arXiv:2304.00661v1 [math.DS] 3 Apr 2023

关于非一致元胞自动机的伊甸园定理

XUAN KIEN PHUNG

Abstract. 我们为全移位以及可和群宇宙上的非一致元胞自动机，建立了著名伊甸园定理的若干推广。特别是，我们的结果定量描述了非一致元胞自动机的部分预单射性与其像的大小之间的关系。此外，对于定义在强不可约有限型子移位上的多维元胞自动机，我们还得到了一个加强的满射单射性结果。

1. 引言

著名的元胞自动机（CA）伊甸园定理刻画了可和群，并指出满射性（一种全局性质）与预单射性（一种局部性质）等价 [22], [21], [10], [1]。伊甸园定理也被推广到符号簇的自同态，以处理更一般的字母表结构 [8], [29]。伊甸园定理的其他最新进展与 Gottschalk 针对元胞自动机的满射单射性猜想 [17] 以及群环的 Kaplansky猜想 [19] 有关（参见 [26], [31], [32], [33]）。当元胞自动机定义中的一致性不再成立时，其宇宙中的元胞可以遵循不同的转移规则。在这种情况下，无论是有意为之还是由非预期的扰动所致，元胞自动机的许多有趣且基本的性质仍得以保留，例如在可和群或剩余有限群宇宙上的满射单射性、闭像性质、阴影性质以及若干可判定性质（参见 [28], [30], [27], [34]）。然而，伊甸园定理并不适用于非一致元胞自动机（NUCA），如下例所示（见 [30, 例 14。3]）：一个简单的一维单射非一致元胞自动机并非满射。

例 1.1. 令 $A=\{0,1\}$，并考虑非一致元胞自动机 $\tau\colon A^{\mathbb{Z}}\to A^{\mathbb{Z}}$，它对每个 $x\in A^{\mathbb{Z}}$定义如下：若 $n\leqslant -1$，则 $\tau(x)(n)=x(n+1)$；若 $n=0$，则 $\tau(x)(n)=x(n)$；若 $n\geqslant 1$，则 $\tau(x)(n)=x(n-1)$。那么 τ是单射（因而是预单射），因为 $\tau(x)=y$意味着，对于 $n\leqslant 0$，有 $x(n)=y(n-1)$；对于 $n\geqslant 0$，有 $x(n)=y(n+1)$。另一方面，τ不是满射，因为我们可以验证

$$\operatorname{Im}\tau=\{y\in A^{\mathbb{Z}}\colon y(-1)=y(0)=y(1)\}.$$

2020 *Mathematics Subject Classification.* 37B10、37B15、37B50、43A05、43A07、68Q80。
Key words and phrases. 伊甸园定理、Myhill 性质、满射单射性、预单射性、非一致元胞自动机、平均熵、平均维数、Banach密度。

尽管如此，我们证明非一致元胞自动机的动力学并非完全混乱，上述例子展示了预单射非一致元胞自动机的最坏情形。更确切地说，本文的主要目标是在可平均群宇宙上建立伊甸园定理的若干最优推广（定理 A、定理 B、定理 C），定量描述非一致元胞自动机的部分预单射性与其像的平均熵或平均维数之间的精确关系。此外，我们还为强不可约有限型子移位上的多维元胞自动机获得了一项更精细的满射单射性结果（定理 D）。

为陈述主要结果，我们先回顾符号动力系统的基本概念。给定一个离散集 A 和一个群 G，构型 $c \in A^G$ 是一个映射$c\colon G \to A$，若存在某个有限子集 $E \subset G$ 使得 $x|_{G\setminus E} = y|_{G\setminus E}$，则 $G \to A$ 和 x 渐近。伯努利移位作用 $G \times A^G \to A^G$ 定义为$(g,x) \mapsto gx$，其中 $(gx)(h) = x(g^{-1}h)$ 适用于 g, $h \in G$, $x \in A^G$。我们在全移位 A^G 上赋予积离散拓扑。依循冯·诺伊曼和乌拉姆的一个想法 [24], , 群 G （宇宙）和集合A （字母表）上的元胞自动机（CA）是一个自映射 $A^G \circlearrowleft$，它是 G-等变且一致连续的（参见 [5], [18]）。我们将元素 $g \in G$ 视为宇宙中的元胞。当不同元胞按照不同的局部转移映射演化时，我们便得到非一致元胞自动机（NUCA）（[30,定义 1.1], [11], [12]）：

定义 1.2. 设 M 是群 G 的子集， A 是一个集合。令 $S = A^{A^M}$ 为所有映射 $A^M \to A$ 的集合。给定 $s \in S^G$，非一致元胞自动机 $\sigma_s\colon A^G \to A^G$ 定义为：对 $x \in A^G$， $g \in G$，有 $\sigma_s(x)(g) = s(g)((g^{-1}x)|_M)$。

集合 M 称为记忆集， $s \in S^G$ 称为 σ_s 的局部转移映射配置。因此，每个元胞自动机都是一种具有有限记忆和常值局部转移映射配置的非一致元胞自动机。若对于渐近的 x、 $y \in A^G$， $\sigma_s(x) = \sigma_s(y)$ 蕴含 $x = y$，则称非一致元胞自动机 σ_s 是预单射的。

1.1. 主要结果。我们的第一个结果是适用于非一致元胞自动机类 $\mathrm{NUCA}_c(G$、$A)$ 的伊甸园定理的一个版本。该类由具有有限记忆且其局部转移映射配置在宇宙 G 上渐近为常值的非一致元胞自动机构成，字母表为 A。该结果指出，这类非一致元胞自动机的像包含一个非空开子集，当且仅当该非一致元胞自动机限制在全移位的某个非空开子集上时是预单射的。

定理 A. 设 G 是一个可和群， A 是一个有限字母表。那么对于任意 $\tau \in$ 非一致元胞自动机$_c(G,A)$，以下条件等价：

(i) 对某个非空开子集 $U \subset A^G$， $\tau|_U$ 是预单射。(ii) $\mathrm{Im}\,\tau$ 包含 A^G的一个非空开子集。

下面的例子表明，定理 A 是最优的：在 τ 是具有有限记忆集的任意非一致元胞自动机这一一般假设下，即使 τ 是单射或满射，这两个蕴含关系也都不成立。

例 1.3. 令 $A = \{0,1\}$，并考虑非一致元胞自动机 $\tau\colon A^{\mathbb{Z}^2} \to A^{\mathbb{Z}^2}$，其对每个 $x \in A^{\mathbb{Z}^2}$ 定义为 $\tau(x)(m,n) = x(m,n+1)$，若 $n \leqslant m-1$,

$\tau(x)(m,m) = x(m,m)$，以及 $\tau(x)(m,n) = x(m,n-1)$，若 $n \geqslant m+1$。然后，如例 1.1 中所示，我们发现 τ 是单射的，但

$$\operatorname{Im}\tau = \{y \in A^{\mathbb{Z}^2} : y(m,m-1) = y(m,m) = y(m,m+1) \text{ for all } m \in \mathbb{Z}\}$$

这意味着 Im τ不能包含 $A^{\mathbb{Z}^2}$ 的任何非空开子集。

类似地，考虑由 $\sigma(x)(m、n) = x(m、n-1)$（当 $n \leqslant m-1$、$\sigma(x)(m、m) = x(m、m-1) + x(m、m) + x(m、m+1)$（模 2）时）以及 $\sigma(x)(m、n) = x(m、n+1)$（当 $n \geqslant m+1$ 时）给出的非一致元胞自动机 σ：$A^{\mathbb{Z}^2} \to A^{\mathbb{Z}^2}$。不难看出，$\sigma$ 是满射。然而，对于 $m \in \mathbb{Z}$，我们有 $\sigma(z_m) = \sigma(0^{\mathbb{Z}^2}) = 0^{\mathbb{Z}^2}$，其中当 $n \in \{m、m-1\}$ 时，$z_m(m、n) = 1$；否则为 $z_m(m、n) = 0$。特别地，对于任何非空开子集 $U \subset A^{\mathbb{Z}^2}$，$\tau|_U$ 都不可能是预单射。

为处理任意非一致元胞自动机，我们建立如下适用于非一致元胞自动机的 Myhill 性质扩展，它也推广了定理 A 中的蕴含关系 (i) $\Longrightarrow$ (ii)。本质上，非一致元胞自动机的像的大小，以其上自然 $\mathcal{F}$-熵 $\operatorname{ent}_{\mathcal{F}}$（参见第 2.4 节）衡量，会随着该非一致元胞自动机的限制为预单射的子集的大小线性增长；该子集的大小以某种上自然 $\mathcal{F}$-密度 $\overline{d}_{\mathcal{F}}$（参见第 2.3 节）表示。

定理 B. 设 A 为一个有限字母表，S 为可和群 G的真子集。固定 $p \in A^S$ 和 $U = \{p\} \times A^{G\setminus S}$。假设$\tau$：$A^G \to A^G$ 是一个具有有限记忆的非一致元胞自动机，且 $\tau|_U$是预单射的。那么对于 G的任意 Følner 网 $\mathcal{F}$，都有 $\operatorname{ent}_{\mathcal{F}}(\operatorname{Im}\ \tau|_U) \geqslant (1 - \overline{d}_{\mathcal{F}}(S))\log\ |A|$。

我们由定理 B 推导出元胞自动机的经典 Myhill 性质，过程如下。若 $S = \varnothing$ 则 $\overline{d}_{\mathcal{F}}(S) = 0$ 且 τ是预单射。若进一步 τ是一个元胞自动机，且 Im τ是闭子移位，则根据定理 B，$\operatorname{ent}_{\mathcal{F}}(\operatorname{Im}\ \tau) = \log\ |A|$达到最大，因此由命题 4.2], 可得 $\operatorname{Im}\tau = A^{G}$，即 τ 是满射。

