此处将显示适用于该文章类型的横幅

arXiv:2304.00665v1 [physics.flu-dyn] 3 Apr 2023

采用大涡模拟分析喷流啸叫中的共振

Gao Jun Wu[1]†、Sanjiva K. Lele[2] 和 Jinah Jeun[3]

[1]博士研究生，航空与航天系，斯坦福大学[2]教授，航空与航天系及机械工程系，斯坦福大学[3]博士后研究学者，Strömningsmek & Tekn Akustik，瑞典皇家理工学院

（收到日期：xx；修订日期：xx；接受日期：xx）

本研究利用经实验验证的大涡模拟数据，研究了三个喷嘴压比下 4:1 矩形欠膨胀射流的啸叫共振。分析采用谱本征正交分解（SPOD）和空间互相关，表征啸叫基频处射流中反向传播的波。结果支持了近期将啸叫视为绝对不稳定性的理论阐释，并进一步揭示了啸叫产生过程中各个独立过程在空间上的分离。根据主导阶 SPOD 模态，观察到直接证据表明，啸叫闭合机制是导引射流模态，而非外部声反馈。空间波数相匹配表明，导引射流模态由 Kelvin–Helmholtz波与激波胞之间的相互作用产生。反向传播波的能量呈现出相干结构在流向上具有全局性且非周期性的特征。通过比较能量沿下游方向与上游方向传播的速率，波能量之比确定了啸叫产生过程中不同过程发生的区域。这些不同区域分别对应剪切层初始感受性、声辐射、导引射流模态激发和相干性衰减。主导阶 SPOD 模态还能够用于近似 Lighthill应力张量，并通过声学类比公式准确计算远场啸叫音调幅值。本研究结果为未来构建基于物理机制的啸叫幅值预测降阶模型提供了见解。

关键词： XXX

1. 引言

啸叫是一种发生在膨胀不完全的超声速射流中的气动声学共振现象，最早由 Powell（1953年）发现。喷流啸叫会在特定频率产生高强度音调，因此一直被视为超声速射流噪声中令人头疼的组成部分。此外，

† 通讯作者电子邮箱：gaojunwu@stanford.edu

摘要不得延伸至第 2 页

喷流啸叫会引发高动态载荷；如果载荷频率接近结构共振频率，就可能导致喷气发动机周围部件过早发生疲劳失效，例如 VC10、F-15、B1-B 和 F-35 上报告的情况（Raman 1997；Raman等 2012；Majumdar 2014）。

Raman（1999年）和 Edgington-Mitchell（2019）对超音速喷流啸叫的既有研究进行了全面综述，重点介绍了从 20 世纪 50 年代至今的实验观测，以及基于这些经验发现提出的理论。对啸叫的经典描述包含四个组成部分：源自喷流初始剪切层并向下游传播的不稳定波、不稳定波与射流羽流中激波胞之间的相互作用、重新激发初始剪切层的上游传播分量，以及最后在喷管出口附近剪切层的受容过程。相向运动的相干结构会形成空间调制的驻波模式，这一现象最早由 Panda（1999年）记录。Edgington-Mitchell 等 （2021）开展的较新研究进一步考察了喷流啸叫中的不同波群。研究发现，有两类波向下游传播：开尔文–亥姆霍兹（K-H）不稳定波和一种类似导管的模态。向上游传播的分量包括外部声波和导引射流模态；后者最早由 Tam & Hu（1989年）发现。

上游传播波在啸叫闭合中的作用直到最近仍存在争议。Powell（1953年）最初对啸叫的描述认为，射流羽流外的上游传播声波是闭合机制。另一方面，各种实验和数值证据表明，导引射流模态闭合了啸叫反馈路径（Bogey & Gojon 2017；Edgington-Mitchell 等2018；Gojon 等2019）。这一新认识有助于改进啸叫频率预测模型。Mancinelli等（2021）针对完全膨胀基态进行局部平行线性稳定性分析，以预测欠膨胀轴对称喷流中的 A1 和 A2 模态频率，但该模型需要事后校准相位共振条件的反射系数。Nogueira 等（2022*a*，*b*）通过在基态中纳入由激波胞引起的空间周期性，构建了一个线性稳定性模型，并发现了一种啸叫产生的绝对不稳定机制。该半局部模型能够准确预测不同喷管压力比下啸叫模态的转换。

