arXiv:2304.00662v1 [math.QA] 3 Apr 2023

q 形变 Witt 代数和 q 形变 $W(2, 2)$ 代数上的平均算子

Ismail Laraiedh[1,2] and Sergei Silvestrov[3]

[1]斯法克斯大学理学院数学系，突尼斯斯法克斯 3000，邮政信箱 1171，is mail.laraiedh@gmail.com[2]沙格拉大学阿尔库瓦伊亚科学与人文学院数学系，沙特阿拉伯王国，ismail.laraiedh@su.edu.sa[3]马拉达伦大学教育、文化与传播学院数学与物理学部，瑞典韦斯特罗斯 72123，邮政信箱 883，sergei.silvestrov@mdu.se

摘要

本文旨在给出 Hom-Lie 代数上平均算子的一些构造结果。本文对 q 形变 Witt Hom-代数和 q 形变 $W(2, 2)$ Hom-代数上的齐次平均算子进行了分类。作为应用，本文得到了诱导的 Hom-莱布尼茨代数结构，并给出了相应的乘法性条件。

1 引言

对李代数进行各种量子变形或 q-变形的研究，在 20 世纪 80 年代进入了快速发展的时期。这一发展受到量子群的引入推动，而量子群的出现则源于其在量子 Yang-Baxter 方程、量子逆散射方法以及半单李代数泛包络代数的量子变形构造中的应用。各种 q-变形李代数已出现在弦理论、共形场论中的顶点模型、量子力学和量子场论等物理背景下，涉及无限维代数的变形，主要包括海森堡代数、振子代数以及 Witt 代数和 Virasoro 代数。在 [5, 29–35,40,42, 52–54], 中，特别发现，在这些 Witt 和 Visaroro 代数的 q-变形中

2020 年数学主题分类：17B61, 17D30, 17B63, 16D20 关键词：Hom-Lie 代数，平均算子， q 变形 Witt Hom-代数， q 变形 $W(2, 2)$ Hom-代数

代数及一些相关代数满足某些有趣的 q-变形雅可比恒等式，它们扩展了李代数的雅可比恒等式。这是利用更一般的 σ-导子（扭导子），在 [39] 中发展向量场李代数的一般拟变形与离散化的初始动机之一。

Hom-Lie 代数以及更一般的准Hom-Lie代数最初由 Hartwig、Larsson 和 Silvestrov 引入 [39], ，他们利用更一般的 σ-导子（扭导子）发展了李代数向量场的拟变形和离散化的一般理论，并提出了一种基于扭导子构造 Witt 型和 Virasoro 型代数变形的一般方法。这项工作最初受到物理学中观测到的 q-变形代数所满足的 q-变形雅可比恒等式的启发，同时也受到 q变形的同调代数版本及微分演算离散修正的启发。Hom-Lie 代数、Hom-Lie 超代数、Hom-Lie色代数以及更一般的拟李代数和色拟李代数最初发表于 [48, 49, 75]。拟李代数和色拟李代数在同一代数框架内涵盖了由遵循扭曲莱布尼茨法则的 σ-导子所产生的李代数向量场的拟变形与离散化，以及李代数的著名推广，例如色李代数——李代数和李超代数的自然推广。在拟李代数中，斜对称性和雅可比恒等式通过变形扭转线性映射而被扭曲；拟李代数和准Hom-Lie代数中的雅可比恒等式通常包含六个扭曲的三重括号项。在 Hom-Lie 代数中，双线性乘积满足与李代数相同的非扭曲反对称性，而 Hom-Lie 代数的雅可比恒等式包含由单个线性映射扭曲的三项；当扭转线性映射为恒等映射时，该恒等式便化为李代数的雅可比恒等式。Hom-Lie 容许代数最初在 [58], 中被研究，其中尤其引入了 Hom-结合代数，并证明它们是 Hom-Lie 容许的，即利用交换子映射作为新乘积可得到 Hom-Lie 代数；从这个意义上说，它们构成了结合代数作为李容许代数的一种自然推广。自开创性工作 [39, 47–50, 58],以来，Hom-代数结构逐渐发展为一个热门领域，相关研究在各个方向上的发表数量不断增加。某一类型的 Hom-代数结构包含其经典对应结构，并为变形、上同调结构和表示的 Hom-代数扩张、Hom-结合代数和 Hom-Lie 代数的形式变形、Hom-Lie 可容许 Hom-余代数、Hom-余代数以及 Hom-Hopf 代数开辟了广阔的研究空间 [6, 26, 36, 47, 51, 59–61, 71, 72, 78, 80]。Hom-Lie 代数、Hom-Lie 超代数、色Hom-李代数及其 n元推广，已从多个方面得到进一步研究，例如参见 [1–3,6–26,28,38,44–46,56–62,64,68,69, 71–82,85–88]。

20世纪30年代，Kolmogoroff 和 Kamp´e de F´eriet [41, 63]明确给出了平均算子的定义。随后，G. Birkhoff [27] 继续研究这一概念，并证明：Banach 代数 $C(X)$（即紧豪斯多夫空间 X上取标量值的连续函数构成的代数）中，将其投影到一个固定值域上的正有界投影是一个幂等平均算子。1954年，S. T. C. Moy [65] 建立了平均算子与条件期望之间的联系。此外，她还研究了积分理论与湍流理论和概率论中的平均算子之间的关系。随后，G. C. Rota [70]推广了她的结果。同一时期，J. L. Kelley [43]刻画了 $C_\infty(X)$ 上的幂等平均算子； $C_\infty(X)$ 是局部紧豪斯多夫空间 X 上在无穷远处消失的实值连续函数构成的代数。

本世纪以来，平均算子在其传统分析领域和应用领域 [37], 继续得到广泛应用，其代数研究也不断深化和推广。J. L. Loday [55] 类比结合代数是李代数的包络代数，将双结合代数定义为莱布尼茨代数的包络代数。更确切地说，域 $\mathbb{K}$ 上的代数 A 中的平均算子是一个线性映射 $P\colon A \to A$，满足以下平均关系：

$$P(x)P(y) = P(P(x)y) = P(xP(y)).$$

M. Aguiar 在 [4] 中证明，通过定义两个新运算 $x \dashv y := xP(y)$ 和 $x \vdash y := P(x)y$，可以从平均结合代数导出一个双结合代数。类似过程可以通过定义一个新运算 $\{x, y\} := [P(x)\ y]$，从平均李代数导出一个莱布尼茨代数；还可以从平均交换结合代数导出一个（左）置换代数。一般而言，任何二元 operad 上都定义了平均算子； [66] 通过将平均作用与一种称为复制子的二元 operad 特殊构造联系起来，系统地研究了这类过程 [67, 84]。

本文旨在给出 Hom-Lie 代数上平均算子的一些构造结果，并对 q-变形 Witt 代数和 q-变形 $W(2, 2)$ 代数上的齐次平均算子进行分类。由此得到相应的莱布尼茨代数结构。第 2 节介绍后续章节将用到的、关于 $\mathbb{Z}$-分次 Hom-Lie 代数的一些重要基本概念、记号和例子，并研究 q-变形 Witt 代数和 q-变形 $W(2, 2)$ Hom 代数的乘法性条件。接下来，我们介绍一些在 Hom-Lie 代数上构造平均算子的实用方法。第 3 节对 q-变形 Witt Hom-代数 $\mathcal{V}^q$ 上的齐次平均算子进行分类，并给出 q-变形 Witt Hom-代数 $\mathcal{V}^q$上的平均算子所诱导的 Hom-Leibniz代数。第 4 节对q-变形 $W(2, 2)$ Hom-代数 $\mathcal{W}^q$上的齐次平均算子进行分类。此外，我们还给出 q-变形 $W(2, 2)$ Hom-代数 $\mathcal{W}^q$上的平均算子所诱导的 Hom-Leibniz代数。

2 Hom-李代数上平均算子的构造

本节首先回顾后续章节将用到的关于$\mathbb{Z}$-分次 Hom-李代数的一些重要基本概念、记号和例子。然后，我们介绍一些在 Hom-李代数上构造平均算子的有用方法。

本文中，所有线性空间都定义在特征零域 $\mathbb{K}$ 上。 $\mathbb{Z}$-分次线性空间 $A = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} V_j$上的线性算子$T\colon A \mapsto A$，若对任意 $i \in \mathbb{Z}$，存在 $j \in \mathbb{Z}$使得 $T(A_i) \subseteq A_j$，则称其保持线性空间 A的分次。保持分次的线性算子若对所有$i \in \mathbb{Z}$满足 $T(A_i) \subseteq A_{i+\deg T}$，则称其为次数为 deg $T \in \mathbb{Z}$ 的齐次算子；若 deg $T = 0$，即对所有 $i \in \mathbb{Z}$均有 $T(A_i) \subseteq A_i$，则称 T为偶算子。

2.1 Hom-代数、Hom-Lie 代数与乘法性

一般而言，Hom-代数是三元组（A、$[\cdot,\cdot]$、α），由一个线性空间 A、双线性乘积$[\cdot,\cdot] : A \times A \mapsto A$ 以及一个线性映射（线性空间同态） $\alpha\colon A \mapsto A$组成。此外，

若线性映射 $\alpha:\ A\to A$ 是代数自同态，即对任意x、 $y\in A$ 均满足乘法性

$$\alpha([x,y])=[\alpha(x),\alpha(y)], \tag{2.1}$$

那么该 Hom-Lie 代数称为乘法的。在特定类别的 Hom-代数中，刻画属于该类别的乘法的和非乘法的 Hom-代数十分重要。

若线性空间 A 是 $\mathbb{Z}$-分次的，则称 Hom-代数 $(A,[\cdot,\cdot],\alpha)$ 是 $\mathbb{Z}$-分次的，

$$A=\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}}A_j,$$

双线性乘积 $[\cdot,\cdot]$ 是 $\mathbb{Z}$-分次的，即对所有 $m,n\in\mathbb{Z}$,

$$[A_m,A_n]\subseteq A_{m+n},$$

线性算子 α 与线性空间 A 的 $\mathbb{Z}$-分次相容，即对任意 $i\in\mathbb{Z}$，存在 $j\in\mathbb{Z}$，使得 $\alpha(A_i)\subseteq A_j$。

在任意 $\mathbb{Z}$-分次 Hom-代数 $(A=\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}}A_j,[\cdot,\cdot],\alpha)$ 中，且以下包含关系成立：

$$\begin{aligned}
&[\alpha(A_m),\alpha(A_n)]\subseteq[A_{m+k},A_{n+k}]\subseteq A_{m+n+2k},\\
&\alpha([A_m,A_n])\subseteq\alpha(A_{m+n})\subseteq A_{m+n+k},\\
&[\alpha(A_m),\alpha(A_n)]\cap\alpha([A_m,A_n])\subseteq A_{m+n+2k}\cap A_{m+n+k}=\begin{cases}A_{m+n}, & \text{if } k=0\\ 0, & \text{if } k\neq 0\end{cases},\\
&\ker([\cdot,\cdot])\cap((\ker(\alpha)\times A)\cup(A\times\ker(\alpha)))\\
&\quad\subseteq M_{A,[\cdot,\cdot],\alpha}=\{(x,y)\in A\times A\mid[\alpha(x),\alpha(y)]=\alpha([x,y])\}
\end{aligned}$$

这些包含关系直接给出以下便捷条件，可用于判断 $\mathbb{Z}$-分次 Hom-代数是乘法的还是非乘法的；这些条件基于双线性乘积 $[\cdot,\cdot]$、扭曲映射 α、 A 的 $\mathbb{Z}$-分次以及其齐次子空间 $A_j,j\in\mathbb{Z}$ 中元素之间的相互作用，并涉及 $\mathbb{Z}$-分次直和分解。

定理 2.1. 设 $(A=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}A_n,[\cdot,\cdot],\alpha)$ 是一个 $\mathbb{Z}$-分次 Hom-代数，其中 α 是一个次数为 $\deg\alpha=k\in\mathbb{Z}$ 的线性算子。

(i) Hom-代数 $(A,[\cdot,\cdot],\alpha)$ 不是乘法的，当且仅当

$$\exists\ m,n\in\mathbb{Z},x_m\in A_m,x_n\in A_n:[\alpha(x_m),\alpha(x_n)]\neq\alpha([x_m,x_n]).$$

Hom-代数 $(A,[\cdot,\cdot],\alpha)$ 是乘法的，当且仅当

$$\forall\ m,n\in\mathbb{Z},x_m\in A_m,x_n\in A_n:[\alpha(x_m),\alpha(x_n)]=\alpha([x_m,x_n]).$$

(ii) $(A,[\cdot,\cdot],\alpha)$ 不是乘法的，当且仅当严格包含关系成立

$$\exists\ m,n\in\mathbb{Z}:\{(x_m,x_n)\in A_m\times A_n\mid[\alpha(x_m),\alpha(x_n)]=\alpha([x_m,x_n])\}\subsetneq A_m\times A_n,$$

或者等价地，当且仅当

$$\begin{aligned}
&\exists\ m,n\in\mathbb{Z}:\\
&A_m\times A_n\setminus\{(x_m,x_n)\in A_m\times A_n\mid[\alpha(x_m),\alpha(x_n)]=\alpha([x_m,x_n])\}\neq\emptyset
\end{aligned}$$

(iii) 如果 $(A,[\cdot,\cdot],\alpha)$ 是乘法的，则以下情况之一成立：

（a）线性算子 α 是偶的，即次数为 $k=0$ 的齐次算子；

（b）线性算子 α 是次数为 $k\neq 0$ 的齐次算子，并且

$$\forall\ m,n\in\mathbb{Z}:\ [\alpha(A_m),\alpha(A_n)]\times\alpha([A_m,A_n])=\{0\}\times\{0\}=\{(0,0)\},$$

by linearity of α *and bilinearity of* $[\cdot,\cdot]$ *equivalent to* $[\alpha(\cdot),\alpha(\cdot)]=\alpha([\cdot,\cdot])=0$.

（iv）如果 $k\neq 0$，则（A，$[\cdot,\cdot]$，α）不是乘法的，当且仅当

$$\exists\ m,n\in\mathbb{Z}:[\alpha(A_m),\alpha(A_n)]\times\alpha([A_m,A_n])\neq\{0\}\times\{0\}=\{(0,0)\}.$$

如果 $k\neq 0$，则（A，$[\cdot,\cdot]$，α）是乘法的，当且仅当

$$\forall\ m,n\in\mathbb{Z}:[\alpha(A_m),\alpha(A_n)]\times\alpha([A_m,A_n])=\{0\}\times\{0\}=\{(0,0)\},$$

即 $\forall\ m,\ n\in\mathbb{Z}:\ [\alpha(A_m)\ \alpha(A_n)]=\alpha([A_m,A_n])=\{0\}$，这与

$$[A,A]\subseteq\ker(\alpha),\quad \alpha(A)\subseteq\ker([\cdot,\cdot])=\{(x,y)\in A\times A\mid[x,y]=0\}.$$

或者等价地，对于齐次子空间中的元素，当且仅当

$$\forall\ m,n\in\mathbb{Z},x_m\in A_m,x_n\in A_n:[\alpha(x_m),\alpha(x_n)]=\alpha([x_m,x_n])=0.$$

若对于所有 $m\in\mathbb{Z}$ 和 $\{x_m\in A_m,m\in\mathbb{Z}\}$，$\dim A_m=1$，且 $\mathbb{Z}$ 是 $A=\bigoplus$ 分次线性空间的一组齐次基

$_m$ A_m，则对于所有 m、$n\in\mathbb{Z}$、$\in\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
&\alpha(x_m)=\alpha_{m+k,m}x_{m+k},\quad \text{for some unique } \alpha_{m+k,m}\in\mathbb{K}\\
&\alpha(x_{m+n})=\alpha_{m+n+k,m+n}x_{n+m+k},\quad \text{for some unique } \alpha_{m+n+k,m+n}\in\mathbb{K}\\
&[x_m,x_n]=c_{m,n}^{m+n}x_{m+n},\quad \text{for some unique } c_{m,n}^{m+n}\in\mathbb{K}\\
&[\alpha(x_m),\alpha(x_n)]=\alpha_{m+k,m}\alpha_{n+k,n}c_{m+k,n+k}^{m+n+2k}x_{m+n+2k},\\
&\alpha([x_m,x_n])=c_{m,n}^{m+n}\alpha(x_{m+n})=c_{m,n}^{m+n}\alpha_{m+n+k,m+n}x_{m+n+k}.
\end{aligned}$$

推论 2.2. 设 $\mathcal{A}=(A=\bigoplus A_n,[\cdot,\cdot],\alpha)$ 是一个 $\mathbb{Z}$ 分次 Hom-代数，其中 α 是一个次数为 $\deg\ \alpha=k\in\mathbb{Z}$ 的 $_{n\in\mathbb{Z}}$ 齐次线性算子。若对于所有 $m\in\mathbb{Z}$，$\dim A_m=1$，且 $\{x_m\in A_m,m\in\mathbb{Z}\}$ 是 $\mathbb{Z}$ 分次线性空间 $A=\oplus_{m\in\mathbb{Z}}A_m$ 的一组齐次基，则对于所有 m、$n\in\mathbb{Z}$,