下一个例子表明，定理 B 的逆命题不成立。

例 1.4. 设 τ：$\{0,1,2\}^{\mathbb{Z}} \to \{0,1,2\}^{\mathbb{Z}}$是由 $\tau(x)(n) = x(n)$ 定义的非一致元胞自动机，当 $x(n) \neq 2$时取此值，否则取 $\tau(x)(n) = 0$。那么 Im $\tau = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$且 $\operatorname{ent}_{\mathcal{F}}$(Im τ) = log $2 > 0$。然而，当限制在任意形如 $\{p\} \times \{0,1,2\}^{\mathbb{Z}\setminus S}$的子集上时，$\tau$都不是预单射，其中 $S \subsetneq \mathbb{Z}$且 $p \in \{0,1,2\}^S$。

当字母表 A 是一个向量空间时，全移位 A^G 自然也是一个向量空间，其运算按分量进行；若 NUCA τ：$A^G \to A^G$是线性映射，或者等价地说，其局部转移映射是线性的，则称其为线性 NUCA。具有有限记忆集的这类线性 NUCA 是有趣的动力系统对象，因为它们满足影随性质 [27], [35]。

我们的下一个结果是线性 NUCA 的伊甸园定理的一个定量版本，它推广了线性 CA 的 [3]，并将线性 NUCA 的部分预单射性（以 $\overline{d}_{\mathcal{F}}$ 或上 Banach 密度 $\overline{D}_G$ 衡量，见第 2.3 节）与 NUCA 像的上 $\mathcal{F}$-自然和下 Banach 平均维数 $\underline{\operatorname{mdim}}_{\mathcal{F}}$、mDim（见第 2.5 节）联系起来。

定理 C. 设 G 为一个无限可数可和群，且 A为一个有限维向量空间字母表。那么，对于所有具有有限记忆集的线性 NUCAτ： $A^G \to A^G$，以下结论成立：

(i) 若 $\tau|_U$ 在某个 $S \subset G$ 下是预单射，其中 $U = \{0\}^S \times A^{G\setminus S}$，则对于 G 的每个 Følner 序列 $\mathcal{F}$，都有 $\mathrm{mdim}_{\mathcal{F}}(\mathrm{Im}\ \tau) \geqslant (1 - \overline{d}_{\mathcal{F}}(S))\dim\ A$。(ii) 若 $\dim\ A = 1$ 且 $\mathrm{mDim}(\mathrm{Im}\ \tau) > 1 - d$，则存在 $S \subset G$，使得 $\overline{D}_G(S) \leqslant d$，从而 $\tau|_U$ 在 $U = \{0\}^S \times A^{G\setminus S}$ 下是预单射。

特别地，对于具有有限记忆集的线性 NUCA，只需用 $\mathrm{mdim}_{\mathcal{F}}$ 替换平均熵，定理 B 仍然成立。

固定一个群 G 和一个有限字母表 A，子移位是 A^G 的任意 G-不变子集。若一个（闭）子移位 X 对某些有限子集 $D \subset G$（称为窗口）和 $\mathcal{P} \subset A^D$ 是有限型，则称其为有限型，其中子移位 X 由所有满足 $(gx)|_D \in \mathcal{P}$（对所有 $g \in G$）的 $x \in A^G$ 组成。若子移位 $X \subset A^G$ 对某个有限子集 $\Delta \subset G$ 是 Δ-不可约的，则称其为强不可约（见 [2], [37], [20], [14]）；这意味着对于所有 x、$y \in X$ 以及满足 $S\Delta \cap T = \varnothing$ 的有限子集 S、$T \subset G$，我们都可以找到 $z \in X$，使得 $z|_S = x|_S$ 且 $z|_T = y|_T$。

对于强不可约有限型子移位上的多维元胞自动机，我们得到如下对满射单射性的推广。该推广显著拓展了 [6, 定理 1.1]，因为我们仅假设 τ 限制在子移位的某个非空开子集上时是单射。

定理 D. 设 $G = \mathbb{Z}^d$、$d \geqslant 1$，且 A 是有限字母表。设$X \subset A^G$ 是包含一个周期构型的强不可约闭有限型子移位。假设 $\tau\colon X \to X$ 是一个元胞自动机，且 $\tau|_U$ 在 $U \subset X$ 这一非空开子集上是单射。那么 τ 是满射且预单射。

上述结果属于 Gottschalk 满射单射性猜想的丰富研究文献。该猜想指出，全移位上以有限字母表为符号集的每个单射元胞自动机都必须是满射（参见 [17]）。尽管这一猜想仍未解决，但根据 Gromov 的一项结果，它对一大类 sofic 群成立（参见 [16]）。针对 sofic 群宇宙，人们还得到了若干推广，其字母表更为一般，例如有限维向量空间（参见 [4]）和代数簇（参见 [31]）。

1.2. 论文的组织结构。在第 2 节中，我们汇集有关 Følner 网和可和群拟铺砌的预备定义与基本结果，并介绍全移位子集的自然平均熵、Banach 平均熵和平均维数的各种概念。随后在第 3 节中，我们讨论近乎单射性质，并给出定理 D 的证明（见定理 3.4）。第 4 节包含定理 A（见定理 4.8）和定理 B（见定理 4.2）的证明。最后，第 5 节给出线性 NUCA 的伊甸园定理（定理 C）的证明（见定理 5.3）。特别地，当 τ 的局部转移映射配置仅在一个零密度子集之外不同于常值配置时，我们得到定理 C.(i) 的一个更强版本（见定理 5.1）。

2. Preliminaries

2.1. 可和群与 Følner 网。冯·诺伊曼在 [23] 中引入了可和群。若群 G 存在 Følner 网，即存在一个由有向集 I 索引的族 $(F_i)_{i\in I}$，其中每个元素都是 G 的非空有限子集，并且满足（参见 [15]），则称群 G 为可和群。

$$\lim_{i\in I}\frac{|F_i\backslash F_i g|}{|F_i|}=0 \text{ for all } g\in G. \tag{2.1}$$

可和群的例子包括有限生成的次指数增长群和可解群。然而，所有包含一个与秩为 2 的自由群同构的子群的群都是非可和的。更多细节请参见例如[36]。

2.2. 边界集与内部集。给定群 G 的任意子集 F、M，我们将 F 的 M-边界定义为 $\partial_M F = FM\backslash F^{-M}$，其中 $F^{-M}=\{g\in F\colon\ gM\subset F\}$ 称为 F 的 M-内部子集。

2.3. 自然密度与 Banach密度。

定义 2.1. 设 G 是一个带有 Følner 网 $\mathcal{F}=(F_i)_{i\in I}$ 的可和群。对于每个子集 $S\subset G$，分别定义

$$\overline{d}_{\mathcal{F}}(S)=\limsup_{i\in I}\frac{|S\cap F_i|}{|F_i|},\quad \underline{d}_{\mathcal{F}}(S)=\liminf_{i\in I}\frac{|S\cap F_i|}{|F_i|}$$

分别为 S 在 G中的上自然 $\mathcal{F}$-密度和下自然 $\mathcal{F}$-密度。同样，我们分别定义

$$\overline{D}_G(S)=\limsup_{i\in I}\inf_{g\in G}\frac{|S\cap F_i g|}{|F_i|},\quad \underline{D}_G(S)=\liminf_{i\in I}\inf_{g\in G}\frac{|S\cap F_i g|}{|F_i|}$$

S 在 G中的上Banach密度和下Banach密度。

与上、下自然 $\mathcal{F}$-密度不同，以下标准引理（[13, 引理 2.9]）表明，Banach密度不依赖于 Følner 网的选取。

引理 2.2. 设 G 是一个带有 Følner 网 $\mathcal{F}=(F_i)_{i\in I}$的可和群。对于任意子集 $S\subset G$，有：

$$\overline{D}_G(S)=\limsup_{i\in I}\sup_{g\in G}\frac{|S\cap F_i g|}{|F_i|}=\inf_{F\subset G,|F|<\infty}\sup_{g\in G}\frac{|S\cap Fg|}{|F|},$$

$$\underline{D}_G(S)=\limsup_{i\in I}\sup_{g\in G}\frac{|S\cap F_i g|}{|F_i|}=\sup_{F\subset G,|F|<\infty}\inf_{g\in G}\frac{|S\cap Fg|}{|F|}.$$

我们还有以下基本性质。

引理 2.3. 设 S、T 是带有 Følner 网 $\mathcal{F}=(F_i)_{i\in I}$的可数可均群 G 的子集。那么

$$0\leqslant \underline{D}_G(S)\leqslant \underline{d}_{\mathcal{F}}(S)\leqslant \overline{d}_{\mathcal{F}}(S)\leqslant \overline{D}_G(S)\leqslant 1.$$

此外，我们有：

(i) $\overline{d}_{\mathcal{F}}(S\cup T)\leqslant \overline{d}_{\mathcal{F}}(S)+\overline{d}_{\mathcal{F}}(T)$ *and* $\overline{D}_G(S\cup T)\leqslant \overline{D}_G(S)+\overline{D}_G(T)$
(ii) $\overline{d}_{\mathcal{F}}(S)+\underline{d}_{\mathcal{F}}(G\backslash S)=1$ *and* $\overline{D}_G(S)+\underline{D}_G(G\backslash S)=1$

例 2.4. 令我们固定 $G=\mathbb{Z}$ 和一个子集 $S\subset G$。那么:
1. $\underline{D}_G(S)=\overline{D}_G(S)=0$ 若 S 是有限的或 $S=\{n^k\colon\ n\in\mathbb{Z}\}$ 其中 $k\geqslant 2$。
2. $\underline{D}_G(S)=\overline{D}_G(S)=\frac{1}{a}$ 若 $S=\{an+b\colon\ n\in\mathbb{Z}\}$ 其中 a、$b\in\mathbb{N}$ 和 $a>0$。

例 2.5. 设 $G=\mathbb{Z}^2$ 且设 $S\subset G$。则:
1. $\underline{D}_G(S)=\overline{D}_G(S)=0$ 若 S 包含在有限条直线的并集中，也就是说，
$S\subset\bigcup_{i=1}^n L_n$ 其中对于 $1\leqslant i\leqslant n$ 且对于某个 a_i、b_i、$c_i\in\mathbb{R}$,

$$L_i=\{(x,y)\in\mathbb{Z}^2\colon a_ix+b_iy+c_i=0\}.$$

2. $\underline{D}_G(S)=0$ 且 $\underline{D}_G(S)=1$ 若 $S=\mathbb{Z}^2\cap H$ 对任意半平面 $H\subset\mathbb{R}^2$均成立。

