arXiv:2304.00657v2 [math.AP] 4 Apr 2023

一类一般椭圆方程解的 Lipschitz 正则性

GRETA MARINO 和 SUNRA MOSCONI

ABSTRACT. 我们证明局部极小化子的局部 Lipschitz 正则性

$$W^{1,1}(\Omega) \ni v \mapsto \int_\Omega F(Dv)\,dx$$

其中 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$，$N \geq 2$ 且 $F\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ 是 Kovalev 和 Maldonado 意义下的准一致凸被积函数 [30],，即一个凸 C^1-函数，且 D^2F 的最大特征值与最小特征值之比本质有界。该类被积函数包括标准的奇异/退化函数 $F(z) = |z|^p$，对任意 $p > 1$ 均成立；并且从变分法中的强椭圆被积函数出发，按照一种自然的收敛方式取闭包，便自然得到这一类函数。

CONTENTS

1. 引言 1
1.1. 概述与主要结果 1
1.2. Uhlenbeck 结构的作用 5
1.3. 证明概要 6
1.4. 相关结果 8
1.5. 论文结构 9
2. 准一致凸被积函数 9
3. 局部极小化子及其应力场的 Sobolev 正则性 16
4. 正则化过程 19
5. Caccioppoli 不等式 22
6. 一族 1-齐次函数 26
7. 主要结果的证明 30
参考文献 35

1. INTRODUCTION

1.1. 概述与主要结果。考虑一个凸且强制的 $F\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$。本文旨在证明变分法中标准积分的局部极小化子的 Lipschitz 正则性

$$J(u,\Omega) = \int_\Omega F(Du)\,dx \tag{1.1}$$

即 那些 $u \in W^1_{1\,\mathrm{loc}}(\Omega)$，使得 $F(Du) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$，且对任意开集 $\mathcal{O} \Subset \Omega$，均有

$$J(u,\mathcal{O}) \leq J(u+w,\mathcal{O}) \qquad \forall\, w \in W^{1,1}_0(\mathcal{O}).$$

我们关注的被积函数 F 满足某个 $H < \infty$ 条件

$$\lambda_{\max}(D^2F(z)) \leq H\,\lambda_{\min}(D^2F(z)) \qquad \text{for a. e. } z \in \mathbb{R}^N, \tag{1.2}$$

其中，此处及下文中，$\lambda_{\max}(M)$ 和 $\lambda_{\min}(M)$ 分别表示对称矩阵 M 的最小和最大特征值。在这一引言段落中，

2010 *Mathematics Subject Classification.* 30C65、35B65、35J60。*Key words and phrases.* 椭圆正则性、局部极小化子、拟共形映射、变分法。

满足（1.2）的被积函数称为一致椭圆（尽管这一术语十分常见，因此可能引起一些混淆）。正如后文将要阐明的那样，现有的大多数关于局部极小化子的 Lipschitz 正则性结果，都要求奇异集（在该集合上， $\lambda_{\max}$（D^2F（z）爆增）和退化集（在该集合上， $\lambda_{\min}$（D^2F（z）消失）均有界。正如下文讨论将阐明的那样，仅凭条件（1.2）则允许这两个集合同时无界（甚至稠密），且具有相当大的规模（按 Hausdorff 维数衡量）。

为了说明一致椭圆性条件 (1.2)，我们回顾一下关于 (1.1) 的局部极小化子的一些众所周知的事实。若 F 满足多项式上界，它们便是相应欧拉-拉格朗日方程的有限能量解

$$\operatorname{div}(DF(Du)) = 0 \tag{1.3}$$

在 Ω 中。一旦对 F 在 ∞ 处施加超线性条件，标准方法便可保证极小化子的存在；然而，众所周知的例子（见 [21,33]）表明，在这些条件（次多项式增长和超线性）下，它们可能不是局部有界的。局部极小化子的正则性是一个经典课题，可追溯至希尔伯特第十九问题；在强椭圆性假设下，该问题通过 Schauder 理论和 De Giorgi-Nash-Moser 理论得到解决

$$0 < \inf_{z\in\mathbb{R}^N} \lambda_{\min}(D^2F(z)) \le \sup_{z\in\mathbb{R}^N} \lambda_{\max}(D^2F(z)) < \infty.$$

自希尔伯特问题得到解决以来，人们投入了大量精力来弱化这一假设。在上述正则性理论中出现的一个自然量是椭圆性比（也称为 $D^2F(z)$ 的线性畸变），即

$$\mathrm{e}(z) = \frac{\lambda_{\max}(D^2F(z))}{\lambda_{\min}(D^2F(z))}.$$

光滑强椭圆型被积函数在逐点（或等价地，关于 $C^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$）收敛下的闭包，在与椭圆性比一致有界性结合时，结果是一个由以下对象组成的锥：

- 仿射函数，它们是该锥的极值元
- 凸超线性 $F \in C^1_{\text{局部}}(\mathbb{R}^N) \cap W^{2,\,N\text{局部}}(\mathbb{R}^N)$ 满足 (1.2) 几乎处处成立，对某个 $H < \infty$

（见推论 2.7）。第二类被积函数已在具有开创性的论文 [29,30]（进一步细节可参见这些论文）中得到研究，以下称为 H-拟一致凸，[1] 下文简称为 H-拟一致凸。它们与发展完善的拟共形映射理论相关，因为其梯度映射确实是拟共形映射。方便地说，在维数 $N \ge 2$ 条件（1.2）不仅蕴含超线性，还蕴含次多项式增长以及被积函数的严格凸性 F，从而保证在 $W^{1,\,1+1/H}$ 局部 (Ω) 中存在局部极小化子（实际上，在各种边界条件下存在极小化子）。此外，局部极小化子与（1.3）的有限能量弱解相同（见命题3.2）。方程（1.3）可形式化地对每个变量 x_α求导，从而对每个偏导数 $\partial_\alpha u$

$$\operatorname{div}(D^2F(Du)\,D\partial_\alpha u) = 0, \qquad \alpha = 1,\dots,N, \tag{1.4}$$

对于属于 $\mathrm{Sing}_F \cup \mathrm{Deg}_F$ 的 Du，其不满足强椭圆条件，其中

$$\begin{aligned} \mathrm{Sing}_F &= \left\{ \bar z \in \mathbb{R}^N : \operatorname*{ess\,lim\,sup}_{z\to\bar z} \lambda_{\max}(D^2F(z)) = \infty \right\}, \\ \mathrm{Deg}_F &= \left\{ \bar z \in \mathbb{R}^N : \operatorname*{ess\,lim\,inf}_{z\to\bar z} \lambda_{\min}(D^2F(z)) = 0 \right\}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

[1]事实上，[29, 30] 重点在于梯度映射的几何拟共形常数，而非其线性畸变 H，定义见（1.2）

若 F 是拟一致凸的，则前述集合分别与所谓的拟共形 ∞-集和 0-集相关，它们出现在拟共形雅可比问题 [7] 中。如 [30, 第 4 节和 5] 所示，这些集合可能相当大：给定任意一个 Hausdorff 维数小于 1 的 $E \subseteq \mathbb{R}^N$，存在一个拟一致凸的 F_1，使得 $E \subseteq \mathrm{Sing}_{F_1}$；也存在一个拟一致凸的 F_2，使得 $E \subseteq \mathrm{Deg}_{F_2}$。特别是，对于 $N \geq 2$，Sing_F 和 Deg_F 都可以在 $\mathbb{R}^N$ 中稠密。另一方面，对于F拟一致凸的 F，Sing_F 和 Deg_F 均不可能包含可整流曲线（见 [7, 30]）。

尽管拟一致凸被积函数自然地表现为强椭圆被积函数的极限（按上述意义），但相应的正则性理论对于（1.4）似乎更为微妙。事实上，当 L^∞ 和 C^α 关于 Du 在 F 强椭圆时，其估计本质上取决于量

$$\frac{\sup_\Omega \lambda_{\max}(D^2F(Du))}{\inf_\Omega \lambda_{\min}(D^2F(Du))}$$

而非实际受控的量

$$\sup_\Omega \frac{\lambda_{\max}(D^2F(Du))}{\lambda_{\min}(D^2F(Du))}$$

因此，简单的极限论证注定会失败。

尽管如此，标准正则性理论仍能得出结果的一些拟一致凸类别早已广为人知。例如，一类重要的拟一致凸被积函数具有 Uhlenbeck 结构，即仅依赖于梯度模。给定一个非递减的 $G\colon [0,\infty[\to [0,\infty[$，当且仅当$G \in C^1([0,\infty)) \cap W^{2,\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$，且存在常数 $C > 0$ 使得，函数 $F(z) = G(|z|)$ 是拟一致凸的

$$\frac{1}{C} \leq \frac{t\,G''(t)}{G'(t)} \leq C \qquad \text{for a. e. } t > 0. \tag{1.6}$$

特别地，对于具有 Uhlenbeck 结构的拟一致凸函数，始终有

$$\mathrm{Sing}_F \subseteq \{0\} \quad \text{as well as} \quad \mathrm{Deg}_F \subseteq \{0\} \tag{1.7}$$

这由于显然有 $\mathrm{Sing}_F \cap \mathrm{Deg}_F = \emptyset$ 对于拟一致凸 F，从而证明了方程（1.3）的奇异情形与退化情形之间的传统二分法。

当1.3）中的 F是 Uhlenbeck 拟一致凸被积函数时，其解的正则性理论已相当成熟；即使包含可和性较低的非齐次项，且不存在变分框架，也依然如此。关于现有解的结果综述，可参见例如[12] 及其中的相关文献。

$$\mathrm{div}\left(\frac{G'(|Du|)}{|Du|}\,Du\right) = f \tag{1.8}$$

直至 Lipschitz 尺度，这取决于 f 的可和性性质。关于高阶正则性，在 [32] 中，对于比 Uhlenbeck 型更一般、但仍满足椭圆性比一致径向界的被积函数，已证明极小化子是 $C^{1,\alpha}$。我们所说的是，$C^{1,\alpha}$ 正则性的主要假设是存在两个径向函数 $\lambda_{\min}, \lambda_{\max}\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$，它们满足

$$\lambda_{\min}(|z|) \leq \lambda_{\min}(D^2F(z)), \qquad \lambda_{\max}(|z|) \geq \lambda_{\max}(D^2F(z))$$

and

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+} \frac{\lambda_{\max}(t)}{\lambda_{\min}(t)} < \infty$$

从而这些被积函数是拟一致凸的。在这一框架下，Sing_F和 Deg_F都被限制为具有径向对称性，但由于它们都不可能包含圆，因此（1.7）再次成立。

注意，当 F 是拟一致凸函数，并以使 $\min_{\mathbb{R}^N} F = F(0) = 0$ 的方式归一化时（这总可以安全地假设），F 和 DF 实际上都满足如下形式的双侧各向同性控制

$$\frac{1}{C}\,A(|z|) \le F(z) \le C\,A(|z|), \qquad \frac{1}{C}\,A'(|z|) \le |DF(z)| \le C\,A'(|z|)$$

对于一个 C^1 杨函数 $A\colon\ [0,\infty[\to[0,\infty[$（见第 3 节），但如前所述，对于一般的拟一致凸被积函数，在椭圆性比层面上无法获得这种各向同性控制。

我们对这一框架的兴趣源于 [4, 第 16] 章中的结果，其中相应极小化子在二维空间中的正则性理论已得到成功发展。更确切地说，在 [4, 定理 16.4。5], 作者证明了 $C^{1,\alpha}$ 有限能量解的正则性[2] 解满足

$$\operatorname{div} \mathcal{A}(Du) = 0 \tag{1.9}$$

在平面上，在更一般的假设下，映射 $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 满足

$$(\mathcal{A}(z) - \mathcal{A}(w), z - w) \ge \delta\,|\mathcal{A}(z) - \mathcal{A}(w)|\,|z - w|, \qquad \forall\, z, w \in \mathbb{R}^2$$

对于某个 $\delta > 0$。这类映射称为 δ-单调映射，并在 [29], 中引入；其中证明了，任何准一致凸被积函数的梯度映射都是 δ-单调的，但请注意，一般而言，方程（1.9）可能是非变分的。因此，[4] 在平面上的结果比我们的结果更一般、也更强，但其中所用的方法基于将（1.9）化为关于 u复梯度的一阶 Beltrami 型系统，因此局限于二维情形。

现在可以陈述我们的主要结果。

定理 1.1. 对于 $N \ge 2$，令 $F \in C^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N) \cap W^{2,1\,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ (1.2) 几乎处处满足条件 a. e.，并满足归一化条件

$$F(z) \ge F(0) = 0 \qquad \forall\, z \in \mathbb{R}^N. \tag{1.10}$$

那么，任何在 Ω 中针对 J 的局部极小化子 u 都是局部 Lipschitz 的。特别地，存在常数$C = C(H, N) > 0$，使得若 $B_{2R} \subseteq \Omega$，则

$$\sup_{B_R} |F(Du)| \le C \fint_{B_{2R}} F(Du)\,dx. \tag{1.11}$$

注 1.2（关于陈述的说明）。

- 除归一化条件（1.10）外，对 F 的假设等价地可表述为：F 是 H-拟一致凸的，或 DF 是最大线性畸变有界于 H 的拟共形映射。注意，由于 DF 的拟共形性，F 的 $W^{2,2\,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ 正则性结合条件（1.2），会自动提升为对某个 $\varepsilon > 0$ 的 $F \in W^{2,N+\varepsilon\,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ 正则性。

- 归一化条件 (1.10)仅为得到更简洁的估计 (1.11)；因为任何 H-拟一致凸被积函数 F都有唯一的最小点 $\bar z$。于是，被积函数

  $$\tilde F(z) = F(z + \bar z) - F(\bar z)$$

  仍然是 H-拟一致凸的，而函数 $\tilde u(x) = u(x) - (x, \bar z)$ 是相应积分泛函的一个局部极小化子。注意，(1.11)右侧没有附加项，因此规定了当其能量较小时，Du必须逐点较小。

- 条件 (1.2) 所给出的 H-拟一致凸性无法区分奇异方程与退化方程，因为二者 $z \mapsto |z|^{1+1/H}$和 $z \mapsto |z|^{1+H}$都是 H-拟一致凸。更重要的是，一个简单的构造（见例 2.4）表明，对于拟凸被积函数F，Sing_F 和 Deg_F 可以同时非空，因此传统的奇异／退化方程二分法在这种情形下根本不可能成立。

[2]在这种 p 可能是非变分的情形下，所考虑的能量由 $(\mathcal{A}(Du)\ Du)$ 的积分给出 .