（i）若 $\deg\ \alpha=k\neq 0$，则 $\mathcal{A}$ 是乘法的，当且仅当对所有 m、$n\in\mathbb{Z}$,

$$\alpha_{m+k,m}\alpha_{n+k,n}c_{m+k,n+k}^{m+n+2k}=c_{m,n}^{m+n}\alpha_{m+n+k,m+n}=0,$$

$$\textit{which is equivalent to}\begin{cases}\alpha_{m+n+k,m+n}=0, & \textit{if}\quad c_{m,n}^{m+n}\neq 0\\ \alpha_{m+k,m}=0\ \textit{or}\ \alpha_{n+k,n}=0, & \textit{if}\quad c_{m+k,n+k}^{m+n+2k}\neq 0\end{cases}$$

（ii）若 deg $\alpha = k = 0$，则 $\mathcal{A}$ 是乘法的，当且仅当对所有 m、$n \in \mathbb{Z}$,

$$\alpha_{m,m}\alpha_{n,n}c_{m,n}^{m+n} = c_{m,n}^{m+n}\alpha_{m+n,m+n},$$

也就是说，当且仅当对所有 $m, n \in \mathbb{Z}$,

$$c_{m,n}^{m+n}(\alpha_{m,m}\alpha_{n,n} - \alpha_{m+n,m+n}) = 0,$$

或者等价地，当且仅当对所有 $m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\alpha_{m,m}\alpha_{n,n} = \alpha_{m+n,m+n}, \quad if \quad c_{m,n}^{m+n} \neq 0.$$

定义 2.3（ [39, 58]）。Hom-Lie 代数是由一个域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间 A、一个双线性映射 $[\cdot,\cdot]$: $A \times A \to A$ 和一个线性映射 α: $A \to A$ 构成的 Hom-代数（$A, [\cdot,\cdot], \alpha$），并满足对所有 $x, y, z \in A$,

$$[x, y] = -[y, x] \qquad \text{(Skew-symmetry identity)} \qquad (2.2)$$

$$[\alpha(x), [y, z]] + [\alpha(y), [z, x]] + [\alpha(z), [x, y]] = 0. \qquad \text{(Hom-Jacobi identity)} \qquad (2.3)$$

定义 2.4（ [48, 58]）。Hom-Leibniz代数是由一个域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间 A、一个双线性映射 $[\cdot,\cdot]$: $A \times A \to A$ 和一个线性映射 α: $A \to A$ 构成的 Hom-代数（$A, [\cdot,\cdot], \alpha$），并满足对所有 $x, y, z \in A$,

$$[\alpha(x), [y, z]] = [[x, y], \alpha(z)] + [\alpha(y), [x, z]]. \qquad \text{(Hom-Leibniz identity)} \qquad (2.4)$$

此外，当线性映射 α: $A \to A$ 满足乘法性 (2.1)，即 α 是一个代数自同态时，Hom-Leibniz代数（$A, [\cdot,\cdot], \alpha$）称为乘法的。

注 2.5. 反对称Hom-代数是满足反对称公理 (2.2) 的 Hom-代数，因此 Hom-Lie 代数构成反对称 Hom-代数的一个特殊子类，并且还满足 Hom-Jacobi恒等式 (2.3)。然而，在反对称代数中，并不要求线性运算 α 与双线性运算 $[\cdot,\cdot]$ 之间存在任何关系。从这个意义上说，反对称 Hom-代数可以被视为并研究为定义在其上的任意反对称代数与线性算子对。然而，Hom-Lie 代数或 Hom-Leibniz代数并非如此，其中线性运算与双线性运算通过 Hom-Jacobi 恒等式和 Hom-Leibniz恒等式以非平凡的方式相互依存。

注 2.6. 每个反对称Hom-Leibniz代数都是 Hom-Lie 代数，每个 Hom-Lie 代数都是反对称Leibniz代数，但并非每个 Hom-Leibniz代数都是反对称的。因此，作为一类 Hom-代数，Hom-Lie 代数与 Hom-Leibniz代数类和反对称代数类的交集重合，而且该交集真包含于这两个类中的每一个。

例 2.7. 对于 $q \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ 和 $n \in \mathbb{Z}$，由以下方式定义的 q数 $\{n\}$

$$\{n\} = \begin{cases} \frac{1-q^n}{1-q}, & \text{for } q \neq 1 \\ n, & \text{for } q = 1 \end{cases}$$

具有以下性质

$$\{m+1\}=1+q\{m\}=\{m\}+q^m,\ \{m+n\}=\{m\}+q^m\{n\},\ q^m\{-m\}=-\{m\},\\ \{m\}=0\ \Leftrightarrow\ q^m=1. \tag{2.5}$$

线性空间 $\mathcal{V}^q$ 以 $\{L_n|n\in\mathbb{Z}\}$ 为基，配备双线性运算 $[\cdot,\cdot]$ 和线性映射 α。对于基上的所有 $\mathcal{V}^q$、 m，定义为

$$\begin{aligned}&[L_m,L_n]=(\{m\}-\{n\})L_{m+n},\\ &\alpha(L_n)=(1+q^n)L_n.\end{aligned} \tag{2.6}$$

于是，$(\mathcal{V}^q,[\cdot,\cdot],\alpha)$ 是一个 Hom-Lie 代数 [39, 75, 76],，称为 q-变形 Witt Hom-Lie 代数或 q-Witt Hom-Lie 代数。$\mathcal{V}^q$上存在自然的 $\mathbb{Z}$-分次，

$$\mathcal{V}^q=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{V}_n^q,\ \mathcal{V}_n^q=\mathbb{K}L_n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

例 2.8. 若在例 2.7 中，次数为 k 的齐次线性算子 α 对所有 $n\in\mathbb{Z}$ 定义为 $\alpha=\alpha_k(L_n)=(1+q^{n-k})L_{n+k}$，则对于所有 $k\in\mathbb{Z}$，$(\mathcal{V}^q,[\cdot,\cdot],\alpha_k)$ 都是 $\mathbb{Z}$-分次 Hom-Lie 代数。

例 2.9. 对于 $q\neq 0$ 和 $n\in\mathbb{Z}$，令 $[n]$ 表示 q-数

$$[n]=[n]_q=\begin{cases}\frac{q^n-q^{-n}}{q-q^{-1}},\ \text{if } q\neq\pm1\\ n,\ \text{if } q=1\\ (-1)^{n-1}n=(-1)^{n+1}n=-(-1)^nn,\ \text{if } q=-1.\end{cases}$$

注意，这些 q-数在将 q 替换为 q^{-1}的变换下保持不变，并且对所有 $m,n\in\mathbb{Z}$，满足

$$\begin{cases}[-n]=-[n],\ q^n[m]-q^m[n]=[m-n],\ q^{-n}[m]+q^m[n]=[m+n],\ \text{for all } q\in\mathbb{K}\setminus\{0\}\\ [n]=0\ \Leftrightarrow\ q^{2n}=1,\ \text{for all } q\neq\pm1\\ [n]=n=0\ \Rightarrow\ n=0,q^{2n}=1^0=1,\ \text{for } q=1\\ [n]=(-1)^{n-1}n=0\ \Rightarrow\ n=0,q^{2n}=(-1)^0=1,\ \text{for } q=-1.\end{cases}$$

注意，若 $q=\pm1$，则对所有 $n\in\mathbb{Z}$，都有 $q^{2n}=1$；而若 $q=1$ $(-1)^{n-1}n$，则 $[n]=\begin{cases}n\\ \text{，但 } q=-1\end{cases}=0$仅对 $n=0$成立。

设 $\mathcal{W}^q$ 是一个以 $\{L_n,W_n|n\in\mathbb{Z}\}$为基的线性空间，并在基上定义 $\mathcal{W}^q$ 上的一个双线性运算，对所有 $m,n\in\mathbb{Z}$，定义为

$$[L_m,L_n]=[m-n]L_{m+n},\quad [L_m,W_n]=[m-n]W_{m+n}, \tag{2.7}$$

其余括号由斜对称性确定，或等于 0。在 $\mathcal{W}^q$上的线性映射 α 定义为：对所有 $n\in\mathbb{Z}$,

$$\alpha(L_n)=(q^n+q^{-n})L_n,\quad \alpha(W_n)=(q^n+q^{-n})W_n.$$

已在 [83] 中证明，三元组（$\mathcal{W}^q$，$[\cdot,\cdot]$，α）构成一个 Hom-Lie 代数，称为 q变形的 $W(2,2)$ Hom-Lie 代数。定义 $\deg(L_n)=\deg(W_n)=n$，可得 $\mathcal{W}^q$ 是一个 $\mathbb{Z}$分次 Hom-Lie 代数，即$\mathcal{W}^q=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{W}_n^q$，其中 $\mathcal{W}_n^q=$由$_{\mathbb{K}}\{L_n,W_n\}$.张成。注意，$\mathcal{W}^q$ 不是乘法的，因为 α 不是 Hom-Lie 代数之间的同态。

例 2.10。在例 2.9 中，若次数为 k 的齐次线性算子定义为$\beta(L_n) = (q^{n-k} + q^{k-n})L_{n+k}$，$\beta(W_n) = (q^{n-k} + q^{k-n})W_{n+k}$对所有 $n \in \mathbb{Z}$均成立，则（$\mathcal{W}^q$，$[\cdot,\cdot]$，β）是一个 $\mathbb{Z}$分次 Hom-Lie 代数。

命题 2.11. 对任意 $k \in \mathbb{Z}$，Hom-Lie 代数 $(\mathcal{V}^q, [\cdot,\cdot], \alpha_k)$ 是乘法的，当且仅当 $k = 0$ and $q = -1$。

证明. 若 $k = \deg \alpha_k = \deg \alpha_0 = 0$，则根据推论 2.2 (ii),

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{V}^q, [\cdot,\cdot], \alpha) \quad \text{is multiplicative} \Leftrightarrow \\
&\forall\, m,n \in \mathbb{Z}: \ (\{m\} - \{n\})\big((1+q^m)(1+q^n) - (1+q^{m+n})\big) = 0 \Leftrightarrow \\
&\forall\, m,n \in \mathbb{Z}: \ (\{m\} - \{n\})(q^n + q^m) = 0 \Leftrightarrow \\
&\forall\, m,n \in \mathbb{Z}: \begin{cases} (q^n - q^m)(q^n + q^m) = 0, & \text{for } q \neq 1 \\ (m-n)(q^n + q^m) = (m-n)\cdot 2 = 0, & \text{for } q = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\forall\, m,n \in \mathbb{Z}: \begin{cases} q^{2(n-m)} = 1, & \text{for } q \neq 1 \\ m - n = 0, & \text{for } q = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&q \neq 1, \forall\, p \in \mathbb{Z}: \ q^{2p} = 1 \Leftrightarrow q \neq 1, q^2 = 1 \ (\text{for } p = 1) \Leftrightarrow \ q = -1.
\end{aligned}
$$

若 $k = \deg \alpha_k \neq 0$，则根据推论 2.2 (i),

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{V}^q, [\cdot,\cdot], \beta) \quad \text{is multiplicative} \Leftrightarrow \\
&\forall\, m,n \in \mathbb{Z}: \begin{cases} (\{m\} - \{n\})(1 + q^{m+n-k}) = 0; \\ (1+q^{m-k})(1+q^{n-k})(\{m+k\} - \{n+k\}) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\forall\, m,n \in \mathbb{Z}: \begin{cases} \begin{cases} (q^n - q^m)(1+q^{m+n-k}) = 0, \text{ if } q \neq 1 \\ (m-n)\cdot 2 = 0, \text{ if } q = 1 \end{cases}; \\ \begin{cases} (1+q^{m-k})(1+q^{n-k})(q^{n+k} - q^{m+k}) = 0, \text{ if } q \neq 1 \\ 4\cdot(m-n) = 0, \text{ if } q = 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \\
&q \neq 1 \text{ 和 } \forall\, m,n \in \mathbb{Z}: \begin{cases} q^{m-n} = 1 \\ \begin{cases} q^{n+m-k} = -1; \text{ 或 } q^{m-k} = -1 \text{ 或 } q^{n-k} = -1 \end{cases} \end{cases} \\
&\text{或 } q^n = q^m \Leftrightarrow q \neq 1 \text{ 和 } \forall\, m,n \in \mathbb{Z}: \begin{cases} q^{m-n} = 1 \\ \begin{cases} q^{n+m-k} = -1; \text{ 或 } q^{n-k} = -1 \text{ 如} \\ q^{m-k} = -1 \end{cases} \end{cases} \\
&\text{果 } q^{m-n} \neq 1, \Leftrightarrow q \neq 1 \text{ 和 } \forall\, m,n \in \mathbb{Z}: \begin{cases} \begin{cases} q^{n+m-k} = -1 \\ q^{m-k} = -1 \end{cases}; \text{, 如果} \end{cases} \\
&q^{m-n} \neq 1 \quad q^{n-k} \neq -1 \text{ , ; 如果 , , } \Leftrightarrow q \neq 1 \text{ 和 } \forall\, m,n \in \mathbb{Z}: \\
&\begin{cases} \begin{cases} q^{n+m-k} = -1 \\ q^{m-k} = -1 \end{cases} & q^{m-n} \neq 1 \quad q^{m-k} \neq -1 \\ \begin{cases} q^n = 1 \\ q^m = 1 \end{cases} \text{; 对于 } q^m \neq 1, q^k \neq -1 \text{; 对于 } q^n \neq 1, q^k \neq -1, \end{cases}
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

若 $q \neq 1$且 $q^k = -1$，则 (2.8) 化简为 $q \neq 1$ 且 $\forall\, m,\ n \in \mathbb{Z}: \ q^{m-n} = 1$。当 $m - n = k$时，$q^{m-n} = -1 \neq 1$ 不成立，因此该式不成立。若 $q \neq 1$、$q^k \neq -1$ 且 $q^k = 1$，则 (2.8) 不成立，因为当 $m = 2k+1$ 且 $n = k$时，

$$q^{m-n} = q^{k+1} = q \neq 1, \ q^m = q^{2k+1} = q \neq 1, \ q^n = q^{k+1} = q \neq 1,$$

而若 $q \neq 1$、 $q^k \neq -1$ 且 $q^k \neq 1$，则 (2.8) 不成立，因为当 $m = 2k$ 且 $n = k$ 时，

$$q^{m-n} = q^k \neq 1,\ q^m = q^{2k} \neq 1,\ q^n = q^k = q \neq 1.$$

因此，若 $k = \deg\ \alpha_k \neq 0$，则对于任意 q，$(\mathcal{W}^q, [\cdot,\cdot], \alpha_k)$ 都不是乘法的。 □

命题 2.12. q-变形的 $W(2, 2)$ Hom-Lie 代数 $(\mathcal{W}^q, [\cdot,\cdot], \alpha)$ 是乘法的，当且仅当 $q^2 = -1$（这等价于 $q = \pm i$，若存在 $i \in \mathbb{K}$ 使得 $i^2 = -1$；例如，当 $\mathbb{K}$ 是代数闭域时，如 $\mathbb{C}$）。

证明. 对于所有 $n, m \in \mathbb{Z}$，我们有

$$\begin{aligned}
&[\alpha(L_m), \alpha(L_n)] - \alpha([L_m, L_n]) = [(q^m + q^{-m})L_m, (q^n + q^{-n})L_n] - \alpha([m-n]L_{m+n}) \\
&\quad = (q^m + q^{-m})(q^n + q^{-n})[m-n]L_{m+n} - [m-n](q^{m+n} + q^{-m-n})L_{m+n} \\
&\quad = [m-n](q^{m-n} + q^{n-m})L_{m+n} = \begin{cases} \frac{(q^{m-n} - q^{n-m})(q^{m-n} + q^{n-m})}{q - q^{-1}} L_{m+n}, \text{ if } q \neq \pm 1 \\ 2(m-n)L_{m+n}, \text{ if } q = 1 \\ 2(n-m)L_{m+n} \text{ if } q = -1 \end{cases} \\
&[\alpha(L_m), \alpha(W_n)] - \alpha([L_m, W_n]) = [(q^m + q^{-m})L_m, (q^n + q^{-n})W_n] - \alpha([m-n]W_{m+n}) \\
&\quad = (q^m + q^{-m})(q^n + q^{-n})[m-n]W_{m+n} - [m-n](q^{m+n} + q^{-m-n})W_{m+n} \\
&\quad = [m-n](q^{m-n} + q^{n-m})W_{m+n} = \begin{cases} \frac{(q^{m-n} - q^{n-m})(q^{m-n} + q^{n-m})}{q - q^{-1}} W_{m+n}, \text{ if } q \neq \pm 1 \\ 2(m-n)W_{m+n}, \text{ if } q = 1 \\ 2(n-m)W_{m+n} \text{ if } q = -1 \end{cases}, \\
&\alpha([W_m, W_n]) - [\alpha(W_m), \alpha(W_n)] = 0.
\end{aligned}$$

因此，由定理 2.1 (i),

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{W}^q, [\cdot,\cdot], \alpha) \text{ is multiplicative } \Leftrightarrow \\
&\forall\ m, n \in \mathbb{Z}: \begin{cases} (q^{m-n} - q^{n-m})(q^{m-n} + q^{n-m}) = 0, \text{ if } q \neq \pm 1 \\ m - n = 0, \text{ if } q = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&q \neq \pm 1 \text{ and } \forall\ m, n \in \mathbb{Z}: \ (q^{2(m-n)} - q^{2(n-m)}) = 0 \ \Leftrightarrow \\
&q \neq \pm 1 \text{ and } \forall\ m, n \in \mathbb{Z}: \ q^{4(m-n)} = 1 \Leftrightarrow q \neq \pm 1 \text{ and } \forall\ p \in \mathbb{Z}: \ q^{4p} = 1 \Leftrightarrow \\
&q \neq \pm 1 \text{ and } \forall\ p \in \mathbb{Z}: \ q^4 = 1 \ \Leftrightarrow \ q^2 = -1. \\
&\Leftrightarrow q = \pm i \text{ if } \exists\ i \in \mathbb{K}: \ i^2 = -1 \text{ (for example if } \mathbb{K} \text{ is algebraically closed).}
\end{aligned}$$ □