2.4. 自然平均熵与 Banach 平均熵。

定义 2.6. 设 G 是一个可和群，具有 Følner 网 $\mathcal{F}=(F_i)_{i\in I}$，且 A 是一个有限字母表。我们将子集 $X\subset A^G$ 的上自然平均 $\mathcal{F}$-熵和下自然平均 $\mathcal{F}$-熵分别定义为

$$\overline{\mathrm{ent}}_{\mathcal{F}}(X)=\limsup_{i\in I}\frac{|X_{F_i}|}{|F_i|},\qquad \underline{\mathrm{ent}}_{\mathcal{F}}(X)=\liminf_{i\in I}\frac{|X_{F_i}|}{|F_i|}.$$

类似地，我们分别将 X 的上 Banach 平均熵和下 Banach 平均熵定义为

$$\overline{\mathrm{Ent}}(X)=\limsup_{i\in I}\frac{|(gX)_{F_i}|}{|F_i|},\qquad \underline{\mathrm{Ent}}(X)=\liminf_{i\in I}\frac{|(gX)_{F_i}|}{|F_i|}.$$

同样，Banach 平均熵不依赖于 Følner 网。当 $\mathrm{ent}_{\mathcal{F}}(X)=\mathrm{ent}_{\mathcal{F}}(X)$，以及 $\overline{\mathrm{Ent}}(X)=\mathrm{Ent}(X)$ 成立时（例如，当 X 是一个子移位时），我们分别简记为 $\mathrm{ent}_{\mathcal{F}}(X)$ 和 $\mathrm{Ent}(X)$。

我们还可得到如下不等式链，与引理 2.3 中的结果相同:

引理 2.7. 设 S 是可和群 G 的一个子集，且该群具有 Følner 网 $\mathcal{F}$。设 $A\neq\varnothing$ 是一个有限字母表，且 $X\subset A^G$。则

$$0\leqslant\underline{\mathrm{Ent}}(X)\leqslant\underline{\mathrm{ent}}_{\mathcal{F}}(X)\leqslant\overline{\mathrm{ent}}_{\mathcal{F}}(X)\leqslant\overline{\mathrm{Ent}}(X)\leqslant\log|A|.$$

此外，若 $X\subset A^G$ 是一个子移位，则 $\underline{\mathrm{Ent}}(X)=\overline{\mathrm{Ent}}(X)$。 □

2.5. 自然平均维数与 Banach 平均维数。

定义 2.8. 设 G 是一个具有 Følner 网 $\mathcal{F}=(F_i)_{i\in I}$ 的可和群。设 A 是一个非平凡的有限维向量空间字母表。我们分别将子集 $X\subset A^G$ 的上自然平均 $\mathcal{F}$ 维数和下自然平均 $\mathcal{F}$ 维数定义为

$$\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathcal{F}}(X)=\limsup_{i\in I}\frac{\dim X_{F_i}}{|F_i|\dim A},\qquad \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathcal{F}}(X)=\liminf_{i\in I}\frac{\dim X_{F_i}}{|F_i|\dim A}.$$

类似地，我们分别将 X 的上 Banach 平均维数和下 Banach 平均维数定义为

$$\overline{\mathrm{mDim}}(X)=\limsup_{i\in I}\sup_{g\in G}\frac{\dim(gX)_{F_i}}{|F_i|\dim A},\qquad \underline{\mathrm{mDim}}(X)=\liminf_{i\in I}\inf_{g\in G}\frac{\dim(gX)_{F_i}}{|F_i|\dim A}.$$

与平均熵类似，我们有：

引理 2.9. 设 S 是可数可均群 G 的一个子集，且其具有 Følner 序列 $\mathcal{F}$。设 A 是一个非平凡的有限维向量空间。那么对于每个向量子空间 $X\subset A^G$，我们有

$$0\leqslant\underline{\mathrm{mDim}}(X)\leqslant\underline{\mathrm{mdim}}_{\mathcal{F}}(X)\leqslant\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathcal{F}}(X)\leqslant\overline{\mathrm{mDim}}(X)\leqslant\dim A.$$

此外，如果 $X\subset A^G$ 是线性子移位，则 $\mathrm{mDim}(X)=\mathrm{mDim}(X)$。 □

每当 $\mathrm{mdim}_{\mathcal{F}}(X)=\mathrm{mdim}_{\mathcal{F}}(X)$（分别地，$\mathrm{mDim}(X)=\mathrm{mDim}(X)$）时，我们就简记为 $\mathrm{mdim}_{\mathcal{F}}(X)$（分别地，$\mathrm{mDim}(X)$）。

2.6. 可和群的拟铺砌。若 $E\subset F$ 是有限集 F 的一个 $(1-\varepsilon)$-子集，则称 $E\subset F$ 为 $(1-\varepsilon)$-子集，当且仅当 $|E|>(1-\varepsilon)|F|$。设 G 是一个可数可均群，且 α、$\beta\in[0$、$1]$。若集合族 $T=\{(T_i$、$T_i^o\}_{i\in I}$ 满足以下条件，则称其为 G 的一个 α-不交且 β-覆盖拟铺砌：

(i) 对所有 $i\in I$，T_i^o 都是 T_i 的一个 $(1-\alpha)$-子集；(ii) 对 I 中所有 $i\neq j$，$T_i^o\cap T_j^o=\varnothing$；

(iii) $\underline{D}_G\left(\bigcup_{i\in I}T_i\right)\geqslant\beta$。

我们将需要以下对著名技术引理稍作精化的版本 [13, 引理 4.1]（另见 [25, I.§2. 定理 6]）。

引理 2.10. 设 G为一个可数可均群，具有一个由包含单位元的对称集组成的 Følner 序列$\mathcal{F}=(F_n)_{n\geqslant0}$。固定一个有限子集$M\subset G$ 和 $\varepsilon>0$。那么存在一个整数 $r>0$，使得对每个 $n_0>0$，我们都能找到一个 ε-不相交且 $(1-\varepsilon)$-覆盖的拟铺砌$T=\{(T_i,T_i^o)\}_{i\in I}$，其形状为 G，共有 r 个形状 $F_{n_1},\dots,F_{n_r}$，其中 $n_0<n_1<\cdots<n_r$，并且满足：对每个 $i\in I$，都有 $T_i^o=T_i^{-M}$。

证明。证明与 [13, 引理 4.1] 的证明类似，只需作相应调整：在归纳的每一步中，我们只需要求对所有 $i\in I$ 都有 $T_i^o=T_i^{-M}$。注意，根据 Følner 序列的性质，且由于 M 是 G 的一个固定有限子集，可以采用与证明 [13, 引理 4.1] 类似的构造来构造此类拟铺砌。□

引理 2.11. 设 α、$\beta\in[0$、$1]$。设 $T=\{(T_i$、$T_i^o)\}_{i\in I}$ 是可数可均群 G 的一个 $(1-\alpha)$-不交且 β-覆盖拟铺砌。那么，不交拟铺砌 $\{T_i^o\}_{i\in I}$ 是 G 的一个 $\alpha\beta$-覆盖。

证明。参见 [13, 引理 3.4] 的证明 □

3. Almost injective cellular automata

按照 [32], 的说法，如果对于每个有限群字母表 A，任何同时也是群同态（也称为群元胞自动机）的单射元胞自动机 $\tau\colon A^G \to A^G$ 都必为满射，则称群 G 弱可满射。如果对于每个有限字母表 A，所有单射元胞自动机 $\tau\colon A^G \to A^G$ 都是满射，则称群G 可满射。因此，sofic 群是可满射的，而 Gotschalk 可满射性猜想指出每个群都是可满射的。

我们从以下观察开始：它表明，在无限群宇宙上，群元胞自动机的限制是单射的，则可保证该群元胞自动机是单射的。

定理 3.1. 设 G 是一个无限群，A 是一个群字母表。假设 $\tau\colon A^G \to A^G$ 是一个群元胞自动机，且 $\tau|_U$ 是单射，其中$U \subset A^G$ 是一个非空开子移位。那么 τ 是单射的。此外，如果 G是一个弱可满群，且 A 是一个有限群，那么 τ 是满射的。

证明. 令 $\Gamma = \mathsf{Ker}\,\tau \subset A^G$，则 Γ 是一个有限型群子移位，因此是闭的。反设 τ 不是单射的。那么 $\Gamma^* = \Gamma \backslash \{1_A^G\}$ 非空。记 $U\Gamma^* = \{uv\colon u \in U, v \in \Gamma^*\}$。由于 $\tau|_U$是单射的，我们可推出

$$(U\Gamma^*) \cap U = \varnothing. \tag{3.1}$$

因此，$U\Gamma^* \subset \Sigma = A^G \backslash U$。特别地，对于任意的 $x \in \Gamma^*$，我们可以推得 Σ 包含 A^G的非空开集 Ux。由于 Σ 是闭子移位，且 G 是无限的，因此 Σ 是 A^G 的稠密闭子集，由此可得 $\Sigma = A^G$，这就产生了矛盾。因此，我们必须有 $\Gamma = \{1_A^G\}$，即 τ 是单射，证明至此完成。□

定理 3.1 对有限宇宙上的元胞自动机显然不成立。事实上，下面的例子表明，当U 仅为开子集（而非开子移位）时，蕴含关系 $\tau|_U$ 单射 $\implies \tau$ 单射并不成立。

例 3.2。设 $G = \mathbb{Z}$，并令 $A = \{0, 1\}$。令 $\tau\colon A^G \to A^G$ 为一个元胞自动机，其在每个 $i \in \mathbb{Z}$ 处的局部规则为 $f(x_i, x_{i+1}) = x_i + x_{i+1}$（模 2）。令 $\Sigma = \{x \in A^G\colon x_0 = 1\}$。$\Sigma$的补集为 $U = \{x \in A^G\colon x_0 = 0\}$，显然，线性 τ 限制在 U上时是单射。然而，τ不是单射，因为其核包含两个常值构型。尽管如此，由定理 3.4 或直接计算可知，τ 必为满射。若交换 Σ 和 U的角色，结论也同样成立。