尽管这些近期模型取得了成功，但由于两个主要问题，啸叫幅值仍然难以预测。第一个问题是声生成机制。鉴于波和激波胞的存在，高度定向的啸叫音调可能源于局部激波泄漏（Edgington-Mitchell等 2020；Suzuki & Lele 2003；Manning & Lele 2000），也可能源于马赫波辐射机制所产生的分布式声源（Tam等 1986）。第二个问题是啸叫反馈的增益如何确定。为回答这一问题，需要考虑啸叫反馈在空间上的非局部特征，包括喷管出口附近的声接收性、大尺度波和导引射流模态增长至最大幅值的饱和区，以及在喷流势核末端大尺度波转化为较小尺度湍流的耗散区。本研究旨在阐明第二个问题。

采用高保真大涡模拟（LES）数据，对具有强烈反对称摆动的 4:1 矩形啸叫射流进行分析，以研究啸叫反馈的整体行为。此前的研究已通过与佛罗里达州立大学开展的实验进行对比，验证了数值结果。大涡模拟数据与实验数据吻合良好（Wu 等 2022）。利用大涡模拟数据和谱本征正交分解（SPOD）（Lumley（1970）；Towne等 2018；Schmidt 与 Colonius（2020）），考察啸叫基频处的主导相干结构，并分析外部声波、导引射流模态和 K-H 波的幅值与相位。本文结构如下：第2节概述

[h!]

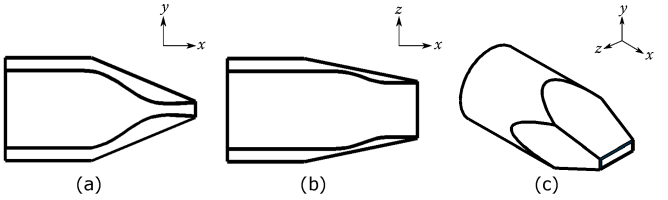


图 1：喷嘴几何形状的 (a) 短轴平面、(b) 长轴平面和 (c) 等轴测视图。

p_{0t}/p_∞	T_{0t}/T_∞	M_j	模拟时间 ($\tilde{t_s}$)
4.02	1	1.56	1400
4.86	1	1.69	1500
5.57	1	1.78	700

表 1：流动参数汇总。 p_{0t} 和 T_{0t} 分别为储气室总压和温度， p_∞ 和 T_∞ 分别为周围介质中的静压和温度。$\tilde{t_s} = t_s c_\infty/h$ 为以喷管短轴尺寸 h 和环境声速 c_∞ 归一化后的模拟时间。喷嘴的设计马赫数为 1.44。

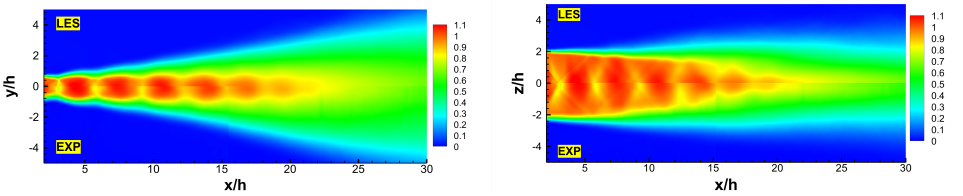
数值方法与数据分析方法；第 3 节表征啸叫基频处的主导 SPOD 模态；第 4 节考察向上游传播的导引射流模态与外部声波在啸叫闭合中的作用；第 5 节量化波能量并描述这些不稳定波的整体行为；第 6 节补充分析三种不同喷管压比条件下的结果；第 7节阐述 SPOD 模态与远场啸叫音调声辐射之间的关系；最后，第 8节总结本研究的主要发现。