命题 2.13. 对于任意满足 $q \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ 的 $\mathcal{W}^q$，Hom-Lie 代数 $(\mathcal{W}^q, [\cdot,\cdot], \beta)$ 都不是乘法的。

证明. 由定理 2.1 (iv),

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{W}^q, [\cdot,\cdot], \beta) \text{ 是乘法的} \ \Leftrightarrow\ \forall\ m, n \in \mathbb{Z}: \ \begin{cases} \beta(\ [L_m, L_n] \ = [\beta\ L_m \ \ \beta\ L_n\ ] = 0\ ) \ ( ) \ ( ) \ ( ) \ ( ) \ ( ) \ ( ), \\ \quad \beta\ [L_m, W_n] \ = [\beta\ L_m \ \ \beta\ W_n\ ] = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \\
&\forall\ m, n \in \mathbb{Z}: \ \begin{cases} (q^{m-k} + q^{k-m})(q^{n-k} + q^{k-n})[m-n]L_{m+n+2k} = 0 \\ (q^{m+n-k} + q^{k-m-n})[m-n]L_{m+n+k} = 0, \\ (q^{m-k} + q^{k-m})(q^{n-k} + q^{k-n})[m-n]W_{m+n+2k} = 0 \\ (q^{m+n-k} + q^{k-m-n})[m-n]W_{m+n+k} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

$q \neq \pm 1$ 以及 $\forall\, m,n \in \mathbb{Z}$： $\left\{ (q^{m-k}+q^{k-m})(q^{n-k}+q^{k-n})(q^{m-n}+q^{n-m}) = 0, (\right.$

$q^{m+n-k}+q^{k-m-n})(q^{m-n}+q^{n-m}) = 0,$

这并不成立，因为对于 $m = k+1, n = k$，它会化为不可能的情况

$$q \neq \pm 1 \text{ and } \begin{cases} 2(q+q^{-1})^2 = 0, \\ (q^{k+1}+q^{-(k+1)})(q+q^{-1}) = 0, \end{cases}$$

因此，对于任意 $q \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$，$(\mathcal{W}^q, [\cdot,\cdot], \beta)$ 都不是乘法的。 □

2.2 Hom-代数上的平均算子

定义 2.14. 在 $\mathbb{K}$ 上，Hom-代数 $(A, [\cdot,\cdot], \alpha)$ 上的平均算子是一个线性算子 $P\colon A \to A$，满足对所有 $x, y \in A$,

$$\alpha \circ P = P \circ \alpha, \qquad \text{(commutativity of } P \text{ with } \alpha) \tag{2.9}$$

$$[P(x), P(y)] = P([P(x), y]) = P([x, P(y)]), \qquad \text{(averaging operator axiom)} \tag{2.10}$$

注 2.15. 在反对称 Hom-代数中，因而特别是在 Hom-Lie 代数中，乘法的反对称性 (2.2) 蕴含 (2.10) 等价于

$$[P(x), P(y)] = P([P(x), y]), \ \forall\, x, y \in A. \tag{2.11}$$

命题 2.16. 若 P 是 Hom-代数 $\mathcal{A} = (A, [\cdot,\cdot], \alpha)$ 上的平均算子，则

(i) $(P(A)\ [\cdot,\cdot], \alpha)$ 是 Hom-Lie 代数 $(A, [\cdot,\cdot], \alpha)$ 的 Hom-子代数;

(ii) $[P(A)\ ker(P)] \subseteq ker(P)$ 和 $[ker(P)\ P(A)] \subseteq ker(P)$。

(iii) 若 P 是满射，即若 $P(A) = A$，则 $ker(P)$ 是 Hom-代数 $\mathcal{A}$ 中的双边 Hom-理想，这意味着 $[A, ker(P)] \subseteq ker(P)$，$[ker(P)\ A] \subseteq ker(P)$ 且 $\alpha(ker(P)) \subseteq ker(P)$。

证明。由于 P 是线性算子，$P(A)$ 是 A 的线性子空间。

(i) 根据 (2.9)，P 与 α 可交换，因此 $\alpha(P(x)) = P(\alpha(x)) \in P(A)$。由于对任意 x、$y \in P(A)$，存在 x'、$y' \in A$ 使得 $x = P(x')$ $y = P(y')$，由平均算子公理 (2.10) 可得 $[x, y] = [P(x')\ P(y')] = P([P(x')\ y']) \in P(A)$。

(ii) 对于某个 $x' \in A$，设 $x = P(x')$。若 $y' \in ker(P)$，则由 (2.10) 得 $P([x, y']) = P([P(x')\ y']) = [P(x')\ P(y')] = 0$，因此 $[P(A)\ ker(P)] \subseteq ker(P)$。对于某个 $y' \in A$，设 $y = P(y')$。若 $x' \in ker(P)$，则由 (2.10) 得 $P([x', y]) = P([x', P(y')]) = [P(x')\ P(y')] = 0$，因此 $[ker(P)\ P(A)] \subseteq ker(P)$。

(iii) 前两个包含关系是 (ii) 的特例，而 $\alpha(ker(P)) \subseteq ker(P)$ 可由 α 和 P 的交换性得到。

□

Hom-Leibniz代数和 Hom-Lie 代数的定义公理关于其变量是多重线性的，并且可由 Hom-子代数继承。

推论2.17. 设 P 是 Hom-代数 $(A, [\cdot,\cdot], \alpha)$ 上的平均算子。那么，若 $(A, [\cdot,\cdot], \alpha)$ 是反对称 Hom-代数、Hom-Leibniz代数或 Hom-Lie 代数，则 $(P(A)\ [\cdot,\cdot], \alpha)$ 也分别是反对称 Hom-代数、Hom-Leibniz代数或 Hom-Lie 代数。

命题 2.18. 若 $\mathcal{A} = (A, [\cdot,\cdot], \alpha)$ 是 Hom-Leibniz代数，且 P 是 $\mathcal{A}$ 上的平均算子，则令 $\{\cdot,\cdot\}: A \times A \to A$ 对所有 $x, y \in A$ 定义为 $\{x, y\} = [P(x)\ y]$,

(i) 三元组 $\mathcal{A}' = (A, \{\cdot,\cdot\}, \alpha)$ 是 Hom-Leibniz代数;

(ii) 若 $\mathcal{A} = (A, [\cdot,\cdot], \alpha)$ 是 Hom-Leibniz代数，则 $\mathcal{A}' = (A, \{\cdot,\cdot\}, \alpha)$ 是 Hom-Lie 代数，当且仅当对所有 $x, y \in A$, $[P(x)\ y] = -[P(y)\ x]$;

(iii) 若 $\mathcal{A} = (A, [\cdot,\cdot], \alpha)$ 是 Hom-Lie 代数，且平均线性算子 P 是满射，即 $P(A) = A$，那么 $\mathcal{A}' = (A, \{\cdot,\cdot\}, \alpha)$ 是 Hom-Lie 代数。

证明. 设 $x, y, z \in A$，则 $\mathcal{A}'$ 中的 (2.4) 证明如下:

$$
\begin{aligned}
&\{\alpha(x), \{y, z\}\} - \{\{x, y\}, \alpha(z)\} - \{\alpha(y), \{x, z\}\} \\
&= [P(\alpha(x)), [P(y), z]] - [P([P(x), y], \alpha(z)] - [P(\alpha(y)), [P(x), P(z)]] \\
&\overset{(\alpha,\ P \text{ commute})}{=} [\alpha(P(x)), [P(y), z]] - [[P(x), P(y)], \alpha(z)] - [\alpha(P(y)), [P(x), z]] \overset{(\mathcal{A} \text{ is Hom-Leibniz algebra})}{=} 0.
\end{aligned}
$$

□

命题 2.19. 设 $\{P_j\}_{1 \le j \le n}$ 是 Hom-Lie 代数 $(A, [\cdot,\cdot], \alpha)$ 上的一组平均算子，且 $\{\lambda_j\}_{1 \le j \le n} \subseteq \mathbb{K}$。那么

(i) 算子 $S = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j$ 是 A 上的平均算子，当且仅当

$$\sum_{\substack{j,k=1 \\ i \neq j}}^{n} \lambda_j \lambda_k P_j([P_k(x), y]) = \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{n} \lambda_j \lambda_k [P_j(x), P_k(y)]$$

(ii) 若 $P_j \circ P_k = P_k \circ P_j$ 对 $1 \le k$、$j \le n$成立，则 $T = \prod_{j=1}^{n} P_j = P_1 \circ \cdots \circ P_n$ 是一个平均算子。

(iii) 若 $P_j \circ P_k = P_k \circ P_j$ 对 $1 \le k$、$j \le n$成立，则对于任意零常数项多项式 $F \in \mathbb{K}[t_1, \ldots, t_n]$，若 $F(0, \ldots, 0) = 0$，则算子 $F(P_1, \ldots, P_n)$ 是一个平均算子。

(iv) 如果平均算子 P 可逆，那么 P^{-1} 是一个平均算子。

证明. (i) 映射 S 是 A 上的线性算子，因为它是线性算子 $\{P_j\}_{1\le j\le n}$ 和 $\alpha\circ S = S\circ\alpha$ 的线性组合，且 $\alpha\circ P_j = P_j\circ\alpha$、 $1\le j\le n$。对于所有 x、 $y\in A$。

$$\begin{aligned}
S([S(x),y]) =&(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j P_j)([(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k P_k)(x),y]) = (\sum_{j=1}^{n}\lambda_j P_j)([\sum_{k=1}^{n}\lambda_k P_k(x),y])\\
=&\sum_{j,k=1}^{n}\lambda_j\lambda_k P_j([P_k(x),y])\\
=&\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^2 P_j([P_k(x),y]) + \sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n}\lambda_j\lambda_k P_j([P_k(x),y])\\
=&\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^2[P_j(x),P_j(y)] + \sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n}\lambda_j\lambda_k([P_j(x),P_k(y)])\\
=&\sum_{j=1}^{n}[\lambda_j P_j(x),\lambda_j P_j(y)] + \sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n}([\lambda_j P_j(x),\lambda_k P_k(y)])\\
=&[\sum_{j=1}^{n}\lambda_j P_j,\sum_{k=1}^{n}\lambda_k P_k] = [S(x),S(y)].
\end{aligned}$$

(ii) 算子 $T_n = P_1\circ\cdots\circ P_n$ 是线性算子的复合，因此是线性的；并且n也满足 $\alpha\circ T_n = T_n\circ\alpha$，因为对所有 $1\le j\le n$都有 $\alpha\circ P_j = P_j\circ\alpha$。对于 $n=1$, $T_1 = \prod P_j = P_1$ 是一个$_{j=1}$平均算子。假设当 $n=k$ 时该命题成立，即 $T_k = P_1\circ\cdots\circ P_k$ 是一个平均算子。那么，对于所有 x，都有 $y\in A$,

$$\begin{aligned}
T_{k+1}([T_{k+1}(x),y]) =&T_k\circ P_{k+1}([T_k(P_{k+1}(x)),y])\\
\text{(T_k, P_{k+1} commute)} =&T_k(P_{k+1}([P_{k+1}(T_k(x)),y]))\\
\text{(P_{k+1} is an averaging operator)} =&T_k([P_{k+1}(T_k(x)),P_{k+1}(y)])\\
\text{(T_k, P_{k+1} commute)} =&T_k([T_k(P_{k+1}(x)),P_{k+1}(y)])\\
\text{(T_k is an averaging operator)} =&[T_k(P_{k+1}(x)),T_k(P_{k+1}(y))]\\
=&[T_{k+1}(x),T_{k+1}(y)].
\end{aligned}$$

证明 T_n 对于 $n = k+1$是平均算子，由此根据数学归纳法原理完成证明。

(iii) 由于 $F(P_1,\ldots,P_n)$是平均算子的复合的线性组合，根据(ii)和(i)，它也是一个平均算子。

(iv) 显然，若 P 可逆，则 P^{-1} 是 A 和 $\alpha\circ P^{-1} = P^{-1}\circ\alpha$ 的线性映射。令 x、 $y\in A$。由于 P 是满射，存在 $y'\in A$ 使得 $P(x') = P^{-1}(x)$。于是,

$$\begin{aligned}
P(P^{-1}([P^{-1}(x),y])) &= [P^{-1}(x),y] = [P^{-1}(x),P(P^{-1}(y)]\\
&= [P(x'),P(P^{-1}(y)] = P([P(x'),P^{-1}(y)]) = P([P^{-1}(x),P^{-1}(y)]).
\end{aligned}$$

由于 P 是单射，我们有 $P^{-1}([P^{-1}(x)\ y]) = [P^{-1}(x)\ P^{-1}(y)]$。 □

注 2.20. 根据命题 2.19，若 P 和 Q 是 Hom-Lie 代数（$A, [\cdot,\cdot], \alpha$）上的两个平均算子，则

(i) 对任意 $\lambda \in \mathbb{K}$， λP 都是 A上的平均算子；

(ii) 若对所有 $x, y \in A$， $P([Q(x)\ y]) + Q([P(x)\ y]) = [Q(x)\ P(y)] + [P(x)\ Q(y)]$ 成立，则 $P + Q$ 是平均算子。

(iii) 若 $P \circ Q = Q \circ P$，则 $P \circ Q$ 是平均算子；

(iv) 对任意零常数项为 $F(0) = 0$的多项式 $F \in \mathbb{K}[t]$，算子 $F(P)$ 是平均算子。

注 2.21. 已知，对于 $\lambda \in \mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$， P是 Hom-Lie 代数（$A, [\cdot,\cdot], \alpha$）上的平均算子，当且仅当 λP是 A 上的平均算子。因此，任意 Hom-Lie 代数上的平均算子集合在数乘作用下构成一个模。

接下来，我们给出幂等线性算子成为平均算子的充要条件。

定义 2.22. 域 $\mathbb{K}$ 上 Hom-Lie 代数 $(A, [\cdot,\cdot], \alpha)$ 上的幂等算子是满足 $\alpha \circ P = P \circ \alpha$ 和 $P^2 = P.$ 的线性映射 $P\colon A \to A$

注 2.23. 回顾一下，存在一个双射

$$\{\text{上的幂等线性算子 } A\} \leftrightarrow \{\text{直和分解 } A = A_0 \oplus A_1\}$$

其中 $A_0 = im(P)$ 且 $A_1 = ker(P)$。与 $A = A_0 \oplus A_1$ 对应的线性映射 P 称为沿着 A_1 到 A_0 的投影。如果 P 是沿着 A_1 到 A_0 的投影，那么 $I - P$ 是沿着 A_0 到 A_1 的投影，因为 $(I-P)^2 = I - 2P + P^2 = I - 2P + P = I - P$ 且 $im(I-P) = ker(P)$ $Ker(I-P) = im(P)$ 。

命题 2.24. 设 $(A, [\cdot,\cdot], \alpha)$ 为一个 Hom-Lie 代数，且设 $P\colon A \to A$ 为一个幂等线性映射。设 $A = A_0 \oplus A_1$ 为相应的线性分解。则 P 是平均算子当且仅当

$$[A_0, A_0] \subseteq A_0, \quad [A_0, A_1] \subseteq A_1. \tag{2.12}$$

证明. 对任意 $x, y \in A$，记 $x = x_0 + x_1$和 $y = y_0 + y_1$为 $x_i, y_i \in A_i, i = 0, 1$. 假设 P是平均算子。由 $P(A) = A_0$以及 $[P(x)\ P(y)] = P([P(x)\ y])$，可得 $[A_0, A_0] \subseteq A_0$。于是我们有

$$\begin{aligned} [P(x), P(y)] &= [x_0, y_0], \\ P([P(x), y]) &= P([x_0, y_0] + [x_0, y_1]) = P([x_0, y_0]) + P([x_0, y_1]) = [x_0, y_0] + P([x_0, y_1]). \end{aligned}$$

因此，由（2.11）可得，对于所有 $x_i, y_i \in A_i, i = 0, 1$，有 $P([x_0, y_1]) = 0$。由 $A_1 = kerP$根据 P的定义，故（2.12）成立。反之，假设（2.12）成立。于是我们有

$$P([P(x)\ y]) = P([x_0, y_0] + [x_0, y_1]) = P([x_0, y_0]) + P([x_0, y_1]) = [x_0, y_0] = [P(x), P(y)]$$

因此， P 是一个平均算子。 □

推论 2.25。幂等自同态 $P:\ A \to A$ 是一个平均算子。

证明。令 $A_0 := imP$ 且 $A_1 := kerP$。于是我们有 $A = A_0 \oplus A_1$，并且 P 是沿着 A_1 到 A_0 的投影。由于 A_1 是 A 的理想，因此（2.12）成立。因此，P 是一个平均算子。 □