我们得到以下结果，该结果使我们能够在逼近强不可约有限型子移位时，对周期构型的周期给出上界。

定理 3.3. 设 $G = \mathbb{Z}^d$，且 A 是一个集合。设 $X \subset A^G$ 是一个具有窗口 $\Delta = [-r, r]^d \cap \mathbb{Z}^d$ 的强 Δ-不可约有限型子移位。假设 X 包含一个总周期为 $2n_0 > 2r$ 的周期构型 x_0，即，

$2n_0\mathbb{Z}^d x_0 = x_0$。那么对于满足 $k_n = (nn_0 - 2r)(n_0 + 1)$ 的 $\mathcal{F} = (F_n)_{n\geqslant 1}$，其中 $F_n = [-k_n, k_n]^d \cap \mathbb{Z}^d$，我们有：

$$(\mathrm{Fix}((2k_n + 4r)G) \cap X)|_{F_n} = X_{F_n}.$$

证明。该结果可由对[7, 定理 1.1]的证明作直接修改而得。采用 [7, 定理 1.1] 和 $G = \mathbb{Z}^d$证明中的相同记号，我们有 $L \subset K$，从而 $H = K \cap L = L$，其中 $L = (2k_n + 4r)G \subset K = 2n_0G$、$\Omega = F_n$以及 $\Omega_i = [-k_n - ir, k_n + ir]^d \cap \mathbb{Z}^d$。□

因此，我们得到强不可约闭有限型子移位上的元胞自动机满射单射性的如下加强形式。

定理 3.4。设 $G = \mathbb{Z}^d$, $d \geqslant 1$，且 A 为一个有限字母表。设$X \subset A^G$ 为包含一个周期构型的强不可约闭有限型子移位。假设 $\tau\colon X \to X$ 是一个元胞自动机，并且当 $U \subset X$ 为非空开子集时，$\tau|_U$ 是单射。那么 τ 是满射且预单射。

证明。记为 $\Gamma = \tau(X) \subset X$。由于 $U \subset X$ 是非空开子集，U 包含柱集 $C(p) = \{x \in X\colon$ 对于某个模式 $p \in X_S$，有 $x|_S = p\}$，其中 $S \subset G$ 是有限子集。

选择一个足够大的窗口 $\Delta = [-r, r]^d \cap \mathbb{Z}^d$，其中 $r \geqslant 2$ 是整数，使得 $\Delta \supset S$ 是 τ 和 $X = \Sigma(A^G$ 的记忆集；$X_\Delta, \Delta)$ 是强 Δ-不可约有限型子移位。特别地，根据 Δ-不可约性的定义，我们可推得：对于每个有限子集 $E \subset G$，都有：

$$C(p)_{E\backslash S\Delta} = X_{E\backslash S\Delta}. \tag{3.2}$$

事实上，任取一个延拓 p 的构型 $\tilde{p} \in X$。令 $x \in X$。由于 $S\Delta \cap (E\backslash S\Delta) = \varnothing$ 和 X 是 Δ-不可约的，存在 $y \in X$ 使得 $y|_S = \tilde{p}|_S$ 且 $y|_{E\backslash S\Delta} = x|_{E\backslash S\Delta}$。因此，$X_{E\backslash S\Delta} \subset C(p)_{E\backslash S\Delta}$。显然 $C(p)_{E\backslash S\Delta} \subset X_{E\backslash S\Delta}$，故关系 (3.2) 成立。

取 X 中一个总周期为 $2n_0 > 2r$ 的周期构型。记$\mathcal{F} = (F_n)_{n\geqslant 3}$，其中 $F_n = [-k_n, k_n]^d \cap \mathbb{Z}^d$，且 $k_n = (nn_0 - 2r)(n_0 + 1)$。注意，对于所有 $n \geqslant 3$，都有 $k_n \geqslant r(n_0 + 1) \geqslant 4r$，并且 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{Z}^d$ 的 Følner 序列。

令 $H_n = (2k_n + 4r)\mathbb{Z}^d$，则根据定理 3.3，我们有

$$(\mathrm{Fix}(H_n) \cap X)_{F_n} = X_{F_n} \tag{3.3}$$

其中 $P_n =$。取 $H_n = \{x \in A^G\colon \ hx = x, \ \forall h \in H_n\} \subset A^G$ 是 H_n-周期构型的空间。注意，我们有一个典范双射 $P_n \simeq A^{F_n}$，它由限制 $x \mapsto x|_{F_n}$ 给出。

定义 $Q_n = P_n \cap C(p) = \{x \in P_n \cap X\colon$ 对每个 $n \geqslant 3$，都有 $x|_S = p\}$。于是 $Q_n \subset U$，由此得到对所有 $n \geqslant 3$ 的诱导单射映射 $\tau|_{Q_n}\colon \ Q_n \to P_n$。根据 (3.3)，有 $(P_n \cap X)_{F_n} = X_{F_n}$。由于 $F_n\backslash S\Delta \subset F_n$，且 F_n 是有限的，由 $(P_n \cap X)_{F_n} = X_{F_n}$ 和关系 (3.2) 可推出：

$$(P_n \cap X)_{F_n\backslash S\Delta} = X_{F_n\backslash S\Delta} = C(p)_{F_n\backslash S\Delta}. \tag{3.4}$$

我们断言

$$(Q_n)_{F_n\setminus S\Delta} = (P_n \cap C(p))_{F_n\setminus S\Delta} = X_{F_n\setminus S\Delta} = C(p)_{F_n\setminus S\Delta}. \tag{3.5}$$

事实上，由于 $C(p) \subset X$，根据 (3.4)，我们显然有 $(P_n \cap C(p))_{F_n\setminus S\Delta} \subset (P_n \cap X)_{F_n\setminus S\Delta} = X_{F_n\setminus S\Delta}$ $C(p) \subset X$。另一方面，固定一个 H_n-不变构型$x \in P_n \cap X$，并令 $q = x_{F_n\Delta^2\setminus S\Delta} \in X_{F_n\Delta^2\setminus S\Delta} = C(p)_{F_n\Delta^2\setminus S\Delta}$ （参见 (3.2)）。因此，我们可以找到一个构型 $y \in C(p)$，它扩展了 q，也就是说，

$$y \in X, \quad y|_S = p \quad \text{and} \quad y|_{F_n\Delta^2\setminus S\Delta} = q = x|_{F_n\Delta^2\setminus S\Delta}.$$

考虑由 $z|_{G\setminus(H_nS\Delta)} = x|_{G\setminus(H_nS\Delta)}$ 定义的拼接构型 $z \in A^G$，并且对所有 $h \in H_n$、$s \in S$ 和 $\delta \in \Delta$，都有 $z(hs\delta) = y(s\delta)$。由于x 是 H_n-不变的，根据构造可推知 z 也如此。换言之，$z \in P_n$。此外，注意到 $S\Delta^2 \subset F_n\Delta^2$，并且 $F_n\Delta^2$ 包含 H_n的一个基本域。因此，由于 $x \in X$ 是 H_n-不变的，且$y|_{F_n\Delta^2} \in X_{|_{F_n\Delta^2}}$ 和 $y|_{F_n\Delta^2\setminus S\Delta} = x|_{F_n\Delta^2\setminus S\Delta}$，我们推知对所有 $g \in G$，都有 $z|_{g\Delta} \in X_{g\Delta}$。于是，$z \in X$，因为 Δ 是有限型子移位 X 的一个定义窗口。由于 $z_S = y_S = p$，可得 $z \in C(p)$。总而言之，我们已经证明了 $z \in P_n \cap C(p)$ 和 $z|_{F\setminus S\Delta} = x|_{F\setminus S\Delta}$。因此，断言 (3.5) 得证。

由 $\tau|_{Q_n}$ 的单射性、关系式 (3.5) 以及包含关系 $X_{F_n} \subset A^{S\Delta} \times X_{F_n\setminus S\Delta}$，我们推得以下估计：

$$|\Gamma_{F_n\Delta^2}| \geqslant |\tau(Q_n)| = |Q_n| \geqslant |(Q_n)_{F_n\setminus S\Delta}| = |X_{F_n\setminus S\Delta}| \geqslant \frac{|X_{F_n}|}{|A|^{|S\Delta|}}.$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{ent}}_{\mathcal{F}}(\Gamma) &= \limsup_n \frac{\log|\Gamma_{F_n\Delta^2}|}{|F_n\Delta^2|} \\
&\geqslant \limsup_n \frac{\log|X_{F_n}|}{|F_n\Delta^2|} - \limsup_n \frac{|A|^{|S\Delta|}}{|F_n\Delta^2|} \\
&= \limsup_n \frac{\log|X_{F_n}|}{|F_n|} \limsup_n \frac{|F_n|}{|F_n\Delta^2|} - 0 \\
&= \limsup_n \frac{\log|X_{F_n}|}{|F_n|} \\
&= \overline{\mathrm{ent}}_{\mathcal{F}}(X).
\end{aligned}$$

因此，Γ 是强不可约有限型子移位 X 中具有最大平均熵的闭子移位。由命题 4.2] 可得 $\Gamma = X$，其中 [6, 。换言之，τ 是满射。根据强不可约有限型子移位的伊甸园定理 [14], ，我们推得 τ 是预单射。□

4. Almost pre-injective non-uniform cellular automata

4.1. 广义迈希尔性质。我们先给出以下引理。

引理 4.1. 设 G 是一个给定 Følner 网$\mathcal{F}=(F_i)_{i\in I}$ 的无限可和群， A 是一个有限字母表。那么，对于所有子集 X、$Y\subset A^G$ 以及满足 $X|_{G\setminus S}=Y|_{G\setminus S}$ 的每个有限子集 $S\subset G$，我们有

$$\overline{\mathrm{ent}}_{\mathcal{F}}X=\overline{\mathrm{ent}}_{\mathcal{F}}Y.$$

