arXiv:2304.00647v1 [math.AP] 2 Apr 2023

拟线性对流-吸收诺伊曼问题的变号解的存在性与位置

ABDELKRIM MOUSSAOUI 和 KAMEL SAOUDI

Abstract. 给出了涉及对流-吸收项的拟线性椭圆方程的变号解（即变号解）和定号解的存在性。借助定号解获得了变号解的定位原理，同时也推导出了定号解的存在性。证明主要基于上下解方法以及单调算子理论。

1. Introduction

设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ 中具有光滑边界$\partial\Omega$ 的有界区域。给定 $1 < p < N$，我们考虑具有一般梯度依赖的诺伊曼拟线性椭圆问题

$$(\mathrm{P}) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u + \frac{|\nabla u|^p}{u+\delta} = f(x,u,\nabla u) & \text{in } \Omega, \\ |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

其中 $f\colon \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ 是一个 Carath´eodory 函数，$\delta > 0$ 是一个小参数，η 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量，而 Δ_p 表示 p-Laplace 算子，即 $\Delta_p\colon = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$，$\forall\, u \in W^{1,\,p}(\Omega)$。

我们称 $u \in W^{1,p}(\Omega)$ 是 (P) 的一个（弱）解，前提是 $u + \delta > 0$几乎处处于 Ω $\frac{|\nabla u|^p}{u+\delta} \in L^1(\Omega)$ 且

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi\, dx + \int_\Omega \frac{|\nabla u|^p}{u+\delta}\varphi\, dx = \int_\Omega f(x,u,\nabla u)\varphi\, dx, \tag{1.1}$$

对所有 $\varphi \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ 均成立。要求 φ 有界是必要的，因为 $\frac{|\nabla u|^p}{u+\delta}$ 仅属于 $L^1(\Omega)$。

问题 (P) 将一个关于梯度 $\frac{|\nabla u|^p}{u+\delta}$ 具有自然增长的低阶项（称为吸收项）与反应-对流项 $f(x,u,\nabla u)$ 结合起来。两者都取决于解及其梯度。吸收项描述了在 ∇u 变量上的自然多项式增长

2020 *Mathematics Subject Classification.* 35J62, 35J92, 35Q92, 35B09, 35B99.

Key words and phrases. 自然增长，对流-吸收问题，扰动，上下解，诺伊曼边界条件，单调算子理论。

而对流项则表现为一个关于 p 的次线性项（参见第 3 节）。请注意，吸收项凭借其在无穷远处的增长占主导地位，超过了扩散算子。

吸收项和/或反应-对流项出现在工程学和自然系统中的各种非线性过程中。在生物学中，这些项涉及植物和动物中气体与液体流动的热传递；在地质学中，则与岩浆的热对流运动及火山喷发有关。它们还出现在化学过程中，例如催化反应和非催化反应、放热和吸热反应，以及全球气候能量平衡模型中 [20, 17]。此外，对流-吸收问题 (P) 可与不同类别的非线性方程相关联，包括非线性福克-普朗克方程以及广义黏性伯格斯方程的多维形式。这些方程涉及多种物理现象，如等离子体物理学、天体物理学、聚合物流体和粒子束物理学、非线性流体力学及神经物理学 [19]。我们还指出，随机控制理论中也会出现诸如问题 (P) 这类问题，其最早研究见 [26]。近年来，涉及吸收项的狄利克雷问题引起了相当大的关注，并已有大量相关论文，无法一一列举。其中相当一部分研究的是具有二次增长的半线性问题（即 $p = 2$）。我们列举其中的 [5, 35, 13, 24, 14] 及其参考文献。关于拟线性狄利克雷问题，例如可参见 [2, 15, 18, 36, 40, 39]。令人惊讶的是，迄今我们尚未找到处理诺伊曼边界条件的相关先前结果。只有在吸收项消失时才考虑这种情形，见 [21, 38]。我们还提及 [4, 3, 8, 9, 16, 22, 37]，其中研究了满足狄利克雷边界条件的对流问题 (P)（不含吸收项）。

问题 (P) 展现出许多有趣特征，这些特征源于吸收项与反应-对流项之间的相互作用。它们在 (P) 中的参与带来了诸多非平凡困难，例如变分结构的丧失，从而无法应用变分方法。显然，仅仅是这些项的存在，就会显著影响 (P) 的结构以及其解的性质；在某些情况下，这会导致令人意外的情形，尤其是从数学角度来看。例如，在[1, 36], 中证明了，吸收项能够使解正则化，并且足以破坏反应项的任何共振效应。在 [7], 中证明了，只有在吸收项的作用下，问题才具有非平凡弱解。否则，零是该问题的唯一解。

本文为问题 (P) 提供了至少两个具有明确符号性质的非平凡解：其中一个是变号解（即变号的解），另一个是正解。据我们所知，这一研究主题尚属首次。关于变号解存在性的研究从未在对流-吸收问题中得到讨论，正如后者也从未在诺伊曼边界条件下得到处理一样。

多重性结果部分通过变号解的定位原理得以实现；尤其是，该原理有助于区分问题 (P) 的不同解。然而，这一原理本身也是我们工作的关键部分，因为多重性结果依赖于它。事实上，在假设 (H.2)（参见第 3 节）下，如果 $f(x, 0, 0) \geq 0$ 在 Ω 中几乎处处成立，则可以证明，问题 (P) 的每个变号解都应由一个正解从上方界定。特别地，这一结果有力地表明，在所述假设下，变号解的存在意味着必然存在一个正解。换言之，变号解会生成正解；这是一个不寻常的事实，因为通常发生的恰恰是相反的蕴含关系（见 [12, 32, 33]）。这一现象在相反的单边情形下也同样出现：如果 $f(x, 0, 0) \leq 0$ 在 Ω 中几乎处处成立，则问题 (P) 的每个变号解都应由一个负解从下方界定。然而，如果 $f(x, 0, 0) = 0$ 在 Ω 中几乎处处成立，则上述两种情形同时满足，因此问题 (P) 的每个变号解都处于两个相反的定号解之间。

变号解的定位原理陈述于定理 3.2 中。证明主要基于定理 2.4，该定理在第 2 节中通过单调算子理论、扰动论证以及适当的截断得到。定理 2.4 是拟线性对流椭圆问题中上下解结果的一个版本，适用于具有自然增长的情形。由于无需对非线性项施加符号条件，也不要求特定结构，因此该定理可应用于很大一类 Neumann 椭圆问题。然而，值得注意的是，由于吸收项的存在及其影响，将单调算子理论的适用范围扩展到对流-吸收问题并非易事。一方面，需要进行截断，以确保解始终处于上下解对所围成的矩形区域内；另一方面，还需要通过引入参数 $\varepsilon > 0$ 对 (P) 进行扰动（正则化），以便对吸收项实现最低限度的控制。

我们结果的另一个重要特点是为问题 (P) 获得了变号解。利用定理 2.4，我们为问题 (P) 构造了一对变号的下解和上解 $(\underline{u}, \overline{u})$，这必然导出问题 (P) 的一个变号解 u_0。选择合适的函数，并对充分依赖于小参数 $\delta > 0$ 的常数作适当调整，至关重要。根据构造，下解 $\underline{u}$ 在区域 Ω 内部为正，而上解 $\overline{u}$ 在边界 $\partial\Omega$ 附近为负。因此，问题 (P) 的解 u_0 自然具有这些性质：在 Ω 内部为正，而当 $d(x) \to 0$ 时为负。我们强调，若没有吸收项的作用，至少凭借本文所采用的技术，将无法得到问题 (P) 的变号解。

本文其余部分安排如下。第 2 节给出了涉及上下解的存在性定理。第 3 节重点讨论变号解的定位原理。第 4 节讨论多重性结果。

2. A SUB-SUPERSOLUTION THEOREM

下文中，巴拿赫空间 $W^{1,\,p}(\Omega)$ 配备如下通常范数

$$\|u\|_{1,p} := \left(\|u\|_p^p + \|\nabla u\|_p^p\right)^{1/p}, \quad u \in W^{1,p}(\Omega),$$

其中，按惯例，

$$\|v\|_p := \begin{cases} \left(\int_\Omega |v(x)|^p dx\right)^{1/p} & \text{if } p < +\infty, \\ ess\sup\limits_{x\in\Omega} |v(x)| & \text{otherwise.} \end{cases}$$

下面列出所采用的假设。

(H.1) 设 $0 \le q \le p-1$。对于每个 $\rho > 0$，存在 $M := M(\rho) > 0$ 使得

$$|f(x,s,\xi)| \le M(1+|\xi|^q) \ \text{ in } \Omega \times [-\rho,\rho] \times \mathbb{R}^N.$$

(H.2) 存在满足以下条件的 $\underline{u}, \overline{u} \in \mathcal{C}^1(\Omega)$

$$\overline{u} + \delta \ge \underline{u} + \delta > 0 \ \text{ a.e. in } \Omega, \tag{2.1}$$

以及

$$\begin{cases} \int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p-2}\nabla \underline{u}\,\nabla\varphi\,dx + \int_\Omega \frac{|\nabla \underline{u}|^p}{\underline{u}+\delta}\varphi\,dx - \int_\Omega f(x,\underline{u},\nabla\underline{u})\varphi\,dx \le 0, \\ \int_\Omega |\nabla \overline{u}|^{p-2}\nabla \overline{u}\,\nabla\varphi\,dx + \int_\Omega \frac{|\nabla \overline{u}|^p}{\overline{u}+\delta}\varphi\,dx - \int_\Omega f(x,\overline{u},\nabla\overline{u})\varphi\,dx \ge 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

for all $\varphi \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ with $\varphi \ge 0$ in Ω.