- 我们也可以讨论以下函数的局部极小化子

$$J(u,\mathcal{O}) = \int_{\mathcal{O}} F(Du) + f\,u\,dx, \qquad \mathcal{O} \Subset \Omega,$$

对于足够光滑的 f。然而，我们的方法似乎能在 f 满足非最优正则性条件时仍保证 Lipschitz 正则性。确保 Du 有界的自然条件应为 $f \in L^q{}_{\rm loc}(\Omega)$，其中某个 $q > N$；但要得到这一结果，证明似乎需要进行实质性修改。

1.2. Uhlenbeck 结构的作用。 简要讨论在证明 (1.3) 的有限能量解的先验梯度界时，椭圆性比的径向控制所起的作用，其中方程具有凸的 F。为此，Bernstein 所开创的标准策略是找到合适的强制函数 $G\colon\ \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ 以及系数 $a_{ij}\colon\ \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ 使得

(1) 矩阵 $A(z) = (a_{ij}(z))$ 对每个 $z \in \mathbb{R}^N$ 都具有受控椭圆性；(2) 函数 $G(Du)$ 满足

$$\operatorname{div}\left(A(Du)\,D(G(Du))\right) \geq 0. \tag{1.12}$$

完成这些任务后，线性正则性理论即可应用于 $G(Du)$。例如，如果 A 最终是强椭圆的，那么 (1.12) 的解满足

$$\|G(Du)\|_{L^\infty(B_R)} \leq C \fint_{B_{2R}} G(Du)\,dx$$

这样，我们只需用 $F(Du)$ 控制右侧的被积函数（或其变体）。更一般地，一旦对线性椭圆正则性步骤作出适当的改进，这一方案就足够灵活，能够处理 A 的各种选择；只要其椭圆性比对于 $z \to \infty$ 不会增长得过快（关于非一致椭圆情形，参见例如[6] 及其中引用的文献）。

为便于讨论，我们假设 F 和 u 光滑，并且选取了 $\lambda_{\min}$、$\lambda_{\max}\colon\ \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_+$，使得对所有 $z \in \mathbb{R}^N$ 均有

$$0 \leq \lambda_{\min}(z) \leq \lambda_{\min}(D^2F(z)), \qquad \lambda_{\max}(z) \geq \lambda_{\max}(D^2F(z)), \qquad \frac{\lambda_{\max}(z)}{\lambda_{\min}(z)} \leq H. \tag{1.13}$$

构造这对 (A,G) 的标准方法是将 (1.4) 中的每个方程乘以 $\partial_\alpha u$ 再求和，从而得到

$$\operatorname{div}\left(D^2F(Du)\sum_{\alpha=1}^{N}(D\partial_\alpha u)\,\partial_\alpha u\right) = \sum_{\alpha=1}^{N} D^2F(Du)\,D\partial_\alpha u\,D\partial_\alpha u \geq 0 \tag{1.14}$$

其中，最后一个不等式由 F 的凸性得出。不过，采用这种选择意味着我们必须对椭圆性比进行径向控制，因为

$$\sum_{\alpha=1}^{N}(D\partial_\alpha u)\,\partial_\alpha u = D\frac{|Du|^2}{2}$$

而 A 的一个自然选择是

$$A(z) = \frac{D^2F(z)}{\lambda_{\min}(z)},$$

当椭圆性比一致有界时，该方程是强椭圆的；与此同时（1.14）可写为

$$\operatorname{div}\left(A(Du)\,\lambda_{\min}(Du)\,D\frac{|Du|^2}{2}\right) \geq 0.$$

为了构造 G，我们必须施加

$$DG(z) = \lambda_{\min}(z)\, D\frac{|z|^2}{2} = \lambda_{\min}(z)\, z \tag{1.15}$$

但这一关系迫使 G，进而也迫使 $\lambda_{\min}$ 成为径向函数。如果确实如此，即 $\lambda_{\min}(z) = \lambda_{\min}(|z|)$，我们便可以设

$$G(z) = \int_0^{|z|} \lambda_{\min}(s)\, s\, ds$$

它满足（1.15）。最后请注意，由于 $F(0) = 0$ 且 $DF(0) = 0$，对于 $|\omega| = 1$ 和 $t > 0$，有

$$F(t\,\omega) = \int_0^t \left(D^2F(s\,\omega)\,\omega, \omega\right)(t-s)\, ds \geq \int_0^t \lambda_{\min}(s)\,(t-s)\, ds \geq \int_0^{t/2} \lambda_{\min}(s)\, s\, ds = G(t/2)$$

这可用于用自然被积函数 $F(Du)$ 来界定 $G(Du)$。[3] 然而，若没有对 $\lambda_{\min}$ 或 $\lambda_{\max}$ 的径向控制，前述方法便不再适用。

注 1.3。值得注意的是，将 （1.4）乘以 $\partial_\alpha F$（Du）并求和，可得

$$\operatorname{div}\left(D^2F(Du)D(F(Du))\right) = \operatorname{Tr}\left(D^2F(Du)\, D^2u\, D^2F(Du)\, D^2u\right).$$

正如下一段将要定量说明的那样， F 的凸性确保上方的右端仍为非负，因此我们找到了另一对符合前述框架的 (A, G)，即

$$A = D^2F(Du), \qquad G = F.$$

然而，问题在于 A不满足强椭圆性，而仅满足一致椭圆性。不言而喻，在一致椭圆性条件下，关于以下方程解的线性理论

$$\operatorname{div}\left(A(x)\, Dv\right) = 0$$

在一致椭圆性条件下

$$0 \leq \lambda_{\max}(A(x)) \leq H\, \lambda_{\min}(A(x)) \qquad a.\,e.$$

非常薄弱（简单的一维例子即可说明这一点），且无法保证解有界。然而，估计 (1.11) 表明，函数 $v = F(Du)$ 的表现“仿佛”算子 $\operatorname{div}\left(D^2F(Du)\, Dv\right)$ 在 v 上是强椭圆的。

1.3. 证明概要。首次探讨在一般的一致椭圆性条件（1.2）下，维数为 $N \geq 3$ 的情形中方程（1.3）的有限能量解的正则性问题，是在 [23] 中提出的。其采用的方法可置于非线性微分包含的框架下理解；这一理论最初源于 [5,18,37] 的相关研究，如今已得到充分发展，这得益于 [15, 28, 34, 39]，中探讨的大量重要应用，仅举数例。具体而言，可以只关注1.3，并考察应力场 $DF(Du) = V$。对方程作形式推导后，可得如下方程组：

$$\operatorname{Div}\left(DV^t\right) = 0 \tag{1.16}$$

其中，Div 表示作用于矩阵值函数的逐行散度算子， M^t表示矩阵 M的转置。请注意，与拉普拉斯算子相反

$$\Delta V = \operatorname{Div}\left(DV\right),$$

(1.16) 中的算子远非椭圆：其核包含所有紧支撑无散向量场，因此不可能证明系统 (1.16) 的解具有正则性。

[3]正如我们将看到的，如果 e 一致有界，则恒有 $F(2\,z) \leq C\, F(z)$。

然而，通过约束 DV 逐点属于一个适当的锥，可以恢复椭圆性。在我们的框架中，自然且有效的选择（见 [23], ）为

$$\mathcal{K}_H = \left\{ M \in \mathbb{R}^{N\times N} : \operatorname{Tr}(M\,M) \geq \frac{1}{H}\operatorname{Tr}(M\,M^t) \right\},$$

对于 H 在 (1.2) 中给出的条件。 DV 必须属于这样的锥这一事实，仅取决于结构条件

$$DV = D^2F(Du)\,D^2u,$$

也就是说， DV必须是线性畸变有界于 H 的正定对称矩阵与一个对称矩阵的乘积（见下文引理 5.1 ）。注意，由于 $H \searrow 1$，我们有 $\mathcal{K}_H \searrow \mathcal{K}_1 = \mathrm{Sym}_N$，即对称 $N\times N$ 矩阵的线性空间，因此微分包含的解

$$\begin{cases} \operatorname{Div}(DV^t) = 0 \\ DV \in \mathcal{K}_1 \end{cases} \tag{1.17}$$

恰好是调和函数的梯度。

对于 $H > 1$，系统 (1.17) 在 L^2 层次上是椭圆的，但这种恢复的椭圆性对更精细正则性尺度的影响有限。事实上， p-调和方程的应力场显然满足前述非线性微分包含，其中 $p = 1 + 1/H$，且当 $p \neq 2$ 时，存在（见 [27]）一个 p-调和函数，其应力场仅在原点处消失，且为齐次函数，次数为

$$d = \frac{1}{6}\left(p + \sqrt{p^2 + 12\,p - 12}\right) = \frac{1}{6\,H}\left(H + 1 + \sqrt{H^2 + 14\,H + 1}\right).$$

由于当 $H > 1$ 时，最后一个表达式总是小于 1，因此方程 (1.17) 的解所能达到的最佳正则性至多为 C^α，其中 $\alpha = \alpha(H) \in [1/3, 1[$，且任意 $H > 1$ 均成立。这里我们强调，我们未能证明方程 (1.17) 的解有界；若能证明这一点，便可推出定理 1.1 的定性结论，而且鉴于当前关于微分包含的研究方向，这一结果也具有重要意义（例如参见 [2, 24]）。事实上，我们不得不借助原方程 (1.3) 所具有的额外结构。更确切地说，仍以 $V = DF(Du)$ 表示方程 (1.3) 的一个解，并利用微分包含 $DV \in \mathcal{K}_H$，我们证明了一族形式如下的Caccioppoli 不等式：

$$\int_{B_r\cap\{F(Du)>k\}} |DV|^2\,dx \leq \frac{C_H}{(R-r)^2}\int_{B_R\cap\{F(Du)>k\}} |V|^2\,dx \tag{1.18}$$

对于任意 $k \in \mathbb{R}$，以及对于 $R > r > 0$。随后，我们将这一向量值 Caccioppoli 不等式转化为一族关于适当标量函数的 Caccioppoli 不等式；这些标量函数以内在方式定义为与.....相关的适当闵可夫斯基泛函

$$G(z) = F(DF^{-1}(z))$$

（这一定义良好，因为 DF 可逆），即，

$$g_k(z) = \inf\{t > 0 : G(z/t) > k\} \tag{1.19}$$

对任意 $k \in \mathbb{R}$。注意，由于 $V = DF$（Du），因此

$$\{F(Du) > k\} = \{G(V) > k\} = \{g_k(V) > 1\}$$

且 F 的拟一致凸性对于证明 (1.18) 可推出以下结果至关重要

$$\int_{B_r} |D(g_k(V) - 1)_+|^2\,dx \leq \frac{C_H}{(R-r)^2}\int_{B_R} |g_k(V)|^2\,dx. \tag{1.20}$$

1-齐次函数族 $\{g_k\}$ 的其他精细性质，使得我们能够调整经典的 De Giorgi 方法，以证明次解的有界性。注意，(1.20) 与标准的 Caccioppoli 不等式相比有两个主要区别。一方面，由于 (1.18) 的向量性质，其对水平 k 的依赖，较为隐晦地体现在 1-齐次函数族 $\{g_k\}$ 中，而非直接体现在 V 上。更重要的是，其右端项远大于标量问题中通常出现的右端项；后者在右侧会给出形如 $(g_k(V) - 1)_+$ 的被积函数，而不是 $g_k(V)$。尽管如此，De Giorgi 方法仍可调整以适用于这一较弱的情形，从而得到关于 L^∞ 在 $F(Du)$ 上的 L^2 范数的 V 估计。值得庆幸的是，通过对 [23], 中结果的改进，这一估计可推出自然界限 (1.11)。

1.4. 相关结果。 在一致椭圆情形下，定理 1.1 的结论，正如前面所指出的，已在 [32] 中，在以下形式的 Uhlenbeck 型控制下得到：1.13），其中 $\lambda_{\min}(z)$ 和 $\lambda_{\max}(z)$ 仅依赖于 z的模。在 [32], 中，$C^{1,\alpha}$ 实际上在这些假设下证明了正则性。文献 [13] 证明了方程 (1.8) 在配合 Dirichlet 或 Neumann 边界条件时，解具有 Lipschitz 正则性；对 f 和区域的正则性假设均为最优。具有 Uhlenbeck 结构的系统解的相应正则性见 [14]。

请注意，在 [12, 14, 32] 中，作者假设函数 G' （出现在 (1.8) 中，或出现在关于 $D^2F(z)$ 的下界/上界控制中）属于 $C^1(\mathbb{R}_+$，而我们允许其属于 $G' \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+$（鉴于 [23, 例 35], 这一正则性似乎是最优的）。然而，考察 [12, 14] 中的证明可知，其中的结果在这一更一般的假设下仍然成立。

我们的结果尤其涵盖芬斯勒各向异性情形。鉴于这一情形与近期研究趋势密切相关，我们在此作简要介绍。在这一框架下，所考虑的被积函数形式如下

$$F(z) = G(h(z))$$

其中 $G \in C^1(\mathbb{R}_+) \cap W^{2,\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ 是递增、凸并满足（1.6）（见 [23, 例 3.7]）的函数；而 h 是一个 $C^2(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ 凸、正的 1-齐次函数（不一定对称），其主曲率有一个正常数下界，详见 [23, 例 3.7] 。 [11, 第3] 节中的论证表明，当 G 具有更严格的 p-增长型控制且 $h \in C^{3,\alpha}(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ 时，相应极小化子的 $C^{1,\alpha}$ 正则性成立。

虽然本研究未讨论非一致椭圆情形，但值得一提的是，在许多情况下，即使椭圆性比无界，仍可获得 Lipschitz 正则性。一般而言，为了使局部极小化子具有 Lipschitz 连续性，通常需要椭圆性比在某个有界集合之外满足增长控制；但在多数情况下，所得的利普希茨界会关键性地依赖于上述集合的直径。该领域的文献浩如烟海；关于局部极小化子，我们请参阅 [6] ，其中包含一些近期结果，并对这一研究主题作了相当全面的介绍。通过所谓的 Hilbert-Haar 方法，可以获得相当复杂的泛函的 Lipschitz 正则性；Stampacchia 和 Hartman [25, 36] 将该方法引入变分法。该方法使得在被积函数条件十分宽松的情况下，可以证明满足给定边界值且符合所谓有界斜率条件的极小化子具有 Lipschitz 正则性。有关这一方法的更多细节，请参阅 [8] 及其中的相关文献。另一类非一致椭圆被积函数是所谓的正交型被积函数，其 Sing_F 和 Deg_F 均无界，且为超平面的并集 $\{z_i = 0\}$。在这种情况下，假设极小化子先验有界，是推导其 Lipschitz 正则性的关键。有关这类被积函数的更多细节，请参阅 [9] 及其中的相关文献。

1.5. 论文结构。在第 2 节中，我们汇总证明所需的拟一致凸函数的性质。第 3 节致力于进一步完善应力场 $V = DF(Du)$ 的 Sobolev 正则性，该正则性最初在 [23]中得到。第4 节中，我们构造一列逼近椭圆问题及其相应解，从而将定理 1.1 的证明归结到光滑情形。第 5 节中，我们证明 Caccioppoli 不等式（1.18）；第 6 节中，我们推导由（1.19）定义的 1-齐次函数族的若干性质。最后，第 7 节专门证明定理 1.1。

致谢。感谢 L. Kovalev 教授对本文初稿所作的改进。作者是 INdAM 下属 GNAMPA 的成员。G. M. 感谢 DFG 通过项目编号为 496629752、资助号为 GZ: MA 10100/1-1 的项目提供支持。S. M. 获得了卡塔尼亚大学 PIACERI linea 2 和 linea 3 项目以及 GNAMPA 项目“含奇异项的椭圆型或抛物型偏微分方程”和“含奇异反应项和对流项的椭圆与抛物问题”的部分资助。

记号。全文中我们限定于 $N \geq 2$ 的情形。用 $|v|$ 表示向量 $v \in \mathbb{R}^N$的欧几里得范数，而 (v, w) 表示任意 v、 $w \in \mathbb{R}^N$的标量积。给定一个向量场，上标和下标分别表示其分量及其导数。对于重复出现的指标进行求和。符号 Ω 表示 $\mathbb{R}^N$的一个有界开子集，而 $B_r(x_0)$ 表示以 $x_0 \in \mathbb{R}^N$ 为球心、 $r > 0$为半径的球； B_r 表示半径为 r的球，其球心不一定位于原点。对于任意可测的 $E \subset \mathbb{R}^N$，$|E|$ 表示其 N维勒贝格测度。当积分域为整个 $\mathbb{R}^N$且不会引起混淆时，我们将省略积分域。此外，为了记号简洁起见，我们令 $\|f\|_m := \|f\|_{L^m(\mathbb{R}^N)}$。

设 $M = (m_{ij})$ 为一个具有实数元素的 $N \times N$矩阵，并令 M^t 表示其转置。我们考虑由标量积

$$|M|_2 = \left(\sum_{ij=1}^{N} |m_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

$(M_1, M_2)_2 = \mathrm{Tr}(M_1\, M_2^t)$ 所导出的 Frobenius 范数。我们还用 Id 表示单位矩阵。最后，对于任意矩阵 M， $\sigma_{\max}(M)$ 和 $\sigma_{\min}(M)$ 分别表示其最大和最小奇异值（即 $M\, M^t$ 的特征值的平方根）。若 M 是对称半正定矩阵，我们将采用记号 $\lambda_{\max}(M)$ 和 $\lambda_{\min}(M)$，因为此时特征值与奇异值相同。

2. 准一致凸被积函数

定义 2.1. 若映射 $\Phi\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ 是 K-拟共形的，则它是一个 $W^{1,\,1\,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N;\, \mathbb{R}^N)$ 同胚，几乎处处可微，并满足不等式

$$\frac{1}{K}\, \sigma_{\max}(D\Phi)^N \leq |J\, \Phi| \leq K\, \sigma_{\min}(D\Phi)^N$$

在 $\mathbb{R}^N$ 中几乎处处成立。

令 $\overline{\mathbb{R}}^N$ 表示 $\mathbb{R}^N$的一点紧化。根据 [38, 定理 17，3] 任意拟共形映射 $\Phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ 都可以通过令$\Phi(\infty) = \infty$延拓为 $\overline{\mathbb{R}}^N$ 上的一个同胚，同时保持其（几何）拟共形常数 K 不变。此外， $\Phi \in W^{1,\,N\text{局部}}(\mathbb{R}^N)$且为拟对称的，即存在一个递增同胚 $\eta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 以及常数 $C > 0$，使得

$$\frac{|\Phi(z) - \Phi(z_0)|}{|\Phi(w) - \Phi(z_0)|} \leq C\, \eta\left(\frac{|z - z_0|}{|w - z_0|} \right) \tag{2.1}$$

对所有 $z_0 \in \mathbb{R}^N$ 和 z, $w \in \mathbb{R}^N \setminus \{z_0\}$均成立。对于 $\alpha > 0$ 和 $t \geq 0$, 令

$$\eta_\alpha(t) = \max\{t^\alpha, t^{1/\alpha}\}. \tag{2.2}$$

根据 [1, 定理 3.18 和 5, 1], 任意 K-拟共形映射 Φ 满足（2.1）, 其中

$$C = C(K), \qquad \eta = \eta_{K^{1/(N-1)}}.$$

Φ 的最大线性畸变定义为以下有限数

$$H = \operatorname*{ess\,sup}_{z \in \mathbb{R}^N} \frac{\sigma_{\max}(D\Phi(z))}{\sigma_{\min}(D\Phi(z))}.$$