特别地，对于每个非空开子集 $U\subset A^G$，我们有

$$\mathrm{ent}_{\mathcal{F}}U=\mathrm{ent}_{\mathcal{F}}A^G=\log|A|.$$

证明。不失一般性，我们可以假设对所有 $i\in I$，都有 $S\subset F_i$。由于 G 是无限的，我们有 $\lim_I|F_i|=\infty$，从而有 $\limsup_I\frac{|S|}{|F_i|}=0$。令 $Z=X|_{G\setminus S}=Y|_{G\setminus S}\subset A^{G\setminus S}$。固定一个模式 $p\in A^S$，并考虑 $\Gamma=\{p\}\times Z$ 和 $\Lambda=A^S\times Z$。

于是，对于每个 $i\in I$，我们有 $\Gamma_{F_i}=\{p\}\times Z_{F_i\setminus S}$ 和 $\Lambda_{F_i}=A^S\times Z_{F_i\setminus S}$。一方面，对于每个 $i\in I$，我们有 X_{F_i}，$Y_{F_i}\subset\Lambda_{F_i}$，因此根据平均熵的定义，

$$\overline{\mathrm{ent}}_{\mathcal{F}}X=\limsup_I\frac{\log|X_{F_i}|}{|F_i|}\leqslant\limsup_I\frac{\log|\Lambda_{F_i}|}{|F_i|}=\overline{\mathrm{ent}}_{\mathcal{F}}\Lambda$$

类似地，有 $\overline{\mathrm{ent}}_{\mathcal{F}}Y\leqslant\overline{\mathrm{ent}}_{\mathcal{F}}\Lambda$。另一方面，我们得到：

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{ent}}_{\mathcal{F}}X&=\limsup_I\frac{\log|X_{F_i}|}{|F_i|}\geqslant\limsup_I\frac{\log|X_{F_i\setminus S}|}{|F_i|}\\&=\limsup_I\frac{\log|Z_{F_i\setminus S}|}{|F_i|}=\limsup_I\frac{\log|\Gamma_{F_i}|}{|F_i|}=\overline{\mathrm{ent}}_{\mathcal{F}}\Gamma.\end{aligned}$$

类似地，$\overline{\mathrm{ent}}_{\mathcal{F}}Y\geqslant\overline{\mathrm{ent}}_{\mathcal{F}}\Gamma$。然而，我们有：

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{ent}}_{\mathcal{F}}\Lambda&=\limsup_I\frac{\log|\Lambda_{F_i}|}{|F_i|}=\limsup_I\frac{\log|A^S||Z_{F_i}|}{|F_i|}\\&=\limsup_I\frac{\log|Z_{F_i}|}{|F_i|}+\limsup_I\frac{|S|}{|F_i|}\log|A|\\&=\limsup_I\frac{\log|\Gamma_{F_i}|}{|F_i|}+0=\overline{\mathrm{ent}}_{\mathcal{F}}\Gamma.\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\overline{\mathrm{ent}}_{\mathcal{F}}\Gamma\leqslant\overline{\mathrm{ent}}_{\mathcal{F}}X,\ \overline{\mathrm{ent}}_{\mathcal{F}}Y\leqslant\overline{\mathrm{ent}}_{\mathcal{F}}\Lambda=\overline{\mathrm{ent}}_{\mathcal{F}}\Gamma.$$

由此可得，$\mathrm{ent}_{\mathcal{F}}X=\mathrm{ent}_{\mathcal{F}}Y$。对于最后一个断言，注意每个非空开子集 $U\subset A^G$ 都包含一个柱集 $C(p)=\{x\in A^G:\ x|_S=p\}$ 其中 $p\in A^S$ 是一个有限模式，也就是说，$S\subset G$ 是一个有限子集。于是 $C(p)\subset U\subset A^G$ 从而 $\mathrm{ent}\,C(p)\leqslant\mathrm{ent}\,U\leqslant\mathrm{ent}\,A^G$。将第一个断言应用于 $X=C(p)$, $Y=A^G$，可得 $\mathrm{ent}\,C(p)=\mathrm{ent}\,A^G=\log|A|$。因此，我们推得 $\mathrm{ent}\,U=\mathrm{ent}\,C(P)=\log|A|$，证明至此完成。□

我们证明以下一般性结果，它推广了 Myhill 性质。

定理 4.2. 设 $S \subset G$ 是可和群 G 的一个子集，且 A 是有限字母表。设 $p \in A^S$ 和 $U = \{p\} \times A^{G\setminus S}$。假设 $\tau\colon A^G \to A^G$ 是具有有限记忆的非一致元胞自动机，且 $\tau|_U$ 是预单射。那么对于 G 的每个 Følner 网 $\mathcal{F}$，都有 $\mathsf{ent}_{\mathcal{F}}(\mathrm{Im}\ \tau|_U) \geqslant (1-\overline{d}_{\mathcal{F}}(S))\log|A|$。

证明。我们的证明推广了全移位上预单射元胞自动机情形下的证明。令我们选取 τ 的一个记忆集 $M \subset G$，使得 $M = M^{-1}$ 且 $1_G \in M$。令 $\mathcal{F} = (F_i)_{i\in I}$ 为 G 的一个 Følner 网，并且不失一般性地假设对所有 $i \in I$ 都有 $SM \subset F_i$。

由于 $\overline{\mathsf{ent}}_{\mathcal{F}}(\mathrm{Im}\ \tau|_U) \geqslant 0$ 且 $\overline{d}_{\mathcal{F}}(S) \in [0,1]$，我们不失一般性地假设 $\overline{d}_{\mathcal{F}}(S) < 1$。

记 $\Gamma = \mathrm{Im}\ \tau|_U$ 为 U 在 τ 下的像。反设 $\mathsf{ent}_{\mathcal{F}}\Gamma < (1-\overline{d}_{\mathcal{F}}(S))\log|A|$。注意，对所有 $i \in I$，我们都有：

$$\Gamma_{F_iM} \subset \Gamma_{F_i} \times A^{\partial_M F_i}.$$

因此，$|\Gamma_{F_iM}| \leqslant |\Gamma_{F_i}||A^{\partial_M F_i}|$，并且我们得到：

$$\begin{aligned}\frac{\log|\Gamma_{F_iM}|}{|F_i\setminus S|} &\leqslant \frac{\log|\Gamma_{F_i}|}{|F_i\setminus S|} + \frac{|\partial_M F_i|\log|A|}{|F_i\setminus S|}. \\ &\leqslant \frac{|F_i|}{|F_i\setminus S|}\frac{\log|\Gamma_{F_i}|}{|F_i|} + \frac{|\partial_M F_i|}{|F_i|}\frac{|F_i|}{|F_i\setminus S|}\log|A|.\end{aligned} \tag{4.1}$$

注意到，由于 G是一个可和群，

$$\lim_{i\in I}\frac{|\partial_M F_i|}{|F_i|} = 0.$$

此外，根据 $\overline{d}_{\mathcal{F}}(S)$的定义，我们有：

$$\limsup_{i\in I}\frac{|F_i|}{|F_i\setminus S|} = \limsup_{i\in I}\frac{1}{\frac{|F_i|-|F_i\cap S|}{|F_n|}} = \frac{1}{1-\limsup_{i\in I}\frac{|S\cap F_i|}{|F_i|}} = \frac{1}{1-\overline{d}_{\mathcal{F}}(S)}.$$

因此，将指标集 I中的不等式 (4.1) 取极限，并应用假设 $\mathsf{ent}_{\mathcal{F}}(\mathrm{Im}\ \tau|_U) < (1-\overline{d}_{\mathcal{F}}(S))\log|A|$，可得：

$$\limsup_{i\in I}\frac{\log|\Gamma_{F_iM}|}{|F_i\setminus S|} \leqslant \frac{1}{1-\overline{d}_{\mathcal{F}}(S)}\limsup_{i\in I}\frac{\log|\Gamma_{F_i}|}{|F_i|} = \frac{1}{1-\overline{d}_{\mathcal{F}}(S)}\overline{\mathrm{ent}}_{\mathcal{F}}\Gamma < \log|A|.$$

因此，存在 $k \in I$ 使得

$$\frac{\log|\Gamma_{F_kM}|}{|F_k\setminus S|} < \log|A|$$

thus

$$|\Gamma_{F_kM}| < |A|^{|F_k\setminus S|}.$$

令 $a \in A$ 为任意元素，并令 $Z = \{p\} \times A^{F_k\setminus S} \times \{a\}^{G\setminus(S\cup F_k)}$。那么 $|Z| = |A^{F_k\setminus S}| = |A|^{|F_k\setminus S|}$，且我们有：

$$|\tau(Z)| = |\tau(Z)_{F_kM}| \leqslant |\Gamma_{F_kM}| < |A|^{|F_k\setminus S|} = |Z|.$$

因此，我们可以找到两个不同的构型 z_1 和 z_2，它们属于 Z，且满足 $\tau(z_1) = \tau(z_2)$。特别是，即使将 τ 限制在 U 上，它也不是预单射，这与定理的假设矛盾，因为定理假设 $\tau|_U$ 是预单射。因此，我们必须有 $\mathrm{ent}_{\mathcal{F}}\Gamma \geqslant (1 - \overline{d}_{\mathcal{F}}(S))\log|A|$，证明完毕。□

因此，我们得到如下类似满射单射性的结果，它强化了可平均群宇宙上元胞自动机的 Myhill 性质。

推论 4.3. 设 G 是一个可和群，A 是一个有限字母表。设 $S \subset G$ 满足 $d_G(S) = 0$。设 $p \in A^S$ 和 $U = \{p\} \times A^{G\setminus S}$。假设 $\tau\colon A^G \to A^G$ 是一个元胞自动机，且 $\tau|_U$ 是预单射的。那么 τ 是满射且预单射的。

证明。根据假设，$d_G(S) = 0$ 且 $\tau|_U$ 是预单射的；由定理 4.2 可知，对于 G 的每个 Følner 网 $\mathcal{F}$：

$$\log|A| = \overline{\mathrm{ent}}_{\mathcal{F}}(A^G) \geqslant \overline{\mathrm{ent}}_{\mathcal{F}}(\mathrm{Im}\,\tau) \geqslant \overline{\mathrm{ent}}_{\mathcal{F}}(\mathrm{Im}\,\tau|_U) \geqslant \log|A|.$$