条件 **(H.2)** 中的函数 $\underline{u}$ 和 $\overline{u}$ 分别称为问题 **(P)** 的下解和上解。

2.1. 一个辅助问题。设 $\underline{u}, \overline{u} \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ 是满足条件 **(H.2)** 要求的问题 **(P)** 的上下解。我们考虑截断算子 $\mathcal{T}\colon W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\Omega)$，其定义如下

$$\mathcal{T}(u) := \begin{cases} \underline{u} & \text{when } u \le \underline{u}, \\ u & \text{if } \underline{u} \le u \le \overline{u}, \\ \overline{u} & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2.3}$$

[11] 中的引理 2.89 保证 $\mathcal{T}$ 连续且有界。我们引入截断函数 $b\colon \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$，定义如下

$$b(x,s) := -(\underline{u}(x) - s)_+^{p-1} + (s - \overline{u}(x))_+^{p-1}, \quad (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R},$$

函数 b 是 Carath´eodory 函数，满足增长条件

$$|b(x,s)| \le k(x) + c|s|^{p-1}, \ \text{for a.a. } x \in \Omega, \text{ for all } s \in \mathbb{R}, \tag{2.4}$$

其中 $c \ge 0$ 是一个正的常数，且 $k \in L^\infty(\Omega)$。此外，有

$$\int_\Omega b(\cdot,u)u\,\mathrm{d}x \ge C_1\|u\|_p^p - C_2, \ \text{for all } u \in W^{1,p}(\Omega), \tag{2.5}$$

取适当的常数 C_1、$C_2 > 0$；例如，参见 [11, 第 95–96] 页。

对于 $\varepsilon \in (0,1)$ 以及稍后将选取的 $\mu > 0$，我们陈述如下辅助问题

$$(\mathrm{P}_{\varepsilon,\mu}) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u + \frac{|\nabla(\mathcal{T}u)|^p}{\mathcal{T}u+\delta+\varepsilon} = f(x,\mathcal{T}u,\nabla(\mathcal{T}u)) - \mu b(x,u) & \text{in } \Omega, \\ |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

我们证明问题 $(\mathrm{P}_{\varepsilon,\ \mu})$ 存在解 $u \in W^{1,\ p}(\Omega)$。证明主要基于 [11,定理 2.99] 中陈述的伪单调算子定理。

下面的引理给出了与 $(\mathrm{P}\mu)$ 中涉及的非线性项相关的有用估计。第一个估计针对非线性项 f。

引理 2.1. 在假设 (H.1) 下，存在常数 $C_0 > 0$，使得对所有 $u \in W^{1,\ p}(\Omega)$，均有

$$\int_\Omega |f(\cdot,\mathcal{T}u,\nabla(\mathcal{T}u))||u|\mathrm{d}x \le \frac{1}{2}\|\nabla u\|_p^p + C_0(1+\|u\|_p + \|u\|_p^p).$$

证明. 对任意固定的 $\sigma \in]0, \frac{1}{2M}[$，，由杨氏不等式可得

$$\begin{aligned} |\nabla(\mathcal{T}u)|^q|u| &\le \sigma|\nabla(\mathcal{T}u)|^{\frac{qp}{p-1}} + c_\sigma|u|^p \\ &\le \sigma(1+|\nabla(\mathcal{T}u)|^p) + c_\sigma|u|^p, \end{aligned} \tag{2.6}$$

对每个 $u \in W^{1,\ p}(\Omega)$ 均成立。此外，由 (2.3) 可得

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla(\mathcal{T}u)|^p \,\mathrm{d}x &= \int_{\{u\le\underline{u}\}} |\nabla\underline{u}|^p \,\mathrm{d}x + \int_{\{\underline{u}\le u\le\overline{u}\}} |\nabla u|^p \,\mathrm{d}x + \int_{\{u\ge\overline{u}\}} |\nabla\overline{u}|^p \,\mathrm{d}x \\ &\le \int_\Omega |\nabla\underline{u}|^p \,\mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla u|^p \,\mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla\overline{u}|^p \,\mathrm{d}x \\ &\le |\Omega|(\|\nabla\underline{u}\|_\infty^p + \|\nabla\overline{u}\|_\infty^p) + \|\nabla u\|_p^p. \end{aligned}$$

于是，利用 (H.1)、(2.6) 以及由于 $\sigma < \frac{1}{2M}$，根据 H¨lder 不等式可得

$$\begin{aligned} &\int_\Omega |f(\cdot,\mathcal{T}u,\nabla(\mathcal{T}u))||u| \,\mathrm{d}x \le M\int_\Omega (1+|\nabla(\mathcal{T}u)|^q)|u| \,\mathrm{d}x \\ &\le M\int_\Omega (|u| + \sigma(1+|\nabla(\mathcal{T}u)|^p) + c_\sigma|u|^p) \,\mathrm{d}x \\ &\le M(|\Omega|^{\frac{p-1}{p}} \|u\|_p + \sigma|\Omega|(1+\|\nabla\underline{u}\|_\infty^p + \|\nabla\overline{u}\|_\infty^p) + \sigma\|\nabla u\|_p^p + c_\sigma \|u\|_p^p) \\ &\le \tfrac{1}{2}\|\nabla u\|_p^p + C_0(1+\|u\|_p + \|u\|_p^p), \end{aligned} \tag{2.7}$$

这就完成了证明。 □

我们接下来估计 $(\mathrm{P}_{\varepsilon,\ \mu})$ 中的自然增长梯度项。

引理 2.2. 假设 (H.1) 和 (H.2) 成立。那么，对所有 $u \in W^{1,\ p}(\Omega)$，ˆ 均存在一个常数 $C_\varepsilon > 0$，与 u 无关，使得

$$\int_\Omega \frac{|\nabla(\mathcal{T}u)|^p}{\mathcal{T}u+\delta+\varepsilon}|u| \,\mathrm{d}x \le \hat{C}_\varepsilon(1+\|u\|_p),\ \textit{for all}\ \varepsilon \in (0,1). \tag{2.8}$$

证明。由 (2.3) 可知

$$\mathcal{T}u = \underline{u}\,\mathbb{I}_{\{u\le\underline{u}\}} + u\,\mathbb{I}_{\{\underline{u}<u<\overline{u}\}} + \overline{u}\,\mathbb{I}_{\{u\ge\overline{u}\}},\ \text{for } u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Then

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \frac{|\nabla(\mathcal{T}u)|^p}{\mathcal{T}u+\delta+\varepsilon}|u|\ \mathrm{d}x\\ =\ &\int_{\{u\le\underline{u}\}} \frac{|\nabla\underline{u}|^p}{\underline{u}+\delta+\varepsilon}|u|\ \mathrm{d}x+\int_\Omega \frac{|\nabla(u_{\mathbb{I}\{\underline{u}<u<\overline{u}\}})|^p}{u_{\mathbb{I}\{\underline{u}<u<\overline{u}\}}+\delta+\varepsilon}|u|\ \mathrm{d}x+\int_{\{u\ge\overline{u}\}} \frac{|\nabla\overline{u}|^p}{\overline{u}+\delta+\varepsilon}|u|\ \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

根据 (2.1)，我们有

$$\overline{u}+\delta+\varepsilon\ge\underline{u}+\delta+\varepsilon>\varepsilon\ \text{ a.e. in }\Omega.$$

因此

$$\int_{\{u\le\underline{u}\}}\frac{|\nabla\underline{u}|^p}{\underline{u}+\delta+\varepsilon}|u|\ \mathrm{d}x\le\frac{\|\nabla\underline{u}\|_\infty^p}{\varepsilon}\int_{\{u\le\underline{u}\}}|u|\ \mathrm{d}x\le\frac{\|\nabla\underline{u}\|_\infty^p}{\varepsilon}\int_\Omega|u|\ \mathrm{d}x\le\frac{\|\nabla\underline{u}\|_\infty^p}{\varepsilon}|\Omega|^{\frac{p-1}{p}}\ \|u\|_p,$$

$$\int_{\{u\ge\overline{u}\}}\frac{|\nabla\overline{u}|^p}{\overline{u}+\delta+\varepsilon}|u|\ \mathrm{d}x\le\frac{\|\nabla\overline{u}\|_\infty^p}{\varepsilon}\int_{\{u\ge\overline{u}\}}|u|\ \mathrm{d}x\le\frac{\|\nabla\overline{u}\|_\infty^p}{\varepsilon}\int_\Omega|u|\ \mathrm{d}x\le\frac{\|\nabla\overline{u}\|_\infty^p}{\varepsilon}|\Omega|^{\frac{p-1}{p}}\ \|u\|_p$$

and

$$\begin{aligned}\int_\Omega\frac{|\nabla(u_{\mathbb{I}\{\underline{u}<u<\overline{u}\}})|^p}{u_{\mathbb{I}\{\underline{u}<u<\overline{u}\}}+\delta+\varepsilon}|u|\ \mathrm{d}x\ &\le\ \frac{\max\{|\underline{u}|,|\overline{u}|\}}{\varepsilon}\int_\Omega|\nabla(u_{\mathbb{I}\{\underline{u}<u<\overline{u}\}})|^p\ \mathrm{d}x\\ &\le\ \frac{\max\{\|\underline{u}\|_\infty,\|\overline{u}\|_\infty\}}{\varepsilon}\int_\Omega|\nabla(u_{\mathbb{I}\{\underline{u}<u<\overline{u}\}})|^p\ \mathrm{d}x\\ &\le\ \frac{\max\{\|\underline{u}\|_\infty,\|\overline{u}\|_\infty\}}{\varepsilon}\|u_{\mathbb{I}\{\underline{u}<u<\overline{u}\}}\|_{1,p}^p.\end{aligned}$$