2. 方法

2.1. 大涡模拟

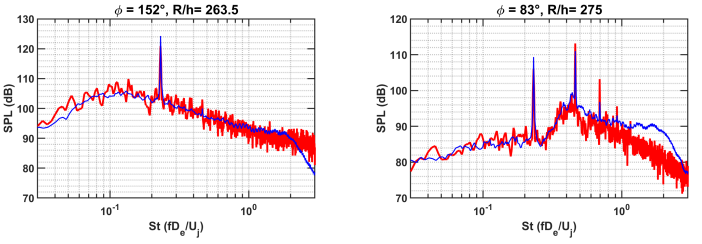
该矩形喷管由佛罗里达州立大学（FSU）团队设计，用于开展关于 Alkislar 等人（2005）和 Valentich 等人 （2016）中啸叫现象的实验研究。如图 1所示，收敛段采用五阶多项式设计，短轴平面内的扩张段则采用特征线法设计，以实现 Mach 1.44 下的理想膨胀。在长轴平面内，喉部下游的喷管表面保持笔直。喷管从直径为 57.15 mm 的圆形横截面平滑过渡到出口处的矩形形状，宽高比为 4:1。出口的短轴尺寸 h 为 10 mm，长轴尺寸 b 为 40 mm。等效射流直径 $D_e = 2\sqrt{hb/\pi}$为 22.6 mm。在本文其余部分，$+x$ 用于表示射流流向， y 表示短轴方向， z 表示长轴方向，而 ϕ 表示射流极角，其测量基准为射流中心线，起始方向为上游方向。本文分析采用了在三个欠膨胀啸叫工况下基于包含 1.4 亿个网格的网格计算得到的大涡模拟结果，其中 $M_j = 1.69$ 。这里， M_j 表示等熵膨胀条件下的完全膨胀射流马赫数。流动参数汇总于表 1。

大涡模拟是 p 采用非结构化可压缩流求解器 CharLES（Brès 等 *l.*



(a) 短轴平面　　(b) 长轴平面

图2：喷管压力比为 = 4.86时，大涡模拟与粒子图像测速测量的平均流向速度等值线对比



(a)　　(b)

图3：短轴平面内大涡模拟（红色）与实验数据（蓝色）的远场声学对比。

2017）开发于 Cascade Technologies，并结合基于沃罗诺伊图的网格生成方法（Brès 等 2018，2019）。CharLES 采用基于动能和熵守恒（KEEP）格式的激波捕捉方法（Tadmor 2003；Chandrashekar 2013；Fisher & Carpenter 2013）。射流的远场噪声通过一种高效的可渗透积分公式（Lockard 2000），在频域内求解 Ffowcs Williams–Hawkings （FW-H）方程（Ffowcs- Williams & Hawkings 1969）来计算，相关细节见 Brès 等（2017）。图 2 展示了喷管压力比为 = 4.86 时短轴平面和长轴平面上的平均速度等值线。射流羽流处于欠膨胀状态，并包含一系列激波胞。图 3展示了短轴平面内两个射流极角处的远场声学频谱，其中啸叫基频音调出现在 $St = fD_e/U_j = 0.23$。在后向角方向，啸叫基频音调占主导；而在接近侧线方向处，则可见第二及更高次谐波。有关射流啸叫模拟数值方法的详细说明，以及当前大涡模拟数据与实验测量的验证，请参阅 Wu等 （2022）。

2.2. *SPOD* 分析

采用谱本征正交分解（SPOD）（Towne 等2018年；Schmidt 与 Colonius（2020）），从近场流动数据中提取啸叫基频处的主导相干结构。形式上，设 $\psi(\mathbf{x}, t)$ 为零均值随机变量，Ψ 为包含 ψ 采样实例的矩阵，

$$\Psi = \left[\psi^{(1)}\psi^{(2)}\ldots\psi^{(N)}\right] \in \mathbb{R}^{M\times N} \tag{2.1}$$

其中 $\psi_{(i)}$，$i = 1, 2\ldots\ldots$，N是维度为 $\mathbb{R}^M$ 的第 i 个采样数据实例。对于当前研究，ψ 是湍流场中任意状态变量相对于其均值的脉动。$M = n_t \times n_{xyz} \times n_{var}$，其中 n_t 是时间上的采样点数，n_{xyz} 是空间坐标数，n_{var} 是采样变量数。通过对 ψ 进行时间上的傅里叶