因此，$\mathrm{ent}_{\mathcal{F}}(\overline{\mathrm{Im}}\ \tau) = \log|A|$。由此，经典元胞自动机伊甸园定理推出 τ 是满射且预单射。证明至此完成。□

下一个推论表明，在非空开子集上，每个足够预单射的非一致元胞自动机的像都必须具有最大平均熵。

推论 4.4. 设 G 是一个无限可和群，且 A 是一个有限字母表。假设 $\tau\colon A^G \to A^G$ 是一个具有有限记忆集的非一致元胞自动机，满足 $\tau|_U$ 是预单射，其中 $U \subset A^G$ 是一个非空开子集。那么，对于 G的任意 Følner 网 $\mathcal{F}$，均有 $\mathrm{ent}_{\mathcal{F}}(\mathrm{Im}\ \tau|_U) = \log|A|$。

证明. 由于 U 是 A^G 在积离散拓扑中的一个开集，它包含柱集 $C(p) = \{x \in A^G\colon x_S = p\}$，其中 $p \in A^S$ 是某个模式，且 $S \subset G$ 是一个有限子集。因此，$\tau|_{C(p)}$ 是预单射。另一方面，$C(p) = \{p\} \times A^{G\setminus S}$，并且显然有 $\overline{d}_{\mathcal{F}}(S) = 0$，因为 S 是有限的而 G是无限的，所以对于 G的任意固定 Følner 网 $\mathcal{F} = (F_i)_{i\in I}$，$\lim_{i\in I}|F_i| = \infty$。因此我们可以由定理 4.2 推知

$$\log|A| = \mathrm{ent}(A^G) \geqslant \overline{\mathrm{ent}}_{\mathcal{F}}(\mathrm{Im}\,\tau|_U) \geqslant \overline{\mathrm{ent}}_{\mathcal{F}}(\mathrm{Im}\,\tau|_{C(p)}) \geqslant \log|A|.$$

因此，$\mathrm{ent}_{\overline{\mathcal{F}}}(\overline{\mathrm{Im}}\ \tau|_U) = \log|A|$，证明完毕。□

将结论专门应用于元胞自动机这一类，我们得出以下结果。

推论 4.5. 设 G 是一个无限可和群，A 是一个有限字母表。假设 $\tau\colon A^G \to A^G$ 是一个元胞自动机，且 $\tau|_U$ 是预单射，其中 $U \subset A^G$ 是一个开子集。那么 τ 是满射。

证明。根据引理 4.4，对于 G 的任意 Følner 网$\mathcal{F}$，我们有 $\mathrm{ent}_{\mathcal{F}}(\mathrm{Im}\ \tau|_U) = \log|A|$。由于 $\mathrm{Im}\ \tau|_U \subset \mathrm{Im}\ \tau \subset A^G$ 且 $\mathrm{ent}\ A^G = \log|A|$，由平均熵的单调性可得 $\mathrm{ent}_{\mathcal{F}}\mathrm{Im}\,\tau = \log|A|$。因此，经典伊甸园定理对元胞自动机的结论表明，$\tau$ 是满射。□

4.2. 非一致元胞自动机的广义摩尔性质。反过来，我们有：

引理 4.6。设 G 是一个无限可和群， A 是一个有限字母表。设 τ: $A^G \to A^G$ 是一个具有有限记忆集的非一致元胞自动机，其局部转移映射的配置渐近恒定。假设对于 G 的某个 Følner 网 $\mathcal{F}$，有 $\mathsf{ent}_{\mathcal{F}}(\mathrm{Im}\ \tau) = \log\ |A|$。那么存在一个开子集 $U \subset A^G$，使得 $\tau|_U$ 是预单射。此外，Im τ 包含 A^G 的一个开子集。

证明。设 σ: $A^G \to A^G$ 是一个元胞自动机，其局部转移映射在某个有限子集 $E \subset G$ 之外与 τ 的局部转移映射一致。考虑柱集 $U = \{p\} \times A^{G\setminus EM}$，其中 M 是 τ 的一个记忆集，使得 $M = M^{-1}$， $1_G \in M$，且 $p \in A^{EM}$ 是任意模式。

于是，由引理 4.1，我们有 $\overline{\mathsf{ent}}_{\mathcal{F}}\,\mathrm{Im}\,\sigma = \overline{\mathsf{ent}}_{\mathcal{F}}\,\mathrm{Im}\,\tau$，因为 $(\mathrm{Im}\ \sigma)_{G\setminus EM} = (\mathrm{Im}\ \tau)_{G\setminus EM}$。因此，$\mathsf{ent}_{\mathcal{F}}\mathrm{Im}\ \sigma = \log\ |A|$，于是根据伊甸园定理，我们推得 σ 是满射且预单射的。因此，当限制在开子集 $U \subset A^G$ 上时， τ 也预单射。这证明了第一个断言。

对于第二个断言，注意到 $\mathrm{Im}(\tau)_{G\setminus EM^2} = \mathrm{Im}(\sigma)_{G\setminus EM^2} = A^{EM^2}$，因为 σ 是满射。对于每个 $q \in A^{EM^2}$，我们定义

$$Z_q = \mathrm{Im}(\tau) \cap (\{q\} \times A^{G\setminus EM^2}).$$

换言之， Z_q 是像 τ 中满足其在 EM^2 上的限制恰好等于模式 q 的所有构型的集合。由于根据闭像性质，$\mathrm{Im}(\tau)$ 是 A^G 的闭子集，因此我们可推知， Z_q 和 $(Z_q)_{G\setminus EM^2}$ 分别是 A^G 和 $A^{G\setminus EM^2}$ 的闭子集（实际上是紧子集）。

显然，我们有关系 $\mathrm{Im}(\tau) = \bigcup_{q\in A^{EM^2}} Z_q$，由此可得

$$\bigcup_{q\in A^{EM^2}} (Z_q)_{G\setminus EM^2} = \mathrm{Im}(\tau)_{G\setminus EM^2} = A^{G\setminus EM^2}.$$

将贝尔纲定理应用于非空完备度量空间 $A^{G\setminus EM^2}$，可知必存在 $q \in A^{EM^2}$，使得 $(Z_q)_{G\setminus EM^2}$ 在积离散拓扑下包含一个由 $A^{G\setminus EM^2}$ 构成的柱集 V。根据我们对集合 Z_q 的定义，可得 $\mathrm{Im}(\tau)$ 包含开柱集 $V \times \{q\} \subset A^G$。证明至此完成。□

下面的例说明，上述引理 4.6 是最优的：若去掉假设 τ 是某个元胞自动机的局部扰动，则该引理不再成立。

例 4.7. 设 $G = \mathbb{Z}$，并令 τ: $\{0,1\}^G \to \{0,1\}^G$ 为一个非一致元胞自动机，使得对于所有 $x \in A^G$ 和 $n \in \mathbb{Z}$，若 n 是完全平方数，则有 $\tau(x)(n) = 0$；否则有 $\tau(x)(n) = x(n)$。直接计算可得 $\mathsf{ent}(\mathrm{Im}\ \tau) = 1 = \log\ |\{0,1\}|$。然而，将 τ 限制在 $\{0,1\}^G$ 的任意柱集子集上时，它都不是预单射。

4.3. 非一致元胞自动机c类的伊甸园定理。结合引理 4.4 和引理 4.6，我们可以为在无限可平均群宇宙上、作为元胞自动机局部扰动的非一致元胞自动机建立以下版本的伊甸园定理。

定理 4.8. 设 G 是一个无限可和群，A 是一个有限字母表。设 τ: $A^G \to A^G$ 是一个具有有限记忆集且局部转移映射的构型渐近恒定的非一致元胞自动机。那么以下条件等价:

(a) 对某个非空开子集 $U \subset A^G$，$\tau|_U$ 是预单射的。(b) 对某个（或等价地，任意）G的$\overline{\text{Følner}}$ 网 $\mathcal{F}$，$\text{ent}_{\mathcal{F}}(\text{Im}\ \tau) = \log\ |A|$。(c) $\text{Im}\,\tau$ 包含 A^G的一个非空开子集。

证明. 首先假设 (a) 对某个开子集 $U \subset A^G$成立。由引理 4.4，$\text{ent}_{\mathcal{F}}(\text{Im}\ \overline{\tau|_U}) = \log\ |A|$。由于 $\text{Im}(\tau|_U) \subset \text{Im}(\tau) \subset A^G$，平均熵的单调性意味着:

$$\log|A| = \overline{\text{ent}}_{\mathcal{F}}\,\text{Im}(\tau|_U) \leqslant \overline{\text{ent}}_{\mathcal{F}}\,\text{Im}(\tau) \leqslant \text{ent}\,A^G = \log|A|.$$

因此，$\text{ent}_{\mathcal{F}}\overline{\text{Im}}(\tau) = \log\ |A|$，我们证明了 (a) $\Longrightarrow$ (b)。由引理 4.6 可直接得出 (b) $\Longrightarrow$ (a) 和 (b) $\Longrightarrow$ (c)。假设 $\text{Im}(\tau)$ 包含 A^G 的一个开子集，那么由于~~G~~ 是无限的，根据引理 4.1，有 $\text{ent}_{\mathcal{F}}\text{Im}(\tau) = \log\ |A|$。因此，(c) $\Longrightarrow$ (b)，证明完毕。□