汇总上述不等式可得

(2.9)

$$\int_\Omega\frac{|\nabla(\mathcal{T}u)|^p}{\mathcal{T}u+\delta+\varepsilon}|u|\ \mathrm{d}x\le\frac{\|\nabla\underline{u}\|_\infty^p+\|\nabla\overline{u}\|_\infty^p}{\varepsilon}|\Omega|^{\frac{p-1}{p}}\ \|u\|_p+\frac{\max\{\|\underline{u}\|_\infty,\|\overline{u}\|_\infty\}}{\varepsilon}\|u_{\mathbb{I}\{\underline{u}<u<\overline{u}\}}\|_{1,p}^p.$$

我们断言 $\|u_{\mathbb{I}\{\underline{u}<u<\overline{u}\}}\|_p$ 一致有界。事实上，在 $(\mathrm{P}_{\varepsilon,\mu})$ 中取 $(u+\delta)_{\mathbb{I}\{\underline{u}<u<\overline{u}\}}\in W^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ 作为测试函数，这是可能的，因为 [31, 命题 1.61]。这里，根据 (2.4) 和 (H.1)，当 $-\rho\le\underline{u}\le\overline{u}\le\rho$ 时，对于 $u\in[\underline{u},\overline{u}]$, $\underline{u},\overline{u}\in L^\infty(\Omega)$（见 (H.2)），有

$$\begin{aligned}&\left|f(x,\mathcal{T}u,\nabla(\mathcal{T}u))-\mu b(x,u)-\tfrac{|\nabla(\mathcal{T}u)|^p}{\mathcal{T}u+\delta+\varepsilon}\right|\\ &\le|f(x,\mathcal{T}u,\nabla(\mathcal{T}u))|+\mu|b(x,u)|+\tfrac{|\nabla(\mathcal{T}u)|^p}{\mathcal{T}u+\delta+\varepsilon}\\ &\le C_\varepsilon(1+|\nabla(\mathcal{T}u)|^q+|\nabla(\mathcal{T}u)|^p),\end{aligned}$$

对于某个与 u 无关的常数 $C_\varepsilon>0$。于是，[27] 中关于边界正则性的结果保证 $u\in\mathcal{C}^{1,\tau}(\Omega)$，其中某个 $\tau\in$ 属于 $(0,1)$。因此，[31, 命题 1.61] 适用。

然后，注意到

$$b(x,u)=0\ \text{ a.e. for } u\in[\underline{u},\overline{u}],\tag{2.10}$$

由此可得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega|\nabla(u_{\mathbb{I}\{\underline{u}<u<\overline{u}\}})|^p\ \mathrm{d}x+\int_\Omega\tfrac{|\nabla(\mathcal{T}u)|^p}{\mathcal{T}u+\delta+\varepsilon}(u+\delta)_{\mathbb{I}\{\underline{u}<u<\overline{u}\}}\ \mathrm{d}x\\ &=\int_\Omega f(x,\mathcal{T}u,\nabla(\mathcal{T}u))(u+\delta)_{\mathbb{I}\{\underline{u}<u<\overline{u}\}}\ \mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{2.11}$$

由（2.1）和（2.3）可知

$$\int_\Omega \frac{|\nabla(\mathcal{T}u)|^p}{\mathcal{T}u+\delta+\varepsilon}(u+\delta)_{\mathbb{I}\{\underline{u}<u<\overline{u}\}}\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

因此，由 (2.11) 可推得

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla(u_{\mathbb{I}\{\underline{u}<u<\overline{u}\}})|^p\,\mathrm{d}x &\leq \int_\Omega f(x,\mathcal{T}u,\nabla(\mathcal{T}u))(u+\delta)_{\mathbb{I}\{\underline{u}<u<\overline{u}\}}\,\mathrm{d}x\\ &\leq \int_\Omega |f(x,\mathcal{T}u,\nabla(\mathcal{T}u))|(|u|+\delta)_{\mathbb{I}\{\underline{u}<u<\overline{u}\}}\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{2.12}$$

利用 (2.7) 和 (H.1)，可得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |f(x,\mathcal{T}u,\nabla(\mathcal{T}u))|(|u|+\delta)_{\mathbb{I}\{\underline{u}<u<\overline{u}\}}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_\Omega |f(x,\mathcal{T}u,\nabla(\mathcal{T}u))||u|_{\mathbb{I}\{\underline{u}<u<\overline{u}\}}\,\mathrm{d}x+\delta\int_\Omega |f(x,\mathcal{T}u,\nabla(\mathcal{T}u))|_{\mathbb{I}\{\underline{u}<u<\overline{u}\}}\,\mathrm{d}x\\ &\leq \tfrac{1}{2}\|\nabla(u_{\mathbb{I}\{\underline{u}<u<\overline{u}\}})\|_p^p+C(1+\|u_{\mathbb{I}\{\underline{u}<u<\overline{u}\}}\|_p+\|u_{\mathbb{I}\{\underline{u}<u<\overline{u}\}}\|_p^p)\\ &+\delta M(1+\|\nabla(u_{\mathbb{I}\{\underline{u}<u<\overline{u}\}})\|_p^q)\\ &\leq \tfrac{1}{2}\|\nabla(u_{\mathbb{I}\{\underline{u}<u<\overline{u}\}})\|_p^p+\delta M\|\nabla(u_{\mathbb{I}\{\underline{u}<u<\overline{u}\}})\|_p^q+\tilde{C}_0,\end{aligned}$$

其中 $C_0:=C(1+\rho|\Omega|^{\frac{1}{p}}+\rho^p|\Omega|)+\delta M$。结合 (2.12)，并且由于 $q<p$，我们得出存在一个常数 $C>0$，它与 u 无关，使得

$$\|\nabla(u_{\mathbb{I}\{\underline{u}<u<\overline{u}\}})\|_p \leq \tilde{C}. \tag{2.13}$$

这就证明了该断言。

因此，根据 (2.9) 和 (2.13)，我们推断存在一个与 u 无关的常数 $C_\varepsilon>0$，使得 (2.8) 成立。证明至此结束。□

问题 $(\mathrm{P}_{\varepsilon,\mu})$ 的存在性结果表述如下。

定理 2.3. 假设 (H.1)–(H.2) 成立。则对于所有 $\varepsilon\in(0,1)$，问题 $(\mathrm{P}_{\mu,\varepsilon})$ 存在一个 $u\in W^{1,p}(\Omega)$ 弱解。

证明. 由 (2.4)，由 $\mathcal{B}u(x)=b(\cdot,u)$ 给出的涅米茨基算子 $\mathcal{B}$ 定义良好，且 $\mathcal{B}\colon W^{1,p}(\Omega)\longrightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$ 连续且有界。由紧嵌入 $W^{1,p}(\Omega)\hookrightarrow L^p(\Omega)$，$\mathcal{B}$ 完全连续。

考虑 (2.1)，定义函数 $\pi_{\delta,\varepsilon}\colon(-\delta,+\infty)\times\mathbb{R}^N\longrightarrow\mathbb{R}$ 如下：

$$\pi_\delta(s,\xi)=\frac{|\xi|^p}{s+\delta+\varepsilon}$$

它满足如下估计：

$$|\pi_\delta(s,\xi)|\leq\frac{1}{\varepsilon}|\xi|^p,\ \text{for all } s>-\delta,\ \xi\in\mathbb{R}^N \text{ and all } \varepsilon\in(0,1).$$

令 $\Pi_{\delta,\varepsilon}\colon[\underline{u},\overline{u}]\subset W^{1,p}(\Omega)\longrightarrow L^1(\Omega)\subset W^{-1,p'}(\Omega)$ 表示相应的涅米茨基算子，即 $\Pi_{\delta,\varepsilon}u(x)=\pi_{\delta,\varepsilon}(u(x),\nabla u(x))$，该算子有界且连续（见 [31, 定理 2.76] 和 [23, 定理 3.4.4]）。此外，由于 $W^{1,p}(\Omega)$ 紧嵌入到 $L^p(\Omega)$ 中，$\Pi_{\delta,\varepsilon}$ 是完全连续的。

鉴于 (H.1)，若 $\rho > 0$ 满足

$$-\rho \leq \underline{u} \leq \overline{u} \leq \rho, \tag{2.14}$$

由 Carath´eodory 函数 f 生成的涅米茨基算子 $\mathcal{N}_f$: $[\underline{u}, \overline{u}] \subset W^{1,\ p}(\Omega)$ $\to W^{-1,\ p'}(\Omega)$ 借助 Rellich-Kondrachov 紧嵌入定理是有界且完全连续的。

此时，问题 ($\mathrm{P}_{\mu,\ \varepsilon}$) 可等价地表示为

$$\mathcal{A}_{\mu,\varepsilon}(u) := -\Delta_p u + \mu\mathcal{B}u + \Pi_{\delta,\varepsilon}\circ\mathcal{T}(u) - \mathcal{N}_f\circ\mathcal{T}(u) = 0 \ \text{ in } W^{-1,p'}(\Omega). \tag{2.15}$$

由 (H.1) 可直接看出，算子 $\mathcal{A}_{\mu,\ \varepsilon}$: $W^{1,\ p}(\Omega) \to W^{-1,\ p'}(\Omega)$ 定义良好、有界且连续。