“流体聚焦”文章不得超过此页数

变换，可以得到，

$$\hat{\Psi} = \left[\hat{\psi}^{(1)}\hat{\psi}^{(2)}...\hat{\psi}^{(N)}\right] \in \mathbb{C}^{M\times \mathrm{N}} \tag{2.2}$$

SPOD 分析求解以下特征值问题，

$$\left(\frac{1}{N-1}\hat{\Psi}\hat{\Psi}^{\mathrm{H}}\right)\hat{\Phi} = \hat{C}\hat{\Phi} = \hat{\Phi}\Lambda \tag{2.3}$$

$\hat{}\,\hat{}$ 其中 Φ 是包含 C 的右特征向量的矩阵，

$$\hat{\Phi} = [\hat{\phi}^{(1)}\ \hat{\phi}^{(2)}\ ...\ \hat{\phi}^{(N)}],\ \hat{\Phi} \in \mathbb{C}^{M\times N} \tag{2.4}$$

而 Λ 是包含特征值的对角矩阵，

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_N \end{bmatrix}.$$

在相关文献中，特征值也被称为 SPOD 模态的能量谱（Schmidt 等 2018年）。根据 Karhunen-Loeve 定理，SPOD 模态函数可对 $\hat{}\,\psi$ 给出最优表示，其中 N 个按大小排序的特征值表示各模态对采样数据方差的贡献。

$$\hat{\psi}(\mathbf{x}, f) \approx \sum_{j=1}^{N} \sqrt{\lambda_j(f)}\hat{\phi}_j(\mathbf{x}, f), \lambda_1 \geqslant \lambda_2 ... \lambda_N \geqslant 0 \tag{2.5}$$

对于本研究采用的 SPOD 分析，将 LES 数据插值到二维结构化网格上，该网格定义为 $x/h \in [0, 150]$，$y/h \in [-20, 20]$，$z/h = 0$ 和 $\Delta x/h = \Delta y/h = 0.1$，从而得到 $n_{var} = 5$ 和 $n_{xyz} = 1501 \times 401 \times 1$。为降低时间离散傅里叶变换的谱噪声，采用 Welch 方法。将大小为 N_t 的完整数据样本划分为多个大小为 n_t 的较小数据块，重叠率为 50%。对于喷管压力比为 $= 4.86$ 的情况，N_t 为 3500，n_t 为 1000；对于另外两种情况，N_t 为 2000，n_t 为 800。因此，喷管压力比为 $= 4.86$ 时 $N = 6$，其他情况则为 $N = 4$。

2.3. 空间互相关

啸叫涉及流向上空间调制行波之间的相互作用。对喷管出口与多个下游位置之间的信号进行空间互相关，可以揭示这种相互作用。按照 Wu等人 (2020) 所述的方法，如果两个位于不同流向位置的探针检测到行波，则这些信号之间的关系为

$$q(x_2, y_c, t) = \alpha q(x_1, y_c, t-\tau) + n(t), \tag{2.6}$$

其中，$q(x_i, y_c, t)$ 是沿直线 $y = y_c$ 在特定流向位置 x_i 处任意流动变量的零均值平稳信号，α 是波幅的增长或衰减系数，τ 是时间延迟，用于计入从一个位置传播到另一个位置所需的时间；$n(t)$ 是均值为零的随机噪声，与测点 x_1 处的信号不相关。

平稳信号之间的互相关函数为

$$\begin{aligned} R_{12}(\tau') &= E\left[q(x_1,t)q(x_2,t+\tau')\right] \\ &= E\left[q(x_1,t)\left(\alpha q(x_1,t+\tau'-\tau)+n(t)\right)\right] \\ &= \alpha R_{11}(\tau'-\tau), \end{aligned} \tag{2.7}$$