定理 A 的证明。G 为无限的情形可由定理 4.8 得出。当 G 为有限时，定理 A 中的性质 (i) 和 (ii) 显然成立。因此，定理 A 的证明完毕。□

5. Garden of Eden theorem for linear NUCA

关于全移位上的线性元胞自动机的伊甸园定理最早在 [3] 中得到证明。众所周知，该定理刻画了可和群 [1] 以及元胞自动机的极限集 [9]。

对于仅在零密度元胞子集之外保持一致的线性 NUCA，我们得到了定理 4.2 的如下逆命题。

定理 5.1. 设 K 是一个域，M 是无限可数可和群 G 的有限子集。固定 s、$c \in \mathcal{L}(K^M$、$K)^G$，其中 c 为常量，且 s 与 c 仅在 G 的一个上 Banach 密度为零的子集上不同。假设对于 $d \in]0$、$1]$，$\text{mDim}(\text{Im}\ \sigma_s) > 1 - d$。那么存在 $U = \overline{\{0\}}^S \times K^{G\setminus S}$，使得 $S \subset G$ 满足 $\overline{D}_G(S) \leqslant d$，且 $\sigma_s|_U$ 是预单射。

证明。对于可数可均群 G，固定一个由包含单位元 1_G 的对称集组成的递增 Følner 序列 $\mathcal{F} = (F_n)_{n\geqslant 0}$。再固定 τ 的一个对称记忆集 $M \subset G$，使得 $1_G \in M$。记$\Delta = \{g \in G\colon\ s(g) \neq c(g)\} \subset G$ 则根据假设有 $\overline{D}_G(\Delta) = 0$。

对于这些记号，令 $\Gamma = \mathsf{Im}\ \sigma_s \subset A^G$ 和 $\varepsilon = \mathsf{mdim}\,\Gamma - (1-d)$，则根据假设有$\varepsilon > 0$。由于 G 是一个无限可和群，我们有：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\partial_{M^2} F_n|}{|F_n|} = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{n\to\infty} |F_n| = \infty$$

且 $(F_n^{-M^2})_{n\geqslant 0}$ 也是 G的 Følner 序列。此外，

$$\varepsilon + (1-d) = \underline{\mathrm{mdim}}\Gamma = \liminf_{n\to\infty} \frac{\dim \Gamma_{F_n}}{|F_n|}$$

and

$$\liminf_{n\to\infty} \sup_{g\in G} \frac{|\Delta M \cap gF_n|}{|F_n|} = \overline{D}_G(\Delta M) = 0.$$

因此，存在 $n_0 \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $n \geqslant n_0$，我们有

$$\frac{|\partial_{M^2} F_n|}{|F_n|} < \frac{\varepsilon}{8}, \tag{5.1}$$

$$\frac{\dim \Gamma_{F_n^{-M^2}}}{|F_n|} \geqslant \frac{\varepsilon}{2} + 1 - d, \quad \text{and} \tag{5.2}$$

$$\frac{|\Delta \cap gF_n|}{|F_n|} < \frac{\varepsilon}{16} \quad \text{for all } g \in G. \tag{5.3}$$

根据引理 2.10，存在一个整数 $r > 0$，以及一个由 $T = \{(T_i、 T_i^o)\}_{i\in I}$ 构成的 ε-不相交且$\big(1 - \frac{\varepsilon}{100}\big)$-覆盖拟铺砌，覆盖 G，其形状为 F_{n_1}、...、F_{n_r}，使得对于每个 $i \in I$，都有 $n_0 < n_1 < \cdots < n_r$ 和 $T_i^o = T_i^{-M}$。特别地，对于 I 中的所有 $i \neq j$，都有 $T_i^o \cap T_j^o = \varnothing$。对于每个 $i \in I$，令 F_{k_i} 为 T_i 的形状，其中 $k_i \in \{n_1、 \ldots n_r\}$，并令 $g_i \in G$ 为 T_i 的中心，即，

$$T_i = g_i F_{k_i}.$$

回顾一下，对于每个子集 $F \subset G$，我们有 $\partial_{M^2} F = FM^2 \backslash F^{-M^2}$，其中 $F^{-M^2} = \{g \in F\colon\ gM^2 \subset F\}$，因为 $1_G \in M$且 $M = M^{-1}$。因此，对于每个 $n \geqslant n_0$，由不等式 (5.1) 可推得

$$|F_n^{-M^2}| \geqslant |F_n| - |\partial_{M^2} F_n| \geqslant \left(1 - \frac{\varepsilon}{8}\right)|F_n|. \tag{5.4}$$

注意，由于 $1_G \in M$，$M \subset M^2$。因此，根据定义，对于每个 $i \in I$，我们有 $F_{k_i}^{-M^2} \subset F_{k_i}^{-M}$，因为 $gM^2 \subset F_{k_i}$意味着 $gM \subset gM^2 \subset F_{k_i}$。于是，对于每个 $i \in I$，都有：

$$E_i = T_i^o \cap g_i F_{k_i}^{-M^2} = g_i F_{k_i}^{-M} \cap g_i F_{k_i}^{-M^2} = g_i F_{k_i}^{-M^2} = T_i^{-M^2}. \tag{5.5}$$

由此可知，对所有 $i \in I$，$E_i M \subset g_i F_{k_i}^{-M} = T_i^o$。此外，对所有属于 I 的 $i \neq j$，根据假设有 $T_i^o \cap T_j^o = \varnothing$，因此 $E_i M \cap E_j M = \varnothing$。

另一方面，由 (5.3) 和 (5.4) 可推出，对所有 $i \in I$:

$$\begin{aligned} |E_i \backslash (\Delta \cup g_i \Delta)| &\geqslant |g_i F_{k_i}^{-M^2}| - |\Delta \cap g_i F_{k_i}| - |g_i \Delta \cap g_i F_{k_i}| \\ &\geqslant \left(1 - \frac{\varepsilon}{8}\right) |F_{k_i}| - \frac{\varepsilon}{16} |F_{k_i}| - \frac{\varepsilon}{16} |F_{k_i}| \\ &\geqslant (1 - \frac{\varepsilon}{4}) |F_{k_i}| \\ &= (1 - \frac{\varepsilon}{4}) |T_i|. \end{aligned} \tag{5.6}$$

令 $R_i = E_i \backslash (\Delta \cup g_i \Delta) \subset g_i F_{k_i}^{-M^2}$ 对于 $i \in I$。对于 $i \in I$，令 $Z_i = \{0\}^{G \backslash E_i M} \times K^{E_i M}$。由于 M 是 σ_s 和 $R_i M \subset E_i M$ 的记忆集，非一致元胞自动机 σ_s 通过限制诱导出线性映射 $\varphi_i \colon Z_i \to K^{R_i}$ 对于 $i \in I$。由 (5.2)、(5.5) 和 (5.6)，并且由于 $s|_{G \backslash \Delta}$ 是常数，我们有

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Im} \varphi_i = \dim \Gamma_{R_i} &= \dim \left(\Gamma_{g_i F_{k_i}^{-M^2}} \right)_{R_i} \\ &= \dim \left(\Gamma_{F_{k_i}^{-M^2}} \right)_{g_i^{-1} R_i} \\ &\geqslant \dim \left(\Gamma_{F_{k_i}^{-M^2}} \right) - |F_{k_i}^{-M^2} \backslash g_i^{-1} R_i| \\ &\geqslant \left(\frac{\varepsilon}{2} + 1 - d \right) |F_{k_i}| - (|F_{k_i}| - |g_i^{-1} R_i|) \\ &\geqslant \left(\frac{\varepsilon}{4} + 1 - d \right) |F_{k_i}|. \end{aligned} \tag{5.7}$$

因此，对于每个 $i \in I$，我们发现:

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Ker} \varphi_i &= \dim Z_i - \dim \operatorname{Im} \varphi_i \\ &\leqslant |E_i M| - \left(\frac{\varepsilon}{4} + 1 - d \right) |F_{k_i}| \\ &\leqslant |F_{k_i}| - \left(\frac{\varepsilon}{4} + 1 - d \right) |F_{k_i}| \\ &= \left(d - \frac{\varepsilon}{4} \right) |F_{k_i}| \\ &= \left(d - \frac{\varepsilon}{4} \right) |T_i|. \end{aligned}$$

因此，利用线性代数，我们可以找到一个有限子集 $S_i \subset E_i M$，使得 $|S_i| \leqslant \left(d - \frac{\varepsilon}{4}\right) |F_{k_i}|$，从而对于 $U_i = \{0\}^{G \backslash E_i M} \times \{0\}^{S_i} \times K^{E_i M \backslash S_i}$，限制线性映射 $\varphi|_{U_i}$ 是单射。定义

$$S = G \backslash \bigcup_{i \in I} (E_i M \backslash S_i).$$

由集合 S_i 的构造可知，$\sigma_s|_U$ 是预单射，其中 $U = \{0\}^S \times K^{G \backslash S}$。我们断言 $\overline{d}_G(S) \leqslant d$。事实上，对每个 $i \in I$,

关系 (5.1) 和 $|S_i| \leqslant \left(d - \frac{\varepsilon}{4}\right)|F_{k_i}|$ 蕴含：

$$\begin{aligned}|E_iM\backslash S_i| &\geqslant |E_iM| - |S_i| \geqslant |E_i| - |S_i| \\ &\geqslant |F_{k_i}^{-M^2}| - |S_i| = \left(1 - \frac{\varepsilon}{8}\right)|F_{k_i}| - (d - \frac{\varepsilon}{4})|F_{k_i}| \\ &= \left(1 - d + \frac{\varepsilon}{8}\right)|F_{k_i}| = \left(1 - d + \frac{\varepsilon}{8}\right)|T_i|.\end{aligned}$$

因此，$T' = \{(T_i, E_iM\backslash S_i)\}_{i\in I}$ 是 G 的 $\left(d - \frac{\varepsilon}{8}\right)$-不交且 $\left(1 - \frac{\varepsilon}{100}\right)$-覆盖拟铺砌，由引理 2.11 可推得：

$$\begin{aligned}\underline{D}_G\left(\bigcup_{i\in I} E_iM\backslash S_i\right) &\geqslant \left(1 - d + \frac{\varepsilon}{8}\right)\left(1 - \frac{\varepsilon}{100}\right) \\ &= 1 - d + \varepsilon\left(\frac{1}{8} - \frac{1 - d + \frac{\varepsilon}{8}}{100}\right) \\ &\geqslant 1 - d.\end{aligned}$$

因此，由引理 2.3 可得：

$$\overline{D}_G(S) = 1 - \underline{D}_G\left(\bigcup_{i\in I} E_iM\backslash S_i\right) \leqslant d,$$