初等线性代数表明，这样的拟共形 Φ 实际上是 H^{N-1}-拟共形的，因此满足畸变估计

$$\frac{|\Phi(z) - \Phi(z_0)|}{|\Phi(w) - \Phi(z_0)|} \leq C\, \eta_H\left(\frac{|z - z_0|}{|w - z_0|}\right) \tag{2.3}$$

对所有 $z_0 \in \mathbb{R}^N$ 以及所有 z, $w \in \mathbb{R}^N \setminus \{z_0\}$。注意，常数 C 实际上还取决于N 。最后，回顾一下，如果 Φ 是拟共形的，那么 Φ^{-1} 也是拟共形的，并且 Φ 和 Φ^{-1} 的最大线性畸变相同。因此（2.3）对 Φ^{-1} 也成立。

定义 2.2. 若映射 $\Phi\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$对于某些 $\delta \in]0, 1]$ 是 δ-单调的，则

$$(\Phi(z) - \Phi(w), z - w) \geq \delta\, |\Phi(z) - \Phi(w)|\, |z - w|.$$

Kovalev 定理 [29] 表明，任何非恒定的 δ-单调映射都是拟共形的。特别地，它是一个同胚，而且根据定义，其反函数也是 δ-单调的。Kovalev 定理的一个定量版本已在 [3, 定理 1] 中得到证明。该定理指出，任何 δ-单调映射的最大线性畸变满足

$$H \leq \frac{1 + \sqrt{1 - \delta^2}}{1 - \sqrt{1 - \delta^2}}$$

并且这个界是尖锐的，即对于 δ-单调线性映射 $v \mapsto A\, v$, 等号成立，其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{1 - \delta^2} & 0 \\ 0 & 1 - \sqrt{1 - \delta^2} \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

反向蕴含一般并不成立。为说明这一点，考虑线性映射 $v \mapsto B\, v$, 其中 B 由下式给出

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

该映射是拟共形的，且 $H = 3$, 但甚至不是单调的。然而，在梯度映射这一类中，这两个概念完全等价（甚至在定量意义上也是如此）。

定义 2.3. 若可微函数 $F\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ 是凸的，且其梯度映射是拟共形的，最大线性畸变不超过 H, 则称其为 H-拟一致凸（简称H-拟一致凸）。

更明确地说（并利用 Aleksandrov 定理）, F是 H-拟一致凸的，当且仅当

(i) F是凸的, C^1 和 $W^{2,\,1\,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, 且不是仿射的；(ii) 满足

$$\lambda_{\max}(D^2 F(z)) \leq H\, \lambda_{\min}(D^2 F(z)) \tag{2.5}$$

在几乎处处的点 z 二阶可微。

根据 [30, 定理 3.1 和引理 3。2], 任何拟一致凸函数都是严格凸且强制的，因此它有唯一的最小点。由于给定两个对称矩阵 M_1， M_2，有

$$\lambda_{\min}(M_1+M_2) \geq \lambda_{\min}(M_1)+\lambda_{\min}(M_2), \qquad \lambda_{\max}(M_1+M_2) \leq \lambda_{\max}(M_1)+\lambda_{\max}(M_2), \tag{2.6}$$

H-拟一致凸函数集是一个凸锥，即对加法和正数倍运算封闭。此外，它在等距变量变换和膨胀下也封闭。最后，将一个仿射函数加到 H-拟一致凸函数上，所得函数仍是 H-拟一致凸函数。因此，我们将经常通过要求满足以下条件来对拟一致凸被积函数进行归一化:

$$F(z) \geq F(0) = 0 \tag{2.7}$$

并且 $i_F = 1$，其中

$$i_F := \inf_{|z|=1} |DF(z)|, \tag{2.8}$$

只需考虑

$$\tilde{F}(z) = \frac{1}{i_F}\left(F(z+\bar{z}) - F(\bar{z})\right), \qquad \text{where Argmin}\,(F) = \{\bar{z}\}. \tag{2.9}$$

例 2.4. 上一节已经讨论过拟一致凸被积函数的一些例子。这里，给定两个点 $z_1 \neq z_2$ 属于 $\mathbb{R}^N$，我们构造一个拟一致凸函数 F 使得奇异$_F = \{z_1\}$ 且 退化$_F = \{z_2\}$，后面这些集合如 (1.5)所示。

不失一般性，假设 $z_1 = 0$ 和 $z_2 = w$，其中 $w \in \mathbb{R}^N$固定，并令 $r = |w|$。对于 $p > 2 > q > 1$，取

$$d(z) = \frac{|z|^p}{p}, \qquad s(z) = \frac{|z-w|^q}{q},$$

从而直接计算可得（参见 *[23, 例 3。6]*）

$$\lambda_{\min}(D^2 d(z)) = |z|^{p-2}, \qquad \lambda_{\max}(D^2 d(z)) = (p-1)\,|z|^{p-2}, \tag{2.10}$$

$$\lambda_{\min}(D^2 s(z)) = (q-1)\,|z|^{q-2}, \qquad \lambda_{\max}(D^2 s(z)) = |z|^{q-2}. \tag{2.11}$$

选择 $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{w\})$ 使得

$$\varphi(z) = \begin{cases} s(z) & \text{if } |z-w| \leq r/4 \\ 1 & \text{if } |z-w| \geq r/2 \end{cases}$$

并考虑以下（正且有限的）数

$$\alpha = \inf\left\{\lambda_{\min}(D^2 d(z)) : |z| \geq r/2\right\}, \qquad \beta = \sup\left\{|D^2\varphi(z)|_2 : |z-w| \geq r/4\right\},$$

$$\gamma = \sup\left\{\lambda_{\max}(D^2 d(z)) : |z-w| \leq r/4\right\}, \qquad \delta = \inf\left\{\lambda_{\min}(D^2 s(z)) : |z-w| \geq r/4\right\}.$$

对于任意 $\varepsilon > 0$，函数 $F(z) = d(z) + \varepsilon\varphi(z)$ 属于 $C^1(\mathbb{R}^N) \cap W^2,_{N\text{局部}}(\mathbb{R}^N)$，并且 $F \in C^2(\mathbb{R}^N \setminus \{w\})$，因此 $\text{Sing}_F \subseteq \{w\}$。

对于 $z \in B_{r/2}(0)$，我们有

$$\lambda_{\min}(D^2 F(z)) = \lambda_{\min}(D^2 d(z)), \qquad \lambda_{\max}(D^2(F(z)) = \lambda_{\max}(D^2 d(z)),$$

这由(2.10) 可知

$$\frac{\lambda_{\max}(D^2 F(z))}{\lambda_{\min}(D^2 F(z))} \leq p-1 \qquad \text{in } B_{r/2}(0)$$

并且 $\lambda_{\min}(D^2 F(z)) \to 0$ 对于 $z \to 0$。由 (2.6) 可推知，对所有 $z \in B_{r/4}(w)$

$$\lambda_{\min}(D^2 F(z)) \geq \alpha + \varepsilon\,\lambda_{\min}(D^2 s(z)), \qquad \lambda_{\max}(D^2 F(z)) \leq \gamma + \varepsilon\,\lambda_{\max}(D^2 s(z)),$$

因此，由 (2.11) 可得

$$\frac{\lambda_{\max}(D^2F(z))}{\lambda_{\min}(D^2F(z))} \le \max\left\{\frac{\gamma}{\alpha}, \frac{1}{q-1}\right\} \qquad in\ B_{r/4}(w)$$

并且 $\lambda_{\min}(D^2F(z)) \to \infty$ 对 $z \to w$成立。最后，对于 $z \notin B_{r/2}(0) \cup B_{r/4}(w)$，我们有

$$\lambda_{\min}(D^2F(z)) \ge \lambda_{\min}(D^2d(z)) - \varepsilon\,\beta, \qquad \lambda_{\max}(D^2F(z)) \le \lambda_{\max}(D^2d(z)) + \varepsilon\,\beta,$$

从而对于 $\varepsilon\,\beta < \alpha/2$ 有 $\lambda_{\min}(D^2F(z)) \ge \alpha/2$，而 (2.10) 给出

$$\frac{\lambda_{\max}(D^2F(z))}{\lambda_{\min}(D^2F(z))} \le 3\,(p-1) \qquad in\ \mathbb{R}^N \setminus \big(B_{r/2}(0) \cup B_{r/4}(w)\big).$$

总而言之，对于 $\varepsilon < \alpha/(2\,\beta)$，$F$是拟一致凸的，且 $\mathrm{Sing}_F = \{w\}$，$\mathrm{Deg}_F = \{0\}$。

拟一致凸函数的许多性质已在 [29, 30], 中得到研究，更多细节和刻画可参见该文。这里我们汇总证明主要结果所需的性质。我们首先给出 Kovalev 定理的一个逆命题，以定量形式将 δ-单调性与拟共形性联系起来。

引理 2.5. 设 $F\colon\ \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ 可微且非仿射。则，F是 H-拟一致凸的，当且仅当 DF 是 δ-单调的，其中

$$\delta = \frac{2\sqrt{H}}{H+1}, \qquad or \qquad H = \frac{1+\sqrt{1-\delta^2}}{1-\sqrt{1-\delta^2}},$$

且这些界是锐的。

证明。此前已证明，如前所述，若 DF 是 δ-单调的且非常数，则 F 是 H-拟一致凸。为证明反向蕴含，设 F 是 H-拟一致凸，因此 DF 是拟共形的。根据 [29, 第 3], 节， DF 的 δ-单调性等价于

$$\big(D^2F(z)\,v, v\big) \ge \delta\,|D^2F(z)\,v|\,|v| \tag{2.12}$$

在二阶可微性的几乎处处的点上，其中（2.5）成立。注意，由 Alexandrov 定理（见 D^2F 推论 [35, 2.9]），我们可以假设它是对称的；又由于 DF的拟共形性，它还是严格正定的。由于（2.12）在正交变量变换下不变，我们可以假设 D^2F 是一个对角矩阵，其特征值 $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_N$为正 $v =$（v_1，……，v_N），因此只需求出

$$I := \inf_{v \ne 0} \frac{\sum_i \lambda_i\, v_i^2}{\left(\sum_i \lambda_i^2\, v_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_i v_i^2\right)^{1/2}}.$$

为了确定后者，我们使用 Cassels 不等式（见[40, 附录]），其表述如下：

$$\frac{\sum_i w_i\, a_i^2 \sum_i w_i\, b_i^2}{\left(\sum_i w_i\, a_i\, b_i\right)^2} \le \frac{(M+m)^2}{4\,M\,m}$$

对于任意选取的 $w_i \ge 0$（它们不全恒等于零）以及满足条件的 $a_i, b_i > 0$ t

$$0 < m < a_i/b_i < M.$$

事实上，只需选取 $b_i = 1$、$a_i = \lambda_i$ 和 $w_i = v_i^2$，即可得到

$$I \ge \frac{2\sqrt{\lambda_1\,\lambda_N}}{\lambda_1 + \lambda_N}$$

实际上，对于该向量，等式成立

$$\left(\sqrt{\frac{\lambda_N}{\lambda_1+\lambda_N}},0,\dots,0,\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_N}}\right).$$

由于根据假设 $\lambda_N \le H\,\lambda_1$，且映射 $t\mapsto 2\sqrt{t}/(t+1)$ 是递减的，我们推得

$$I \ge \frac{2\sqrt{\lambda_1\,\lambda_N}}{\lambda_1+\lambda_N} = \frac{2\sqrt{\lambda_N/\lambda_1}}{\lambda_N/\lambda_1+1} \ge \frac{2\sqrt{H}}{H+1}$$

从而（2.12）对 $\delta = 2\sqrt{H}/(H+1)$ 成立，如所述。通过选取 $F(z) = (A\,z,\ z)$，其中 A 由（2.4）给出（此处用到 A 具有对称性的事实），即可证明该估计的最优性。□

为便于后续参考，我们将前述讨论及拟一致凸函数 H-q. u. c. 的其他一些有用性质归纳如下命题。

Pr命题 2.6. 设 $F\colon \mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ 是一个 H-q.u. c. 函数。以下结论成立：

(1) F 是严格凸、强制且 $W^{2,\,N\text{局部}}(\mathbb{R}^N)$。**(2)** DF 和 DF^{-1} 均为 η_H-拟对称且 $2\sqrt{H}/(H+1)$-单调。**(3)** 存在 $C=C(H,N)>0$，使得若 $F(\bar z)=\min_{\mathbb{R}^N}F$，则

$$|DF(z)-DF(\bar z)|\,|z-\bar z| \le C\,|F(z)-F(\bar z)| \tag{2.13}$$

$$\frac{F(w)-F(\bar z)}{F(z)-F(\bar z)} \le C\,\frac{|w-\bar z|}{|z-\bar z|}\,\eta_H\left(\frac{|w-\bar z|}{|z-\bar z|}\right) \tag{2.14}$$

对所有 z、$w\in\mathbb{R}^N\setminus\{\bar z\}$。

(4) 对任意 $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N;\ [0,+\infty)$，函数 $F*\varphi(z)+\mu\,|z|^2$ 是 H-拟一致凸。此外，若 $\|\varphi\|_1=1$，对于满足 $\varepsilon_n\downarrow 0$、$\mu_n\downarrow 0$ 的所有序列 (ε_n)、(μ_n)，序列

$$F_n(z) = F*\varphi_{\varepsilon_n}(z)+\frac{\mu_n}{2}\,|z|^2, \qquad with\ \varphi_{\varepsilon_n}(z)=\frac{1}{\varepsilon_n^N}\,\varphi\left(\frac{z}{\varepsilon_n}\right), \tag{2.15}$$

满足 $F_n\to F$属于 $C^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^N)$，且 $DF_n^{-1}\to DF^{-1}$属于 $C^0_{\rm loc}(\mathbb{R}^N)$。

(5) 对任意 $\delta>0$，F的 Moreau-Yoshida 正则化 F_δ 定义为

$$F_\delta(z)=\inf_{w\in\mathbb{R}^N}\left\{F(w)+\frac{1}{2\,\delta}|w-z|^2\right\},$$

是 H-拟一致凸的，并且成立 $\lambda_{\max}(D^2F_\delta(z))\le 1/\delta$。

证明。 前两条性质已经讨论过，因此我们着重证明*(3)*。我们将利用 δ的单调性和 DF的拟对称性来证明这一点。为此注意到，通过考虑 $F(z+\bar z)-F(\bar z)$，可以假设 $\bar z=0$ 且 $F(z)\ge F(0)=0$。为证明（2.13），我们首先注意到 δ的单调性 DF 给出

$$F(z)=\int_0^1 (DF(t\,z),z)\,dt \ge \delta\,|z|\int_{1/2}^1 |DF(t\,z)|\,dt. \tag{2.16}$$

另一方面，不等式（2.3）应用于 DF 且 $z_0=0$（并且由于 $DF(0)=0$也成立）可得

$$\frac{|DF(z)|}{|DF(t\,z)|} \le C\,\eta_H(1/t) \le C\,2^H \qquad \forall\, t\ge 1/2,$$

从而（2.16）可估计为

$$F(z)\ge \frac{\delta}{C\,2^{H+1}}\,|DF(z)|\,|z|.$$

不等式（2.14）的证明类似。它成立

$$F(w) \le \int_0^1 |DF(t\,w)|\,|w|\,dt \le |w|\,\sup\{|DF(x)| : |x| \le |w|\}$$

将其与（2.13）结合可得

$$\frac{F(w)}{F(z)} \le C\,\frac{|w|}{|z|}\,\sup\left\{\frac{|DF(x)|}{|DF(z)|} : |x| \le |w|\right\}.$$

由的拟对称性（2.3），我们得到 DF

$$\frac{|DF(x)|}{|DF(z)|} \le C\,\eta_H\left(\frac{|x|}{|z|}\right) \le C\,\eta_H\left(\frac{|w|}{|z|}\right)$$

当 $|x| \le |w|$时，因此（2.14）成立。

断言*(4)* 的第一部分已在 [23, 命题 2 中证明。3], 而 $C^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N$收敛到 F_n 是显然的。由于 F 是同胚，并且局部一致收敛到 DF_n，根据 Arens定理（见 DF），DF^{-1} 也同样如此。最后，第（5）部分已在[17]命题 2.3-(iv) 中证明，其中还特别指出，若[23, Id], ，则对几乎处处的 $P_\delta = \big($成立 $+\,\delta\,DF^{-1}\big)^{-1} z \in \mathbb{R}^N$

$$\lambda_{\min}(D^2F_\delta(z)) = \frac{\lambda_{\min}\big(D^2F(P_\delta(z))\big)}{1+\delta\,\lambda_{\min}\big(D^2F(P_\delta(z))\big)},$$
$$\lambda_{\max}(D^2F_\delta(z)) = \frac{\lambda_{\max}\big(D^2F(P_\delta(z))\big)}{1+\delta\,\lambda_{\max}\big(D^2F(P_\delta(z))\big)}.$$

