问题的近似全局收敛与自适应》，施普林格，纽约，2012年。[4] A. Bukhgeim 和 M. V. Klibanov，一类多维反问题的大范围唯一性，《苏联数学文献》，17（1981年），244–247。[5] R. Couillet、S.M. Perlaza、H. Tembine 和 M. Debbah，智能电网中的电动汽车：平均场博弈分析，IEEE《通信选集期刊》，30（2012年），1086-1096。[6] S.-R. Fu 和 P.-F. Yao，具有弯曲中面的弹性板反问题的稳定性，《反问题》，39（2023年），045003。[7] M. Huang、P. E. Caines 和 R. P. Malham´e，大规模群体成本耦合 LQG 问题中的非均质个体：个体质量行为与分散式纳什均衡，IEEE《自动控制汇刊》，52（2007年），1560–1571。[8] M. Huang、R. P. Malham´e 和 P. E. Caines，大规模群体随机动态博弈：闭环 McKean-Vlasov 系统与纳什确定性等价原理，《通信与信息系统》，6（2006年），221–251。[9] O.Y. Imanuvilov 和 M. Yamamoto，线性黏弹性方程的 Carleman估计与反源问题，SIAM《数学分析杂志》，52（2020年），718-791。[10]V. Isakov，《偏微分方程反问题》，第二版，施普林格，纽约，2006年。[11] M.V. Klibanov，“大范围”反问题与 Carleman 界，《微分方程》，20（1984年），755-760。

[12] M. V. Klibanov，一类微分方程反问题的大范围唯一性，《微分方程》，20（1984年），1947-1953。[13]M.V. Klibanov，反问题与卡尔曼估计，《反问题》，8（1992年），575–596。[14] M.V. Klibanov 和 A. Timonov，《系数反问题的Carleman估计及数值应用》，VSP，荷兰乌得勒支，2004年。[15] M.V. Klibanov，系数反问题的全局唯一性、稳定性和数值方法的 Carleman估计，《反问题与不适定问题杂志》，21（2013年），477-510。[16] M.V. Klibanov，利用 Carleman权函数求解拟线性偏微分方程的不适定柯西问题，《反问题》，31（2015年），125007。[17] M.V. Klibanov、J. Li 和 W. Zhang，抛物型反问题的凸化，《反问题》，36（2020年），085008。[18] M.V. Klibanov 和 J. Li，《反问题与 Carleman估计：全局唯一性、全局收敛与实验数据》，De Gruyter，2021年。[19] M.V. Klibanov 和 A. Timonov，声学层析成像的两种全局收敛数值方法的比较研究，《分析与计算通信》，1（2023年），12-31。[20] M.V. Klibanov 和 Y. Averboukh，利用两个 Carleman估计对平均场博弈系统进行回顾性分析的 Lipschitz稳定性估计与唯一性，arXiv：2302.10709，2023年。[21] M.V. Klibanov，平均场博弈系统：Carleman估计、Lipschitz稳定性与唯一性，《反问题与不适定问题杂志》，在线发表，2023年。[22] M.V. Klibanov 和 J. Li，利用 Carleman估计以及侧向柯西数据的平均场博弈系统，arXiv：2303.0758，2023年。[23] V.N. Kolokoltsov 和 A. Bensoussan，网络安全中的僵尸网络防御平均场博弈模型，《应用数学与优化》，74（2015年），669–692。[24] V.N. Kolokoltsov、O.A. Malafeyev，腐败的平均场博弈模型，《动力学、博弈与应用》，7（2017年），34–47。[25]V.N. Kolokoltsov 和 O. A. Malafeyev，《社会经济系统中的多主体博弈：腐败、检查、联盟构建、网络增长与安全》，Springer Nature Switzerland AG，2019年。[26] O.A. Ladyzhenskaya，《数理物理边值问题》，Springer Verlag，柏林，1985年。[27] J.-M. Lasry 和 P.-L. Lions，平均场博弈。I. 定常情形，《巴黎科学院数学报告》，343（2006年），619–625。

[28] J.-M. Lasry 和 P.-L. Lions，平均场博弈 II。有限时域与最优控制，《巴黎科学院数学报告》，343（2006），679–684。[29] J.-M. Lasry 和 P.-L. Lions，平均场博弈，《日本数学杂志》，2（2007），229-260。[30] M. M. Lavrentiev、V.G. Romanov 和 S.P. Shishatskii，《数学物理与分析中的不适定问题》，美国数学学会，普罗维登斯，RI，1986。[31]J. Li 和 H. Liu，《逆散射问题的数值方法》，即将出版，施普林格，2023年。[32]Y.-H. Lin、H. Liu、X. Liu 和 S. Zhang，半线性抛物系统的同时恢复，《反问题》，38（2022），第11期，文章编号115006，共39页。[33] H. Liu、C. Mou 和 S. Zhang，平均场博弈的逆问题，arXiv：2205.11350，2022。[34] H. Liu 和 S. Zhang，平均场博弈的一个边界逆问题，arXiv：2212.09110，2022。[35] R. G. Novikov，二维Schr¨odinger算子在固定能级上的逆散射问题，《泛函分析杂志》，103（1992），409-463。[36] R. G. Novikov，∂–bar方法在三维固定能量下进行近似逆散射，《国际数学研究报告》，6（2005），287-349。[37] V. G. Romanov，《数学物理逆问题》，VNU出版社，乌得勒支，1987。[38] N. V. Trusov，基于平均场博弈方法的股市危机数值研究，《反问题与不适定问题杂志》，29（2021年），849–865。[39] M. M. Vajnberg，《非线性方程理论中的变分法与单调算子法》，以色列科学翻译计划，耶路撒冷，1973。[40] M. Yamamoto，抛物方程的Carleman估计。专题综述，《反问题》，25（2009），123013。