3 关于 q-变形 Witt Hom-代数上的齐次平均算子

本节我们对 $\mathcal{V}^q$ 上的齐次平均算子进行分类，其中 $\mathcal{V}^q$ 是 q-变形 Witt 代数；并给出由 $\mathcal{V}^q$ 上的平均算子诱导的 Hom-Leibniz代数，同时研究其乘法性条件，其中 $\mathcal{V}^q$ 是 q-变形 Witt 代数。

定义 3.1. 在 q-变形 Witt Hom-代数 $\mathcal{V}^q$ 上，次数为 $d \in \mathbb{Z}$ 的齐次算子 F 是 $\mathcal{V}^q$ 上的一个线性算子，并满足 $F(\mathcal{V}^q_m) \subseteq \mathcal{V}^q_{m+d}$，对所有 $m \in \mathbb{Z}$均成立。

因此，在 q-变形 Witt Hom-代数 $\mathcal{V}^q$ 上，次数为 d 的齐次平均算子 P_d 是 $\mathcal{V}^q$ 上的一个平均算子，其形式如下

$$P_d(L_m) = f(m+d)L_{m+d}, \quad \forall\ m \in \mathbb{Z}, \tag{3.1}$$

其中 f 是定义在 $\mathbb{Z}.$ 上的 $\mathbb{K}$ 值函数

设 P_d 是 q 变形 Witt Hom-代数 $(\mathcal{V}^q, [\cdot,\cdot], \alpha)$ 上次数为 d 的齐次平均算子，且满足 (3.1)。由 (2.6) 和 (2.11) 可得,

$$\begin{aligned}
[P_d(L_m), P_d(L_n)] &= [f(m+d)L_{m+d}, f(n+d)L_{n+d}] \\
&= f(m+d)f(n+d)(\{m+d\} - \{n+d\})L_{m+n+2d}, \\
P_d([P_d(L_m), L_n]) &= P_d([f(m+d)L_{m+d}, L_n]) \\
&= f(m+d)f(m+n+2d)(\{m+d\} - \{n\})L_{m+n+2d}.
\end{aligned}$$

我们看到，函数 f 对所有 $m, n \in \mathbb{Z}$ 都满足,

$$f(m+d)f(n+d)(\{m+d\} - \{n+d\}) = f(m+d)f(m+n+2d)(\{m+d\} - \{n\}),$$

或者等价地，在交换 $m \to m-d$ 和 $n \to n-d$ 后,

$$f(m)\big(f(n)(\{m\} - \{n\}) - f(m+n)(\{m\} - \{n-d\})\big) = 0. \tag{3.2}$$

引理 3.2. 若 P_d 是 q 变形 Witt Hom-代数 $(\mathcal{V}^q, [\cdot,\cdot], \alpha)$ 上次数为 d 的非零平均算子，则 $\alpha \circ P_d = P_d \circ \alpha$ 当且仅当 $q^d = 1$。

证明. 对所有 $m \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
&\alpha \circ P_d(L_m) = \alpha(f(m+d)L_{m+d}) = f(m+d)\alpha(L_{m+d}) = f(m+d)(1+q^{m+d})L_{m+d}, \\
&P_d \circ \alpha(L_m) = P_d(\alpha(L_m)) = P_d((1+q^m)L_m) = (1+q^m)P_d(L_m) = (1+q^m)f(m+d)L_{m+d}, \\
&\alpha \circ P_d(L_m) = P_d \circ \alpha(L_m) \ \Leftrightarrow \forall\ m \in \mathbb{Z}:\ f(m+d)(q^d - 1) = 0,
\end{aligned}$$

是等价的当 $P_d \neq 0$ 时与 $q^d = 1$ 等价，如本例中 $f(m+d) \neq 0$ 对某个 $m \in \mathbb{Z}$. □

情形 1： $q = 1$

当 $q = 1$ 时，方程 (3.2) 对所有 $m, n \in \mathbb{Z}$ 均变为，

$$f(m)\big(f(n)(m-n) - f(m+n)(m-n+d)\big) = 0. \tag{3.3}$$

将 $n = 0$ 代入 (3.3)，得到

$$f(m)\big(mf(0) - (m+d)f(m)\big) = 0. \tag{3.4}$$

子情形 1： $d = 0$

命题 3.3. 使用上述记号，次数为 $d = 0$ 的平均算子 P_0 为

$$f(m) = \mu f(0) + \nu\delta_{m,0}, \ \forall\ m \in \mathbb{Z},\ for\ some\ (\nu, \mu) \in \mathbb{K} \times \{0, 1\},$$

其中，对于任意 x、$y \in \mathbb{K}$、$\delta_{x,y} = \begin{cases} 1 & \text{若 } x = y \\ 0 & \text{若 } x \neq y. \end{cases}$

证明. 当 $d = 0$ 时，(3.4) 变为 $mf(m)(f(0) - f(m)) = 0$。因此，对于某些 $\nu \in \mathbb{K}$ 和 $\mu \in \{0, 1\}$，有 $f(m) = \mu f(0) + \nu\delta_{m,0}$。 □

子情形 2： $d \in \mathbb{Z}^*$

命题 3.4. 沿用上述记号，当次数为 $d \in \mathbb{Z}^*$ 且 $f(0) = 0$ 时，我们有

$$f(m) = \nu\delta_{m+d,0}, \ \forall\ m \in \mathbb{Z},\ where\ \nu \in \mathbb{K},$$

证明. 当 $d \neq 0$ 且 $f(0) = 0$ 时，由方程 (3.4) 可得，对所有 $m \in \mathbb{Z}$，$(m+d)f^2(m) = 0$。因此，函数 f 对任意 $m \in \mathbb{Z}$ 都满足 $f(m) = \nu\delta_{m+d,0}$，其中$\nu \in \mathbb{K}$。 □

命题 3.5. 沿用上述记号，当次数为 $d \in \mathbb{Z}^*$ 且 $f(0) \neq 0$ 时，我们有

$$f(m) = \mu\frac{m}{m+d}f(0)\delta_{m,\mathbb{Z}\setminus\{-d\}}, \ \forall\ m \in \mathbb{Z},\ where\ \mu \in \{0, 1\},$$

其中 $\delta_{m,\mathbb{Z}\setminus\{-d\}} = \begin{cases} 1 & \text{若 } m \neq -d \\ 0 & \text{若 } m = -d. \end{cases}$

证明。当 $d \neq 0$ 和 $f(0) \neq 0$ 时，由关于 $m = -d$ 的方程 (3.4) 可得 $f(-d) = 0$。此外，对于方程 (3.4) 中的 $m \neq -d$，我们有 $f(m) = \mu\frac{m}{m+d}f(0)$，其中某个 $\mu \in \{0, 1\}$。因此，对于所有 $m \in \mathbb{Z}$，$f(m) = \mu\frac{m}{m+d}f(0)\delta_{m,\ \mathbb{Z}\setminus\{-d\}}$，$where\ \mu \in \{0, 1\}.$ □

情形 2： $q \neq 1$ 和 $q^d = 1$

命题 3.6。沿用上述记号，假设次数 d 满足 $q \neq 1$和 $q^d = 1$，则有

$$f(m) = \mu f(0) + \nu\delta_{q^m,1}, \ \forall\ m \in \mathbb{Z},\ where\ (\nu, \mu) \in \mathbb{K} \times \{0, 1\}.$$

证明。当 $q \neq 1$ 和 $q^d = 1$时，对所有 m、$n \in \mathbb{Z}$，(3.2) 化为：

$$f(m)\big(f(n)(\{m\} - \{n\}) - f(m + n)(\{m\} - \{n\})\big) = 0. \tag{3.5}$$

在 (3.5) 中取 $n = 0$，得到 $\{m\}f(m)(f(0) - f(m)) = 0.$因此 $f(m) = \mu f(0) + \nu\delta_{q^m,\ 1}$其中 $\nu \in \mathbb{K}$ 和 $\mu \in \{0, 1\}$。 □

定理 3.7。在 q-变形 Witt Hom-代数 $(\mathcal{V}^q, [\cdot, \cdot], \alpha)$ 上，次数为 d 的齐次平均算子 P_d 必为以下算子之一，对所有 $m \in \mathbb{Z}$，有

$$\begin{aligned}
&P_d^1(L_m) = \beta + \nu\delta_{m+2d,0}L_{m+d}, && for\ q = 1\ and\ d \in \mathbb{Z},\\
&P_d^2(L_m) = \mu\frac{m + d}{m + 2d}\gamma\delta_{m+d,\mathbb{Z}\setminus\{-d\}}L_{m+d}, && for\ q = 1\ and\ d \in \mathbb{Z},\\
&P_d^3(L_m) = \beta + \nu\delta_{q^m,1}L_{m+d}, && for\ q \neq 1\ and\ q^d = 1,
\end{aligned}$$

其中 β、$\nu \in \mathbb{K}$、$\gamma \in \mathbb{K}^*$和 $\mu \in \{0, 1\}$。

证明 。直接结合引理 3.2 和命题 3.3、3.4、3.5 和 3.6 . □

现在，利用命题 2.18 中给出的构造，我们得到如下结果：

定理 3.8。定理 3.7 中得到的 q-形变 Witt Hom-代数 $(\mathcal{V}^q, [\cdot, \cdot], \alpha)$ 的齐次平均算子，在底层线性空间 $\mathcal{V}^q$上导出如下 Hom-Leibniz代数，

$$\begin{aligned}
&\{L_m, L_n\}^1 = (\beta + \nu\delta_{m+d,0})(m - n)L_{m+n}, && \forall m, n \in \mathbb{Z},\ where\ q = 1\ and\ d \in \mathbb{Z},\\
&\{L_m, L_n\}^2 = (\mu\frac{m}{m + d}\gamma\delta_{m,\mathbb{Z}\setminus\{-d\}})(m - n)L_{m+n}, && \forall m, n \in \mathbb{Z},\ where\ q = 1\ and\ d \in \mathbb{Z},\\
&\{L_m, L_n\}^3 = (\beta + \nu\delta_{q^m,1})(\{m\} - \{n\})L_{m+n}, && \forall m, n \in \mathbb{Z},\ where\ q \neq 1\ and\ q^d = 1,
\end{aligned}$$

其中 β、$\nu \in \mathbb{K}$、$\gamma \in \mathbb{K}^*$和 $\mu \in \{0, 1\}$。

证明。根据命题 2.18，由 P_d^i、$i = 1$、2、3 诱导的 Hom-Leibniz代数对于 m、$n \in \mathbb{Z}$ 定义如下：

$$\begin{aligned}
&\{L_m, L_n\}^1 = [P_d^1(L_m), L_n] = [(\beta + \nu\delta_{m+2d,0}L_{m+d}, L_n] = (\beta + \nu\delta_{m+2d,0})(m + d - n)L_{m+n+d}\\
&= (\beta + \nu\delta_{m+d,0})(m - n)L_{m+n},
\end{aligned}$$

$$\{L_m, L_n\}^2 = [P_d^2(L_m), L_n] = [\mu\frac{m + d}{m + 2d}\gamma\delta_{m+d,\mathbb{Z}\setminus\{-d\}}L_{m+d}, L_n]$$

$$= (\mu\frac{m+d}{m+2d}\gamma\delta_{m+d,\mathbb{Z}\setminus\{-d\}})(m+d-n)L_{m+n+d} = (\mu\frac{m}{m+d}\gamma\delta_{m,\mathbb{Z}\setminus\{-d\}})(m-n)L_{m+n},$$

$$\{L_m, L_n\}^3 = [P_d^3(L_m), L_n] = [(\beta+\nu\delta_{q^m,1})L_{m+d}, L_n] = (\beta+\nu\delta_{q^m,1})(\{m\}-\{n\})L_{m+n+d}$$

$$= (\beta+\nu\delta_{q^m,1})(\{m\}-\{n-d\})L_{m+n} \overset{(\{n-d\}=\{n\}+q^n\{-d\})}{=} (\beta+\nu\delta_{q^m,1})(\{m\}-(\{n\}+q^n\{-d\})L_{m+n}$$

$$\overset{(\{-d\}=0)}{=} (\beta+\nu\delta_{q^m,1})(\{m\}-\{n\})L_{m+n}.$$ □

命题 3.9。由 P_d^i 诱导的非平凡 Hom-Leibniz代数 $(\mathcal{V}^q$、 $\{\cdot,\cdot\}^i$、 $\alpha)$ 是乘法型的，当且仅当 $i=3$ 和 $q=-1$。

证明。由推论 2.2 的第 (ii) 项可得:

$(\mathcal{V}^q, \{\cdot,\cdot\}^1, \alpha)$ 是乘法的 $\Leftrightarrow \forall\ m,n\in\mathbb{Z}: 2(\beta+\nu\delta_{m+d,\ 0})(m-n)\ =0\ \Leftrightarrow$
$\forall\ m\in\mathbb{Z}: (\beta+\nu\delta_{m+d,\ 0})\ =0 \Leftrightarrow \beta=\nu=0 \Leftrightarrow \{\cdot,\cdot\}^1=0.$

$(\mathcal{V}^q, \{\cdot,\cdot\}^2, \alpha)$ 是乘法的 $\Leftrightarrow \forall\ m,n\in\mathbb{Z}: 2\mu\frac{m}{m+d}\gamma\delta_{m,\ \mathbb{Z}\setminus\{-d\}})(m-n)\ =0\ \Leftrightarrow \forall\ m\in\mathbb{Z}$:
$\mu\frac{m}{m+d}\gamma\delta_{m,\mathbb{Z}\setminus\{-d\}}) = 0 \overset{\gamma\neq 0}{\Leftrightarrow} \mu=0 \Leftrightarrow \{\cdot,\cdot\}^2=0.$

$(\mathcal{V}^q, \{\cdot,\cdot\}^3, \alpha)$ is multiplicative $\Leftrightarrow$
$\forall\ m,n\in\mathbb{Z}:\ (\beta+\nu\delta_{q^m,1})(\{m\}-\{n\})\big((1+q^{m+n})-(1+q^m)(1+q^n)\big)=0\ \Leftrightarrow$
$\forall\ m\in\mathbb{Z}:\ (\beta+\nu\delta_{q^m,1})(q^n-q^m)(q^n+q^m)=0 \Leftrightarrow$
$\forall\ m\in\mathbb{Z}:\ (\beta+\nu\delta_{q^m,1})(q^{2n}-q^{2m})=0 \Leftrightarrow$
$\forall\ m,n\in\mathbb{Z}:\ \begin{cases}(q^{2(n-m)})=1,\ \text{or}\\ (\beta+\nu\delta_{q^m,1})=0,\end{cases}\ \Leftrightarrow$
$\begin{cases} q^{2p}=1,\ \forall p\in\mathbb{Z},\ \text{or}\\ \forall\ m\in\mathbb{Z}:\ \beta+\nu\delta_{q^m,1}=0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q=-1,\ \text{or} \qquad (\text{since } q\neq 1)\\ \beta=\nu=0.\end{cases}$ □

4 关于 q-变形的 W (2,2) Hom-代数上的齐次平均算子

本节对 q-变形的 $W(2,2)$ Hom-代数 $\mathcal{W}^q$ 上的齐次平均算子进行分类。此外，我们给出由 q-变形的 $W(2,2)$ Hom-代数上的平均算子所诱导的 Hom-Leibniz代数，并研究其乘法性条件。

定义 4.1. 齐次算子 F（次数为 $d\in\mathbb{Z}$）在 q-变形的 $W(2,2)$ Hom-代数 $\mathcal{W}^q$ 上是一个作用于 $\mathcal{W}^q$ 的线性算子，满足 $F(\mathcal{W}_m^q)\subseteq\mathcal{W}_{m+d}^q$ 对所有 $m\in\mathbb{Z}$均成立。

因此，次数为 d的齐次平均算子 P_d在 q-变形的 $W(2,2)$ Hom-代数 $\mathcal{W}^q$ 上，是 $\mathcal{W}^q$ 上的一个平均算子，其形式如下:

$$P_d(L_m) = f_1(m+d)L_{m+d} + g_1(m+d)W_{m+d}, \tag{4.1}$$
$$P_d(W_m) = f_2(m+d)L_{m+d} + g_2(m+d)W_{m+d}, \tag{4.2}$$

其中， f_i 和 g_i 是定义在 $\mathbb{Z}$上的 $\mathbb{K}$值函数。

设 P_d 是 $\mathcal{W}^q$ 上的 q变形 $W(2,2)$ Hom-代数的一个次数为 d 的齐次平均算子，满足方程（4.1）和（4.2）。于是，由方程（2.7）和（2.11），

$$\begin{aligned}[P_d(L_m),P_d(L_n)] &= [f_1(m+d)L_{m+d}+g_1(m+d)W_{m+d}, f_1(n+d)L_{n+d}+g_1(n+d)W_{n+d}]\\ &= f_1(m+d)f_1(n+d)[m-n]L_{m+n+2d}+f_1(m+d)g_1(n+d)[m-n]W_{n+m+2d}\\ &\qquad -g_1(m+d)f_1(n+d)[n-m]W_{m+n+2d},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_d([P_d(L_m),L_n]) &= P_d([f_1(m+d)L_{m+d}+g_1(m+d)W_{m+d},L_n])\\ &= f_1(m+d)[m+d-n]P_d(L_{m+n+d})-g_1(m+d)[n-m-d]P_d(W_{m+n+d})\\ &= f_1(m+d)f_1(m+n+2d)[m+d-n]L_{m+n+2d}\\ &\quad +f_1(m+d)g_1(m+n+2d)[m+d-n]W_{m+n+2d}\\ &\quad -g_1(m+d)f_2(m+n+2d)[n-m-d]L_{m+n+2d}\\ &\quad -g_1(m+d)g_2(m+n+2d)[n-m-d]W_{m+n+2d},\end{aligned}$$