下面证明 $\mathcal{A}_{\mu,\ \varepsilon}$ 是强制的。由 (2.15) 可得

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}_{\mu,\varepsilon}(u), u\rangle &= \int_\Omega |\nabla u|^p \,\mathrm{d}x + \mu\int_\Omega b(x,u)u \,\mathrm{d}x + \int_\Omega \tfrac{|\nabla(\mathcal{T}u)|^p}{\mathcal{T}u+\delta+\varepsilon}u \,\mathrm{d}x - \int_\Omega f(\cdot,\mathcal{T}u,\nabla(\mathcal{T}u))u\,\mathrm{d}x\\ &\geq \int_\Omega |\nabla u|^p \,\mathrm{d}x + \mu\int_\Omega b(x,u)u \,\mathrm{d}x - \int_\Omega \tfrac{|\nabla(\mathcal{T}u)|^p}{\mathcal{T}u+\delta+\varepsilon}|u| \,\mathrm{d}x - \int_\Omega f(\cdot,\mathcal{T}u,\nabla(\mathcal{T}u))u\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{2.16}$$

结合 (2.5) 以及引理 2.1 和 2.2 中的估计，我们得到

$$\begin{aligned}&\langle \mathcal{A}_{\mu,\varepsilon}(u), u\rangle \geq \|\nabla u\|_p^p + \mu\left(C_1\|u\|_p^p - C_2\right)\\ &-\hat{C}_\varepsilon(1+\|u\|_p) - \tfrac{1}{2}\|\nabla u\|_p^p - C_0(1+\|u\|_p + \|u\|_p^p).\end{aligned}$$

根据 (2.13)，并取 $\mu > 0$ 充分大使得 $\mu C_1 - C_0 > 0$，对于 $W^{1,p}(\Omega)$ 中的任意序列 $(u_n)_n$，最后一个不等式推出

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\langle \mathcal{A}_{\mu,\varepsilon}(u_n), u_n\rangle}{\|u_n\|_{1,p}} = +\infty,$$

如所需。

下一步是证明算子 $\mathcal{A}_\mu$ 是伪单调的。为此，设 $W^{1,p}(\Omega)$ 中的 $u_n \rightharpoonup u$ 满足

$$\limsup_{n\to+\infty} \langle \mathcal{A}_{\mu,\varepsilon}(u_n), u_n - u\rangle \leq 0.$$

鉴于算子 $\mathcal{B}$、$\Pi_{\delta,\varepsilon}$ 和 $\mathcal{N}_f$ 的完全连续性，我们得到

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \langle \mathcal{B}(u_n), u_n - u\rangle &= 0,\\ \lim_{n\to\infty} \langle \Pi_{\delta,\varepsilon}(u_n), u_n - u\rangle &= 0,\\ \lim_{n\to\infty} \langle \mathcal{N}_f(\mathcal{T}u_n), u_n - u\rangle &= 0.\end{aligned}$$

然后，利用 $-\Delta_p$ 的 (S)+-性质，我们推得 $W^{1,p}(\Omega)$ 中的 $u_n \to u$。因此，

$$\lim_{n\to\infty} \langle \mathcal{A}_{\mu,\varepsilon}(u_n), u_n - v\rangle = \langle \mathcal{A}_{\mu,\varepsilon}(u), u - v\rangle,$$

对所有 $v \in W^{1,p}(\Omega)$，因为 $\mathcal{A}_{\mu,\varepsilon}$ 是连续的。这证明算子 $\mathcal{A}_{\mu,\varepsilon}$ 是伪单调的。

根据上述性质，我们可以将伪单调算子的主定理 [11, 定理 2.99] 应用于算子$\mathcal{A}_{\mu,\varepsilon}$。由此可知，存在 $u \in W^{1,p}(\Omega)$ 满足

$$\langle \mathcal{A}_{\mu,\varepsilon}(u), \varphi \rangle = 0, \quad \varphi \in W^{1,p}(\Omega).$$

由 [10, 定理 3], 可得

$$|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \text{ on } \partial\Omega.$$

因此， $u \in W^{1,\ p}(\Omega)$ 是问题 $(\mathrm{P}_{\mu,\ \varepsilon})$ 的一个弱解。证明完毕。 □

2.2. 上下解定理。

定理 2.4. 假设 (H.1)–(H.2) 成立。那么，问题 (P) 存在一个解 $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$，使得

$$\underline{u} \le u \le \overline{u}. \tag{2.17}$$

证明. 根据定理 2.3，问题 $(\mathrm{P}_{\mu,\ \varepsilon})$ 存在一个弱解 u，属于 $W^{1,\ p}(\Omega)$。接下来验证 u 满足不等式 (2.17)。我们仅给出关于 $u \le \overline{u}$ 的论证，因为 $\underline{u} \le u$ 可用类似方法证明。首先，由引理 2.2 可知 $\frac{|\nabla\ \mathcal{T}u\ |^p}{\mathcal{T}u+\delta+\varepsilon}()(u-\overline{u})_+ \in L^1(\Omega)$。因此，用 $(u-\overline{u})_+ \in W^{1,\ p}(\Omega)$ 测试 $(\mathrm{P}_{\mu,\ \varepsilon})$，并考虑 (H.2)，可得

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\,\nabla(u-\overline{u})_+ \,\mathrm{d}x + \int_\Omega \tfrac{|\nabla(\mathcal{T}u)|^p}{\mathcal{T}u+\delta+\varepsilon}(u-\overline{u})_+ \,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega f(\cdot,\mathcal{T}u,\nabla(\mathcal{T}u))(u-\overline{u})_+ \,\mathrm{d}x - \mu\int_\Omega b(\cdot,u)(u-\overline{u})_+ \,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega f(\cdot,\overline{u},\nabla\overline{u})(u-\overline{u})_+ \,\mathrm{d}x - \mu\int_\Omega (u-\overline{u})_+^p \,\mathrm{d}x \\
&\le \int_\Omega |\nabla\overline{u}|^{p-2}\nabla\overline{u}\,\nabla(u-\overline{u})_+ \,\mathrm{d}x + \int_\Omega \tfrac{|\nabla\overline{u}|^p}{\overline{u}+\delta+\varepsilon}(u-\overline{u})_+ \,\mathrm{d}x - \mu\int_\Omega (u-\overline{u})_+^p \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

由（2.3）可知

$$\int_\Omega \frac{|\nabla(\mathcal{T}u)|^p}{\mathcal{T}u+\delta+\varepsilon}(u-\overline{u})_+ \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{|\nabla\overline{u}|^p}{\overline{u}+\delta+\varepsilon}(u-\overline{u})_+ \,\mathrm{d}x.$$

于是可得

$$\int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla\overline{u}|^{p-2}\nabla\overline{u}\right)\nabla(u-\overline{u})_+ \,\mathrm{d}x \le -\mu\int_\Omega (u-\overline{u})_+^p \,\mathrm{d}x \le 0. \tag{2.18}$$

Δ_p 的单调性直接导出 $u \le \overline{u}$。用 $(\mathrm{P}_{\mu,\ \varepsilon})$ 测试 $(\underline{u}-u)_+ \in W^{1,\ p}(\Omega)$，通过非常相似的推理可得到 $\underline{u} \le u$。此外，根据 [34,注记 8],，对于某些 $\tau \in]0、\ 1[$，有 $u \in \mathcal{C}^{1,\ \tau}(\Omega)$，并且在 $\partial\Omega$上还有 $\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$。因此， u 是 $(\mathrm{P}_{\varepsilon,\ \mu})$ 的一个解，其中$[\underline{u},\overline{u}]$ 由于（2.10）可写成

$$(\mathrm{P}_\varepsilon) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u + \frac{|\nabla(\mathcal{T}u)|^p}{\mathcal{T}u+\delta+\varepsilon} = f(x,\mathcal{T}u,\nabla(\mathcal{T}u)) & \text{in } \Omega, \\ |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

现在的任务是通过在$\varepsilon \to 0$时令（P_ε）取极限，求出（P）的解。为此，设 $\varepsilon = \frac{1}{n}$ 对于任意正整数 $n \geq 1$，存在$u_n := u_{\frac{1}{n}} \in \mathcal{C}^1,\ ^\tau(\Omega)$是（$P_n$）的一个解（即带有$\varepsilon = \frac{1}{n}$的（$P_\varepsilon$））， 也就是说，

$$u_n \in [\underline{u}, \overline{u}] \tag{2.19}$$

and

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\varphi \, \mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^p}{u_n+\delta+\frac{1}{n}}\varphi \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f(x, u_n, \nabla u_n)\varphi \, \mathrm{d}x, \tag{2.20}$$

对所有 $\varphi \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$。由于嵌入 $\mathcal{C}^{1,\tau}(\Omega) \subset \mathcal{C}^1(\Omega)$ 是紧的，我们可以提取子列（仍记为 $\{u_n\}$），使得

$$u_n \to u \text{ in } \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \text{ with } u \in [\underline{u}, \overline{u}]. \tag{2.21}$$

因此

$$|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \to |\nabla u|^{p-2}\nabla u \ \text{ in } \mathcal{C}(\overline{\Omega}),$$
$$|\nabla u_n|^p \to |\nabla u|^p \ \text{ in } \mathcal{C}(\overline{\Omega})$$

and

$$f(x, u_n, \nabla u_n) \to f(x, u, \nabla u) \ \text{ in } \mathcal{C}(\overline{\Omega}),$$