由于

$$\sup_{t\ge 0}\frac{t}{1+\delta\,t} = \frac{1}{\delta},$$

所声称的界由此得出。 □

回想　对光滑强椭圆型被积函数，我们指满足以下条件的 $F \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$:

$$\lambda_{\min}(D^2F(z)) \ge \lambda, \qquad \lambda_{\max}(D^2F(z)) \le \Lambda$$

对某个 $0 < \lambda \le \Lambda < \infty$ 成立。显然，强椭圆被积函数是 H-拟一致凸的，且满足 $H = \Lambda/\lambda$。

推论 2.7。设 $H \ge 1$。锥

$$\mathrm{C}_H = \{F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}\ \ s.\,t.\,F\ \ is\ H\text{-}q.\,u.\,c.\ or\ \ affine\}$$

关于逐点几乎处处收敛是闭的，且其中的 C_H 光滑强椭圆被积函数稠密。此外，$(F_n)_n$ 在 C_H 中逐点几乎处处收敛，意味着 $(F_n)_n$ 强收敛于 $C^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$，且 $(\det\ D^2F_n)_n$ 强收敛于 $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$。

证明。由 [30, 引理 2.5] 可知，q.u.c.函数的逐点极限要么是拟一致凸的，要么是仿射的；并且逐点几乎处处收敛蕴含 $C^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$收敛。因此，只需证明

$$F \mapsto \operatorname*{ess\,sup}_{z\in\mathbb{R}^N}\frac{\lambda_{\max}(D^2F(z))}{\lambda_{\min}(D^2F(z))}$$

关于 $C^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ 收敛，在 q.u.c.函数构成的锥上是下半连续的。设 $F_n \in \mathrm{C}_H$ 满足 $F_n \to F$ 属于 $C^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$，且其中没有任何一个是 F_n 仿射函数。根据引理2.5，DF_n 是 $2\sqrt{H}/(H+1)$-单调的，因此，将 δ-单调性的定义取极限可知，DF也如此。再次根据引理 2.5，这意味着 F是 H-拟一致凸的，从而得到所述下半连续性。

为证明稠密性结论，设 F是某个 H 的 H-拟一致凸函数。对于 δ_n、ε_n、$\mu_n \downarrow 0$，这些函数

$$F_n(z) = F_{\delta_n} * \varphi_{\varepsilon_n}(z) + \frac{\mu_n}{2}|z|^2$$

（此处 F_{δ_n} 表示通过命题 F 构造的 Moreau-Yoshida 正则化）2.6、点 *(4)* 和 *(5)*，是 H-拟一致凸被积函数，并逐点逼近 F。结合 (2.6) 以及卷积的基本性质和命题 2.6-*(5)*，可得

$$\lambda_{\max}(D^2F_n(z)) \le \frac{1}{\delta_n} + \mu_n, \qquad \lambda_{\min}(D^2F_n(z)) \ge \mu_n$$

对所有 $z \in \mathbb{R}^N$，因此 F_n 是强椭圆被积函数。

如果 F是形如 $F(z) = (w, z) + c$的仿射函数，其中 $w \in \mathbb{R}^N$和 $c \in \mathbb{R}$固定，我们可以考虑 $G(z) = |z|^2/2$ 并令

$$F_n(z) = n\big(G(w + z/n) - G(w)\big) + c, \qquad DF_n(z) = DG(w + z/n), \qquad D^2F_n = \frac{\mathrm{Id}}{n}.$$

显然 $F_n \to \ell$在 $C^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ 中且该 F_n是 1-拟一致凸且强椭圆的。关于 L^1-收敛的行列式这一最后陈述的性质包含在 [30, 引理 2。5]。 □

实际上（再参见 [30, 引理 2.5]），前一个推论中的逐点收敛可以弱化为仅要求在 $\mathbb{R}^N$ 的稠密子集上成立。

注 2.8。前一个推论（如其证明中所述）意味着单调拟共形梯度映射的最大线性畸变具有下半连续性。在更大的拟共形映射类中，最大线性畸变的下半连续性对于 $N = 2$ 成立，但对于 $N \ge 3$ 失败，这是由于 Iwaniec 的一个著名反例 *[26]*。

我们通过引入函数 η_H （见2.2）的一个推广来结束本节，该推广将在后续许多计算中出现。给定 a， $b > 0$，辅助函数

$$\eta_{a,b}(t) = \max\{t^a, t^b\}, \qquad t \ge 0,$$

是从 $\mathbb{R}_+$ 到其自身的递增同胚，并且有 $\eta_H = \eta_{H,\ 1/H}$。由于

$$\max\{t^a, t^b\} = s \quad \Longleftrightarrow \quad t = \min\{s^{1/a}, s^{1/b}\}, \qquad \forall\, a, b, t, s > 0,$$

我们看到

$$\eta^{-1}_{a,b}(t) = \min\{t^{1/a}, t^{1/b}\}. \tag{2.17}$$

我们在以下命题中汇总函数 $\eta_{a,\ b}$ 及其反函数的一些初等性质。

命题 2.9. 设 $a, b > 0$. 则，

(1) 对所有 $s, t \ge 0$

$$\eta_{a,b}(s\,t) \le \eta_{a,b}(s)\,\eta_{a,b}(t) \quad \textit{as well as} \quad \eta^{-1}_{a,b}(s\,t) \ge \eta^{-1}_{a,b}(s)\,\eta^{-1}_{a,b}(t) \tag{2.18}$$

(2) 对所有 $t > 0$

$$\eta^{-1}_{a,b}(t)\,\eta_{1/a,1/b}(1/t) = 1. \tag{2.19}$$

(3) 对所有 $t > 0$ 和 $\sigma > 0$，成立

$$\frac{1}{C}\,\eta_{a,b}(t) \le \eta_{a,b}(\sigma\,t) \le C\,\eta_{a,b}(t), \tag{2.20}$$

对于正常数 $C = C(a, b, \sigma)$。同样的估计对于 $\eta^{-1}_{a\,b}$，也成立。

(4) 对于 $a > b > 0$ 和 $c > d > 0$

$$\eta_{a,b} \circ \eta_{c,d} = \eta_{ac,bd} \tag{2.21}$$

反函数也满足相同的公式。

这些结论的证明很简单，因此省略。

3. Local minimisers and Sobolev regularity of their stress field

定义 3.1. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 为开集。对于所有 $\mathcal{O} \Subset \Omega$，考虑如下泛函$J\colon W^{1,1}(\mathcal{O}) \to \mathbb{R}$ 给出：

$$J(w, \mathcal{O}) = \int_{\mathcal{O}} F(Dw)\, dx. \tag{3.1}$$

若函数 $u \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 满足 $F(Du) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$，且对任意开集 $\mathcal{O} \Subset \Omega$ 均成立，则称其为 Ω 上的 J局部极小化子。

$$J(u, \mathcal{O}) = \inf \left\{ J(w, \mathcal{O}) : w \in u + W^{1,1}_0(\mathcal{O}) \right\}.$$

若 F 是 C^1、严格凸且强制的，令 $\{\bar z\} =$ 为 F 的极小值点集。容易验证，˜任意局部极小化子 u 都定义了泛函 J˜ 的一个局部极小化子 $\tilde u(x) = u(x) - (\bar z, x)$，其中该泛函如（3.1）所定义，但 $F(z)$ 按（2.9）定义。特别地，我们可以假设（2.7）成立，即 $\bar z = 0$。若 F 是拟一致凸的（以下均作此假设），对 $\bar z = 0$ 使用（2.14）可得

$$F(z) \geq \frac{1}{C} F(w)\, |z|\, \eta_H^{-1}(|z|) \qquad \forall\, |w| = 1,$$

因此，对所有 $|z| > 1$，都有

$$F(z) \geq \frac{1}{C} \sup_{|w|=1} F(w)\, |z|^{1+\frac{1}{H}}. \tag{3.2}$$

特别地，Ω 中 J 的任意局部极小化子都属于 $W^{1,1+\frac{1}{H}}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$。

更确切地说，尽管拟一致凸的被积函数本身具有各向异性，但它们及其导数都具有各向同性增长控制，因此可以在标准奥利茨-索博列夫空间中处理 J 的极小化问题。事实上，在将 F 归一化，使（2.7）成立后，对于 $t \geq 0$

$$a(t) = \sup_{|z| \leq t} |DF(z)|, \qquad A(t) = \int_0^t a(\tau)\, d\tau.$$

注意到，a 在 $[0, \infty[$ 上连续，且在 $t > 0$上为正。给定 $0 \leq t_1 < t_2$，由于 DF 是 $\mathbb{R}^N$的同胚，$DF(B_{t_2})$是闭集 $DF(\overline{B_{t_1}})$的一个开邻域，因此$a(t_2) > a(t_1)$，即 a 严格递增。利用 DF的拟对称性，在（2.3）中取 $z_0 = 0$ 和$|w| = t$，可得对任意 $z \in \mathbb{R}^N$，均有

$$|DF(z)| \leq C\, a(t)\, \eta_H(|z|/t),$$

从而对任意 $k \geq 0$、$t \geq 0$，由 η_H 的单调性可得

$$a(k\, t) \leq C\, \eta_H(k)\, a(t). \tag{3.3}$$

因此，A 是一个杨函数，即它是凸的、递增的，并满足

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{A(t)}{t} = 0, \qquad \lim_{t \to \infty} \frac{A(t)}{t} = \infty,$$

其中第二个等号由 (3.3) 对 $k = 1/t$ 成立，并利用 $\eta_H(1/t)^{-1} = t^{1/H}$ 对 $t \geq 1$成立。容易验证， a 的反函数为

$$a^{-1}(s) = \inf_{|z|\geq s} |DF^{-1}(z)|$$

其满足与（3.3）类似的估计。因此， A 满足 Δ_2 条件

$$A(2\,t) \leq C\,A(t) \qquad \forall\, t \geq 0$$

对于 $C = C(H, N)$，其 Young 共轭函数的定义也同样成立，即

$$A^*(s) = \sup_{t\geq 0} (s\,t - A(t)) = \int_0^s a^{-1}(\sigma)\,d\sigma$$

（参见 [4,式（16.94）—（16.95）]的证明）。

显然

$$F(z) = \int_0^{|z|} (DF(s\,z/|z|), z/|z|)\,ds \leq \int_0^{|z|} a(s)\,ds = A(|z|)$$

而 δ-单调性和 DF 的拟对称性给出

$$F(z) \geq \delta \int_0^{|z|} |DF(s\,z/|z|)|\,ds \geq \frac{\delta}{C} \int_0^{|z|} a(s)\,ds,$$

从而

$$\frac{1}{C}\,A(|z|) \leq F(z) \leq C\,A(|z|). \tag{3.4}$$

映射 DF 具有类似的各向同性界，即

$$\frac{1}{C}\,a(|z|) \leq |DF(z)| \leq a(|z|),$$

其中，第一个不等式与之前一样由（2.3）推出，此外还可以证明

$$\frac{1}{C}\,A(|z|) \leq A^*(DF(z)) \leq C\,A(|z|) \tag{3.5}$$

（见 [4,式（16.106）]的证明）。

给定一个开集 $\mathcal{O} \Subset \Omega$，由（3.4）可得

$$J(u, \mathcal{O}) < \infty \quad \text{if and only if} \quad A(|Du|) \in L^1(\mathcal{O}).$$

利用 $\mathcal{O}$ 具有有限测度且 A 满足 Δ_2 条件这一事实，$A(|Du|)$ 的可和性等价地表述为

$$u \in W^{1,A}(\mathcal{O}) := \left\{ v \in W^{1,1}(\mathcal{O}) : A(|v|), A(|Dv|) \in L^1(\mathcal{O}) \right\},$$

配备卢森堡范数

$$\|v\|_{L^A(\mathcal{O})} + \||Dv|\|_{L^A(\mathcal{O})}, \qquad \|g\|_{L^A(\mathcal{O})} = \inf \left\{ s > 0 : \int_{\mathcal{O}} A(|g|/s)\,dx \leq 1 \right\}.$$

由于 A 上的 Δ_2 条件，如此定义的所谓奥利茨-索博列夫空间 $W^{1,A}(\mathcal{O})$ 实际上是一个巴拿赫空间。因此，对于有界的 Ω，给定边界数据 $\varphi \in W^{1,A}(\Omega)$，通过在 $u + W^{1,A}_0(\Omega)$ 上极小化 J，即可保证局部极小化子的存在；后一个空间是由那些 $v \in W^{1,A}(\Omega)$ 构成的闭向量空间，它们在 Ω 外的零延拓属于 $W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$。事实上，由于 A 和 A^* 均满足 Δ_2 条件，巴拿赫空间 $W^{1,A}_0(\Omega)$ 根据 [19, p. 54]，具有自反性，而 J 根据 (3.4) 是凸且强制的。反过来，Ω 上的局部极小化子 u 对任意 $\mathcal{O} \Subset \Omega$ 都是在 $u + W^{1,A}_0(\mathcal{O})$ 上极小化 $J(\cdot, \mathcal{O})$ 的极小化子

因此，标准方法（参见 [16, 定理 2。1]）确保欧拉-拉格朗日方程成立

$$\int_{\mathcal{O}} (DF(Du), Dw)\, dx = 0 \qquad \forall\, w \in W_0^{1,A}(\mathcal{O}). \tag{3.6}$$

注意，对于任意 $u \in W^{1,A}(\mathcal{O})$，(3.5)中的不等式意味着 $|DF(Du)| \in L^{A^*}(\mathcal{O})$（因此 更不用说 $|DF(Du)| \in L^1(\mathcal{O})$），故奥利奇空间中的 Hölder 不等式保证

$$W_0^{1,A}(\mathcal{O}) \ni w \mapsto \int_{\mathcal{O}} (DF(Du), Dw)\, dx$$

是一个定义良好的连续线性泛函。因此，若在 $\mathcal{O} \Subset \Omega$ 上，函数 $u \in W^{1,A}(\mathcal{O})$ 满足

$$\operatorname{div}(DF(Du)) = 0$$

若在分布意义下成立，则在弱意义下也成立（3.6），这得益于 $C_0^\infty(\mathcal{O})$ 在 $W_0^{1,A}(\mathcal{O})$ 中的稠密性，该稠密性由[19, 定理 21] 保证。（这里，仅 Δ_2 关于 A 的条件就足够了。）

我们将前面的讨论总结为以下命题。

命题 3.2。 设 $N \geq 2$ 和 F是拟凸被积函数。函数 $u \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 是 J 在(3.1) 中的局部极小化子，当且仅当 $F(Du) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 且

$$\operatorname{div}(DF(Du)) = 0$$

在分布意义下。

下一个命题实质上包含在 [23, 定理 33], 中，但我们需要其当前形式所给出的更明确的估计。它围绕着 应力场的 Sobolev 正则性展开。

$$V(x) = DF(Du(x)). \tag{3.7}$$

命题 3.3。 设 F是一个 H-拟一致凸函数，满足 (2.7)，并设 i_F如 (2.8) 所示。设u是 J的局部极小化子，并令 V由 (3.7) 给出。那么， $V \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$，且满足以下估计

$$\left(\fint_{B_R} |DV|_2^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C}{R}\, i_F\, \eta_{\frac{H}{H+1},\frac{1}{H+1}} \left(\frac{1}{i_F} \fint_{B_{2R}} F(Du)\, dx\right), \tag{3.8a}$$

$$\left(\fint_{B_R} |V|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\, i_F\, \eta_{\frac{H}{H+1},\frac{1}{H+1}} \left(\frac{1}{i_F} \fint_{B_{2R}} F(Du)\, dx\right), \tag{3.8b}$$

对于正常数 $C = C(N, H)$，以及所有满足 $B_{2R} \subseteq \Omega$ 的球 B_R。

证明。 由 [23,定理 3.3，(3.10)] 可知

$$\|V\|_{W^{1,2}(B_R)} \leq C \|V\|_{L^1(B_{2R})}$$

其中常数为 $C = C(N, H, R)$。更准确地，令

$$m_r = \fint_{B_r} |V|\, dx, \tag{3.9}$$

成立（参见 [23, 定理 3 的证明。2] 或下文的推论 5.3 ）

$$\|DV\|_{L^2(B_R)} \leq C(N, H)\, R^{\frac{N}{2}-1}\, m_{2R} \tag{3.10}$$

对于常数 C，该常数今后仅依赖于 H 和 N。另一方面，根据 Poincar´e 不等式以及上述估计，我们有

$$\begin{aligned}\|V\|_{L^2(B_R)} &\le \|V-m_R\|_{L^2(B_R)} + (\omega_N R^N)^{\frac12} m_R\\ &\le C\,R\,\|DV\|_{L^2(B_R)} + C\,R^{\frac N2}\,m_{2R}\\ &\le C\,R^{\frac N2}\,m_{2R}.\end{aligned} \tag{3.11}$$