我们看到，函数 f_i 和 g_i 满足对所有 m、$n\in\mathbb{Z}$均成立的以下方程:

$$f_1(m)f_1(n)[m-n]-f_1(m)f_1(m+n)[m+d-n]+g_1(m)f_2(m+n)[n-m-d]=0, \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}f_1(m)g_1(n)[m-n]-f_1(n)g_1(m)[n-m]-f_1(m)g_1(m+n)[m+d-n]\\ +g_1(m)g_2(m+n)[n-m-d]=0.\end{aligned} \tag{4.4}$$

并且根据

$$\begin{aligned}[P_d(L_m),P_d(W_n)] &= [f_1(m+d)L_{m+d}+g_1(m+d)W_{m+d}, f_2(n+d)L_{n+d}+g_2(n+d)W_{n+d}]\\ &= f_1(m+d)f_2(n+d)[m-n]L_{m+n+2d}+f_1(m+d)g_2(n+d)[m-n]W_{m+n+2d}\\ &\qquad -g_1(m+d)f_2(n+d)[n-m]W_{m+n+2d},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_d([P_d(L_m)\ W_n]) &= P_d([f_1(m+d)L_{m+d}+g_1(m+d)W_{m+d},W_n])\\ &= f_1(m+d)f_2(m+n+2d)[m+d-n]L_{m+n+2d}\\ &\qquad +f_1(m+d)g_2(m+n+2d)[m+d-n]W_{m+n+2d},\end{aligned}$$

我们看到 函数 f_i 和 g_i 对所有 m、$n\in\mathbb{Z}$ 满足以下方程:

$$f_1(m)f_2(n)[m-n]-f_1(m)f_2(m+n)[m+d-n]=0, \tag{4.5}$$

$$f_1(m)g_2(n)[m-n]-g_1(m)f_2(n)[n-m]-f_1(m)g_2(m+n)[m+d-n]=0. \tag{4.6}$$

同理，由

$$\begin{aligned}[P_d(W_m),P_d(W_n)] &= [f_2(m+d)L_{m+d}+g_2(m+d)W_{m+d}, f_2(n+d)L_{n+d}+g_2(n+d)W_{n+d}]\\ &= [f_2(m+d)f_2(n+d)[m-n]L_{n+m+2d}+f_2(m+d)g_2(n+d)[m-n]W_{m+n+2d}\\ &\qquad -g_2(m+d)f_2(n+d)[n-m]W_{m+n+2d},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_d([P_d(W_m)\ W_n]) &= P_d([f_2(m+d)L_{m+d}+g_2(m+d)W_{m+d},W_n]\\ &= f_2(m+d)f_2(m+n+2d)[m+d-n]L_{m+n+2d}+f_2(m+d)g_2(m+n+2d)W_{m+n+2d}\ ,\end{aligned}$$

$$P_d([W_m,P_d(W_m]) = P_d([W_m,f_2(n+d)L_{n+d}+g_2(n+d)W_{n+d}])$$

$$
\begin{aligned}
&- f_2(n+d)f_2(m+n+2d)[m-n-d]L_{m+n+2d}\\
&- f_2(n+d)g_2(m+n+2d)[m-n-d]W_{m+n+2d},
\end{aligned}
$$

我们看到 对于所有 m、 $n \in \mathbb{Z}$, 函数 f_i 和 g_i 满足以下方程:

$$
f_2(m)f_2(n)[m-n] - f_2(m)f_2(m+n)[m+d-n] = 0, \tag{4.7}
$$

$$
f_2(m)g_2(n)[m-n] - f_2(n)g_2(m)[n-m] - f_2(m)g_2(m+n)[m+d-n] = 0. \tag{4.8}
$$

类似地, 根据

$$
\begin{aligned}
[P_d(W_m), P_d(L_n)] &= [f_2(m+d)L_{m+d} + g_2(m+d)W_{m+d}, f_1(n+d)L_{n+d} + g_1(n+d)W_{n+d}]\\
&= f_2(m+d)f_1(n+d)[m-n]L_{m+n+2d}\\
&\quad + f_2(m+d)g_1(n+d)[m-n]W_{m+n+2d} - g_2(m+d)f_1(n+d)[m-n]W_{m+n+2d},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_d([P_d(W_m), L_n]) &= P_d([f_2(m+d)L_{m+d} + g_2(m+d)W_{m+d}, L_n])\\
&= f_2(m+d)[m+d-n](f_1(m+n+2d)L_{m+n+2d} + g_1(m+n+2d)L_{m+n+2d})\\
&\quad g_2(m+d)[n-d-m](f_2(m+n+2d)L_{m+n+2d} + g_2(m+n+2d)W_{m+n+2d}),
\end{aligned}
$$

我们看到, 函数 f_i 和 g_i 满足: 对所有 m、 $n \in \mathbb{Z}$,

$$
f_2(m)f_1(n)[m-n] - f_2(m)f_1(m+n)[m+d-n] + g_2(m)f_2(m+n)[n-m-d] = 0, \tag{4.9}
$$

$$
\begin{aligned}
f_2(m)g_1(n)[m-n] - g_2(m)f_1(n)[n-m] - f_2(m)g_1(m+n)[m+d-n]\\
+g_2(m)g_2(m+n)[n-m-d] = 0.
\end{aligned} \tag{4.10}
$$

引理 4.2. 若 P_d 是 q-变形的 $W(2,2)$ Hom-代数$\mathcal{W}^q$ 上的非零平均算子, 且次数为 d, 则 $\alpha \circ P_d = P_d \circ \alpha$ 当且仅当 $q^d = 1$。

证明. 对所有 $m \in \mathbb{Z}$, 我们有

$$
\begin{aligned}
\alpha \circ P_d(L_m) &= \alpha(P_d(L_m)) = \alpha(f_1(m+d)L_{m+d} + g_1(m+d)W_{m+d})\\
&= f_1(m+d)(q^{m+d} + q^{-(m+d)})L_{m+d} + g_1(m+d)(q^{m+d} + q^{-(m+d)})W_{m+d},\\
P_d \circ \alpha(L_m) &= P_d(\alpha(L_m)) = P_d((q^m + q^{-m})L_m)\\
&= f_1(m+d)(q^m + q^{-m})L_m + g_1(m+d)(q^m + q^{-m})W_m.
\end{aligned}
$$

则 $\forall m \in \mathbb{Z}$、 $\alpha \circ P_d(L_m) = P_d \circ \alpha(L_m)$ 当且仅当 $q^m + q^{-m} = q^{m+d} + q^{-m-d}$.。类似地, $\forall m \in \mathbb{Z}$、 $\alpha \circ P_d(W_m) = P_d \circ \alpha(W_m)$ 当且仅当 $q^m + q^{-m} = q^{m+d} + q^{-m-d}$.。因此,

(i) 若 $q^d = 1$, 显然有 $\alpha \circ P_d = P_d \circ \alpha$,

(ii) 若 $q^d \neq 1$, 则有

$$
\begin{aligned}
&\alpha \circ P_d = P_d \circ \alpha\\
&\iff \forall m \in \mathbb{Z},\ q^m + q^{-m} = q^{m+d} + q^{-m-d} \iff \forall m \in \mathbb{Z},\ q^m(1-q^d) = q^{-m-d}(1-q^d)\\
&\overset{(q^d \neq 1)}{\iff} \forall m \in \mathbb{Z},\ q^m = q^{-m-d} \iff \forall m \in \mathbb{Z},\ q^{2m+d} = 1,
\end{aligned}
$$

这意味着对于 $m = 0$, $q^d = 1$, 这是不可能的, 因为 $q^d \neq 1$。 □

情形 1： $q \neq -1$、1 和 $q^d = 1$

子情形 1： $q^{2m} = 1$

取 $n = 0$ 属于 (4.3)-(4.10)。对于 $q^d = 1$ 和 $q^{2m} = 1$，函数 f_1、 f_2、 g_1 和 g_2 满足 y

$$f_1(m) = \nu_1,\ f_2(m) = \nu_2,\ g_1(m) = \nu_3,\ g_2(m) = \nu_4,\ \nu_i \in \mathbb{K}.$$

于是得到以下命题。

命题 4.3. 如果 P_d 是 $\mathcal{W}^q$ 上的一个次数为 d的平均算子，其中 $q^d = 1$、 $q^{2m} = 1$，则

$$\begin{cases} f_1(m) = \nu_1, & f_2(m) = \nu_2, \\ g_1(m) = \nu_3, & g_2(m) = \nu_4, \end{cases} \quad where\ \nu_i \in \mathbb{K}.$$

子情形 2： $q^{2m} \neq 1$。

将 $n = 0$ 代入 (4.7) 得

$$f_2(m)f_2(0)[m] = f_2^2(m)[m+d] = f_2^2(m)(q^{-d}[m] + q^m[d]) = f_2^2(m)[m]. \quad (\text{since } q^d = 1)$$

这给出 $f_2(m)(f_2(0) - f_2(m)) = 0$。因此，

$$f_2(m) = \mu_1 f_2(0), \quad \mu_1 \in \{0, 1\}.$$

于是，我们有以下命题。

命题 4.4. 若 P_d 是 $\mathcal{W}^q$ 上的次数为 d 的平均算子，且 $q^d = 1$、$q^{2m} \neq 1$ 和 $f_2(0) = 0$，则

(i) 若 $f_1(0) = 0$, *then* $f_1(m) = 0,\ f_2(m) = 0,\ g_1(m) = \gamma,\ g_2(m) = 0,$ *where* $\gamma \in \mathbb{K}$;

(ii) 若 $f_1(0) \neq 0$，则

(a) $f_1(m) = f_1(0),\ f_2(m) = 0,\ g_1(m) = \gamma,\ g_2(m) = 0,$ *where* $\gamma \in \mathbb{K}$;

(b) $f_1(m) = f_1(0),\ f_2(m) = 0,\ g_1(m) = 0,\ g_2(m) = f_1(0),$ *where* $\gamma \in \mathbb{K}$;

(c) $f_1(m) = 0,\ f_2(m) = 0,\ g_1(m) = \gamma,\ g_2(m) = f_1(0),$ *where* $\gamma \in \mathbb{K}$.

证明。设 $q^d = 1$、 $q^{2m} \neq 1$ 和 $f_2(0) = 0$ 如假设所述。将 $n = 0$ 代入（4.3），得到

$$\begin{aligned} f_1(m)f_1(0)[m] =& f_1^2(m)[m+d] - g_1(m)f_2(m)[-m-d] \\ =& f_1^2(m)[m] + g_1(m)f_2(m)[m]. \quad (\text{since } q^d = 1) \end{aligned}$$

由于 $q^{2m} \neq 0$，我们得到 $f_1(m)f_1(0) = f_1^2(m) + g_1(m)f_2(m)$；又由于 $f_2(m) = 0$，可得$f_1(m)(f_1(0) - f_1(m)) = 0$。因此， $f_1(m) = \mu_2 f_1(0)$， $\mu_2 \in \{0, 1\}$。将 $n = 0$ 代入 (4.9) 得

$$\begin{aligned} f_2(m)g_1(0)[m] =& g_2(m)f_1(0)[-m] + f_2(m)g_1(m)[m+d] - g_2^2(m)[-m-d] \\ =& -g_2(m)f_1(0)[m] + f_2(m)g_1(m)[m] + g_2^2(m)[m]. \quad (\text{since } q^d = 1) \end{aligned}$$

由于 $q^{2m} \neq 1$，我们有 $f_2(m)g_1(0) = -g_2(m)f_1(0)+f_2(m)g_1(m)+g_2^2(m)$，结合 $f_2(m) = 0$，可得 $g_2(m) = \mu_3 f_1(0)$，$\kappa_3 \in \{0,1\}$. 将 $n=0$ 代入 (4.4) 得

$$\begin{aligned} f_1(m)g_1(0)[m] =& f_1(0)g_1(m)[-m] + f_1(m)g_1(m)[m+d] - g_1(m)g_2(m)[-m-d] \\ =& - f_1(0)g_1(m)[m] + f_1(m)g_1(m)[m] + g_1(m)g_2(m)[m], \quad (\text{since } q^d = 1) \end{aligned}$$

由此，当 $q^{2m} \neq 1$时，我们得到 $f_1(m)g_1(0) = -f_1(0)g_1(m)+f_1(m)g_1(m)+g_1(m)g_2(m)$；又由 $f_1(m) = \mu_2 f_1(0)$ 和 $g_2(m) = \mu_3 f_1(0)$，可得 $g_1(m)(\mu_2+\mu_3-1)f_1(0) = \mu_2 f_1(0)g_1(0)$。于是，我们有以下两种情况:

(i) 若 $f_1(0) = 0$，则 $g_1(m) = \gamma$,

(ii) 若 $f_1(0) \neq 0$，则有 $\mu_2 g_1(0) = (\mu_2+\mu_3-1)g_1(m)$；于是对于 $\mu_2 = 1$ 和 $\mu_3 = 0$，可得$g_1(0) = 0$。那么，$\begin{cases} g_1 \\ \end{cases}$

$(m) = 0$，若 $(\mu_2,\mu_3) \in \{(0,0),(1,1)\}$；$g_1\ m\ = \gamma$　　$\mu_2\ \mu_3$　　，　　$(\ )$，若 $(\ ,\ ) \in \{(1,0)\ (0,1)\}$. □

命题 4.5. 若 P_d 是 $\mathcal{W}^q$ 上次数为 d 的平均算子，满足 $q^d = 1$,$q^{2m} \neq 1$ 和 $f_2(0) \neq 0$，则 $\begin{cases} f_1 \\ \end{cases}(m) = \gamma$,

$f_2(m) = f_2(0)g_1\ m$　　———　　$g_2\ m$　　$(\ ) = {}^{\gamma f_1}_{f_2\ 0}{}^{(\ \ 0\ \ -\gamma^2\ )()}(\ ) = f_1(0) - \gamma$，其中 $\gamma \in \mathbb{K}$。

证明. 令 $q^d = 1$, $q^{2m} \neq 1$ 和 $f_2(0) \neq 0$，如假设所述。在 (4.5) 中取 $n=0$，得到

$$\begin{aligned} f_1(m)f_2(0)[m] =& f_1(m)f_2(m)[m+d] \\ =& f_1(m)f_2(m)[m]. \quad (\text{since } q^d = 1) \end{aligned}$$

由于 $q^{2m} \neq 1$，我们有 $f_1(m)f_2(0) = f_1(m)f_2(m)$。这与 $f_2(m) = \mu_1 f_2(0)$ 一起给出$f_1(m)(\mu_1 - 1) = 0$。于是 $f_1(m) = \begin{cases} 0 & if \quad \mu = 0 \\ \gamma & if \quad \mu_1 = 1. \end{cases}$，在 (4.8) 中取 $n=0$，得到

$$\begin{aligned} f_2(m)g_2(0)[m] =& f_2(0)g_2(m)[-m] + f_2(m)g_2(m)[m+d] \\ =& - f_2(0)g_2(m)[m] + f_2(m)g_2(m)[m]. \quad (\text{since } q^d = 1) \end{aligned}$$

由于 $q^{2m} \neq 1$，我们有 $f_2(m)g_2(0) = -f_2(0)g_2(m)+f_2(m)g_2(m)$。结合 $f_2(m) = \mu_1 f_2(0)$，得到 $\mu_1 f_2(0)g_2(0) = -f_2(0)g_2(m) + \mu_1 f_2(0)g_2(m)$。于是

(i) 若 $\mu_1 = 0$，则有 $g_2(m) = 0$;

(ii) 若 $\mu_1 = 1$，则有 $g_2(0) = 0$。

将 $n=0$ 代入 (4.3) 得到

$$\begin{aligned} f_1(m)f_1(0)[m] =& f_1^2(m)[m+d] - g_1(m)f_2(m)[-m-d] \\ =& f_1^2(m)[m] + g_1(m)f_2(m)[m]. \quad (\text{since } q^d = 1) \end{aligned}$$

由于 $q^{2m} \neq 1$，我们有 $f_1(m)f_1(0) = f_1^2(m) + g_1(m)f_2(m)$。结合 $f_2(m) = \mu_1 f_2(0)$,$f_1(m) = \gamma$ 和 $\mu_1 = 1$，可得 $g_1(m) = {}^{\gamma f_1}_{f_2\ 0}{}^{(\ \ 0\ \ -\gamma^2\ )()}{}_{\circ}$

将 $n=0$ 代入式 (4.6)，可得

$$\begin{aligned} f_1(m)g_2(0)[m] =& f_2(0)g_1(m)[-m]+f_1(m)g_2(m)[m+d] \\ =& -f_2(0)g_1(m)[m]+f_1(m)g_2(m)[m]. \quad (\text{since } q^d=1) \end{aligned}$$

由于 $q^{2m}\neq 0$ 我们有 $f_1(m)g_2(0)=-f_2(0)g_1(m)+f_1(m)g_2(m)$。结合 $g_2(0)=0$以及 $f_1(m)=g_2(m)=0$，对于 $\mu_1=0$ 可得 $g_1(m)=0$。