因为 f 是 Carath´eodory 函数。然后，根据 (2.19) 和 (2.1)，利用勒贝格控制收敛定理，我们可以在 (2.20) 中令 $n \to \infty$ 趋于极限，得到

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi \, \mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{|\nabla u|^p}{u+\delta}\varphi \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f(x, u, \nabla u)\varphi \, \mathrm{d}x,$$

对所有 $\varphi \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$。此外，由 (2.21) 可知，$u+\delta > 0$ 在 Ω 中几乎处处成立。这证明了 $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ 是问题 (P) 在 $[\underline{u}, \overline{u}]$ 内的一个解。证明至此完成。□

3. Location principle for nodal solutions

本节着重讨论问题 (P) 的变号解的位置。我们提出以下假设。

(H.3) 存在 $\alpha, \beta, M > 0$ 使得

$$\max\{\alpha, \beta\} < p - 1$$

并且，

$$|f(x, s, \xi)| \leq M(1 + |s|^\alpha + |\xi|^\beta),$$

对于所有 $(x, s, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$。

引理 3.1. 假设 (H.2) 和 (H.3) 均成立。

(i) 若 $\overline{u}_1, \overline{u}_2 \in W^{1,\ p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ 是问题 (P) 的上解，则$\overline{u} = \min\{\overline{u}_1, \overline{u}_2\}$ 也同样是问题 (P) 的上解。(ii) 若 $\underline{u}_1, \underline{u}_2 \in W^{1,\ p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ 是问题 (P) 的下解，则$\underline{u} = \max\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ 也同样是问题 (P) 的下解。

证明。我们仅给出部分 (i) 的论证，因为部分 (ii) 可用类似方法证明。受 [11, 定理 3.20], [9, 引理 1] 以及针对固定 $\varepsilon > 0$ 的 [29, 引理 3]，证明的启发，定义截断函数 $\xi_\varepsilon(s) = \max\{-\varepsilon, \min\{s, \varepsilon\}\}$，其中 $s \in \mathbb{R}$.。文献 [28] 中证明了$\xi_\varepsilon((\overline{u}_1 - \overline{u}_2)^-) \in W^{1,p}(\Omega)$,

$$\nabla \xi_\varepsilon((\overline{u}_1 - \overline{u}_2)^-) = \xi_\varepsilon'((\overline{u}_1 - \overline{u}_2)^-)\nabla(\overline{u}_1 - \overline{u}_2)^-$$

对于任意满足 $\varphi \geq 0$ 的测试函数 $\varphi \in C_c^1(\Omega)$，有

$$\begin{aligned} &\left\langle -\Delta_p \overline{u}_1 + \tfrac{|\nabla \overline{u}_1|^p}{\overline{u}_1 + \delta}, \xi_\varepsilon((\overline{u}_1 - \overline{u}_2)^-)\varphi \right\rangle \\ &\geq \int_\Omega f(x, \overline{u}_1, \nabla \overline{u}_1)\xi_\varepsilon((\overline{u}_1 - \overline{u}_2)^-)\varphi \, \mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{3.1}$$

and

$$\begin{aligned} &\left\langle -\Delta_p \overline{u}_2 + \tfrac{|\nabla \overline{u}_2|^p}{\overline{u}_2 + \delta}, (\varepsilon - \xi_\varepsilon((\overline{u}_1 - \overline{u}_2)^-))\varphi \right\rangle \\ &\geq \int_\Omega f(x, \overline{u}_2, \nabla \overline{u}_2)\left(\varepsilon - \xi_\varepsilon((\overline{u}_1 - \overline{u}_2)^-)\right)\varphi \, \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.2}$$

另一方面，利用 p-Laplacian 算子单调性，可得

$$\begin{aligned} &\left\langle -\Delta_p \overline{u}_1 + \tfrac{|\nabla \overline{u}_1|^p}{\overline{u}_1 + \delta}, \xi_\varepsilon((\overline{u}_1 - \overline{u}_2)^-)\varphi \right\rangle \\ &\quad + \left\langle -\Delta_p \overline{u}_2 + \tfrac{|\nabla \overline{u}_2|^p}{\overline{u}_2 + \delta}, (\varepsilon - \xi_\varepsilon((\overline{u}_1 - \overline{u}_2)^-))\varphi \right\rangle \\ &\leq \int_\Omega |\nabla \overline{u}_1|^{p-2}(\nabla \overline{u}_1, \nabla \varphi)_{\mathbb{R}^N} \xi_\varepsilon((\overline{u}_1 - \overline{u}_2)^-) \, \mathrm{d}x \\ &\quad + \int_\Omega \tfrac{|\nabla \overline{u}_1|^p}{\overline{u}_1 + \delta}\xi_\varepsilon((\overline{u}_1 - \overline{u}_2)^-)\varphi \, \mathrm{d}x \\ &\quad + \int_\Omega |\nabla \overline{u}_2|^{p-2}(\nabla \overline{u}_2, \nabla \varphi)_{\mathbb{R}^N} \left(\varepsilon - \xi_\varepsilon((\overline{u}_1 - \overline{u}_2)^-)\right) \, \mathrm{d}x \\ &\quad + \int_\Omega \tfrac{|\nabla \overline{u}_2|^p}{\overline{u}_2 + \delta}(\varepsilon - \xi_\varepsilon((\overline{u}_1 - \overline{u}_2)^-))\varphi \, \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.3}$$

然后，将 (3.1) 与 (3.2) 合并，并利用 (3.3)，可得

$$\begin{aligned} &\int_\Omega |\nabla \overline{u}_1|^{p-2}(\nabla \overline{u}_1, \nabla \varphi)_{\mathbb{R}^N} \tfrac{1}{\varepsilon}\xi_\varepsilon((\overline{u}_1 - \overline{u}_2)^-) \, \mathrm{d}x \\ &\quad + \int_\Omega \tfrac{|\nabla \overline{u}_1|^p}{\overline{u}_1 + \delta}\tfrac{1}{\varepsilon}\xi_\varepsilon((\overline{u}_1 - \overline{u}_2)^- \, \mathrm{d}x \\ &\quad + \int_\Omega |\nabla \overline{u}_2|^{p-2}(\nabla \overline{u}_2, \nabla \varphi)_{\mathbb{R}^N} \left(1 - \tfrac{1}{\varepsilon}\xi_\varepsilon((\overline{u}_1 - \overline{u}_2)^-)\right) \, \mathrm{d}x \\ &\quad + \int_\Omega \tfrac{|\nabla \overline{u}_2|^p}{\overline{u}_2 + \delta}(1 - \tfrac{1}{\varepsilon}\xi_\varepsilon((\overline{u}_1 - \overline{u}_2)^-) \, \mathrm{d}x \\ &\geq \int_\Omega f(x, \overline{u}_1, \nabla \overline{u}_1)\tfrac{1}{\varepsilon}\xi_\varepsilon((\overline{u}_1 - \overline{u}_2)^-)\varphi \, \mathrm{d}x \\ &\quad + \int_\Omega f(x, \overline{u}_2, \nabla \overline{u}_2)\left(1 - \tfrac{1}{\varepsilon}\xi_\varepsilon((\overline{u}_1 - \overline{u}_2)^-)\right)\varphi \, \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

令 $\varepsilon \to 0$ 趋于极限，并注意到

$$\frac{1}{\varepsilon}\xi_\varepsilon((\overline{u}_1 - \overline{u}_2)^- \to \mathbb{I}^{\{\overline{u}_1 < \overline{u}_2\}}(x), \text{ a.e. in } \Omega \text{ as } \varepsilon \to 0,$$

我们得到

$$\int_\Omega |\nabla \overline{u}|^{p-2}\nabla \overline{u}\nabla \varphi \, \mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{|\nabla \overline{u}|^p}{\overline{u} + \delta}\varphi \, \mathrm{d}x \geq \int_\Omega f(x, \overline{u}, \nabla \overline{u})\varphi \, \mathrm{d}x,$$

对 Ω 中几乎处处的所有 $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ $\varphi \geq 0$ 均成立。由于 $C_c^1(\Omega)$ 在 $W^{1,p}(\Omega)$ 中稠密，我们得到了所需的结论。□

受 [30], 的启发，下面我们给出一个关于问题 (P) 的解的位置和先验估计的结果。

定理 3.2. 假设条件 (H.2) –(H.3) 得到满足。

(i) 若对几乎处处的 $x \in \Omega$ 有 $f(x, 0, 0) \geq 0$，则对于问题 (P) 的每个变号解 $u_0 \in [\underline{u}, \overline{u}]$，都存在一个非平凡解 u_+，使得 $u_0 \leq u_+ \leq \overline{u}_+$ 且 $u_+ \geq 0$ 在 Ω 上。(ii) 若对几乎处处的 $x \in \Omega$ 有 $f(x, 0, 0) \leq 0$，则对于问题 (P) 的每个变号解 $u_0 \in [\underline{u}, \overline{u}]$，都存在一个非平凡解 u_-，使得 $u_0 \geq u_- \geq \overline{u}_-$ 且 $u_- \leq 0$ 在 Ω 上。(iii) 若对几乎处处的 $x \in \Omega$ 有 $f(x, 0, 0) = 0$，则对于问题 (P) 的每个变号解 $u_0 \in [\underline{u}, \overline{u}]$，都存在另外两个非平凡解 u_+和 u_-，使得 $u_- \leq u_0 \leq u_+$、$u_+ \geq 0$ 且 $u_- \leq 0$ 在 Ω 上。