我们断言

$$m_{2R} \le C\,i_F\,\eta_{\frac{H}{H+1},\frac{1}{H+1}}\left(\frac{1}{i_F}\fint_{B_{2R}} F(Du)\,dx\right) \tag{3.12}$$

存在常数 $C=C(N,H)$。为此，对于任意 $t>0$，我们如下进行 s

$$\begin{aligned}\int_{B_{2R}} |DF(Du)|\,dx &= \int_{\{|Du|\le t\}\cap B_{2R}} |DF(Du)|\,dx + \int_{\{|Du|>t\}\cap B_{2R}} |DF(Du)|\,dx\\ &\le C\sup_{|z|\le t}|DF(z)|\,R^N + \frac1t\int_{B_{2R}} |DF(Du)|\,|Du|\,dx.\end{aligned} \tag{3.13}$$

右侧上方的第一项利用 DF（2.1）的拟对称性估计为

$$|DF(z)| \le C\inf_{|w|=1}|DF(w)|\,\eta_H(|z|),$$

对于第二项，我们使用（2.13）。因此（3.13）化为

$$\int_{B_{2R}} |DF(Du)|\,dx \le C\,R^N\,i_F\left(\eta_H(t) + \frac1t\fint_{B_{2R}}\frac{F(Du)}{i_F}\,dx\right).$$

取 t 使得

$$t\,\eta_H(t) = \fint_{B_{2R}}\frac{F(Du)}{i_F}\,dx \quad\Longleftrightarrow\quad t = \eta^{-1}_{1+\frac1H,1+H}\left(\fint_{B_{2R}}\frac{F(Du)}{i_F}\,dx\right)$$

以推出（2.19）

$$\int_{B_{2R}} |DF(Du)|\,dx \le C\,R^N\,i_F\,\eta_{\frac{1}{H+1},\frac{H}{H+1}}\left(\left(\fint_{B_{2R}}\frac{F(Du)}{i_F}\,dx\right)^{-1}\right)\fint_{B_{2R}}\frac{F(Du)}{i_F}\,dx.$$

最后，注意到

$$t\,\eta_{\frac{1}{H+1},\frac{H}{H+1}}(1/t) = \eta_{\frac{1}{H+1},\frac{H}{H+1}}(t)$$

对所有 $t\ge0$，因此结合（3.9）和（3.7）可得（3.12）成立。再回顾（3.10）和（3.11），最终分别得到（3.8a）和（3.8b）。□

4. A regularising procedure

按照惯例，假设所考察的被积函数和极小化子均为光滑函数会更方便。为此，我们引入一族具有所需光滑性的正则化问题，其被积函数及相应的极小化子都收敛于原问题。

引理 4.1（正则化问题）。设 F是一个满足 H-拟一致凸函数，满足（2.7），且设 u是 J 在 W^1,$_1(\Omega)$中的局部极小化子。则对于任意球 $B_{2R}\Subset\Omega$，存在一个序列$F_n\in C^\infty(\mathbb{R}^N)$，其中各项均为满足 H-拟一致凸被积函数，并满足（2.7），以及

$$\inf_{z\in\mathbb{R}^N}\lambda_{\min}(D^2F_n(z)) > 0$$

以及相应极小化子的序列 $u_n \in C^\infty(B_{2R})$，其满足

$$J_n(w, B_{2R}) = \int_{B_{2R}} F_n(Dw)\,dx$$

使得

$$\int_{B_{2R}} F_n(Du_n)\,dx \to \int_{B_{2R}} F(Du)\,dx, \tag{4.1a}$$

$$u_n \rightharpoonup u \quad in\ W^{1,1+1/H}(B_R), \tag{4.1b}$$

$$DF_n(Du_n) \rightharpoonup DF(Du) \quad in\ W^{1,2}(B_R). \tag{4.1c}$$

证明。为简便起见，设 $B = B_{2R}$和 $p = 1 + 1/H$。取一个偶数 $\varphi \in C_c^\infty(B_1;\ [0,+\infty[)$ 使得 $\|\varphi\|_1 = 1$ 并采用命题 2.6-(4) 的记号。注意，对于任意这样的 φ 都有

$$z = \int (z - y)\,\varphi(y)\,dy$$

因此，詹森不等式给出

$$F(z) \le (\varphi * F)(z). \tag{4.2}$$

Set

$$F_n(z) = (\varphi_{\varepsilon_n} * F)(z) + \frac{\mu_n}{2}\,|z|^2,$$

其中 $\varepsilon_n \downarrow 0$ 和 $\mu_n \downarrow 0$ 待定，使得 F_n 对每个 n 都满足引理中陈述的所有条件。注意，由于 (3.2) 以及 $F_n \to F$ 在 $C^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ 中的收敛性，我们有

$$F_n(w) \ge \frac{|w|^p}{C} \quad \text{as well as} \quad \frac{1}{C} \le \inf_{|z|=1} |DF_n(z)| \le C, \tag{4.3}$$

分别地，对于与 n 无关的常数 C。

对于充分大的 n,

$$\psi_n = u * \varphi_{1/n} \in C^\infty(B)$$

并考虑极小化问题

$$\inf\{J_n(w) : w \in \mathrm{Lip}(\overline{B}), w = \psi_n \text{ on } \partial B\}. \tag{4.4}$$

根据[36, 定理 9。2], 存在方程 u_n （4.4）的一个解，该解（见 [10, 第 5923] 页以及（3.2））也满足

$$J_n(u_n) = \inf\{J_n(w) : w \in \psi_n + W_0^{1,p}(B)\}.$$

由[8, 定理 4，1] 存在常数 $A_n \ge 1$ （仅取决于 B 以及 ψ_n的正则性，但不取决于 ε_n， μ_n）使得

$$\mathrm{Lip}(u_n) \le \frac{A_n}{\mu_n}.$$

因此，被积函数 F 在 Du_n 的值域上是强椭圆的，因为 $F_n \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$并且

$$\lambda_{\min}(D^2F_n(Du_n)) \ge \mu_n, \qquad \lambda_{\max}(D^2F_n(Du_n)) \le C < \infty$$

在$\overline{B}$上，因此 t 该标准正则性理论给出 $u_n \in C^\infty(\overline{B})$。我们首先选择 $\mu_n \downarrow 0$，使得 t

$$\lim_n \mu_n \int_B |D\psi_n|^2\,dx = 0. \tag{4.5}$$

Set

$$M_n = 1 + \sup_B |D\psi_n| + \frac{A_n}{\mu_n}$$

并注意到，由于当 $\varepsilon_n \downarrow 0$ 时 $\varphi_{\varepsilon_n} * F \to F$ 属于 $C^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$，且 M_n 与 ε_n 无关，因此我们可以选取 $(\varepsilon_n) \subseteq (0,1)$，$\varepsilon_n \downarrow 0$，使得

$$\|\varphi_{\varepsilon_n} * F - F\|_{C^1(B_{M_n})} \le \frac{1}{n}. \tag{4.6}$$

显然，这仍然成立 $F_n \to F$ 于 $C^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$。我们断言，按此选择，(4.1) 仍然成立。根据 u_n的极小性，有 $J_n(u_n) \le J_n(\psi_n)$，而由 (4.5) 可得

$$\overline{\lim_n} J_n(u_n) \le \overline{\lim_n} J_n(\psi_n) = \overline{\lim_n} \int_B (\varphi_{\varepsilon_n} * F)(D\psi_n)\,dx. \tag{4.7}$$

为了估计 (4.7) 中最右侧的一项，我们利用 (4.6) 得到

$$\int_B (\varphi_{\varepsilon_n} * F)(D\psi_n)\,dx \le \frac{|B|}{n} + \int_B F(D\psi_n)\,dx, \tag{4.8}$$

而向量值 Jensen 不等式蕴含

$$\begin{aligned}\int_B F(D\psi_n)\,dx &= \int_B F\left(\int \varphi_{1/n}(x-y)\,Du(y)\,dy\right)dx\\ &\le \int_B \left(\int \varphi_{1/n}(x-y)F(Du(y))\,dy\right)dx\\ &\le \int_B \varphi_{1/n} * F(Du)\,dx.\end{aligned}$$

因此，由 (4.8) 可得

$$\overline{\lim_n} \int_B (\varphi_{\varepsilon_n} * F)(D\psi_n)\,dx \le \overline{\lim_n} \int_B \varphi_{1/n} * F(Du)\,dx = \int_B F(Du)\,dx$$

将其代入 (4.7)，得到

$$\overline{\lim_n} J_n(u_n) \le J(u). \tag{4.9}$$

特别地，$J_n(u_n)$ 有界，因此（4.3）推出 Du_n 在 $L^p(B)$ 中一致有界。此外，由于 $u_n - \psi_n \in W^{1,p}_0(B)$，Poincar´e 不等式给出

$$\begin{aligned}\|u_n\|_{L^p(B)} &\le \|u_n - \psi_n\|_{L^p(B)} + \|\psi_n\|_{L^p(B)}\\ &\le C\left(\|D(u_n-\psi_n)\|_{L^p(B)} + \|\psi_n\|_{L^p(B)}\right)\\ &\le C\left(\|Du_n\|_{L^p(B)} + \|\psi_n\|_{W^{1,p}(B)}\right),\end{aligned}$$

因此（u_n）在 $L^p(B)$ 中也有界。因此（u_n）存在一个（不再另行标记的）子列，在 $W^{1,p}(B)$ 中弱收敛，收敛到某个 v，并且容易验证 $v \in u + W^{1,p}_0(B)$。由此可知（4.1b）成立。

现在，由于映射

$$w \mapsto \int_B F(Dw)\,dx$$

在 $W^{1,p}(B)$ 中弱下半连续，且 $F_n \ge F$ 根据（4.2），可得

$$J(v) \le \underline{\lim_n} \int_B F(Du_n)\,dx \le \underline{\lim_n} \int_B F_n(Du_n)\,dx = \underline{\lim_n} J_n(u_n). \tag{4.10}$$

将后者与（4.9）结合，得到 $J(v) \le J(u)$，由此可知 $v = u$，这是因为 F具有严格凸性。特别地，经过子序列抽取，

$$Du_n \rightharpoonup Du \qquad \text{in } L^p(B). \tag{4.11}$$

因此，由（4.10）和（4.9），我们推得

$$\int_B F(Du_n)\,dx \to \int_B F(Du)\,dx, \tag{4.12}$$

即 (4.1a)。现在将命题 3.3 应用于 $DF_n(Du_n)$，从而得到

$$\|DF_n(Du_n)\|_{W^{1,2}(B_R)} \le C,$$

其中一致　　有界性由方程 (4.3) 和 (4.12) 得出，因为 $B = B_{2R}$。令

$$V_n = DF_n(Du_n) \tag{4.13}$$

我们可以选取一个子序列，使得 $V_n \to V$ 在 W^1 中弱收敛，在 L^2 中强收敛，并且在 B_R 中几乎处处逐点收敛，其中 $V \in W^1$,2(B_R) 适当。由于根据命题 2.6-(4)，$DF_n^{-1} \to DF^{-1}$ 局部一致，我们推得 $DF_n^{-1}(V_n) \to DF^{-1}(V)$ 几乎处处成立。于是 (4.13) 蕴含 $Du_n \to DF^{-1}(V)$ 几乎处处成立，进而由 (4.11) 可识别出 $V = DF(Du)$。这证明了 (4.1c)，故证明完成。□

5. Caccioppoli inequality

本节将证明一个 Caccioppoli 型不等式。为此，我们先证明以下结果，它是 [23, 引理 31] 的简化形式。

引理 5　　.1. 设 P 和 S 是 $N \times N$ 对称矩阵，且 P 正定。则　　,

$$(P\,S, S\,P)_2 \ge \frac{\lambda_{\min}(P)}{\lambda_{\max}(P)} |P\,S|_2^2. \tag{5.1}$$

证明。注意到，(5.1) 两边在正交基变换下均保持不变，因此我们可以假设 P是对角矩阵，其特征值 $\lambda_1,\dots,\lambda_N$均为正数，且满足

$$\lambda_j \ge \frac{1}{\beta}\lambda_i, \quad \text{where } \beta = \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)},$$

对任意 $i, j = 1, \dots, N$均成立。于是，若 $S = (a_{ij})$，则有

$$(P\,S, S\,P)_2 = \sum_{i,j=1}^N \lambda_i\,a_{ij}\,\lambda_j\,a_{ji} = \sum_{i,j=1}^N \lambda_i\,\lambda_j\,a_{ij}^2 \ge \frac{1}{\beta}\sum_{i,j=1}^N \lambda_i^2\,a_{ij}^2 = \frac{1}{\beta}\,|P\,S|_2^2,$$

如所述。　□

引理 5.2 (Caccioppoli 不等式)。设 F是一个光滑的 H-拟一致凸函数，并设 $u \in C^\infty(B_R)$。对于 V 由 (3.7)给出，假设

$$\operatorname{div} V = 0 \qquad in\ B_R. \tag{5.2}$$

此外，对于给定的仿射函数 $\ell : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$，以及所有 $\rho < R$，令

$$A(\ell, \rho) = \{x \in B_\rho : F(Du(x)) \ge \ell(Du(x))\}. \tag{5.3}$$

那么，对于所有 $\rho < R$，都有

$$\int_{A(\ell,\rho)} |DV|_2^2\,dx \le \left(\frac{\pi\,H}{R-\rho}\right)^2 \int_{A(\ell,R)} |V - D\ell|^2\,dx. \tag{5.4}$$

证明。设 $\varepsilon > 0$并令 $V_\varepsilon = V + \varepsilon\,Du = DF(Du) + \varepsilon\,Du$。对后者求导得　　es

$$DV_\varepsilon = \left(D^2F(Du) + \varepsilon\,\mathrm{Id}\right) D^2u,$$

其中矩阵 $D^2F(Du)+\varepsilon\,\mathrm{Id}$ 和 D^2u 分别为对称正定矩阵和对称矩阵。由 (2.5)，可得

$$\begin{aligned}\lambda_{\max}(D^2F(Du)+\varepsilon\,\mathrm{Id}) &\le \lambda_{\max}(D^2F(Du))+\varepsilon\\ &\le H\,\lambda_{\min}(D^2F(Du))+\varepsilon\\ &\le H\,\lambda_{\min}(D^2F(Du)+\varepsilon\,\mathrm{Id})\end{aligned}$$

因此（5.1）给出 $|DV_\varepsilon|_2^2 \le H\ (DV_\varepsilon,\ DV_\varepsilon^t)_{2\circ}$ 令 $\varepsilon\downarrow 0$ 得到

$$|DV|_2^2 \le H\,(DV, DV^t)_2.$$

我们希望对 $A(\ell,r)$ 上述不等式进行积分，其中 $r<R$，暂且假设 $\{F(Du)=\ell(Du)\}$ 是 B_R 中的一个超曲面。利用散度定理可得

$$\begin{aligned}\int_{A(\ell,r)}|DV|_2^2\,dx &\le H\int_{A(\ell,r)}\big(DV,DV^t\big)_2\,dx\\ &= H\int_{A(\ell,r)}\sum_{i,j=1}^N V_j^i\,(V^j-\ell_j)_i\,dx\\ &= H\int_{A(\ell,r)}\sum_{i,j=1}^N\Big(V_j^i\,(V^j-\ell_j)\Big)_i-\sum_{j=1}^N(V^j-\ell_j)\ \mathrm{div}\,V_j\,dx\\ &= H\int_{\partial A(\ell,r)}\sum_{i,j=1}^N V_j^i\,(V^j-\ell_j)\,n^i\,d\mathcal{H}^{N-1},\end{aligned}\tag{5.5}$$

其中 n 表示 ∂A（ℓ，r）的外法向量；并且我们用到了（5.2）蕴含 div $V_j=0$ 对所有 $j=1$，... ...，N成立这一事实。为计算（5.5）中的最后一个积分，注意到

$$\partial A(\ell,r)=\big(\partial B_r\cap\{F(Du)\ge\ell(Du)\}\big)\bigcup\big(B_r\cap\{F(Du)=\ell(Du)\}\big),$$

因此

$$n(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{|x|} & \text{if } x\in\partial B_r\cap\{F(Du)\ge\ell(Du)\}\\[2ex] -\dfrac{D\big((F-\ell)(Du(x))\big)}{|D\big((F-\ell)(Du(x))\big)|} & \text{if } x\in B_r\cap\{F(Du)=\ell(Du)\}.\end{cases}$$

令 $x\in B_r\cap\{F(Du)=\ell(Du)\}$ 并计算

$$U^i(x):=\big((F-\ell)(Du(x))\big)_i=\sum_{k=1}^N(V^k-\ell_k)\,u_{ki}\quad\text{as well as}\quad V_j^i=\sum_{h=1}^N F_{ih}(Du)\,u_{hj},$$