其中自相关函数为

$$R_{11}(\tau') = E\left[q(x_1,t)q(x_1,t+\tau')\right]. \tag{2.8}$$

根据　维纳–辛钦关系，互相关函数可计算为

$$R_{12}(\tau') = \int_{-\infty}^{\infty} S_{12}(f)e^{i2\pi f\tau'}\mathrm{d}f. \tag{2.9}$$

S_{12} 是 $q(x_1,\ y_c,\ t)$与 $q(x_2,\ y_c,\ t)$之间的互谱密度函数。此处，若使用啸叫基频f_{sc}处归一化 SPOD 模态函数的信号，则

$$q(x,y,t) = \hat{\phi}_1(x,y,f_{sc})e^{i2\pi f_{sc}t} \tag{2.10}$$

其中$\hat{}$ ϕ_1 是主导阶SPOD模态。由于此时 q 变为时间上的谐波函数，互谱密度函数可简单表示为

$$S_{12}(f) = \begin{cases} 0 & \text{if} f \neq f_{sc} \\ \frac{1}{T}\hat{q}^*(x_1,y_c,f_{sc})\hat{q}(x_2,y_c,f_{sc}) & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{2.11}$$

其中 T 是啸叫周期。相关函数变为

$$R_{12}(\tau') = \hat{q}_1^*(f_{sc})\hat{q}_2(f_{sc})e^{i2\pi f_{sc}\tau'}, \tag{2.12}$$

$$R_{11}(\tau'-\tau) = \hat{q}_1^*(f_{sc})\hat{q}_1(f_{sc})e^{i2\pi f_{sc}(\tau'-\tau)}. \tag{2.13}$$

这里，$\hat{}q_1(\ f_{sc})$ 和 $\hat{}q_2(\ f_{sc})$ 是 $\hat{}q(x_1,y_c,f_{sc})$ 和 $\hat{}q(x_2,y_c,f_{sc})$ 的简写。将式 (2.12)-(2.13) 代入式 (2.7)，并求解 τ 和 α，得到

$$\tau = \frac{\arg\zeta}{-i2\pi f_{sc}}, \qquad \alpha = |\zeta|, \qquad \zeta = \frac{\hat{q}_1^*\hat{q}_2}{\hat{q}_1^*\hat{q}_1}. \tag{2.14}$$

如果 $x_1 = 0$，此分析可以突出显示相对于喷管出口的行波幅值和相位变化。啸叫频率处的主阶 SPOD模态给出了对采样数据方差贡献最大的时空相干结构。借助空间互相关，可以提取沿流向相关的 SPOD模态部分，并用于探查啸叫产生过程中的能量传播。