证明. (i) 设 u_0 是问题 (P) 在 $[\underline{u}, \overline{u}]$ 中的一个变号解。假设 $f(x, 0, 0) \geq 0$ 对几乎处处的 $x \in \Omega$ 成立，这保证了 0 是问题 (P) 的下解。由引理 3.1 的第 (i) 部分可知，$u_{0,+} := \max\{0, u_0\}$ 是问题 (P) 的一个下解，显然满足 $u_{0,+} \leq \overline{u}_+$，其中 $\overline{u}_+ := \max\{0, \overline{u}\}$。因此，根据定理 2.4，存在问题 (P) 在 $[\underline{u}, \overline{u}]$ 中的一个解 $u_+ \in \mathcal{C}^1(\Omega)$。由于问题 (P) 的解 u_0 是变号解，其正部 $u_{0,+}$ 在 Ω 的一个正测度子集上严格为正。因此，u_+ 为正。

(ii) 设 u_0 是问题 (P) 在 $[\underline{u}, \overline{u}]$ 中的一个变号解。假设 $f(x, 0, 0) \leq 0$ 对几乎处处的 $x \in \Omega$ 成立，这保证了 0 是问题 (P) 的上解。由引理 3.1 的第 (ii) 部分可知，$u_{0,-} := \min\{0, u_0\}$ 是问题 (P) 的一个上解，显然满足 $u_{0,-} \geq \overline{u}_-$，其中 $\overline{u}_- := \min\{0, \overline{u}\}$。于是，由定理 2.4 可知，存在问题 (P) 在 $[\underline{u}, \overline{u}]$ 中的一个解 $u_- \in \mathcal{C}^1(\Omega)$。又因问题 (P) 的解 u_0 是变号解，其负部 $u_{0,-}$ 在 Ω 的一个正测度子集上严格为负。因此，$u_- \leq 0$ 和 $u_- \neq 0$。

(iii) 若对几乎处处的 $x \in \Omega$ 都有 $f(x, 0, 0) = 0$，则可同时应用断言 (i) 和 (ii)，从而得到问题 (P) 的两个非平凡、符号相反的常数解 u_+ 和 u_-，且它们具有陈述中要求的性质。□

4. Nodal solutions

本节中，除 (H_1) 外，我们还将提出以下假设。

(H.4) 取适当的 $m > 0$，有

$$\lim_{|s| \to 0} \inf\{f(x, s, \xi) : \xi \in \mathbb{R}^N\} > m,$$

在 $x \in \Omega$ 上一致成立。

我们的首要目标是构造问题 (P) 的下解与上解对。为此，考虑齐次狄利克雷问题

$$-\Delta_p z = 1, \text{ in } \Omega, \quad z = 0 \text{ on } \partial\Omega, \tag{4.1}$$

其存在唯一解 $z \in \mathcal{C}^{1,\tau}(\overline{\Omega})$，满足

$$\|z\|_{C^{1,\tau}(\overline{\Omega})} \leq L, \tag{4.2}$$

$$\frac{d(x)}{c} \le z \le cd(x) \text{ in } \Omega, \quad \frac{\partial z}{\partial \eta} < 0 \text{ on } \partial\Omega, \tag{4.3}$$

对于某个常数 $c > 1$。

现在，给定 $0 < \delta < \text{diam}(\Omega)$，将 $z_\delta \in \mathcal{C}^{1,\tau}(\Omega)$ 表示为狄利克雷问题的解

$$-\Delta_p u = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \Omega \backslash \overline{\Omega}_\delta, \\ -1 & \text{otherwise,} \end{cases} \qquad u = 0 \text{ on } \partial\Omega, \tag{4.4}$$

存在性和唯一性直接源于 Minty-Browder定理 [6]，而 $\mathcal{C}^{1,\tau}(\Omega)$ 的正则性则由 Lieberman正则性定理 [27] 得出。此外，弱比较原理意味着

$$z_\delta \le z \text{ in } \Omega, \tag{4.5}$$

而当 $\delta > 0$ 足够小时，有

$$\frac{\partial z_\delta}{\partial \eta} < \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial \eta} < 0 \text{ on } \partial\Omega \text{ and } z_\delta \ge \frac{1}{2} z \text{ in } \Omega \tag{4.6}$$

（见 [25]）。

定义

$$\underline{u} := \delta^{\frac{1}{p}} z_\delta^{\omega} - \delta, \quad \overline{u} := \delta^{-p} z^{\overline{\omega}} - \delta, \tag{4.7}$$

其中

$$\frac{\omega - 1}{\omega} > \frac{1}{p-1} > \frac{\overline{\omega} - 1}{\overline{\omega}} \text{ with } \omega > \overline{\omega} > 1 \tag{4.8}$$

and

$$\overline{\omega} < 1 + p(1 - \frac{\max\{\alpha, \beta\}}{p-1}). \tag{4.9}$$

由（4.7）、（4.2）、（4.5）和（4.3）可得

$$\overline{u} \le \delta^{-p}(Ld)^{\overline{\omega}} \text{ and } \|\nabla \overline{u}\|_\infty \le \delta^{-p}\hat{L}, \tag{4.10}$$

$\hat{}$与 L:= $\overline{\omega}L^{\overline{\omega}}$。此外，

$$\begin{cases} \frac{\partial \underline{u}}{\partial \eta} = \delta^{\frac{1}{p}} \frac{\partial (z_\delta^{\omega})}{\partial \eta} = \delta^{\frac{1}{p}} \omega z_\delta^{\omega - 1} \frac{\partial z_\delta}{\partial \eta} = 0 \\ \frac{\partial \overline{u}}{\partial \eta} = \delta^{-p} \frac{\partial (z^{\overline{\omega}})}{\partial \eta} = \delta^{-p} \overline{\omega} z^{\overline{\omega} - 1} \frac{\partial z}{\partial \eta} = 0 \end{cases} \text{ on } \partial\Omega, \tag{4.11}$$

因为 z、z_δ 分别满足（4.1）、（4.4），且 ω、$\overline{\omega} > 1$。

我们断言 $\underline{u} \le \overline{u}$ 具有一个较小的 $\delta > 0$。事实上，由于对所有 $\delta <$diam(Ω), $\omega > \overline{\omega}$ 且 $z_\delta \le z$，因此

$$\begin{aligned} \overline{u}(x) - \underline{u}(x) &= (\delta^{-p} z^{\bar{\omega}} - \delta) - \left(\delta^{\frac{1}{p}} z_\delta^{\omega} - \delta\right) \\ &\ge \delta^{-p} z^{\bar{\omega}} - \delta^{\frac{1}{p}} z^{\omega} = z^{\omega}(\delta^{-p} z^{\bar{\omega} - \omega} - \delta^{\frac{1}{p}}) \\ &\ge z^{\omega}(\delta^{-p}(cd(x))^{\bar{\omega} - \omega} - \delta^{\frac{1}{p}}) \ge 0, \end{aligned}$$

只要 $\delta > 0$ 足够小。因此，$\underline{u} \le \overline{u}$ 属于 Ω，如所需。

定理 4.1. 设 (H.3)–(H.4) 成立。则问题 (P) 存在一个变号解 $u_0 \in \mathcal{C}^1(\Omega)$，当 $d(x) \to 0$ 时，$u_0(x)$ 为负。此外，存在问题 (P) 的一个正解 $u_+ \in \mathcal{C}^1(\Omega)$，当 $d(x) \to 0$ 时，$u_+(x)$ 为零。

证明。我们证明由 (4.7) 给出的函数 $\overline{u}$ 满足 (2.2)。为此，取 $u \in W^{1,\,p}(\Omega)$ 使得 $-\overline{u} \le u \le \overline{u}$。由 (H.3) 和 (4.10) 可得

$$\begin{aligned} |f(\cdot, \overline{u}, \nabla \overline{u})| &\le M(1 + |\overline{u}|^{\alpha} + |\nabla \overline{u}|^{\beta}) \\ &\le M(1 + (\delta^{-p}(Ld)^{\overline{\omega}})^{\alpha} + (\delta^{-p}\hat{L})^{\beta} \\ &\le C\delta^{-p\max\{\alpha,\beta\}}, \end{aligned} \tag{4.12}$$

对于某个常数 $C > 0$，当 $\delta > 0$ 充分小时。直接计算可得

$$\begin{aligned} &-\Delta_p z^{\bar{\omega}} + \lambda \tfrac{|\nabla z^{\bar{\omega}}|^p}{z^{\bar{\omega}}} = \bar{\omega}^{p-1}\left(1 - (\bar{\omega}-1)(p-1)\tfrac{|\nabla z|^p}{z}\right) z^{(\bar{\omega}-1)(p-1)} + \bar{\omega}^p \tfrac{z^{(\bar{\omega}-1)p}|\nabla z|^p}{z^{\bar{\omega}}} \\ &= \bar{\omega}^{p-1}\left(1 - (\bar{\omega}-1)(p-1)\tfrac{|\nabla z|^p}{z}\right) z^{(\bar{\omega}-1)(p-1)} + \bar{\omega}^p z^{(\bar{\omega}-1)(p-1)} \tfrac{z^{\bar{\omega}-1}|\nabla z|^p}{z^{\bar{\omega}}} \\ &= \bar{\omega}^{p-1}\left[1 + \bar{\omega}(1 - \tfrac{(\bar{\omega}-1)(p-1)}{\bar{\omega}})\tfrac{|\nabla z|^p}{z}\right] z^{(\bar{\omega}-1)(p-1)}. \end{aligned}$$