使得

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^N V_j^i\,(V^j-\ell_j)\,n^i &= -\frac{1}{|U|}\sum_{i,j,k=1}^N V_j^i\,(V^j-\ell_j)\,(V^k-\ell_k)\,u_{ki}\\ &= -\frac{1}{|U|}\sum_{i,j,k,h=1}^N F_{ih}(Du)\,u_{hj}\,(V^j-\ell_j)\,u_{ik}\,(V^k-\ell_k)\\ &= -\frac{1}{|U|}\,\big(D^2F(Du)\,U,U\big)<0,\end{aligned}$$

为 D^2F半正定的。因此，前一个不等式表明，在 5.5) 上计算的最右侧积分 $B_r \cap \{F(Du) = \ell(Du)\}$ 带有负号，因此（5.5）化简为

$$\begin{aligned}\int_{A(\ell,r)} |DV|_2^2\,dx &\le H \int_{\partial B_r\cap\{F(Du)\ge\ell(Du)\}} \sum_{i,j=1}^N V_j^i\,(V^j-\ell_j)\,n^i\,d\mathcal{H}^{N-1}\\ &\le H \int_{\partial B_r\cap\{F(Du)\ge\ell(Du)\}} |DV|_2\,|V-D\ell|\,d\mathcal{H}^{N-1},\end{aligned} \tag{5.6}$$

其中最后一步用到了柯西-施瓦茨不等式。

现在令 ζ 为函数

$$\zeta(r)=\int_{A(\ell,r)} |DV|_2\,|V-D\ell|\,dx \quad \text{for all } 0<r<R,$$

其一阶导数为

$$\zeta'(r)=\int_{\partial B_r\cap\{F(Du)\ge\ell(Du)\}} |DV|_2\,|V-D\ell|\,d\mathcal{H}^{N-1}. \tag{5.7}$$

令 $\varphi\in C^\infty([0,R])$，其中 $\varphi(R)=0$。将 (5.6) 乘以 φ^2 并在 $[0,R]$上积分。考虑到 (5.7)，进行分部积分，并利用 $\varphi(R)=\zeta(0)=0$这一事实，可得

$$\begin{aligned}\int_0^R\int_{A(\ell,r)} \varphi^2\,|DV|_2^2\,dx\,dr &\le H\int_0^R \varphi^2\,\zeta'\,dr\\ &= H\left(\varphi^2(R)\,\zeta(R)-\varphi^2(0)\,\zeta(0)\right)-2H\int_0^R \varphi\,\varphi'\,\zeta\,dr\\ &\le 2H\int_0^R\int_{A(\ell,r)} |\varphi||\varphi'||DV|_2|V-D\ell|\,dx\,dr\\ &\le 2H\left(\int_0^R\int_{A(\ell,r)} \varphi^2\,|DV|_2^2\,dxdr\right)^{\frac12}\left(\int_0^R\int_{A(\ell,r)} |\varphi'|^2\,|V-D\ell|^2\,dxdr\right)^{\frac12}\end{aligned}$$

这可化简为

$$\int_0^R\int_{A(\ell,r)} \varphi^2\,|DV|_2^2\,dx\,dr \le 4H^2\int_0^R\int_{A(\ell,r)} |\varphi'|^2\,|V-D\ell|^2\,dx\,dr.$$

固定 $0<\rho<R$。利用这些函数的单调性

$$r\mapsto\int_{A(\ell,r)}|DV|_2^2\,dx, \qquad r\mapsto\int_{A(\ell,r)}|V-D\ell|_2^2\,dx$$

于是我们有

$$\begin{aligned}\int_{A(\ell,\rho)} |DV|_2^2\,dx\int_\rho^R \varphi^2\,dr &\le \int_\rho^R\int_{A(\ell,r)} \varphi^2\,|DV|_2^2\,dx\,dr\\ &\le \int_0^R\int_{A(\ell,r)} \varphi^2\,|DV|_2^2\,dx\,dr\\ &\le 4H^2\int_0^R\int_{A(\ell,r)} |\varphi'|^2\,|V-D\ell|^2\,dx\,dr\\ &\le 4H^2\int_{A(\ell,R)} |V-D\ell|^2\,dx\int_0^R |\varphi'|^2\,dr,\end{aligned}$$

这意味着

$$\int_{A(\ell,\rho)} |DV|_2^2\,dx \le 4\,H^2\,I(R,\rho)\int_{A(\ell,R)} |V-D\ell|^2\,dx$$

for

$$I(R,\rho) := \inf\left\{ \frac{\displaystyle\int_0^R |\varphi'|^2\,dr}{\displaystyle\int_\rho^R \varphi^2\,dr} : \varphi\in C^\infty([0,R])\setminus\{0\}, \varphi(R)=0 \right\}.$$

通过初等推理可得该问题的一个极小化子:

$$\varphi(r) = \begin{cases} 1 & \text{if } r\le\rho \\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\,\dfrac{r-\rho}{R-\rho}\right) & \text{if } r\in[\rho,R], \end{cases}$$

因此，经过显式计算可得

$$I(R,\rho) = \frac{\pi^2}{4\,(R-\rho)^2},$$

且（5.4）成立。

为去除集合 $\{F(Du) = \ell(Du)\}$ 属于 C^1 的假设，我们运用 Sard 定理。该定理保证，对于几乎处处的 B_R，性质对 $\{F(Du) = \ell(Du)+k\}$均成立。给定 $k\in\mathbb{R}$，我们可以从（5.5）出发，重复之前的论证，从而得到

$$\int_{A(\ell+k_n,r)} |DV|_2^2\,dx \le \left(\frac{\pi\,H}{R-\rho}\right)^2 \int_{A(\ell+k_n,R)} |V-D\ell|^2\,dx. \tag{5.8}$$

注意， $A(\ell+k_n,\cdot)\searrow A(\ell,\cdot)$，因此我们可以利用单调收敛定理（或控制收敛定理）令（5.8）中的项取极限，进而（5.4）在此情形下也成立。□

我们报告以下推论，该推论已出现在 [23, 定理 3 的证明2], 中，此处为完整起见予以列出。

推论 5.3。 设 F为一个 H-拟一致凸函数，设 u是 J在 Ω 中按定义 *3.1* 意义下的局部极小化子，并设 V 由 (3.7)给出。则，

$$\int_{B_R} |DV|_2^2\,dx \le \frac{C}{R^{N+2}}\left(\int_{B_{2R}} |V|\,dx\right)^2 \tag{5.9}$$

对 $C = C(H,N)$ 以及所有满足 $B_{4R}\subseteq\Omega$ 的球 B_R，

证明。 利用引理 4.1 对 B_{2R}，可以假设 F 和 u 都是光滑的，因为对于正则化问题，(5.9) 的左端关于 W^1 中的弱收敛, (B_R)，是下半连续的，而右端（取子序列后）收敛。因此，我们对 5.2 引理应用于 $\ell(z)\equiv \min F$ 以得到

$$\int_{B_\rho} |DV|_2^2\,dx \le \frac{\widetilde{C}}{(r-\rho)^2}\int_{B_r} |V|^2\,dx \tag{5.10}$$

对所有 $0<\rho<r<2R$ 均成立。令 E 为一个连续延拓算子

$$E : W^{1,2}(B_1;\mathbb{R}^N)\to W_0^{1,2}(B_2;\mathbb{R}^N).$$

Gagliardo-Nirenberg不等式 [31, 定理 12。83] 保证

$$\|E(U)\|_2 \le C\,\|E(U)\|_1^{\frac{2}{N+2}}\,\|DE(U)\|_2^{1-\frac{2}{N+2}} \qquad \forall U\in W^{1,2}(B_1;\mathbb{R}^N)$$

对于 $C = C(N)$，因此根据 E 的连续性

$$\int_{B_1} |U|^2\,dx \le \int_{B_2} |E(U)|^2\,dx \le C\left(\int_{B_2} |E(U)|\,dx\right)^{\frac{4}{N+2}}\left(\int_{B_2} |DE(U)|^2\,dx\right)^{\frac{N}{N+2}}$$
$$\le C\left(\int_{B_1} |U|\,dx\right)^{\frac{4}{N+2}}\left(\int_{B_1} |DU|^2\,dx\right)^{\frac{N}{N+2}}$$

取一个更大的常数，该常数依赖于 E 的算子范数：$L^1(B_1;\mathbb{R}^N) \to L^1(B_2;\mathbb{R}^N)$ 以及 E：$W^{1,2}(B_1;\mathbb{R}^N) \to W^{1,2_0}(B_2;\mathbb{R}^N)$。对于任意 $\varepsilon > 0$，将杨氏不等式应用于前述估计，取指数 $(N+2)/2$ 和 $(N+2)/N$，得到

$$\int_{B_1} |U|^2\,dx \le \varepsilon^2 \int_{B_1} |DU|^2\,dx + \frac{C}{\varepsilon^N}\left(\int_{B_1} |U|\,dx\right)^2,$$

经缩放后可得

$$\int_{B_r} |U|^2\,dx \le (\varepsilon r)^2 \int_{B_r} |DU|^2\,dx + \frac{C}{(\varepsilon r)^N}\left(\int_{B_r} |U|\,dx\right)^2 \qquad \forall U \in W^{1,2}(B_r;\mathbb{R}^N) \quad (5.11)$$

其中某个 $C = C(N) > 0$。取

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{2}\frac{(r-\rho)^2}{\widetilde{C}\,r^2}$$

并将 (5.11) 中的 $U = V$ 以及相应的 ε 应用于 (5.10)，得到

$$\int_{B_\rho} |DV|_2^2\,dx \le \frac{1}{2}\int_{B_r} |DV|_2^2\,dx + \frac{C}{(r-\rho)^{N+2}}\left(\int_{B_r} |V|\,dx\right)^2$$

对所有 $0 < \rho < r < 2R$。应用 [20, 引理 3.1，第 5] 可知

$$\int_{B_\rho} |DV|_2^2\,dx \le \frac{C}{(r-\rho)^{N+2}}\left(\int_{B_r} |V|\,dx\right)^2$$

对于 $r = 2R$，$\rho = R$，可得（5.9）。 □

6. A family of 1-homogeneous functions

设 F 是一个 H-拟一致凸函数。本节汇集该函数的基本性质

$$G(z) = F(DF^{-1}(z)) \quad (6.1)$$

以及与之相关的一族 Minkowski 泛函的基本性质，即，

$$g_k(z) = \inf\{t > 0 : G(z/t) < k\}, \quad (6.2)$$

对任意 $k \ge 0$。注意，由于 DF 是 $\mathbb{R}^N$上的同胚，（6.1）中的函数定义良好。

命题6.1。设 F是满足 H-拟一致凸函数 (2.7)。则，G是强制的，并且对任意 $k \ge 0$，集合 $\{G \le k\}$ 关于原点是星形的。

证明。将向量 DF^{-1}代入（2.13），并利用 $z(z)$和（2.7），可得

$$G(z) \ge |DF^{-1}(z)|\,|z|/C.$$

此外，拟对称性（2.3） DF^{-1}与 $DF^{-1}(0) = 0$给出

$$|DF^{-1}(z)| \ge \frac{\sup_{|v|=1}|DF^{-1}(v)|}{C\,\eta_H(1/|z|)}.$$

汇总前述不等式，并利用（2.19）和（2.17），可得

$$G(z) \geq \frac{\sup_{|v|=1} |DF^{-1}(v)|}{C} |z|^{1+1/H} \quad \text{for all } |z| > 1,$$

从而证明了 G 的强制性。特别地，对于任意 $k > 0$，集合 $\{G \leq k\}$ 是紧的且内部非空。

现在我们来证明 $\{G \leq k\}$ 关于原点是星形的。由于 $G(0) = 0$ 根据归一化（2.7），只需证明对于任意 $z \in \mathbb{S}^{N-1}$，函数 $t \mapsto G(t\,z)$ 是非递减的。为此，首先假设 $F \in C^2(\mathbb{R}^N)$ 满足

$$\lambda_{\min}(D^2F(z)) \geq \mu \tag{6.3}$$

其中某个 $\mu > 0$ 与 z 无关。于是 DF 是一个微分同胚，并且有

$$DG(z) = z\,D(DF^{-1})(z) = (D^2F)^{-1}(DF^{-1}(z))\,z, \tag{6.4}$$

因此

$$\frac{d}{dt}G(t\,z) = (DG(t\,z), z) = t\left((D^2F)^{-1}(DF^{-1}(t\,z))\,z, z\right) \geq 0,$$

从而证明了所述结论。在一般情形下，根据命题 2.6-(4)，我们知道，任意 H- 拟一致凸函数 F 都可以在 C^1 中由一列（F_n） C^2 的 H-拟一致凸函数逼近，这些函数满足（6.3），且 $DF_n^{-1} \to DF^{-1}$ 局部一致收敛。因此， $G_n = F_n \circ DF_n^{-1} \to G$ 也局部一致收敛。由此可知，$t \mapsto G(t\,z)$ 是非递减的，因为它是一个非递减函数列的逐点极限。证明至此完成。□

注 6.2. 一般而言，集合 $\{w \in \mathbb{R}^N\colon\ G(w) \leq k\} = \{DF(z)\colon\ F(z) \leq k\}$ 并非凸集，因此在 (6.2) 中定义的函数 g_k 可能不是范数。此外，通过在前面的证明中使用 (2.15) 中的逼近，我们可以看到，证明前一命题的第二个结论并不需要 H-拟一致凸性假设；并且对于任意满足 (2.7) 的凸$F \in C^1(\mathbb{R}^N)$，集合 $\{DF(z)\colon\ F(z) \leq k\}$虽然一般并非凸集，但始终相对于原点呈星形。

命题 6.3. 设 F是一个 C^2 且 H-拟一致凸函数，满足 (2.7) 并且

$$\inf_{z \in \mathbb{R}^N} \lambda_{\min}(D^2F(z)) > 0.$$

则有以下结论：

(1) g_k 是一个 Lipschitz 连续的 1-齐次函数，且

$$\mathrm{Lip}\,(g_k) \leq H \sup_{\mathbb{S}^{N-1}} g_k. \tag{6.5}$$

（2）对于某个 $C = C(H, N) > 0$，有

$$\sup_{\mathbb{S}^{N-1}} g_k \leq C \inf_{\mathbb{S}^{N-1}} g_k. \tag{6.6}$$

（3）存在 $C = C(H, N) > 0$，使得对于任意 $k \geq h > 0$

$$\inf_{\{G \geq k\}} (g_h - 1) \geq \frac{1}{C} \min\left\{\left(\frac{k-h}{h}\right)^H, \left(\frac{k-h}{h}\right)^{\frac{1}{H(H+1)}}\right\}. \tag{6.7}$$

证明。 由于 DG 式（6.4）中给出的函数在原点之外不为零，根据隐函数定理，边界 $\partial\{G \leq k\} = \{G = k\}$ 是一个 C^1-超曲面，因此 g_k 在原点之外是 C^1。根据构造， g_k 是正 1 次齐次的，因此满足

$$\left(Dg_k(z), z\right) = g_k(z), \quad \forall\, z \neq 0, \tag{6.8}$$

$$Dg_k(\lambda\,z) = Dg_k(z), \quad \forall\, \lambda > 0, z \neq 0, \tag{6.9}$$

而根据构造，有

$$G\left(\frac{z}{g_k(z)}\right) = k \qquad \forall\, z \neq 0. \tag{6.10}$$

根据最后一个性质，特别有 $g_k \equiv 1$ 在 $\{G = k\}$上成立，因此由拉格朗日乘子法可得 $Dg_k(z) = \alpha(z)\, DG(z)$，其中 $\alpha(z) \geq 0$ 且对所有 $z \in \{G = k\}$均成立。结合式（6.8），可知在 $\{G = k\}$ 上有

$$1 = g_k(z) = (Dg_k(z), z) = \alpha(z)\,(DG(z), z),$$

进而

$$Dg_k(z) = \frac{DG(z)}{\big(DG(z), z\big)}.$$

令 $z \in \{G = k\}$。由式（6.4）可得

$$|Dg_k(z)| = \frac{|DG(z)|}{\big(DG(z), z\big)} = \frac{|z\,(D^2F)^{-1}(w)|}{\big(z\,(D^2F)^{-1}(w), z\big)}, \qquad \text{with } w = DF^{-1}(z). \tag{6.11}$$

设 $\Lambda(w)$ 和 $\lambda(w)$ 分别为 D^2F 在 w处的最大和最小特征值。则有

$$|z\,(D^2F)^{-1}(w)| \leq \frac{1}{\lambda(w)}|z| \quad \text{as well as} \quad \big(z\,(D^2F)^{-1}(w), z\big) \geq \frac{1}{\Lambda(w)}\,|z|^2. \tag{6.12}$$

因此，由式（6.11）、（6.12）和（2.5）可得

$$|Dg_k(z)| = \frac{|z\,(D^2F)^{-1}(w)|}{\big(z\,(D^2F)^{-1}(w), z\big)} \leq \frac{|z|\Lambda(w)}{|z|^2\lambda(w)} \leq \frac{H}{|z|} \qquad \text{on } \{G = k\}. \tag{6.13}$$