证明至此完成。 □

采用定理 5.1 的证明方法，可得以下结果。

定理 5.2. 设 G 是一个无限可数可和群，K 是一个域。那么，对于每个具有有限记忆的线性 NUCA τ：$K^G \to K^G$，若 $\mathsf{mDim}(\mathrm{Im}\ \tau) > 1 - d$，则存在 ~~$S \in K^G$~~，满足 $\overline{D}_G(S) \leqslant d$，使得 $\tau|_U$ 是预单射，其中 $U = \{0\}^S \times K^{G\backslash S}$。

证明。证明思路与定理 5.1 的证明相同，只需作相应调整：令 $\Delta = \varnothing$，使得 $R_i = E_i$，并将关系式 (5.2) 替换为

$$\frac{\dim \Gamma_{gF_n^{-M^2}}}{|F_n|} \geqslant \frac{\varepsilon}{2} + 1 - d, \quad \text{for all } g \in G. \tag{5.8}$$

因此，我们可以直接将估计式 (5.7) 修改为：

$$\begin{aligned}\dim \mathrm{Im}\,\varphi_i = \dim \Gamma_{R_i} &= \dim\left(\Gamma_{g_iF_{k_i}^{-M^2}}\right)_{R_i} \\ &\geqslant \dim\left(\Gamma_{g_iF_{k_i}^{-M^2}}\right) - |g_iF_{k_i}^{-M^2}\backslash R_i| \\ &\geqslant \left(\frac{\varepsilon}{2} + 1 - d\right)|F_{k_i}| - (|F_{k_i}| - |R_i|) \\ &\geqslant \left(\frac{\varepsilon}{4} + 1 - d\right)|F_{k_i}|\end{aligned}$$

证明的其余部分完全相同。 □

因此，我们根据线性 NUCA 的像的平均维数，得到部分预单射性的以下定量刻画。

定理 5.3. 设 G 是一个无限可数可和群， A 是一个有限维向量空间字母表。对于每个具有有限记忆集的线性 NUCA $\tau\colon A^G \to A^G$ ，以下结论成立：

(i) 若 $\tau|_U$ 是预单射，其中 $U = \{p\} \times A^{G\setminus S}$ 且 $p \in A^S$ 对某个子集 $S \subset G$ 成立，则 $\operatorname{mdim}(\overline{\operatorname{Im}\ \tau}) \geqslant (1 - \overline{d}_G(S)) \dim A$。(ii) 若 $\dim A = 1$ 且 $\operatorname{mDim}(\operatorname{Im}\ \tau) > 1 - d$，则存在 $S \subset A^G$，使得 $\overline{D}_G(S) \leqslant d$，且 $\tau|_U$ 是预单射，其中 $U = \{0\}^S \times A^{G\setminus S}$。

证明。断言 (i) 经相应调整后，可由定理 4.2 的类似证明得到，其中将 $\operatorname{ent}_{\mathcal{F}}$ 替换为 $\operatorname{mdim}_{\mathcal{F}}$，将 $\overline{\log}\ |A|$ 替换为 $\dim A$。此外，采用定理 4.2 证明中的相同记号，由包含关系 $\Gamma_{F_n M} \subset \Gamma_{F_n} \times A^{\partial_M F_n}$ 可推得 $\dim\ \Gamma_{F_n M} \leqslant \dim \Gamma_{F_n} + \dim\ A^{\partial_M F_n}$。证明中的其他修改都显而易见。断言 (ii) 正是定理 5.2 的内容。至此，证明完成。□

References

[1] L. Bartholdi *Amenability of groups is characterized by Myhill's Theorem. With an* , , J. Eur. *appendix by D. Kielak* 21, 10 2019 3191 3197

Math. Soc. 第 卷第 期（），第– 页。[2] R. Burton and J. E. Steif, *Non-uniqueness of measures of maximal entropy for subshifts of finite type* 14 1994 213 35 , Ergodic Theory

Dyn. Syst.（），第– 页。[3] T. Ceccherini-Silberstein and M. Coornaert, *The Garden of Eden theorem for linear cellular automata* 26 2006 1, 53 68 , Ergod. Th. &

Dynam. Sys.（），第 期，第– 页。[4] , *Injective linear cellular automata and sofic groups*, Israel J. Math. 161 (2007)，第 1–15 页。[5] , *A generalization of the Curtis-Hedlund theorem*, Theoret. Comput. Sci., 400 (2008)，第 225–229 页[6] ,

The ~~Myhill~~ property for strongly irreducible subshifts over amenable groups, Monatsh. Math. 165 (2012)，第 2 期，第 155–172 页。[7] ,

On ~~the~~ density of periodic configurations in strongly irreducible subshifts, 非线性

25 2012 2119 2131 10 1088 0951 7715 25 7 2119 （），第– 页。doi: . / - / / / , ,

[8] T. Ceccherini-Silberstein M. Coornaert and X. K. Phung *On the Garden* , *of Eden theorem for endomorphisms of symbolic algebraic varieties* , Pacific J.

Math. 306 (2020)，第 1 期，第 31–66 页。[9] , *On linear shifts of finite type and their endomorphisms*, J. Pure ~~App.~~ Algebra 226 (2022)，第 6 期。[10] T. Ceccherini-Silberstein, A. Machì, and F. Scarabotti, *Amenable groups and cellular automata* 49 1999 673 685 , Ann. Inst.

Fourier (Grenoble), （），第– 页。[11] A. Dennunzio, E. Formenti, and J. Provillard, *Non-uniform cellular automata:Classes, dynamics, and decidability*, 信息与计算，第 215 卷，6 月 2012, 32 46 第 - 页， E. Formenti, and J. Provillard,

[12] A. Dennunzio *Local rule distributions lan-* , . Theoretical *guage complexity and non-uniform cellular automata* Computer Science, 504 (2013) 38–51。[13] T. Downarowicz, D. Huczek, and G. Zhang *Tilings of amenable groups*, 纯粹与应用数学杂志（克雷勒数学杂志），第 2019 卷，第 747 期，2019 年，第 277–298 页。https://doi.org/10.1515/crelle-2016-0025

[14] F. Fiorenzi, *Cellular automata and strongly irreducible shifts of finite type*. Theoret. Co mput. Sci. 299, 477–493 (2003) [15] E. Følner, *On groups with full Banach mean value*, Math. Scand. 3 (1955), 第243–254页。[16] M. Gromov, *Endomorphisms of symbolic algebraic varieties*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS), 1 (1999), 第 109–197 页。[17] W.H. Gottschalk, *Some general dynamical notions*,《拓扑动力学最新进展》, Springer, 柏林, 1973, 第120–125页。数学讲义第318卷。[18] G. A. Hedlund, *Endomorphisms and automorphisms of the shift dynamical system*, Math. Systems Theory, 3 (1969), 第320–375页。[19] I. Kaplansky, *Fields and Rings*,《芝加哥数学讲座》, 芝加哥大学出版社, 芝加哥, 1969。[20] S.J. Lightwood, *Morphisms from non-periodic $\mathbb{Z}^2$-subshifts: I. Constructing embed-* , Ergod. *dings from homomorphisms* 23 2003 587 609 Theory Dyn. Syst. ( ), 第–页。[21] E. F. Moore, *Machine models of self-reproduction*,《应用数学研讨会论文集》第14卷, 美国数学会, 普罗维登斯, 1963, 第17–34页。[22] J. Myhill, *The converse of Moore's Garden-of-Eden theorem*, Proc. Amer. Math. Soc., 14 (1963), 第685–686页。[23] J. von Neumann, *Zur allgemeinen Theorie des Masses*, Fund. Math. 13 (1929), 第73–116页及333页。 = *Collected works*, 第I卷, 第599–643页。[24] J. von Neumann, In: Burks *The Theory of Self-reproducing Au-* , A.W. (ed.), . *tomata* 1966 伊利诺伊大学出版社, 厄巴纳 ()。[25] D. S. Ornstein and B. Weiss, *Entropy and isomorphism theorems for actions of amenable groups* 48, 1 141 1987 910005 88 28014 , J. Analyse Math. 第–页 ()。MR (j:) [26] X.K. Phung, *On sofic groups Kaplansky's conjectures and endomorphisms of pro-* , , , Journal *algebraic groups* 562 2020 537 586 of Algebra, (), 第–页。[27] , *Shadowing for families of endomorphisms of generalized group shifts*,《离散与连续动力系统》 2022, 42 1 285 299 (), 第–页, 。Israel [28] ——— *On Dynamical Finiteness Properties of Algebraic Group Shifts* Journal of Mathematics（2022）。https://doi.org/10.1007/s11856-022-2351-1[29] , *On symbolic group varieties and dual surjunctivity*, 即将在《群、几何与动力学》发表。arXiv:2111.02588[30] , *On invertible and stably reversible non-uniform cellular automata*, Theoretical Computer Science（2022）。https://doi.org/10.1016/j.tcs.2022.09.011[31] , *A geometric generalization of Kaplansky's direct finiteness conjecture*, 即将在《美国数学会论文集》发表。arXiv: 2111 07930 。, , [32] ——— *Weakly surjunctive groups and symbolic group varieties* 预印本。arXiv:2111.13607[33] , *Stable finiteness of twisted group rings and noisy linear cellular automata*, 预印本。arXiv:2209.06002[34] , *Some pointwise and decidable properties of non-uniform cellular automata*, 预印本。arXiv:2210.00676[35] , *On linear non-uniform cellular automata: duality and dynamics*, 预印本。arXiv:2208.13069[36] S. Wagon, *The Banach-Tarski paradox*, 剑桥大学出版社, 剑桥, 1993。附有 Jan Mycielski 撰写的序言; 1985年原版的修订重印本。[37] T. Ward, *Automorphisms of $\mathbb{Z}^d$-subshifts of finite type*, Indag. Math. (N.S.) 5 (1994), 第495–504页

Département d'informatique et de recherche opérationnelle Université de , , ,, , Montréal Montréal Québec H3T 1J4 Canada.
Email address: phungxuankien1@gmail.com