将 $n=0$ 代入方程 (4.10)，我们得到

$$\begin{aligned} f_2(m)f_1(0)[m] =& f_2(m)f_1(m)[m+d]-g_2(m)f_2(m)[-m-d] \\ =& f_2(m)f_1(m)[m]+g_2(m)f_2(m)[m]. \quad (\text{since } q^d\neq 1) \end{aligned}$$

于是 $f_2(m)f_1(0)=f_2(m)f_1(m)+g_2(m)f_2(m)$。结合 $f_1(m)=\gamma$ 对于 $\mu_1=1$，可得 $g_2(m)=f_1(0)-\gamma$。 □

定理 4.6。关于 q-变形 $W(2,2)$ Hom-代数$\mathcal{W}^q$ 的齐次平均算子 d，其次数为 $q^d=1$ 且满足 $q\neq -1$，1 必须是以下算子之一，对所有 $m\in\mathbb{Z}$均成立：

$$\begin{cases} P_d^1(L_m)=\nu_1\delta_{q^{2m},1}L_{m+d}+(\nu_3\delta_{q^{2m},1}+\gamma)W_{m+d}, \\ P_d^1(W_m)=\nu_2\delta_{q^{2m},1}L_{m+d}+\nu_4\delta_{q^{2m},1}W_{m+d}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_d^2(L_m)=(\nu_1\delta_{q^{2m},1}+\beta)L_{m+d}+(\nu_3\delta_{q^{2m},1}+\gamma)W_{m+d}, \\ P_d^2(W_m)=\nu_2\delta_{q^{2m},1}L_{m+d}+\nu_4\delta_{q^{2m},1}W_{m+d}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_d^3(L_m)=(\nu_1\delta_{q^{2m},1}+\beta)L_{m+d}+\nu_3\delta_{q^{2m},1}W_{m+d}, \\ P_d^3(W_m)=\nu_2\delta_{q^{2m},1}L_{m+d}+(\nu_4\delta_{q^{2m},1}+\beta)W_{m+d}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_d^4(L_m)=(\nu_1\delta_{q^{2m},1}+\gamma)L_{m+d}+\nu_3\delta_{q^{2m},1}W_{m+d}, \\ P_d^4(W_m)=\nu_2\delta_{q^{2m},1}L_{m+d}+(\nu_4\delta_{q^{2m},1}+\beta)W_{m+d}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_d^5(L_m)=(\nu_1\delta_{q^{2m},1}+\gamma)L_{m+d}+(\nu_3\delta_{q^{2m},1}+\frac{\gamma\theta-\gamma^2}{\beta})W_{m+d}, \\ P_d^5(W_m)=(\nu_2\delta_{q^{2m},1}+\beta)L_{m+d}+(\nu_4\delta_{q^{2m},1}+\theta-\gamma)W_{m+d}, \end{cases}$$

其中 γ、θ、ν_1、ν_2、ν_3、$\nu_4\in\mathbb{K}$ 和 $\beta\in\mathbb{K}^*$。

证明。直接结合引理 4.2 和命题 4.3-4.5 即得。 □

定理 4.7。在定理 4.6 中得到的、次数为 d 且满足 $q^d=1$ 和 $q\neq -1$、作用于 q 变形的 $W(2,2)$ Hom-代数 $\mathcal{W}^q$ 的齐次平均算子，在底层线性空间 $\mathcal{W}^q$ 上给出以下 Hom-Leibniz代数：

(i) $\{L_m,L_n\}^1=\nu_1\delta_{q^{2m},\ 1}[m-n]L_{m+n}+(\nu_3\delta_{q^{2m},\ 1}+\gamma)[m-n]W_{m+n}$
$\{L_m,W_n\}^1=\nu_1\delta_{q^{2m},\ 1}[m-n]W_{m+n}\{W_m,L_n\}^1=\nu_2[m-n]\delta_{q^{2m},}$
$_1L_{m+n}+\nu_4\delta_{q^{2m},\ 1}[m-n]W_{m+n}\{W_m,W_n\}^1=\nu_2\delta_{q^{2m},\ 1}[m-n]L_{m+n}$,

(ii) $\{L_m, L_n\}^2 = (\nu_1\delta_{q^{2m},1} + \beta)[m-n]L_{m+n} + (\nu_3\delta_{q^{2m},1} + \gamma)[m-n]W_{m+n}$
$\{L_m, W_n\}^2 = (\nu_1\delta_{q^{2m},1} + \beta)[m-n]W_{m+n}$
$\{W_m, L_n\}^2 = \nu_2[m-n]\delta_{q^{2m},1}L_{m+n} + \nu_4\delta_{q^{2m},1}[m-n]W_{m+n}$
$\{W_m, W_n\}^2 = \nu_2\delta_{q^{2m},1}[m-n]W_{m+n}$,

(iii) $\{L_m, L_n\}^3 = (\nu_1\delta_{q^{2m},1} + \beta)[m-n]L_{m+n} + \nu_3\delta_{q^{2m},1}[m-n]W_{m+n}$
$\{L_m, W_n\}^3 = (\nu_1\delta_{q^{2m},1} + \beta)[m-n]W_{m+n}$
$\{W_m, L_n\}^3 = \nu_2[m-n]\delta_{q^{2m},1}L_{m+n} + (\nu_4\delta_{q^{2m},1} + \beta)[m-n]W_{m+n}$
$\{W_m, W_n\}^3 = \nu_2\delta_{q^{2m},1}[m-n]W_{m+n}$,

(iv) $\{L_m, L_n\}^4 = (\nu_1\delta_{q^{2m},\ 1} + \gamma)[m-n]L_{m+n} + \nu_3\delta_{q^{2m},\ 1}[m-n]W_{m+n}$
$\{L_m, W_n\}^4 = (\nu_1\delta_{q^{2m},\ 1} + \gamma)[m-n]W_{m+n}\{W_m, L_n\}^4 = \nu_2[m-n]\delta_{q^{2m},}$
$_1L_{m+n} + (\nu_4\delta_{q^{2m},\ 1} + \beta)[m-n]W_{m+n}\{W_m, W_n\}^4 = \nu_2\delta_{q^{2m},\ 1}[m-n]W_{m+n}$,

(v) $\{L_m, L_n\}^5 = (\nu_1\delta_{q^{2m},1} + \gamma)[m-n]L_{m+n} + (\nu_3\delta_{q^{2m},1} + \frac{\gamma\theta-\gamma^2}{\beta}[m-n]W_{m+n}$
$\{L_m, W_n\}^5 = (\nu_1\delta_{q^{2m},1} + \gamma)[m-n]W_{m+n}$
$\{W_m, L_n\}^5 = (\nu_2\delta_{q^{2m},1} + \beta)[m-n]L_{m+n} + (\nu_4\delta_{q^{2m},1} + \theta - \gamma)[m-n]W_{m+n}$
$\{W_m, W_n\}^5 = (\nu_2\delta_{q^{2m},1} + \beta)[m-n]W_{m+n}$,

其中 ν_i、 γ、 $\theta \in \mathbb{K}\ and\ \beta \in \mathbb{K}^*$。

证明。我们给出 (i) 的证明。其余情况的证明方法类似。对于任意 m、 $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
\{L_m, L_n\}^1 &= [P_d^1(L_m), L_n] = [\nu_1\delta_{q^{2m},1}L_{m+d} + (\nu_3\delta_{q^{2m},1} + \gamma)W_{m+d}, L_n] \\
&= \nu_1[m+d-n]\delta_{q^{2m},1}L_{m+n+d} + (\nu_3\delta_{q^{2m},1} + \gamma)[m+d-n]W_{m+n+d} \\
&= \nu_1(m-n)\delta_{q^{2m},1}L_{m+n} + (\nu_3\delta_{q^{2m},1} + \gamma)[m-n]W_{m+n}, \\
\{L_m, W_n\}^1 &= [P_d^1(L_m), W_n] = [\nu_1\delta_{q^{2m},1}L_{m+d} + (\nu_3\delta_{q^{2m},1} + \gamma)W_{m+d}, W_n] \\
&= \nu_1(m+d-n)\delta_{q^{2m},1}L_{m+n+d}, = \nu_1[m-n]\delta_{q^{2m},1}L_{m+n}, \\
\{W_m, L_n\}^1 &= [P_d^1(W_m), L_n] = [\nu_1\delta_{q^{2m},1}L_{m+d} + \nu_4\delta_{q^{2m},1}W_{m+d}, L_n] \\
&= \nu_2[m+d-n]\delta_{q^{2m},1}L_{m+n+d} + \nu_4\delta_{q^{2m},1}[m+d-n]W_{m+n+d} \\
&= \nu_2(m-n)\delta_{q^{2m},1}L_{m+n} + \nu_4\delta_{q^{2m},1}[m-n]W_{m+n}, \\
\{W_m, W_n\}^1 &= [P_d^1(W_m), W_n] \\
&= [\nu_2\delta_{q^{2m},1}L_{m+d} + \nu_4\delta_{q^{2m},1}W_{m+d}, W_n] = \nu_2(m+d-n)\delta_{q^{2m},1}W_{m+n+d} \\
&\qquad = \nu_2(m-n)\delta_{q^{2m},1}W_{m+n}.
\end{aligned}$$

□

命题 4.8. 定理 4.7 的 (i)-(v) 项中给出的 $i \in \{1, \cdots, 5\}$ 对应的 Hom-Leibniz代数 ($\mathcal{W}^q$、 $\{\cdot,\cdot\}^i$、 α) 分别是乘法的, 当且仅当

(i) $q^2 = -1$ 或
$\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu_4 = \gamma = 0$; (ii) $q^2 = -1$;
(iii) $q^2 = -1$; (iv) $q^2 = -1$;

(v) $q^2=-1$。

证明。我们证明（i），其余部分的证明 аналогously。对于任意 m、$n\in\mathbb{Z}$，有

$$
\begin{aligned}
&\alpha(\{L_m,L_n\}^1)-\{\alpha(L_m),\alpha(L_n)\}^1\\
&\quad=\alpha\Big(\nu_1\delta_{q^{2m},1}[m-n]L_{m+n}+(\nu_3\delta_{q^{2m},1}+\gamma)[m-n]W_{m+n}\Big)\\
&\qquad-\{(q^m+q^{-m})L_m,(q^n+q^{-n})L_n\}^1\\
&\quad=\nu_1\delta_{q^{2m},1}[m-n](q^{m+n}+q^{-m-n})L_{m+n}\\
&\qquad+(\nu_3\delta_{q^{2m},1}+\gamma)[m-n](q^{m+n}+q^{-m-n})W_{m+n}\\
&\qquad-(q^m+q^{-m})(q^n+q^{-n})\Big((\nu_1\delta_{q^{2m},1}+\beta)[m-n]L_{m+n}\\
&\qquad+(\nu_3\delta_{q^{2m},1}+\gamma)[m-n]W_{m+n}\Big)\\
&\quad=\nu_1\delta_{q^{2m},1}[m-n](q^{m-n}+q^{n-m})L_{m+n}+(\nu_3\delta_{q^{2m},1}+\gamma)[m-n](q^{m-n}+q^{n-m})W_{m+n}\\
&\quad=-(q^{m-n}-q^{n-m})(q^{m-n}+q^{n-m})\big(\frac{\nu_1\delta_{q^{2m},1}}{q-q^{-1}}L_{m+n}-\frac{\nu_3\delta_{q^{2m},1}+\gamma}{q-q^{-1}}W_{m+n}\big)\\
&\quad=-(q^{2(m-n)}-q^{2(n-m)})\big(\frac{\nu_1\delta_{q^{2m},1}}{q-q^{-1}}L_{m+n}+\frac{\nu_3\delta_{q^{2m},1}+\gamma}{q-q^{-1}}W_{m+n}\big),\\
&\alpha(\{L_m,W_n\}^1)-\{\alpha(L_m),\alpha(W_n)\}^1\\
&\quad=\alpha\Big((\nu_1\delta_{q^{2m},1})[m-n]W_{m+n}-\{(q^m+q^{-m})L_m,(q^n+q^{-n})W_n\}^2\\
&\quad=\nu_1\delta_{q^{2m},1}[m-n](q^{m+n}+q^{-m-n})W_{m+n}-\nu_1\delta_{q^{2m},1}[m-n](q^m+q^{-m})(q^n+q^{-n})W_{m+n}\\
&\quad=-(q^{m-n}-q^{n-m})(q^{m-n}+q^{n-m})\big(\frac{\nu_1\delta_{q^{2m},1}}{q-q^{-1}}W_{m+n}\big)\\
&\quad=-(q^{2(m-n)}-q^{2(n-m)})\big(\frac{\nu_1\delta_{q^{2m},1}}{q-q^{-1}}W_{m+n}\big),\\
&\alpha(\{W_m,L_n\}^1)-\{\alpha(W_m),\alpha(L_n)\}^1\\
&\quad=\alpha\Big(\nu_2\delta_{q^{2m},1}[m-n]L_{m+n}+\nu_4\delta_{q^{2m},1}[m-n]W_{m+n}\Big)\\
&\qquad-\{(q^m+q^{-m})W_m,(q^n+q^{-n})L_n\}^3\\
&\quad=\nu_2\delta_{q^{2m},1}[m-n](q^{m+n}+q^{-m-n})L_{m+n}\\
&\qquad+\nu_4\delta_{q^{2m},1}[m-n](q^{m+n}+q^{-m-n})W_{m+n}\\
&\qquad-(q^m+q^{-m})(q^n+q^{-n})\Big((\nu_2\delta_{q^{2m},1}+\beta)[m-n]L_{m+n}\\
&\qquad+\nu_4\delta_{q^{2m},1}[m-n]W_{m+n}\Big)\\
&\quad=\nu_2\delta_{q^{2m},1}[m-n](q^{m-n}+q^{n-m})L_{m+n}+\nu_4\delta_{q^{2m},1}[m-n](q^{m-n}+q^{n-m})W_{m+n}\\
&\quad=-(q^{m-n}-q^{n-m})(q^{m-n}+q^{n-m})\big(\frac{\nu_2\delta_{q^{2m},1}}{q-q^{-1}}L_{m+n}-\frac{\nu_4\delta_{q^{2m},1}}{q-q^{-1}}W_{m+n}\big)\\
&\quad=-(q^{2(m-n)}-q^{2(n-m)})\big(\frac{\nu_2\delta_{q^{2m},1}}{q-q^{-1}}L_{m+n}+\frac{\nu_4\delta_{q^{2m},1}}{q-q^{-1}}W_{m+n}\big),\\
&\alpha(\{W_m,W_n\}^1)-\{\alpha(W_m),\alpha(W_n)\}^1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \alpha\Big((\nu_2\delta_{q^{2m},1})[m-n]W_{m+n} - \{(q^m+q^{-m})L_m, (q^n+q^{-n})W_n\}^4 \\
&= \nu_2\delta_{q^{2m},1}[m-n](q^{m+n}+q^{-m-n})L_{m+n} - \nu_2\delta_{q^{2m},1}[m-n](q^m+q^{-m})(q^n+q^{-n})L_{m+n} \\
&= -(q^{m-n}-q^{n-m})(q^{m-n}+q^{n-m})\big(\frac{\nu_2\delta_{q^{2m},1}}{q-q^{-1}}L_{m+n}\big) \\
&= -(q^{2(m-n)}-q^{2(n-m)})\big(\frac{\nu_2\delta_{q^{2m},1}}{q-q^{-1}}L_{m+n}\big).
\end{aligned}
$$

因此，根据定理 2.1（i），

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{W}^q, \{\cdot,\cdot\}^1, \alpha) \text{ is multiplicative } \Leftrightarrow \\
&\forall\ m,n\in\mathbb{Z}: \begin{cases} q^{2(m-n)}-q^{2(n-m)}=0, or \\ \nu_1\delta_{q^{2m},1}=\nu_3\delta_{q^{2m},1}+\gamma= \\ \nu_1\delta_{q^{2m},1}=\nu_2\delta_{q^{2m},1}=\nu_4\delta_{q^{2m},1}=0, \end{cases}, \Leftrightarrow \\
&\forall\ m,n\in\mathbb{Z}: \begin{cases} q^{4(m-n)}=0, or \\ \nu_1=\nu_2=\nu_3=\nu_4=\gamma=0, \end{cases}, \Leftrightarrow \\
&\qquad\qquad \begin{cases} \forall p\in\mathbb{Z},\ q^{4p}=0, or \\ \nu_1=\nu_2=\nu_3=\nu_4=\gamma=0, \end{cases}, \Leftrightarrow \\
&\qquad\qquad \begin{cases} q^4=1, or \\ \nu_1=\nu_2=\nu_3=\nu_4=\gamma=0, \end{cases}, \Leftrightarrow \\
&\qquad\qquad \begin{cases} q^2=-1, or \\ \nu_1=\nu_2=\nu_3=\nu_4=\gamma=0, \end{cases} \Leftrightarrow \\
&q=\pm i \text{ 如果 } \exists\ i\in\mathbb{K}:\quad i^2=-1 \text{ （例如，如果 } \mathbb{K} \text{ 是代数闭的），} \\
&or\ \nu_1=\nu_2=\nu_3=\nu_4=\gamma=0.
\end{aligned}
$$

□

情形 2: $(q,\ d)\in\{1\}\times\mathbb{Z}\cup\{-1\}\times 2\mathbb{Z}$

注 4.9。（4.3）-（4.10）中的方程对于（$q,\ d$）$\in\{1\}\times\mathbb{Z}$ 和（$q,\ d$）$\in\{-1\}\times 2\mathbb{Z}$是等价的。

子情形 1: $m=0$ 和 $d=0$

在（4.3）-（4.10）中取 $n=0$。对于 $d=0$ 和 $m=0$，函数 f_1、f_2、g_1 和 g_2 满足

$$f_1(0)=\nu_1,\ f_2(0)=\nu_2,\ g_1(0)=\nu_3,\ g_2(0)=\nu_4,\ \nu_i\in\mathbb{K}.$$

于是得到以下命题。

命题　命题 4.10. 如果 P_0 是 $\mathcal{W}^q$ 上次数为 $d=0$ 的平均算子，那么

$$\begin{cases} f_1(0)=\nu_1, & f_2(0)=\nu_2, \\ g_1(0)=\nu_3, & g_2(0)=\nu_4, \end{cases} \quad where\ \nu_i\in\mathbb{K}.$$

子情形 1： $m \neq 0$ 和 $d = 0$

将 $n = 0$ 代入 (4.7)，得到 $f_2(m)(f_2(0) - f_2(m)) = 0$。因此，

$$f_2(m) = \mu_1 f_2(0), \quad \mu_1 \in \{0, 1\}.$$

于是，我们有以下命题。

命题 4.11. 若 P_0 是 $\mathcal{W}^q$ 上的一个平均算子，次数为 $d = 0$，且满足 $m \neq 0$和 $f_2(0) = 0$，则

(i) *if* $f_1(0) = 0$, *then* $f_1(m) = 0,\ f_2(m) = 0,\ g_1(m) = \gamma,\ g_2(m) = 0$, *where* $\gamma \in \mathbb{K}$;

(ii) 若 $f_1(0) \neq 0$，则

(a) $f_1(m) = f_1(0),\ f_2(m) = 0,\ g_1(m) = \gamma,\ g_2(m) = 0$, *where* $\gamma \in \mathbb{K}$;

(b) $f_1(m) = f_1(0),\ f_2(m) = 0,\ g_1(m) = 0,\ g_2(m) = f_1(0)$, *where* $\gamma \in \mathbb{K}$;

(c) $f_1(m) = 0,\ f_2(m) = 0,\ g_1(m) = \gamma,\ g_2(m) = f_1(0)$, *where* $\gamma \in \mathbb{K}$.