由（6.9）和（6.10）可得

$$|Dg_k(z)| = \left|Dg_k\left(\frac{z}{g_k(z)}\right)\right|.$$

因此，我们可以将（6.13）用于向量 $\dfrac{z}{g_k(z)}$，从而得到

$$|Dg_k(z)| \leq H\,\frac{g_k(z)}{|z|} \leq H \sup_{\mathbb{S}^{N-1}} g_k \qquad \forall\, z \neq 0.$$

这就证明了（6.5）。为验证（6.6），注意到在关于 F 的假设下，映射$t \mapsto G(t\,z)$ 在 $]0$ 上严格递增，$+\infty[$, 因此 $\{g_k = 1\} = \{G = k\}$。由 g_k的 1 次齐次性，便有

$$\sup_{\mathbb{S}^{N-1}} g_k = \sup_{\{G=k\}} |z| \quad \text{as well as} \quad \inf_{\mathbb{S}^{N-1}} g_k = \inf_{\{G=k\}} |z|.$$

由于 $\{G \leq k\}$ 关于原点是星形的，我们可以选取 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$，使它们属于 $\{G = k\}$，满足

$$|\bar{x}| = \sup_{\{G=k\}} |z| \quad \text{as well as} \quad |\bar{y}| = \inf_{\{G=k\}} |z|.$$

将（2.3）应用于 DF 并结合（2.7），可得

$$\frac{\sup_{\mathbb{S}^{N-1}} g_k}{\inf_{\mathbb{S}^{N-1}} g_k} = \frac{|\bar{x}|}{|\bar{y}|} = \frac{|DF(DF^{-1}(\bar{x}))|}{|DF(DF^{-1}(\bar{y}))|} \leq C\,\eta_H\left(\frac{|DF^{-1}(\bar{x})|}{|DF^{-1}(\bar{y})|}\right). \tag{6.14}$$

根据 G 的定义，有 $DF^{-1}(\bar{x})$ $DF^{-1}(\bar{y}) \in \{F = k\}$，因此（2.14）得

$$1 = \frac{F(DF^{-1}(\bar{y}))}{F(DF^{-1}(\bar{x}))} \leq C\,\frac{|DF^{-1}(\bar{y})|}{|DF^{-1}(\bar{x})|}\,\eta_H\left(\frac{|DF^{-1}(\bar{y})|}{|DF^{-1}(\bar{x})|}\right) = C\,\eta_{1+H,1+1/H}\left(\frac{|DF^{-1}(\bar{y})|}{|DF^{-1}(\bar{x})|}\right)$$

从而

$$\frac{|DF^{-1}(\bar{x})|}{|DF^{-1}(\bar{y})|} \leq \frac{1}{\eta^{-1}_{1+H,1+1/H}(1/C)}.$$

将此估计代入（6.14）即可得出结论。

最后，为证明最后一个断言，固定 $k > h$，选取 $\tilde{x}$ 使得

$$G(\tilde{x}) = k \quad \text{as well as} \quad g_h(\tilde{x}) = \inf_{G \geq k} g_h,$$

并令

$$\tilde{y} = \frac{\tilde{x}}{g_h(\tilde{x})}.$$

于是，其中有 $g_h(\tilde{y}) = 1$，从而 $\tilde{y} \in \{G = h\}$。进一步令

$$x := DF^{-1}(\tilde{x}) \in \{F = k\} \quad \text{as well as} \quad y := DF^{-1}(\tilde{y}) \in \{F = h\}. \tag{6.15}$$

根据 $\tilde{x}$ 和 $\tilde{y}$ 的定义以及 g_h 的 1 次齐次性可知

$$\inf_{\{G \geq k\}} (g_h - 1) = \frac{g_h(\tilde{x}) - g_h(\tilde{y})}{g_h(\tilde{y})} = \frac{|\tilde{x} - \tilde{y}|}{|\tilde{y}|}. \tag{6.16}$$

对映射应用畸变估计（2.3），得到 DF^{-1} 给出

$$\frac{|x - y|}{|y|} \leq C\, \eta_H \left(\frac{|\tilde{x} - \tilde{y}|}{|\tilde{y}|} \right)$$

因此，由（2.20）可得函数 η_H^{-1} 满足

$$\frac{|\tilde{x} - \tilde{y}|}{|\tilde{y}|} \geq \eta_H^{-1} \left(\frac{1}{C} \frac{|x - y|}{|y|} \right) \geq \frac{1}{C}\, \eta_H^{-1} \left(\frac{|x - y|}{|y|} \right),$$

将其代入（6.16）可得

$$\inf_{\{G \geq k\}} (g_h - 1) \geq \frac{1}{C}\, \eta_H^{-1} \left(\frac{|x - y|}{|y|} \right). \tag{6.17}$$

由（6.15）可知

$$\begin{aligned} k - h = F(x) - F(y) &\leq \int_0^1 |DF(y + t\,(x - y))|\, |x - y|\, dt \\ &\leq |x - y| \left[\int_0^1 |DF(y + t\,(x - y)) - DF(y)|\, dt + |DF(y)| \right]. \end{aligned} \tag{6.18}$$

为估计上述不等式中最右侧的积分，我们对映射应用（2.3），其中 DF（回忆 $DF(0) = 0$），并利用（2.18），得到

$$\begin{aligned} \int_0^1 |DF(y + t\,(x - y)) - DF(y)|\, dt &\leq C\, |DF(y)| \int_0^1 \eta_H \left(t\, \frac{|x - y|}{|y|} \right) dx \\ &\leq C\, |DF(y)|\, \eta_H \left(\frac{|x - y|}{|y|} \right) \int_0^1 \eta_H(t)\, dt \\ &\leq \frac{CH}{H + 1}\, |DF(y)|\, \eta_H \left(\frac{|x - y|}{|y|} \right). \end{aligned}$$

因此（6.18）简化为

$$k - h \leq C\, |DF(y)|\, |x - y| \left[1 + \eta_H \left(\frac{|x - y|}{|y|} \right) \right].$$

另一方面，（2.13）推出

$$h = F(y) \geq |y|\,|DF(y)|/C.$$

结合前两个不等式可得

$$\frac{k-h}{h} \leq C\,\frac{|x-y|}{|y|}\left[1+\eta_H\left(\frac{|x-y|}{|y|}\right)\right]. \tag{6.19}$$

由于

$$t\,(1+\eta_H(t)) \leq 2\,\eta_{1,H+1}(t),$$

我们可以将（6.19）改写为

$$\frac{|x-y|}{|y|} \geq \eta_{1,H+1}^{-1}\left(\frac{k-h}{C\,h}\right)$$

并回想（6.17）可得

$$\inf_{\{G\geq k\}}(g_h-1) \geq \frac{1}{C}\,\eta_H^{-1}\left(\eta_{1,H+1}^{-1}\left(\frac{k-h}{h}\right)\right) = \frac{1}{C}\,\eta_{1/H,H(H+1)}^{-1}\left(\frac{k-h}{h}\right),$$

其中我们使用了（2.20）、（2.21）来简化估计。利用（2.17）可得（6.7），进而得到结论。□

7. Proof of the main result

定理 7.1. 设 F是一个 H-q.u. c. 函数，满足 (2.7) 并设 u 是 J在 Ω 中按定义 *3.1*的意义定义的局部极小化子。则存在常数 $C = C(H,N) > 0$使得，对任意满足 B_R 且 $B_{2R} \subseteq \Omega$ 的 u，它都是局部 Lipschitz 函数，并满足以下估计

$$\sup_{B_{R/2}} |F(Du)| \leq C \fint_{B_{2R}} F(Du)\,dx. \tag{7.1}$$

证明。 暂且假设 F 和 u 在 B_{2R}中均为光滑函数。此外，考虑 F/i_F (见式（2.8）)，我们还可以假设

$$\inf_{|z|=1} |DF(z)| = 1. \tag{7.2}$$

固定 $R > r > 0$并令 $\bar{R} = \dfrac{R+r}{2}$。选取 $\varphi \in C_c^\infty(B_{\bar{R}}, [0,1])$，使得

$$\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq B_{\bar{R}}, \qquad \varphi\lfloor_{B_r} \equiv 1, \qquad |D\varphi| \leq \frac{C}{R-r}. \tag{7.3}$$

对于任意 $k \geq 0$，我们考虑 $\{G \leq k\}$ 的闵可夫斯基泛函，定义方式如式（6.2）所示，其中 G 由式（6.1）给出。按构造，它满足

$$g_k(z) \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad z \in \{G \leq k\} \quad \Longleftrightarrow \quad F(DF^{-1}(z)) \leq k. \tag{7.4}$$

设 V由（3.7）给出。成立 $\varphi\,(g_k\,(V)\;-1)_{\,+} \in W^{1,\,2\,0}\,(B_{\bar{R}})$，并由（7.4）可知

$$(g_k(V)-1)_+ \equiv 0 \qquad \text{on } B_{\bar{R}} \setminus A\left(k,\bar{R}\right),$$

其中我们设

$$A(k,\rho) = \{x \in B_\rho : F(Du(x)) \geq k\} = \{x \in B_\rho : G(V(x)) \geq k\},$$

即，仿射函数的方程（5.3） $\ell(z) \equiv k$。于是，由 Sobolev 嵌入和链式法则可得

$$\begin{aligned}\left(\int_{A(k,r)} |g_k(V)-1|^{2^*}\,dx\right)^{\frac{2}{2^*}} &\le \left(\int_{B_{\bar R}} |\varphi\,(g_k(V)-1)_+|^{2^*}\,dx\right)^{\frac{2}{2^*}}\\ &\le C\int_{B_{\bar R}} |D(\varphi\,(g_k(V)-1)_+)|^2\,dx\\ &\le C\int_{B_{\bar R}} |(g_k(V)-1)_+|^2|D\varphi|^2\,dx\\ &\quad + C\int_{B_{\bar R}} |D(g_k(V)-1)_+)|^2\varphi^2\,dx.\end{aligned} \tag{7.5}$$

为了估计上述右端项，对于第一项，我们使用 (7.4) 和 (7.3) 得到

$$\int_{B_{\bar R}} |(g_k(V)-1)_+|^2|D\varphi|^2\,dx \le \frac{C}{(R-r)^2}\int_{A(k,R)} (g_k(V)-1)^2\,dx, \tag{7.6}$$

而对于第二项，我们应用链式法则以及不等式 (7.4) 和 (6.5) 得到

$$\begin{aligned}\int_{B_{\bar R}} |D(g_k(V)-1)_+)|^2\varphi^2\,dx &\le \int_{A(k,\bar R)} |Dg_k(V)|^2|DV|_2^2\,dx\\ &\le H^2 \sup_{\mathbb{S}^{N-1}} g_k^2 \int_{A(k,\bar R)} |DV|_2^2\,dx.\end{aligned} \tag{7.7}$$

¯为了进一步估计最后一个积分，我们使用 Caccioppoli 不等式 (5.4)，取 $\rho = R < R$，从而得到

$$H^2 \sup_{\mathbb{S}^{N-1}} g_k^2 \int_{A(k,\bar R)} |DV|_2^2\,dx \le \frac{C}{(R-r)^2} \sup_{\mathbb{S}^{N-1}} g_k^2 \int_{A(k,R)} |V|^2\,dx. \tag{7.8}$$

此外，我们注意到 $g_k(V) \ge 1$ 在 $A(k,R)$ 上成立，因此 g_k 的 1 次齐次性意味着

$$|V| = \frac{|V|}{g_k(V)}\,g_k(V) \le \sup_{z\neq 0}\frac{|z|}{g_k(z)}\,g_k(V) \le \frac{g_k(V)}{\inf_{\mathbb{S}^{N-1}} g_k}. \tag{7.9}$$

由 (7.8)、(7.9) 和 (6.6) 可知，(7.7) 化简为

$$\int_{B_{\bar R}} |D(g_k(V)-1)_+)|^2\varphi^2\,dx \le \frac{C}{(R-r)^2}\int_{A(k,R)} g_k^2(V)\,dx,$$

将其代入（7.5），并结合（7.6），得到

$$\begin{aligned}\left(\int_{A(k,r)} |g_k(V)-1|^{2^*}\,dx\right)^{\frac{2}{2^*}} &\le \frac{C}{(R-r)^2}\int_{A(k,R)} g_k^2(V) + (g_k(V)-1)^2\,dx\\ &\le \frac{C}{(R-r)^2}\left(\int_{A(k,R)} (g_k(V)-1)^2\,dx + |A(k,R)|\right),\end{aligned} \tag{7.10}$$

其中常数为 $C = C(H)$。

现在令 $0 < h < k$，并注意到

$$g_h(V(x)) - 1 \ge \inf_{\{G\ge k\}} (g_h - 1) \qquad \text{for } x \in A(k,R),$$

因此（6.7）得出

$$\frac{1}{C}\,\min\left\{\left(\frac{k}{h}-1\right)^{H},\left(\frac{k}{h}-1\right)^{\frac{1}{H(H+1)}}\right\}^{2}\,|A(k,R)|\le\int_{A(k,R)}(g_h(V)-1)^2\,dx,$$

因此

$$|A(k,R)|\le\frac{C}{\left(\frac{k}{h}-1\right)^{2H}}\int_{A(k,R)}(g_h(V)-1)^2\,dx\qquad\text{if}\quad h<k<2\,h. \tag{7.11}$$

将此估计代入（7.10）可得 $0<h<k<2\,h$

$$\begin{aligned}&\left(\int_{A(k,r)}|g_k(V)-1|^{2^*}\,dx\right)^{\frac{2}{2^*}}\\&\le\frac{C}{(R-r)^2}\int_{A(k,R)}(g_k(V)-1)^2+\frac{C}{\left(\frac{k}{h}-1\right)^{2H}}\,(g_h(V)-1)^2\,dx\\&\le\frac{C}{\left(\frac{k}{h}-1\right)^{2H}(R-r)^2}\int_{A(h,R)}(g_h(V)-1)^2\,dx,\end{aligned} \tag{7.12}$$

其中，在第二个不等式中，我们用到了这一事实：

$$A(k,R)\subseteq A(h,R)\quad\text{as well as}\quad g_h\ge g_k\quad\text{for all } h\le k \tag{7.13}$$

以及界

$$\left(\frac{k}{h}-1\right)^{-2H}\ge 1\qquad\text{for } 0<h<k<2h.$$

估计式（7.12）结合（7.11）可进行 De Giorgi 型迭代。为完整起见，我们在此给出其证明。对于 $0<h<k<2h$，应用 Hölder 不等式、（¨（7.12）、（7.11）和（7.13），得到

$$\begin{aligned}\int_{A(k,r)}(g_k(V)-1)^2\,dx&\le|A(k,r)|^{\frac{2}{N}}\left(\int_{A(k,r)}|g_k(V)-1|^{2^*}\,dx\right)^{\frac{2}{2^*}}\\&\le\frac{C\,|A(k,r)|^{\frac{2}{N}}}{\left(\frac{k}{h}-1\right)^{2H}(R-r)^2}\int_{A(h,R)}(g_h(V)-1)^2\,dx\\&\le\frac{C}{\left(\frac{k}{h}-1\right)^{2H(1+2/N)}(R-r)^2}\left(\int_{A(h,R)}(g_h(V)-1)^2\,dx\right)^{1+\frac{2}{N}}.\end{aligned} \tag{7.14}$$

令 $M>0$ 为待选取的，并令 $n\ge 0$

$$k_n=M\,(1-2^{-(n+1)}),\qquad r_n=\frac{R}{2}+\frac{R}{2^{n+1}},\qquad X_n=\int_{A(k_n,r_n)}(g_{k_n}(V)-1)^2\,dx,$$

使得 l $\operatorname{im}_{n\to\infty}k_n=M$ 且 $\lim_{n\to\infty}r_n=R/2$。经简单计算可得 t

$$k_n\le k_{n+1}\le 2\,k_n,\qquad\frac{k_{n+1}}{k_n}-1\ge\frac{1}{2^{n+2}},\qquad(r_n-r_{n+1})^2=\frac{R^2}{4^{n+2}},$$

因此（7.14），取可行选项 $k=k_{n+1}$ 和 $h=k_n$ 可得

$$X_{n+1}\le\frac{C}{R^2}\,b^n\,X_n^{1+2/N},$$

对于某些正的 $b=b(H,N)$ 和 $C=C(H,N)$。

由 [22,引理 7。1], 可得

$$X_0 \le \frac{R^N}{C^{N/2}\, b^{N^2/4}} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} X_n = 0. \tag{7.15}$$

此外，由 $X_n \to 0$ 可得

$$\int_{A(M,R/2)} (g_M(V) - 1)^2\, dx = 0$$

这又由（7.4）推出 F（Du） $\le M$几乎处处成立于 $B_{R/2}$。我们利用这一信息，明确写出（7.15）中的推论。由于 $r_0 = R$ 且 $k_0 = M/2$，可得

$$\int_{A(M/2,R)} (g_{M/2}(V) - 1)^2\, dx \le c\, R^N \quad \Longrightarrow \quad \sup_{B_{R/2}} F(Du) \le M, \tag{7.16}$$