利用 (4.7) 和 (4.8)，可得

$$\begin{aligned} &-\Delta_p \overline{u} + \tfrac{|\nabla \overline{u}|^p}{\overline{u}+\delta} = \delta^{-p(p-1)}(-\Delta_p z^{\bar{\omega}} + \tfrac{|\nabla z^{\bar{\omega}}|^p}{z^{\bar{\omega}}}) \\ &= \delta^{-p(p-1)}\bar{\omega}^{p-1}\left[1 + \bar{\omega}(1 - \tfrac{(\bar{\omega}-1)(p-1)}{\bar{\omega}})\tfrac{|\nabla z|^p}{z}\right] z^{(\bar{\omega}-1)(p-1)} \\ &\ge \delta^{-p(p-1)}\bar{\omega}^{p-1}\begin{cases} z^{(\bar{\omega}-1)(p-1)} & \text{in } \Omega\backslash\overline{\Omega}_\delta, \\ \bar{\omega}(1 - \tfrac{(\bar{\omega}-1)(p-1)}{\bar{\omega}}) z^{(\bar{\omega}-1)(p-1)-1}|\nabla z|^p & \text{in } \Omega_\delta. \end{cases} \end{aligned} \tag{4.13}$$

因此，如有必要，进一步减小 δ，即可得到

$$\begin{aligned} &\delta^{-p(p-1)}\bar{\omega}^{p-1} z^{(\bar{\omega}-1)(p-1)} \\ &\ge \delta^{-p(p-1)}\bar{\omega}^{p-1}(c^{-1}d(x))^{(\bar{\omega}-1)(p-1)} \\ &\ge \delta^{-p(p-1)}\bar{\omega}^{p-1}(c^{-1}\delta)^{(\bar{\omega}-1)(p-1)} \\ &= \delta^{(\bar{\omega}-1-p)(p-1)}\bar{\omega}^{p-1} c^{-(\bar{\omega}-1)(p-1)} \\ &\ge \delta^{-p\max\{\alpha,\beta\}} \quad \text{in } \Omega\backslash\overline{\Omega}_\delta, \end{aligned} \tag{4.14}$$

由 (4.9) 可知。因此，由 (4.12)–(4.14) 得

$$-\Delta_p \overline{u} + \frac{|\nabla \overline{u}|^p}{\overline{u}+\delta} \ge f(\cdot, \overline{u}, \nabla \overline{u}) \quad \text{in } \Omega\backslash\overline{\Omega}_\delta.$$

现在令 $x \in \Omega_\delta$。由 (4.3) 和 (4.8)，可得一个常数 $\bar{\mu} > 0$，使得

$$(1 - \frac{(\bar{\omega}-1)(p-1)}{\bar{\omega}})|\nabla z| > \bar{\mu} \quad \text{in } \Omega_\delta.$$

于是，由 (4.3) 和 (4.9) 可得

$$\begin{aligned}&\delta^{-p(p-1)}\bar{\omega}^p(1-\tfrac{(\bar{\omega}-1)(p-1)}{\bar{\omega}})z^{(\bar{\omega}-1)(p-1)-1}|\nabla z|^p\\&\geq \delta^{-p(p-1)}\bar{\omega}^p(cd(x))^{(\bar{\omega}-1)(p-1)-1}\bar{\mu}^p\\&\geq \delta^{-p(p-1)}\bar{\omega}^p(c\delta)^{(\bar{\omega}-1)(p-1)-1}\bar{\mu}^p\\&\geq \delta^{-p\max\{\alpha,\beta\}}\ \text{ in } \Omega_\delta,\end{aligned}$$

当 $\delta>0$ 足够小时，即

$$-\Delta_p\overline{u}+\frac{|\nabla\overline{u}|^p}{\overline{u}+\delta}\geq f(\cdot,\overline{u},\nabla\overline{u})\ \text{ in } \Omega_\delta.$$

综上，

$$-\Delta_p\overline{u}+\frac{|\nabla\overline{u}|^p}{\overline{u}+\delta}\geq f(\cdot,\overline{u},\nabla\overline{u})\text{ on the whole }\Omega.$$

最后，取 $\varphi\in W^{1,\ {}_b}{}^p(\Omega)$ $\varphi\geq 0$ 在 Ω 中几乎处处成立，并回忆 (4.11)，得到

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_\Omega|\nabla\overline{u}|^{p-2}\nabla\overline{u}\nabla\varphi\,\mathrm{d}x+\int_\Omega\frac{|\nabla\overline{u}|^p}{\overline{u}+\delta}\varphi\mathrm{d}x-\left\langle\frac{\partial\overline{u}}{\partial\eta_p},\gamma_0(\varphi)\right\rangle_{\partial\Omega}\\&\geq\textstyle\int_\Omega f(\cdot,\overline{u},\nabla\overline{u})\varphi\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

如所需。这里， γ_0 是 $\partial\Omega$ 上的迹算子，

$$\frac{\partial w}{\partial\eta_p}:=|\nabla w|^{p-2}\frac{\partial w}{\partial\eta},\quad\forall\, w\in W^{1,p}(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega}),\tag{4.15}$$

而 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\partial\Omega}$ 表示这一对的对偶配对

$$(W^{1/p',p}(\partial\Omega),W^{-1/p',p'}(\partial\Omega)).$$

接下来，我们证明 (4.7) 中的函数 $\underline{u}$ 满足 (2.2)。在 $\Omega\backslash\Omega_\delta$ 中，直接计算可得

$$\begin{aligned}&-\Delta_p z_\delta^\omega+\tfrac{|\nabla z_\delta^\omega|^p}{z_\delta^\omega}=\omega^{p-1}\left(1-(\omega-1)(p-1)\tfrac{|\nabla z_\delta|^p}{z_\delta}\right)z_\delta^{(\omega-1)(p-1)}+\omega^p\tfrac{z_\delta^{(\omega-1)p}|\nabla z_\delta|^p}{z_\delta^\omega}\\&=\omega^{p-1}\left[1+\omega(1-\tfrac{(\omega-1)(p-1)}{\omega})\tfrac{|\nabla z_\delta|^p}{z_\delta}\right]z_\delta^{(\omega-1)(p-1)},\end{aligned}$$

而在 Ω_δ 中，我们得到

$$-\Delta_p z_\delta^\omega+\tfrac{|\nabla z_\delta^\omega|^p}{z_\delta^\omega}=\omega^{p-1}\left[-1+\omega(1-\tfrac{(\omega-1)(p-1)}{\omega})\tfrac{|\nabla z_\delta|^p}{z_\delta}\right]z_\delta^{(\omega-1)(p-1)}.$$

因此，由 (4.7) 并根据 (4.8)，可得

$$-\Delta_p\underline{u}+\frac{|\nabla\underline{u}|^p}{\underline{u}+\delta}=\delta^{\frac{1}{p'}}(-\Delta_p z_\delta^\omega+\frac{|\nabla z_\delta^\omega|^p}{z_\delta^\omega})\leq\begin{cases}\delta^{\frac{1}{p'}}\omega^{p-1}z_\delta^{(\omega-1)(p-1)} & \text{in }\Omega\backslash\overline{\Omega}_\delta\\ 0 & \text{in }\Omega_\delta.\end{cases}$$

因此，考虑到 (4.5)、(4.2)，并取 (H.4) 中适当的常数 m，使得

$$m>\delta^{\frac{1}{p'}}\omega^{p-1}L^{(\omega-1)(p-1)}\ \text{ for } \delta>0 \text{ sufficiently small,}$$

我们得到

$$-\Delta_p\underline{u}+\frac{|\nabla\underline{u}|^p}{\underline{u}+\delta}\leq f(\cdot,\underline{u},\nabla\underline{u}).\tag{4.16}$$

最后，在 Ω 中几乎处处以 $\varphi \in W^{1,p}_{b}(\Omega)$ $\varphi \geq 0$ 作为测试函数代入 (4.16)，并回顾 (4.11)，再结合格林公式 [10], ，得到

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p-2}\nabla \underline{u}\nabla\varphi \,\mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{|\nabla \underline{u}|^p}{\underline{u}+\delta}\varphi \,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p-2}\nabla \underline{u}\nabla\varphi \,\mathrm{d}x - \left\langle \frac{\partial \underline{u}}{\partial \eta_p}, \gamma_0(\varphi)\right\rangle_{\partial\Omega} + \int_\Omega \frac{|\nabla \underline{u}|^p}{\underline{u}+\delta}\varphi \,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega (-\Delta_p \underline{u} + \frac{|\nabla \underline{u}|^p}{\underline{u}+\delta})\varphi \,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega f(\cdot, \underline{u}, \nabla \underline{u})\varphi \,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

因为 $\gamma_0(\varphi) \geq 0$ 任意 $\varphi \in W^{1,p}(\Omega)$，在 Ω 中几乎处处成立（见 [11, 第 35] 页）。

因此， $\underline{u}$ 和 $\overline{u}$ 满足假设 (H.2)，故可应用定理 3.2，并且存在问题 (P) 的一个解 $u_0 \in \mathcal{C}^{1,\tau}(\Omega)$ $\tau \in]0,1[$, ，使得

$$\underline{u} \leq u_0 \leq \overline{u}. \tag{4.17}$$

此外， u_0 是变号的。事实上，由 (4.7) 和 (4.3) 可得

$$\overline{u} = \delta^{-p} z^{\overline{\omega}} - \delta \leq \delta^{-p}(cd(x))^{\overline{\omega}} - \delta,$$