式（2.14）给出 α，即相对于位于 $x/h = 0$处参考点的行波幅值变化。在此基础上，还可以利用 SPOD能量谱确定绝对幅值 λ,

$$\hat{A}(x,y,f_{sc}) = \sqrt{\lambda}\alpha|\hat{q}_1| \tag{2.15}$$

最后，我们将波能量的准一维度量定义为

$$\mathrm{E}(x,f_{sc}) = \int_{y_1}^{y_2} |\hat{A}|^2\mathrm{d}y \tag{2.16}$$

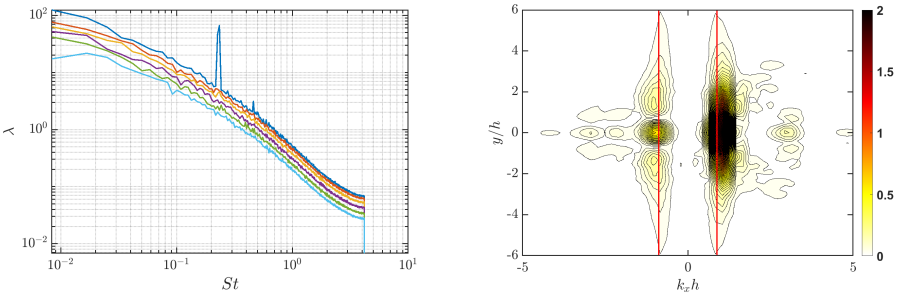


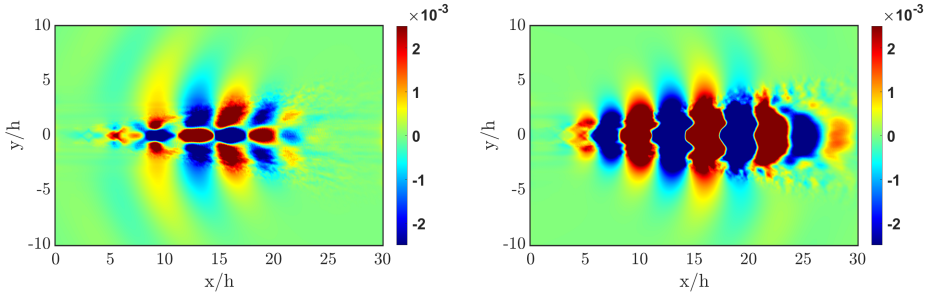
图 4：（a） v' 的 SPOD 能量谱，以及（b）第一 SPOD 模态形状函数的模值随流向波数 k_x 和 y的变化。

3. 啸叫生成中的主导相干结构

按照第 2.2 节所述的流程，采用 。69 个声学时间单位的数据，计算该工况下的主导阶 SPOD 模态。声学时间单位定义为声音在周围介质中传播距离 h 所需的时间，其中 h 为喷管出口的短轴尺寸。图4 (a) 展示了横向速度脉动 v'的 SPOD 模态能量谱。在啸叫基频 $St = 0。23$ 处可见一个高能峰值，且第一模态与其他模态之间有明显的秩分离。图4(b) 展示了第一 SPOD 模态函数在 $St = 0。23$ 处相对于流向波数 k_x 和横向坐标 y 的模值。等值线图显示存在波数符号相反的波。此处，波数的符号可作为波传播方向的替代指标。这些反向传播波之间的干涉，在射流羽流中形成空间调制的驻波；此前的多项啸叫实验（Panda 1999年）已观察到并对其进行了详细研究。

仅使用正或负的 k_x 进行空间重构，图 5 将 SPOD 模态中的下游传播分量与上游传播分量分离开来。下游传播波是亚声速和超声速射流中常见的 K-H 不稳定波（Schmidt 等 ， 2018年；Nekkanti & Schmidt，2020）。上游传播波既包括外部声波，也包括导引射流模态（Tam & Hu，1989年）。为便于后续讨论，我们用 c_- 表示上游传播声波，用 k_- 表示上游传播的导引模态，用 k_+ 表示下游传播的 K-H 波。

图 4(b) 显示，上游传播波和下游传播波均由多个傅里叶模态组成，其中一组主导模态接近声学波数，此外还有若干波数更高的次要模态组。关于 k_- 和k_+ 的峰值波数汇总于表 2中，同时列出了根据平均流场数据得到的激波胞峰值波数 k_s。图 4(b) 表明， k_- 和 k_+ 的峰值波数对应的相速度略低于环境声速。这一特征与其他实验和理论研究的结果一致（Tam & Ahuja 1990；Edgington-Mitchell等 2021）。k_- 和 $k_+ - |k_s|$ 的数值表明，导引射流模态、K-H 波和激波胞结构可以通过三波相互作用交换能量。K-H 波与激波胞之间的强相互作用可能激发导引射流模态，而导引射流模态的增长又可能进一步增强 K-H 波与激波胞之间的相互作用。近期的实验和理论研究也提出了这一观点（Edgington-Mitchell 等 2018、2021、2022）。其他变量的 SPOD 模态也已计算，包括密度脉动、速度脉动



(a) (b)

图5：（a） v' SPOD模态中的上游传播波；（b） v' SPOD模态中的下游传播波。

喷管压力比 Stsc	范围（x/h）	k_-	k_+	k_s	$k_+ - \lvert k_s \rvert$
4.02 0.31	[0, 20]	−1.26	+1.57	±2。83	−1。26
4.86 0.23	**[0, 30]**	**−1.05**	**+1.05**	**±2.09**	**−1.04**
5.57 0.20	[0, 35]	−0.90	+0.90	±1.80	−0。90