对某个 $c = c$（H， N） > 0。接下来需要适当选取 $M > 0$，使得（7.16）中的第一个不等式成立。我们的目标是用 G的上界来估计$g_{M/2}$ 的上界。为得到后者，我们回顾一下，由（2.7）可得以下凸性不等式

$$F(z) \le (DF(z), z) \qquad \forall\, z \in \mathbb{R}^N$$

成立。 我们选取 $z = DF^{-1}$（y），然后利用的拟对称性（2.3） DF^{-1}得到

$$G(y) \le \big(y, DF^{-1}(y)\big) \le |DF^{-1}(y)|\, |y| \le C\, |DF^{-1}(w)|\, |y|\, \eta_H\left(\frac{|y|}{|w|}\right),$$

对于某个 $C = C(H, N) > 0$，且对所有 $y \in \mathbb{R}^N$, $w \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ 均成立。任取满足 $|z| = 1$ 的 z，并令 $w = DF(z)$，得到

$$G(y) \le C\, |y| \inf_{|z|=1} \eta_H\left(\frac{|y|}{|DF(z)|}\right).$$

此外，归一化条件（7.2）意味着 $1/|DF(z)| \le 1$ 对所有 z 满足 $|z| = 1$，结合 η_H的单调性，可知前述不等式可写为

$$G(y) \le C\, |y|\, \eta_H(|y|) = C\, \eta_{H+1,1+\frac{1}{H}}(|y|) \qquad \forall\, y \in \mathbb{R}^N.$$

取 $y = \dfrac{z}{g_{M/2}(z)}$，根据 $g_{M/2}$ 的定义，得到

$$\frac{M}{2} = G\left(\frac{z}{g_{M/2}(z)}\right) \le C\, \eta_{H+1,1+\frac{1}{H}}\left(\frac{|z|}{g_{M/2}(z)}\right),$$

将其关于 $g_{M/2}(z)$ 求解，再由（2.19）和（2.20）可得

$$g_{M/2}(z) \le \frac{C\, |z|}{\eta^{-1}_{H+1,1+\frac{1}{H}}(M)} \le C\, |z|\, \eta_{\frac{1}{H+1},\frac{H}{H+1}}(1/M).$$

因此

$$\int_{A(M/2,R)} (g_{M/2}(V) - 1)^2\, dx \le \int_{B_R} g^2_{M/2}(V)\, dx \le C\, \eta^2_{\frac{1}{H+1},\frac{H}{H+1}}(1/M) \int_{B_R} |V|^2\, dx.$$

为满足（7.16）的假设，我们于是可以选择 M 使得

$$C\, \eta^2_{\frac{1}{H+1},\frac{H}{H+1}}(1/M) \int_{B_R} |V|^2\, dx \le c\, R^N,$$

即，重新整理并再次使用（2.19），

$$\left(\fint_{B_R} |V|^2\,dx\right)^{\frac12} \le \frac{c}{\eta_{\frac{1}{H+1},\frac{H}{H+1}}(1/M)} = c\,\eta^{-1}_{H+1,1+\frac1H}(M)$$

对于某个 $c = c(H,\ N) > 0$，利用（2.20）可直接解得

$$M \ge C\,\eta_{H+1,1+\frac1H}\left(\left(\fint_{B_R} |V|^2\,dx\right)^{\frac12}\right).$$

现在回顾一下，根据（3.8）有

$$\left(\fint_{B_R} |V|^2\,dx\right)^{\frac12} \le C\,\eta_{\frac{H}{H+1},\frac{1}{H+1}}\left(\fint_{B_{2R}} F(Du)\,dx\right).$$

于是，由于（2.21）以及再次利用（2.20），只需满足

$$M \ge C\,\eta_{H+1,1+\frac1H}\circ\eta_{\frac{H}{H+1},\frac{1}{H+1}}\left(\fint_{B_{2R}} F(Du)\,dx\right) = C\,\eta_H\left(\fint_{B_{2R}} F(Du)\,dx\right). \tag{7.17}$$

选择 M 使得（7.17）中的等式成立，由（7.16）可得 $F(Du) \le M$ 在 $B_{R/2}$中，且估计为

$$\sup_{B_{R/2}} |F(Du)| \le C\,\eta_H\left(\fint_{B_{2R}} F(Du)\,dx\right).$$

于是可以去掉假设（7.2），从而对于一般的 $i_F > 0$,

$$\sup_{B_{R/2}} |F(Du)| \le C\,i_F\,\eta_H\left(\frac{1}{i_F}\fint_{B_{2R}} F(Du)\,dx\right). \tag{7.18}$$

接下来，我们利用这一估计的不变性。对于任意 $\lambda > 0$，函数$u_\lambda(x) = \lambda\,u(x)$ 是 Ω 中泛函 J_λ 的一个局部极小化子，其被积函数为

$$F_\lambda(z) = F(z/\lambda).$$

特别地，(7.18) 对于这样的 F_λ，u_λ 也成立，即

$$\sup_{B_{R/2}} |F_\lambda(Du_\lambda)| \le C\,i_{F_\lambda}\,\eta_H\left(\frac{1}{i_{F_\lambda}}\fint_{B_{2R}} F_\lambda(Du_\lambda)\,dx\right). \tag{7.19}$$

注意，F_λ 仍然是 H-拟一致凸的，并且

$$i_{F_\lambda} = \frac{1}{\lambda}\inf_{|z|=1}\left|DF\left(\frac{z}{\lambda}\right)\right|. \tag{7.20}$$

对于任意 z，w 单位范数的向量，先将畸变估计 (2.3) 应用于向量 z/λ，w，再应用于 w，z/λ，得到

$$\left|DF\left(\frac{z}{\lambda}\right)\right| \le C\,|DF(w)|\,\eta_H(1/\lambda) \quad \text{as well as} \quad |DF(w)| \le C\left|DF\left(\frac{z}{\lambda}\right)\right|\eta_H(\lambda),$$

分别地，因此

$$\frac{i_F}{C\,\eta_H(\lambda)} \le \left|DF\left(\frac{z}{\lambda}\right)\right| \le C\,i_F\,\eta_H(1/\lambda)$$

对所有 $|z| = 1$。对这样的 z 取下确界，并利用（7.20）可得

$$\frac{i_F}{C\,\eta_H(\lambda)\,\lambda} \le i_{F_\lambda} \le C\,i_F\,\frac{\eta_H(1/\lambda)}{\lambda}.$$

由于 DF 是 H^{N-1}-拟共形的，因此它也是局部 $1/H$-H¨older连续的，映射 $t \mapsto |DF(t\,z)|$也如此。因此， $\lambda \mapsto i_{F_\lambda}$ 在 $]0$上连续，因为 $+\infty[$, 是等度连续函数的下确界。此外，它满足

$$\lim_{\lambda\downarrow 0} i_{F_\lambda} \geq \frac{i_F}{C} \lim_{\lambda\downarrow 0} \frac{1}{\eta_H(\lambda)\,\lambda} = \infty \quad \text{as well as} \quad \lim_{\lambda\uparrow\infty} i_{F_\lambda} \leq C\, i_F \lim_{\lambda\uparrow\infty} \frac{\eta_H(1/\lambda)}{\lambda} = 0.$$

由介值定理，我们便可选取 λ ，使得

$$\frac{1}{i_{F_\lambda}} \fint_{B_{2R}} F_\lambda(Du_\lambda)\,dx = \frac{1}{i_{F_\lambda}} \fint_{B_{2R}} F(Du)\,dx = 1.$$

对于这样的 λ 及相应的 u_λ， F_λ，式（7.19）变为（7.1），因为

$$\sup_{B_{R/2}} F_\lambda(Du_\lambda) = \sup_{B_{R/2}} F(Du) \quad \text{as well as} \quad i_{F_\lambda} = \fint_{B_{2R}} F(Du)\,dx,$$

and

$$\eta_H\left(\frac{1}{i_{F_\lambda}} \fint_{B_{2R}} F_\lambda(Du_\lambda)\,dx\right) = \eta_H(1) = 1.$$

由此便得到了光滑情形下的结论。

为去除 F 和 u的光滑性假设，令 F_n 和 u_n 为由引理 4.1得到的正则化近似。于是，我们可以对 F_n、 u_n使用与之前相同的论证，从而得到

$$\sup_{B_{R/2}} |F_n(Du_n)| \leq C \fint_{B_{2R}} F_n(Du_n)\,dx. \tag{7.21}$$

现在注意到，式（4.1）使我们可以假设（取子序列后） $DF_n(Du_n) \to DF(Du)$ 在 B_{2R}中几乎处处逐点收敛；而命题 2.6-*(4)* 保证 $DF_n^{-1} \to DF^{-1}$ 局部一致收敛，因此 $Du_n \to Du$ 和 $F(Du_n) \to F(Du)$ 在 B_R中也几乎处处逐点收敛。结合这一观察及式（4.1）中的第一个估计，我们可以在式（7.21）中取极限，从而再次得到该结论。 □

References

[1] J. D. Anderson, M. K. Vamanamurthy and M. Vuorinen, 共形不变量、拟共形映射与特殊函数。载于 *Quasiconformal space mappings*, 第1–19页, 数学讲义, 第1508卷, Springer, 柏林, 1992 10 。, G. De Philippis, [2] A. Arroyo-Rabasa J. Hirsch, F. Rindler and A. Skorobogatova, 满足偏微分方程约束的测度的高阶可积性, arXiv预印本 2106 03077 7 。。, , 单调映射是拟共形的。 [3] K. Astala T. Iwaniec and G. J. Martin $\mathbb{R}^N$ *Methods Appl.* ( ), –。, *Anal.* **15** 2008 31 37 10 12

[4] K. Astala , T. Iwaniec and G. J. Martin, *Elliptic Partial Differential Equations and Quasiconformal Mappings in the Plane*, 《普林斯顿数学丛书》第48卷, 普林斯顿大学出版社, 普林斯顿和牛津, 2009 4 17 。„非线性弹性力学中的凸性条件与存在性定理, [5] J. M. Ball *Arch. Rational Mech. Anal.* **63** 1977 337 403 ( ), –。[6] L. Beck G. Mingione , 利普希茨界与非一致椭圆性, *Commun. Pure Appl. Math.* **73** (2020 944 1034 5 8), –。„ [7] M. Bonk J. Heinonen and E. Saksman, 拟共形雅可比问题, 载于 *In the tradition of Ahlfors and Bers III* **355**, 77 96, 2004 , , 《当代数学》–美国数学会, 3 罗得岛州普罗维登斯, 。[8] P. Bousquet and L. Brasco , 退化问题极小值的全局利普希茨连续性, *Math.* ( ), –。, *Ann.* **366** 2016 1403 1450 8

[9] P. Bousquet , L. Brasco and C. Leone, 具有非标准增长条件的奇异正交各向异性泛函, arXiv预印本 2211 07308 8 。。, 关于多重积分标量变分问题中的拉夫连季耶夫现象, *J. Funct. Anal.* **226** (2014年), [10] P. Bousquet C. Mariconda and G. Treu 5921–5954。20

[11] M. Cozzi, A. Farina and E. Valdinoci, 奇异、退化、各向异性偏微分方程的梯度界与刚性结果, *Comm. Math. Phys.* **331** (2014 189 214 8), –。,在最小数据和区域正则性条件下椭圆问题
[12] A. Cianchi and V. Maz'ya
的全局梯度估计, *Commun. Pure Appl. Anal.* **14** (2015 285 311 3 8), –。„一
[13] A. Cianchi and V. Maz'ya
类拟线性椭圆方程的全局Lipschitz正则性,
Comm. ( ), –。
Partial Differential Equations **36** 2011 100 133 8
[14] A. Cianchi and V. Maz'ya
, 一类非线性椭圆系统的梯度全局有界性, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **212** (
2014 129 177 8), –。„欧拉方程作为微分包含, *Ann. Math.* **170** (
[15] C. De Lellis and L. Székelyhidi
2009 1417 1436 6), –。„没有上增长条件的变分法泛函的欧拉-拉格朗日方程, *SIAM J. Control Optim.* **48** (
[16] M. DeGiovanni and M. Marzocchi
2009 2857 2870 18), –。„同胚群与紧开拓扑,
[17] J. J. Dijkstra
Amer. Math. Monthly **112** (2005 910 912 14), –。„补偿紧性与一般守恒律系统,
[18] R. J. DiPerna
Trans. Amer. Math., ( ), –。
Soc. **292** 1985 383 420 6
[19] D. T. Donaldson and N. S. Trudinger,
J. Funct. 奥利茨-索博列夫空间与嵌入定理,
Anal. **8** 1971 52 75 17 18
( ), –。,[20] M. Giaquinta , *Multiple Integrals in the Calculus of Variations and Nonlinear Elliptic Systems*, 《数学研究
年刊》, 普林斯顿大学出版社, 普林斯顿, 1983 26。增长条件与正
[21] M. Giaquinta
则性：一个反例。 *Manuscr. Math.* **59** (1987年), 245–248。2[22] E. Giusti, *Direct Methods in the Calculus of Variations*, 世界科学出版
公司, 新加坡, 2003年。33[23] U. Guarnotta and S. Mosconi, 一致椭圆性的一般概念及散度形式椭圆方程应力场的正则性。即将在
Anal. PDE(2023 6 7 8 9 11 14 18 22 25)发表。„„„„„„„„
[24] A. Guerra B. Raiță and M. Schrecker
通过非线性椭圆估计研究集中效应的补偿现象, arXiv预印本 2112 10657 7。。, 关于某些
[25] P. Hartman and G. Stampacchia *Acta*
非线性椭圆微分泛函方程, *Math.* **115** 1966 271 310 ( ), –。
8
[26] T. Iwaniec , 线性畸变下半连续性的失效, *Bull. London Math. Soc.* **30** (1998 55 61 15), –。,
[27] T. Iwaniec and J. J. Manfredi
p *Rev. Math.* 平面上 -调和函数的正则性, ( ), –。
Iberoam. **5** 1989 1 19 7
[28] B. Kirchheim , S. Müller and V. Šverák, 通过矩阵空间几何研究非线性偏微分方程。载于
Geometric analysis and Nonlinear partial differential equations, S. Hildebrandt和H. Karcher编。施普林格出版社,
2003, 347 395 6–。„单调映射的拟共形几何, *J. London Math. Soc.* **75** (2007年), 391–
[29] L. V. Kovalev
408 2 4 10 12 。„„具有凸势函数的映射与拟共形雅可比问题, *Illinois J. Math.* **49** (
[30] L. V. Kovalev and D. Maldonado
2005 1039 1060 1 2 3 11 12 14 15), –。„„„第版, 《数学研究生教材》第181卷, 美国数学会, 罗
[31] G. Leoni *A first Course in Sobolev Spaces* 2
得岛州普罗维登斯, 2017 25。„Ladyzhenskaya和Ural¨A ¨Yteva椭圆方程自然条
[32] G. Lieberman
件的自然推广, *Comm. Partial Differential Equations* **16** (
1991 311 361 3 8), –。„标量情形下变分问题存在不连续解的一个
[33] P. Marcellini
例子, 佛罗伦萨Dini数学研究所预印本, 第 11, 1987 2号, 。„带约束的凸积分及其在相变和偏
[34] S. Müller and V. Šverák
微分方程中的应用, *J. Eur. Math. Soc.* **1** (1999 393 422 6), –。„二阶凸分
[35] R. T. Rockafellar
析。 *J. Nonlinear Convex Anal.* **1** (
2000 1 16 12), –。„关于变分法中的某些正则多
[36] G. Stampacchia
重积分问题, *Comm. Pure*, ( ), –。,
Appl. Math. **16** 1963 383 421 8
[37] L. Tartar , 补偿紧性及其在偏微分方程中的应用。载于
Nonlinear
analysis and mechanics: Heriot-Watt Symposium Vol. IV **39** , , 《研究笔记数学丛书》, 皮
特曼出版社, 波士顿, 马萨诸塞州, 1979, 136 212 6–。,
[38] J. Väisälä
Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings 1971 9, 施普林格出版社, 柏林, 。„向量
[39] J. Van Schaftingen
场与消去型线性微分算子的极限索伯列夫不等式, *J. Eur. Math. Soc.* (JEMS) 15 (2013年), 877–921。6

[40] G. S. Watson，回归分析中的序列相关。 *I. Biometrika* **42** (1955), 327–341. 12

（G. MARINO） Institut für Mathematik
Universität AugsburgUniversitätsstrasse 12a,
86159 Augsburg, Germany*Email address*:
greta.marino@uni-a.de

(S. MOSCONI) Department of Mathematics and Computer Science
University of CataniaViale A. Doria 6, I-95125 Catania, Italy
Email address: sunra.mosconi@unict.it