证明. 设 $m \neq 0$、 $d = 0$ 和 $f_2(0) = 0$ 满足假设。将 $n = 0$ 代入 (4.3)，得到$f_1(m)(f_1(0) - f_1(m)) = 0$。因此， $f_1(m) = \mu_2 f_1(0)$， $\mu_2 \in \{0, 1\}$。将 $n = 0$ 代入 (4.9)，得到

$$m f_2(m) g_1(0) = -m g_2(m) f_1(0) + m f_2(m) g_1(m) + m g_2^2(m).$$

由于 $m \neq 0$，我们有 $f_2(m)g_1(0) = g_2(m)f_1(0) - f_2(m)g_1(m) - g_2^2(m)$；结合 $f_2(m) = 0$，可得

$$g_2(m) = \mu_3 f_1(0), \quad \mu_3 \in \{0, 1\}.$$

将 $n = 0$ 代入 (4.4)，并由 $m \neq 0$ 可得 $f_1(m)g_1(0) = -f_1(0)g_1(m) + f_1(m)g_1(m) + g_1(m)g_2(m)$；又由 $f_1(m) = \mu_2 f_1(0)$ 和 $g_2(m) = \mu_3 f_1(0)$，得到 $g_1(m)(\mu_2 + \mu_3 - 1)f_1(0) = \mu_2 f_1(0) g_1(0)$。于是有以下两种情况：

(i) 若 $f_1(0) = 0$，则 $g_1(m) = \gamma$，

(ii) 若 $f_1(0) \neq 0$，则有 $\mu_2 g_1(0) = (\mu_2 + \mu_3 - 1)g_1(m)$。于是，$\begin{cases} g_1(m) = 0 \text{ 当且仅当} \\ \end{cases}$

$(\mu_2, \mu_3) \in \{(0, 0), (1, 1)\}$；$g_1\ m = \gamma \quad \mu_2\ \mu_3 \quad , \quad ()$ 当且仅当 $(\ ,\ ) \in \{(1, 0)\ (0, 1)\}$. □

命题 4.12. 若 P_d 是 $\mathcal{W}^q$ 上的次数为 $d = 0$ 的平均算子，且 $m \neq$和 $f_2(0) \neq 0$，则 $\begin{cases} f_1(m) = \gamma, \quad 0 \\ \end{cases}$

$$f_2(m) = f_2(0) g_1\ m \quad \text{———} \quad g_2\ m \qquad () = \begin{matrix} \gamma f_1 \\ f_2\ 0 \end{matrix}(\ 0\ -\gamma^2\ )()\ () = f_1(0) - \gamma, \text{ 其中 } \gamma \in \mathbb{K}。$$

证明。设 $d = 0$, $m \neq 0$ 和 $f_2(0) \neq 0$，如假设所述。在（4.5）中取 $n = 0$，得到$m f_1(m) f_2(0) = m f_1(m) f_2(m)$。由于 $m \neq 0$，我们有 $f_1(m) f_2(0) = f_1(m) f_2(m)$。结合 $f_2(m) = \mu_1 f_2(0)$，可得 $f_1(m)(\mu_1 - 1) = 0$。于是 $f_1(m) = \begin{cases} 0 & if \quad \mu = 0 \\ \gamma & if \quad \mu_1 = 1. \end{cases}$。在（4.8）中取 $n = 0$，得到 $m f_2(m) g_2(0) = -m f_2(0) g_2(m) + m f_2(m) g_2(m)$。由于 $m \neq 0$，我们有 $f_2(m) g_2(0) = -f_2(0) g_2(m) + f_2(m) g_2(m)$。结合 $f_2(m) = \mu_1 f_2(0)$，可得$\mu_1 f_2(0) g_2(0) = -f_2(0) g_2(m) + \mu_1 f_2(0) g_2(m)$。然后

（i）如果 $\mu_1 = 0$，则有 $g_2(m) = 0$,

(ii) 若 $\mu_1 = 1$ 我们有 $g_2(0) = 0$。

将 $n = 0$ 代入 (4.3) 得到 $f_1(m)f_1(0) = mf_1^2(m) + mg_1(m)f_2(m)$。由于 $m \neq 0$，我们有 $f_1(m)f_1(0) = f_1^2(m) + g_1(m)f_2(m)$。结合 $f_2(m) = \mu_1 f_2(0)$、$f_1(m) = \gamma$ 和 $\mu_1 = 1$，可得 $g_1(m) = {}^{\gamma f_1}{}_{(\ 0\ -\gamma^2\ )()}$。

将 $n = 0$ 代入 (4.6) 得到 $mf_1(m)g_2(0) = -mf_2(0)g_1(m) + mf_1(m)g_2(m)$。由于 $m \neq 0$，我们有 $f_1(m)g_2(0) = -f_2(0)g_1(m) + f_1(m)g_2(m)$。结合 $g_2(0) = 0$ 和 $f_1(m) = g_2(m)$，对于 $\mu_1 = 0$ 可得 $g_1(m) = 0$。

将 $n = 0$ 代入方程 (4.10)，得到 $mf_2(m)f_1(0) = mf_2(m)f_1(m) + mg_2(m)f_2(m)$。于是 $f_2(m)f_1(0) = f_2(m)f_1(m) + g_2(m)f_2(m)$。再结合 $f_1(m) = \gamma$ 对 $\mu_1 = 1$ 成立，可得 $g_2(m) = f_1(0) - \gamma$。

□

定理 4.13. q 变形的 $W(2, 2)$ Hom-代数 $\mathcal{W}^q$ 上次数为 $d = 0$ 的齐次平均算子必为下列算子之一，其中对所有 $m \in \mathbb{Z}$ 均有

$$\begin{cases} P_0^1(L_m) = \nu_1\delta_{m,0}L_m + (\nu_3\delta_{m,0} + \gamma)W_m, \\ P_0^1(W_m) = \nu_2\delta_{m,0}L_m + \nu_4\delta_{m,0}W_m, \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_0^2(L_m) = (\nu_1\delta_{m,0} + \beta)L_m + (\nu_3\delta_{m,0} + \gamma)W_m, \\ P_0^2(W_m) = \nu_2\delta_{m,0}L_m + \nu_4\delta_{m,0}W_m, \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_0^3(L_m) = (\nu_1\delta_{m,0} + \beta)L_m + \nu_3\delta_{m,0}W_m, \\ P_0^3(W_m) = \nu_2\delta_{m,0}L_m + (\nu_4\delta_{m,0} + \beta)W_m, \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_0^4(L_m) = (\nu_1\delta_{m,0} + \gamma)L_m + \nu_3\delta_{m,0}W_m \\ P_0^4(W_m) = \nu_2\delta_{m,0}L_m + (\nu_4\delta_{m,0} + \beta)W_m, \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_0^5(L_m) = (\nu_1\delta_{m,0} + \gamma)L_m + (\nu_3\delta_{m,0} + \frac{\gamma\theta - \gamma^2}{\beta})W_m, \\ P_0^5(W_m) = (\nu_2\delta_{m,0} + \beta)L_m + (\nu_4\delta_{m,0} + \theta - \gamma)W_m. \end{cases}$$

其中 $\gamma, \theta, \nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4 \in \mathbb{K}$ 和 $\beta \in \mathbb{K}^*$。

证明. 直接由引理 4.2 和命题 4.10–4.12 得出。 □

定理 4.14. 定理 4.6 中得到的次数为 $d = 0$ 的 q-变形 $W(2, 2)$ Hom-代数 $\mathcal{W}^q$ 的齐次平均算子，在底层线性空间 $\mathcal{W}^q$ 上给出如下 Hom-Leibniz代数：

(i) $\{L_m, L_n\}^1 = \nu_1\delta_{m,\ 0}[m-n]L_{m+n} + (\nu_3\delta_{m,\ 0} + \gamma)[m-n]W_{m+n}$
$\{L_m, W_n\}^1 = \nu_1\delta_{m,\ 0}[m-n]W_{m+n}\{W_m, L_n\}^1 = \nu_2[m-n]\delta_{m,}$
$_0L_{m+n} + \nu_4\delta_{m,\ 0}[m-n]W_{m+n}\{W_m, W_n\}^1 = \nu_2\delta_{m,\ 0}[m-n]L_{m+n}$,

(ii) $\{L_m, L_n\}^2 = (\nu_1\delta_{m,\ 0} + \beta)[m-n]L_{m+n} + (\nu_3\delta_{m,\ 0} + \gamma)$
$[m-n]W_{m+n}\{L_m, W_n\}^2 = (\nu_1\delta_{m,\ 0} + \beta)[m-n]W_{m+n}$

$$\{W_m, L_n\}^2 = \nu_2[m-n]\delta_{m,0}L_{m+n} + \nu_4\delta_{m,0}[m-n]W_{m+n}$$
$$\{W_m, W_n\}^2 = \nu_2\delta_{m,0}[m-n]W_{m+n},$$

(iii) $\{L_m, L_n\}^3 = (\nu_1\delta_{m,\ 0} + \beta)[m-n]L_{m+n} + \nu_3\delta_{m,\ 0}[m-n]W_{m+n}$
$\{L_m, W_n\}^3 = (\nu_1\delta_{m,\ 0} + \beta)[m-n]W_{m+n}\{W_m, L_n\}^3 = \nu_2[m-n]\delta_{m,\ 0}L_{m+n} + (\nu_4\delta_{m,\ 0} + \beta)[m-n]W_{m+n}\{W_m, W_n\}^3 = \nu_2\delta_{m,\ 0}[m-n]W_{m+n}$,

(iv) $\{L_m, L_n\}^4 = (\nu_1\delta_{m,0} + \gamma)[m-n]L_{m+n} + \nu_3\delta_{m,0}[m-n]W_{m+n}$
$\{L_m, W_n\}^4 = (\nu_1\delta_{m,0} + \gamma)[m-n]W_{m+n}$
$\{W_m, L_n\}^4 = \nu_2[m-n]\delta_{m,0}L_{m+n} + (\nu_4\delta_{m,0} + \beta)[m-n]W_{m+n}$
$\{W_m, W_n\}^4 = \nu_2\delta_{m,0}[m-n]W_{m+n}$,

(v) $\{L_m, L_n\}^5 = (\nu_1\delta_{m,0} + \gamma)[m-n]L_{m+n} + (\nu_3\delta_{m,0} + \frac{\gamma\theta-\gamma^2}{\beta}[m-n]W_{m+n}$
$\{L_m, W_n\}^5 = (\nu_1\delta_{m,0} + \gamma)[m-n]W_{m+n}$
$\{W_m, L_n\}^5 = (\nu_2\delta_{m,0} + \beta)[m-n]L_{m+n} + (\nu_4\delta_{m,0} + \theta - \gamma)[m-n]W_{m+n}$
$\{W_m, W_n\}^5 = (\nu_2\delta_{m,0} + \beta)[m-n]W_{m+n}$,

其中 ν_i、 γ、 $\theta \in \mathbb{K}$ *and* $\beta \in \mathbb{K}^*$。

证明。我们给出 (i) 的证明。其余情形的证明类似。对于任意的 m、 $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
\{L_m, L_n\}^1 &= [P_0^1(L_m), L_n] = [\nu_1\delta_{m,0}L_m + (\nu_3\delta_{m,0} + \gamma)W_m, L_n] \\
&= \nu_1[m-n]\delta_{m,0}L_{m+n} + (\nu_3\delta_{m,0} + \gamma)[m-n]W_{m+n}, \\
\{L_m, W_n\}^1 &= [P_d^1(L_m), W_n] = [\nu_1\delta_{m,0}L_m + (\nu_3\delta_{m,0} + \gamma)W_m, W_n] \\
&= \nu_1[m-n]\delta_{m,0}L_{m+n}, \\
\{W_m, L_n\}^1 &= [P_0^1(W_m), L_n] = [\nu_1\delta_{m,0}L_m + \nu_4\delta_{m,0}W_m, L_n] \\
&= \nu_2(m-n)\delta_{m,0}L_{m+n} + \nu_4\delta_{m,0}[m-n]W_{m+n}, \\
\{W_m, W_n\}^1 &= [P_0^1(W_m), W_n] \\
&= [\nu_2\delta_{m,0}L_m + \nu_4\delta_{m,0}W_m, W_n] = \nu_2(m-n)\delta_{m,0}W_{m+n}.
\end{aligned}$$

□

命题 4.15. 对所有 $i \in\{1, \ldots, 5\}$， 由 P_0^i 导出的 Hom-Leibniz代数 $(\mathcal{W}^q,\ \{\cdot,\cdot\}^i, \alpha)$ 是乘法的, 当且仅当 $i = 1$ 且 $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu_4 = \gamma = 0$.