这实际上意味着

$$\overline{u}(x) < 0 \ \text{ provided } \ d(x) < c^{-1}\delta^{\frac{p+1}{\overline{\omega}}}. \tag{4.18}$$

同样，由 (4.7)-(4.3) 以及 (4.6) 可得

$$\underline{u} = \delta^{\frac{1}{p}} z_\delta^{\omega} - \delta \geq \delta^{\frac{1}{p}}(\frac{d(x)}{2c})^{\omega} - \delta,$$

这意味着

$$\underline{u}(x) > 0 \ \text{ as soon as } \ d(x) > 2c\delta^{\frac{1}{\omega p'}}. \tag{4.19}$$

根据（4.17）—（4.19），结论得证。

另一方面，根据（H.4），并牢记定理 3.2，存在方程（P）的非平凡解 u_+，使得 $u_0 \leq u_+ \leq \overline{u}_+$ 和 $u_+ \geq 0$ 在 Ω 上成立。由（4.7）可知，$\overline{u}_+ = 0$ 一旦 d（x）$\to 0$，因此 u_+ 在 d（x）$\to 0$ 时消失。证明完毕。□

References

[1] B. Abdellaoui、I. Peral 和 A. Primo, *Breaking of resonance and regularizing effect of a first order quasi-linear term in some elliptic equations*, 《Ann. I. H. Poincar-AN》 25 (2008), 969-985。[2] B. Abdellaoui、L. Boccardo、I. Peral 和 A. Primo, *Quasilinear elliptic equations with natural growth*, 《Diff. Integral Eqts.》, ( ) ( ), -。

[3] C. O. Alves 和 A. Moussaoui, *Existence of solutions for a class of singular elliptic systems with convection term*, 《Asymptot. Anal.》( ), -。

[4] C.O. Alves、P.C. Carri˜ao 和 L.F.O. Faria, *Existence of solutions to singular elliptic equations with convection terms via the Galerkin method*, 《Electron. J. Diff. Eqts.》, (2010), 1-12。[5] D. Arcoya、J. Carmona 和 P.J. Mart´ınez-Aparicio, *Gelfand type quasilinear elliptic problems with quadratic gradient*, 《Ann. I. H. Poincare-AN》, ( ), -。[6] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle Theorie et Applications*. Masson, 巴黎, 1983。[7] L. Boccardo 和 T. Gallou¨et, *Strongly nonlinear elliptic equations having natural growth terms and L^1 data*, 《Nonlinear Anal.》, ( ), -。

[8] H. Bueno 和 G. Ercole, *A quasilinear problem with fast growing gradient*, 《Appl. Math. Lett.》26 (2013), 520-523。[9] P. Candito、R. Livrea 和 A. Moussaoui, *Singular quasilinear elliptic systems involving gradient terms* 55 2020 103142 , 《Nonl. Anal.: Real World App.》, ( ), 。[10] E. Casas 和 L.A. Fernandez, *A Green's formula for quasilinear elliptic operators*, 《J. Math. Anal. Appl.》142 (1989), 62-73。[11] S. Carl, V. K. Le 和 D. Motreanu, *Nonsmooth Variational Problems and Their Inequalities* 2007 , 《Springer Monogr. Math.》, Springer, 纽约, [12] S. Carl 和 D. Motreanu, *Constant-sign and sign-changing solutions for nonlinear eigenvalue problems* 68 2008 2668 2676 , 《Nonl. Anal.》, ( ), -。[13] J. Carmona、P.J. Martínez-Aparicio、A. Suarez, , 《Nonl. Anal.》89 (2013), 157-169。[14] J. Carmona、T. Leonori、S. López-Martınez 和 P.J. Martınez-Aparicio, , 《Nonl. Anal.》, (2019), 105-30。[15] D.G. de Figueiredo、J.P. Gossez、H.R. Quoirin 和 P. Ubilla, *Existence and nonexistence of positive solutions for nonlinear elliptic singular equations with natural growth* *Quasilinear elliptic problems with singular and homogeneous lower order terms* 179 , *Elliptic equations involving the p-Laplacian and a gradient term having natural growth* , 《Rev. Mat. Iberoam.》35 (1) (2019), 173-194。[16] H. Dellouche 和 A. Moussaoui, *Singular quasilinear elliptic systems with gradient dependence* 26 2022 1 14 , 《Positivity》, ( ), -。[17] J.I. Diaz 和 L. Tello, *On a climate model with a dynamic nonlinear diffusive boundary condition* 1 2 2008 253 262 , Disc. Cont. Dyn. Syst. Serie S ( ) ( ), -。[18] S. El-Hadi Miri, *Quasilinear elliptic problems with general growth and nonlinear term having singular behavior* 12 2012 19 48 , 《Advanced Nonl. Studies》( ), -。[19] T.D. Frank, 《非线性福克-普朗克方程：基础与应用》, Springer-Verlag, 柏林、海德堡, 2005。[20] M. Kaviany, 《对流换热原理》, Springer, 纽约, 2001。[21] U. Guernatto 和 S.A. Marano, *Infinitely many solutions to singular convective Lieb-mann systems with arbitrarily growing reactions* 271 2021 849 863 , 《J. Diff. Eqts.》, ( ), -。[22] U. Guarnotta、S.A. Marano 和 A. Moussaoui, *Singular quasilinear convective elliptic systems in $\mathbb{R}^N$* 11 2022 741 756 , 《Advances Nonl. Anal.》, Vol. ( ), -。[23] L. Gasinski 和 N.S. Papageorgiou, 《非线性分析》。Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2006。[24] D. Giachetti 和 F. Petitta, *Elliptic equations having a singular quadratic gradient term and a changing sign datum* 5 11 2012 1875 1895 , 《Comm. Pure App. Anal.》( ) ( ), -。[25] D.D. Hai, *On a class of singular p-Laplacian boundary value problems*, 《J. Math. Anal. Appl.》383 (2011), 619-626。[26] J.M. Lasry 和 P.L. Lions, *Nonlinear elliptic equations with singular boundary conditions and stochastic control with state constraints; the model problem* , 《Math. Ann.》283 (1989), 583-630。[27] G. M. Lieberman, *Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations*, 《Nonlinear Anal.》12 (1988), 1203-1219。[28] M. Marcus 和 V.J. Mizel, *Absolute continuity on tracks and mappings of Sobolev spaces* **45** 1972 294 320 , 《Arch. Rational Mech. Anal.》, ( ), -。[29] D. Motreanu、V.V. Motreanu 和 N.S. Papageorgiou, *A unified approach for multiple constant sign and nodal solutions* **12** 2007 1363 1392 , 《Adv. Diff. Equations》, ( ), -。[30] D. Motreanu、V. Motreanu 和 A. Moussaoui, *Location of nodal solutions for quasilinear elliptic equations with gradient dependence* 11 , Disc. Cont. Dynamical Syst.-S, (2), 293-307。[31] D. Motreanu、V.V. Motreanu 和 N. Papageorgiou, *Topological and Variational meth-ods with applications to Nonlinear Boundary Value Problems*, Springer, 纽约, 2014。

[32] D. Motreanu, T*elliptic equations* *hree solutions with precise sign properties for systems of quasilinear* 4 5 2012 831 843 ,

Disc. Cont. Dynamical Syst.-S, （）（）, -。[33] D. Motreanu 和 N. Papageorgiou, *Multiple solutions for nonlinear Neumann problems driven by a nonhomogeneous differential operator* , Proc. American

Math. Soc., (10) 139（2011年）, 3527–3535。[34] S. Myajima、D. Motreanu 和 M. Tanaka, *Multiple existence results of solutions for the Neumann problems via super-and sub-solutions* 262 2012 1921 , J. Funct. Anal., （）, -

1953。[35] L. Orsina 和 J.P. Puel, *Positive solutions for a class of nonlinear elliptic problems involving quasilinear and semilinear terms* 26 2001 , Comm. Partial Diff.

Eqts., （）, 1665-689。[36] A. Perrotta 和 A. Primo, *Regularizing effect of a gradient term in problem involving the p-Laplacian Operator* 11 2011 221 231 , Adv. Nonl. Studies,

（）, -。[37] D. Motreanu、A. Moussaoui 和 Z. Zhang, *Positive solutions for singular elliptic systems with convection term* 19 3 2017 2165 2175 , J. Fixed Point Theory

Appl., （）（）, -。[38] A.E. Presoto 和 F.O. de Paiva, *A Neumann problem of Ambrosetti–Prodi type*, J. Fixed Point Theory Appl., 18（2016年）, 189-200。[39] M. Ri、S. Huang、Q. Tian 和 Z.P. Ma, *Existence of* $W_0^{1\ 1}$ *solutions to nonlinear* , (Ω), AIMS Math., （）*elliptic equation with singular natural growth term* 5 6 2020 5791

（）, - 5800。[40] Y. Wang 和 M. Wang, *Solutions to nonlinear elliptic equations with a gradient*, Acta Math. Sci., 35B(5)（2015年）, 1023-1036。

Abdelkrim Moussaoui, Applied Mathematics Laboratory (LMA), Faculty of Exact Sciences and Biology department Faculty of natural and life sci- ,, ences A. Mira Bejaia University Targa Ouzemour 06000 Bejaia Algeria , , ,*Email address*: abdelkrim.moussaoui@univ- 贝贾亚 .dz

Kamel Saoudi Basic and Applied Scientific Research Center Imam Abdul- , , , ,, , rahman Bin Faisal University P.O. Box 1982 31441 Dammam Saudi Arabia *Email address*: kmsaoudi@iau.edu.sa