证明。对于任意 $m, n \in \mathbb{Z}$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\alpha(\{L_m, L_n\}^1) - \{\alpha(L_m), \alpha(L_n)\}^1 \\
&\quad = \alpha\Big(\nu_1\delta_{m,0}[m-n]L_{m+n} + (\nu_3\delta_{m,0} + \gamma)[m-n]W_{m+n}\Big) \\
&\qquad - \{2q^mL_m, 2q^NL_n\}^1 \\
&\quad = -2q^{m+n}[m-n](\nu_1\delta_{m,0}L_{m+n} + (\nu_3\delta_{m,0} + \gamma)W_{m+n}) \\
&\alpha(\{L_m, W_n\}^1) - \{\alpha(L_m), \alpha(W_n)\}^1 \\
&\quad = \alpha\Big((\nu_1\delta_{m,0})[m-n]W_{m+n} - \{2q^mL_m, 2q^nW_n\}^1 \\
&\quad = 2q^{m+n}\nu_1\delta_{m,0}[m-n]W_{m+n} - 4q^{m+n}\nu_1\delta_{m,0}[m-n]W_{m+n}
\end{aligned}$$

$= -2q^{m+n}\nu_1\delta_{m,0}[m-n]W_{m+n}\alpha(\{W_m, L_n\}^1) - \{\alpha(W_m)\ \alpha(L_n)\}^1 = 2q^{m+n}[m-n](\nu_2\delta_{m,0}L_{m+n} + \nu_4\delta_{m,0}W_{m+n}) - 4q^{m+n}[m-n](\nu_2\delta_{m,0}L_{m+n} + \nu_4\delta_{m,0}W_{m+n})\alpha(\{W_m, W_n\}^1) - \{\alpha(W_m)\ \alpha(W_n)\}^1 = -2q^{m+n}\nu_2\delta_{m,0}[m-n]L_{m+n}.$

因此，根据定理 2.1 (i),

$(\mathcal{W}^q, \{\cdot,\cdot\}^1, \alpha)$ 是乘法的 $\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{Z},\ \nu_1\delta_{m,0} = \nu_3\delta_{m,0} + \gamma = \nu_2\delta_{m,0} = \nu_4\delta_{m,0} = 0 \Leftrightarrow \nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu_4 = \gamma = 0.$

类似地，对于所有 $i \in \{2, \ldots, 5\}$，我们证明 Hom-Leibniz代数 $(\mathcal{W}^q, \{\cdot,\cdot\}^i, \alpha)$ 不是乘法的。

□

参考文献

[1] Abdaoui, K., Ammar, F., Makhlouf, A.：Hom-Lie色代数的构造与上同调，《代数通讯》，43，4581-4612（2015年）[2] Abdelkader, B. H.：BiHom-Lie代数的广义导子，《一般李理论与应用杂志》11(1)，1-7（2017年）[3] Abramov, V., Silvestrov, S.：基于 σ-导子与对合的3-Hom-Lie代数，《Clifford 代数进展与应用》30(45)（2020年）[4] Aguiar, M.：Pre-Poisson代数，《Letters in Mathematical Physics》54，263-277（2000年）[5] Aizawa, N., Sato, H.：带中心扩张的Virasoro代数的 q-变形，《Physics Letters B》256，185-190（1991年）（广岛大学预印本，预印本 HUPD-9012（1990年））[6] Ammar, F., Ejbehi, Z., Makhlouf, A.：Hom-代数的上同调与变形，《Journal of Lie Theory》21(4)，813-836（2011年）[7] Ammar, F., Mabrouk, S., Makhlouf, A.： n元乘法 Hom-Nambu-Lie 代数的表示与上同调，《Journal of Geometry and Physics》61(10)，1898-1913（2011年）[8] Ammar, F., Makhlouf, A.：Hom-Lie超代数与Hom-Lie可容超代数，《代数杂志》324(7)，1513-1528（2010年）[9] Ammar, F., Makhlouf A., Saadaoui, N.：Hom-Lie超代数的上同调与q-变形 Witt 超代数，《Czechoslovak Mathematical Journal》68，721-761（2013年）[10] Ammar, F., Makhlouf, A., Silvestrov, S.：三元 q-Virasoro-Witt Hom-Nambu-Lie 代数，《Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical》43(26)，265204（2010年）[11] Armakan A., Farhangdoost, M. R.：Hom-Lie超代数扩张的几何方面，《International Journal of Geometric Methods in Modern Physics》14，1750085（2017年）

[12] Armakan A., Farhangdoost, M. R., Silvestrov S.：Hom-Lie超代数上的非退化Killing 形式，arXiv:2010.01778v2 [math.RA] （2020年）[13] Armakan A., Silvestrov S.：某些类型色Hom-Lie代数的包络代数。载于：Silvestrov, S., Malyarenko, A., Ranˇci´c, M.（编），《代数结构与应用》，Springer 数学与统计学会议论文集，317，Springer，第10章，257-284（2020年）[14] Armakan, A., Silvestrov, S., Farhangdoost, M. R.：色Hom-Lie代数的包络代数，《土耳其数学杂志》43，316-339（2019年）（arXiv:1709.06164 [math.QA] （2017年））[15] Armakan, A., Silvestrov, S., Farhangdoost, M. R.：Hom-Lie颜色代数的扩张，《格鲁吉亚数学杂志》（2019年），doi:10.1515/gmj-2019-2033，（arXiv:1709.08620 [math.QA]（2017年））[16] Arnlind, J., Kitouni, A., Makhlouf, A., Silvestrov, S.：由李代数诱导的3-Lie代数的结构与上同调，载于：Makhlouf, A., Paal, E., Silvestrov, S. D., Stolin, A.，《代数、几何与数学物理》，Springer 数学与统计学会议论文集，85，Springer，123-144（2014年）[17] Arnlind, J., Makhlouf, A., Silvestrov, S.：由Hom-Lie代数诱导的三元Hom-Nambu-Lie代数，《数学物理杂志》51(4)，043515（2010年）[18] Arnlind, J., Makhlouf, A. Silvestrov, S.： n-Lie代数与 n元Hom-Nambu-Lie代数的构造，《数学物理杂志》52(12)，123502（2011年）[19] Bakayoko, I.：颜色Hom-Poisson代数上的模，《一般李理论与应用杂志》8(1)，1000212（2014年）[20] Bakayoko, I., Diallo, O. W.：一些广义Hom-代数结构，《一般李理论与应用杂志》9(1)，1000226（2015年）[21] Bakayoko, I., Silvestrov, S.：Hom-左对称颜色二代数、Hom-三分形颜色代数及Yau 扭曲的推广，arXiv:1912.01441 [math.RA] （2019年）[22] Bakayoko, I., Silvestrov, S.：乘法 n-Hom-Lie色代数，载于：Silvestrov, S., Malyarenko, A., Ranˇci´c, M.（编），《代数结构与应用》，Springer 数学与统计学会议论文集，317，Springer，第7章，159-187（2020年）。（arXiv:1912.10216[math.QA]）[23] Bakayoko, I., Tour´e, B. M.：构造 Hom-Poisson 颜色代数，《国际代数杂志》13(1)，1-16（2019年）[24] Ben Hassine, A., Chtioui, T., Mabrouk S., Silvestrov, S.：3-Lie-Rinehart 超代数的结构与上同调，arXiv:2010.01237 [math.RA] （2020年）[25] Ben Hassine, A., Mabrouk S., Ncib, O.：乘法 n元hom-Nambu代数的一些构造，《Clifford 代数进展与应用》29(88)（2019年）

[26] Benayadi, S., Makhlouf, A.：具有对称不变非退化双线性形式的 Hom-Lie 代数，《Journal of Geometry and Physics》76，38-60（2014年）[27] G. Birkhoff，《有界函数的平均值》，Coil. Internat. Centre Nat. Recherthe Sci.（巴黎），Alg ̀ebre Th ́eforie Nombres 24（1949年），149-153。[28] Cao, Y., Chen, L.：论分裂正则 Hom-Lie 色代数，《代数通讯》40，575-592（2012年）[29] Chaichian, M., Ellinas, D., Popowicz, Z.：带中心扩张的量子共形代数，《Physics Letters B》248，95-99（1990年）[30] Chaichian, M., Isaev, A. P., Lukierski, J., Popowic, Z., Preˇsnajder, P： q-Virasoro 代数的变形与共形维数，《Physics Letters B》262（1），32-38（1991年）[31] Chaichian, M., Kulish, P., Lukierski, J.： q-变形 Jacobi 恒等式、 q-振子与q-变形无限维代数，《Physics Letters B》237，401-406（1990年）[32] Chaichian, M., Popowicz, Z., Preˇsnajder, P.： q-Virasoro 代数及其与q-变形 KdV 系统的关系，《Physics Letters B》249，63-65（1990年）[33] Curtright, T. L., Zachos, C. K.：量子代数的变形映射，《Physics Letters B》243，237-244（1990年）[34] Damaskinsky, E. V., Kulish, P. P.：变形振子及其应用，《LOMI 科学研讨会纪要》189，37-74（1991年）（俄语） [英文译文载于《苏联数学杂志》62，2963-2986（1992年）[35] Daskaloyannis, C.：广义变形 Virasoro 代数，Modern Phys. Lett. A，7（9），809-816（1992年）[36] Elchinger, O., Lundeng ̊ard, K., Makhlouf, A., Silvestrov, S. D.：带有（τ， σ）-导子的括号以及 Witt 代数和 Virasoro 代数的（p， q）-变形，《数学论坛》28（4），657-673（2016年）[37] Fechner, W.：与平均算子相关的不等式，《数学研究》24，305-312（2013年）[38] Guan, B., Chen, L., Sun, B.：论 Hom-Lie 超代数，Clifford 代数进展与应用，29（16）（2019年）[39] Hartwig, J. T., Larsson, D., Silvestrov, S. D.：利用 σ-导子对李代数进行变形，《代数杂志》295（2），314-361（2006年）（数学科学预印本 2003:32，LUTFMA-5036-2003，数学科学中心，隆德大学，52页（2003年））[40] Hu, N.： q-Witt 代数、 q-李代数、 q-全纯结构与表示，《代数学术讨论》6（1），51-70（1999年）

[41] Kamp´e de F´eriet, J.：湍流问题的现状（I 和 II），La Sci. A´erienne 3，9-34（1934年），4，12-52（1935年）[42] Kassel, C.：微分算子的循环同调、Virasoro代数及其一个 q-类比，《数学物理通讯》146（2），343-356（1992年）[43] Kelley, J. L.： C_∞（X）上的平均算子，《伊利诺伊数学杂志》2，（1958年）214-223。[44] Kitouni, A., Makhlouf, A., Silvestrov, S.：由 n-Hom-Lie 代数诱导的（$n+1$）-Hom-Lie 代数，《格鲁吉亚数学杂志》23（1），75-95（2016年）[45] Kitouni, A., Makhlouf, A., Silvestrov, S.：关于 n-Hom-Lie 代数诱导的 n-Hom-Lie 代数和（$n+1$）-Hom-Lie 代数的可解性与幂零性，载于：Silvestrov, S., Malyarenko, A., Rancic, M.（编），《代数结构与应用》，Springer 数学与统计学会议论文集，317，Springer，第6章，127-157（2020年）[46] Larsson, D., Sigurdsson, G., Silvestrov, S. D.：代数$\mathbb{F}[t]/$（t^N）上的拟Lie变形，《一般李理论与应用杂志》2（3），201-205（2008年）[47]Larsson, D., Silvestrov, S. D.：准Hom-李代数、中心扩张与类2-余循环恒等式，《代数杂志》288，321-344（2005年）（数学科学预印本 2004:3，LUTFMA-5038-2004，数学科学中心，隆德大学（2004年））[48] Larsson, D., Silvestrov, S. D.：拟Lie代数，载于：Fuchs, J., Mickelsson, J., Rozen- blioum, G., Stolin, A., Westerberg, A.（编），《数学物理中的非交换几何与表示理论》，《当代数学》391，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，241-248（2005年）（数学科学预印本 2004:30，LUTFMA-5049-2004，数学科学中心，隆德大学（2004年））[49] Larsson, D., Silvestrov, S. D.：分次拟Lie代数，《捷克斯洛伐克物理学杂志》55，1473-1478（2005年）[50] Larsson, D., Silvestrov, S. D.：利用扭导子对 sl_2（$\mathbb{F}$）进行拟变形，《代数通讯》35，4303-4318（2007年）[51] Larsson, D., Silvestrov, S. D.：由扭导子导出的广义 N-复形，载于：Silvestrov, S., Paal, E., Abramov, V., Stolin, A.（编），《数学、物理及其他领域中的广义李理论》，施普林格出版社，第7章，81-88（2009年）[52] Liu, K. Q.：量子中心扩张，《加拿大皇家学会数学报告》13（4），135-140（1991年）[53] Liu, K. Q.：量子Witt代数的刻画，《Letters in Mathematical Physics》24（4），257-265（1992年）[54] Liu, K. Q.：量子Witt代数及Witt代数上若干模的量子化，博士论文，数学系，阿尔伯塔大学，埃德蒙顿，加拿大

(1992)

[55] Loday, J.-L.：二元代数，载于：Loday, J.-L., Frabetti, A., Chapoton, Goichot, F.（编），《二元代数及相关算子》，数学讲义 1763，7-66（2002）[56] Mabrouk, S., Ncib, O., Silvestrov, S.： n元 Hom-Nambu 超代数的广义导子与 Rota-Baxter 算子，arXiv:2003.01080[math.QA[57] Makhlouf, A.：非结合 Hom-代数与 Hom-超代数的范例，代数与分析中的 Jordan 结构会议论文集，145-177（2010）[58] Makhlouf, A., Silvestrov, S. D.：Hom-代数结构，《一般李理论与应用杂志》2(2)，51-64（2008）（数学科学预印本 2006:10，LUTFMA-5074-2006，数学科学中心，隆德大学（2006））[59] Makhlouf, A., Silvestrov, S.：Hom-Lie 可容许 Hom-余代数与 Hom-Hopf 代数，载于：Silvestrov, S., Paal, E., Abramov, V., Stolin, A.（编），《数学、物理及其他领域中的广义李理论》，施普林格出版社，柏林、海德堡，第17章，189-206（2009）（数学科学预印本 2007:25，LUTFMA-5091-2007，数学科学中心，隆德大学（2007）。arXiv:0709.2413 [math.RA])[60]Makhlouf, A., Silvestrov, S.：关于 Hom-结合代数与 Hom-Lie 代数的一参数形式变形的注记，《数学论坛》22(4)，715-739（2010）（数学科学预印本 2007:31，LUTFMA-5095-2007，数学科学中心，隆德大学（2007）。arXiv:0712.3130v1 [math.RA])[61] Makhlouf, A., Silvestrov, S. D.：Hom-代数与 Hom-余代数，代数与应用杂志 9(4)，553-589（2010）（数学科学预印本 2008:19，LUTFMA-5103-2008，数学科学中心，隆德大学（2008）。arXiv:0811.0400[math.RA])[62] Mandal, A., Mishra, S. K.：关于 Hom-Gerstenhaber 代数与 Hom-Lie 锚丛，《Journal of Geometry and Physics》133，287-302（2018）[63] Miller, J. B.：Banach 代数 I 上的平均算子与 Reynolds 算子：导子与反导子表示，《数学分析与应用杂志》14，527-548（1966）[64] Mishra, S. K., Silvestrov, S.：Hom-Gerstenhaber 代数与 Hom-Lie 锚丛综述，载于：Silvestrov S., Malyarenko A., Ranˇci´c, M.（编），《代数结构与应用》，Springer 数学与统计学会议论文集，317，Springer，第11章，285-315（2020）[65] Moy, S.T. C.：函数空间上条件期望作为变换的刻画，太平洋数学杂志 4，47-63（1954）[66] Pei, J., Bai, C., Guo, L., Ni, X.：二元算子的复制构造、Koszul 对偶、Manin 积与平均算子，arXiv:1212.0177v2.[67] Pei, J., Bai, C., Guo, L., Ni, X.：算子的双后继与复制构造、Manin 积及算子，载于《当代物理中的对称性与群》，南开纯数学、应用数学与理论物理丛书，11，191-196（2013）。

[68] Richard, L., Silvestrov, S. D.： σ对 $\mathbb{C}[t^{\pm 1}]$的导子的准李结构，《代数杂志》319(3), 1285-1304（2008）[69] Richard, L., Silvestrov, S.：关于 σ对 $\mathbb{C}[z_1^{\pm 1}, \ldots, z_n^{\pm 1}]$的导子的准李与 Hom-李结构的注记，载于：Silvestrov, S., Paal, E., Abramov, V., Stolin, A.（编），《数学、物理及其他领域中的广义李理论》，施普林格出版社，柏林、海德堡，第22章, 257-262（2009）[70] Rota, G.-C.：关于平均算子表示，《帕多瓦大学数学研讨会报告》30，52-64（1960）[71] Sheng, Y.：Hom-Lie 代数的表示，《代数表示论》15, 1081-1098（2012）[72] Sheng, Y., Bai, C.：Hom-李双代数的新方法，《代数杂志》399，232-250（2014）[73] Sheng, Y., Chen, D.：Hom-李2-代数，《代数杂志》376, 174-195（2013）[74] Sheng, Y., Xiong Z.：关于 Hom-Lie 代数，《线性与多重线性代数》63(12)，2379-2395（2015）[75] Sigurdsson, G., Silvestrov, S.：Witt 型分次准李代数，《捷克斯洛伐克物理学杂志》56，1287-1291（2006）[76] Sigurdsson, G., Silvestrov, S.：Witt 型李色代数与 Hom-Lie 代数及其中心扩张，载于：Silvestrov, S., Paal, E., Abramov, V., Stolin, A.（编），《数学、物理及其他领域中的广义李理论》，施普林格出版社，柏林、海德堡，第21章，247-255（2009）[77]Silvestrov, S.：准李代数与准 Hom-李代数范式及其准变形，载于《Hopf代数与分次环理论的新技术》，比利时皇家佛兰德科学与艺术学院（KVAB），布鲁塞尔，165-177（2007）[78] Yau, D.：Hom-Lie 代数的包络代数，《一般李理论与应用杂志》2(2)，95-108（2008）[79] Yau, D.：Hom-杨-巴克斯特方程、Hom-Lie 代数与拟三角双代数，《物理学杂志A》42，165202（2009）[80] Yau, D.：Hom-代数与同调，《Journal of Lie Theory》19(2)，409-421（2009）[81] Yau, D.：Hom-双代数与余模代数，《国际电子代数杂志》8，45-64（2010）[82] Yuan, L.：Hom-李色代数结构，《代数通讯》40，575-592（2012）[83] Yuan, L. M., You, H.：Hom-Lie 代数与 q变形W(2, 2)代数的低维上同调，《数学学报（英文版）》30(6)（2014），1073–1082。

[84] Gubarev, V. Yu., Kolesnikov, P. S.: 树状代数到 Rota-Baxter 代数的嵌入, 《中欧数学杂志》11, 226-245（2013年）[85] Zhou, J., Chen, L., Ma, Y.: Hom-Lie 超代数的广义导子, 《数学学报（中文版）》58, 3737-3751（2014年）[86] Zhou, J., Chen, L., Ma, Y.: 李三系的广义导子, 《开放数学》14(1), 260-271（2016年）（arXiv:1412.7804（2014年））[87] Zhou, J., Niu, Y. J., Chen, L. Y.: Hom-Lie 代数的广义导子, 《数学学报（中文版）》58(4), 551-558（2015年）[88] Zhou, J.,Zhao, X., Zhang, Y.: Hom-Leibniz代数的广义导子, 《吉林大学学报（理学版）》55(02), 195-200（2017年）