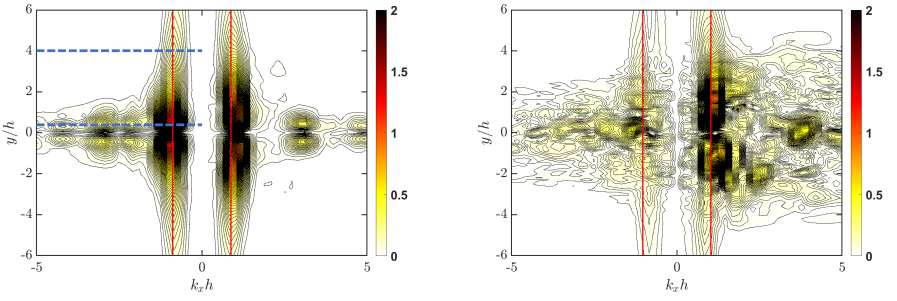
表 2：SPOD 在啸叫频率下及平均激波胞结构中峰值波数的汇总。粗体标出的工况将在本文中详细分析，另外两个工况见第 6节。

在 x 和 z 方向上的脉动，以及压力脉动。结果见附录A。

4. 啸叫闭合机制

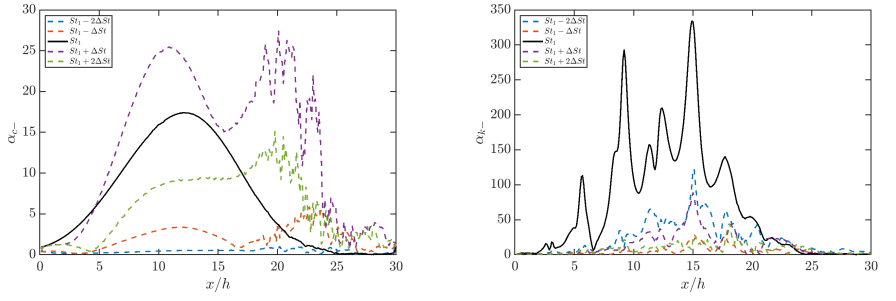
利用 SPOD 获得啸叫频率下的主导相干结构后，可以进一步考察上游传播波，以探究啸叫闭合机制，即将能量从下游重新传回喷管出口的路径。为此，采用第 2.3 节所述的空间互相关方法，分析压力脉动 p'的首阶 SPOD 模态。根据式 (2.14)，计算相对于喷管出口的 c_- 和 k_- 的时间延迟τ 及相对幅值变化 α 。为区分声学脉动和流体动力学脉动，沿 $y/\mathrm{h} = 4$计算 c_- 的空间互相关，沿 $y/\mathrm{h} = 0$计算 k_- 的空间互相关。这些位置以图 6(a)中的蓝色虚线标出。图 6(a)中的红色实线还标出了声学波数。射流羽流外部的声波集中在声学波数附近。对于 p'， k_- 波呈现一对相对于射流中心线对称的波瓣，其峰值波数位于声学波数左侧。图 6(b)显示了一个略高于啸叫频率的频率下，频谱正交分解形状函数的模值。在这一非共振频率下，射流羽流外部仍存在向上游传播的声波，但根据其相对于射流中心线缺乏对称性，射流羽流内部不存在 $k-$ 波。此外，在两个频率下均可观察到 $k+$ 波，因此能量仍沿下游方向传播。因此， $k-$ 波似乎是啸叫工况与非啸叫工况之间的区别因素。

结果来自 互相关进一步证实， $k-$ 波的增长是发生 or



(a) (b)

图6：在（a）啸叫频率 $St_1 = 0.234$ 和（b）一个相邻频率处的 p' SPOD模态形状函数的模值。实线红线标示声学波数，虚线表示计算 c_- 和 k_- 波空间互相关的位置。



(a) (b)

图7：（a）沿 $y/h = 4$ 跟踪的声波 c_-相对幅值（参考点为 $x/h = 0$，$y/h = 4$），以及（b）沿 $y/h = 0.2$ 跟踪的导引射流模态 k_-相对幅值（参考点为 $x/h = 0$，$y/h = 0.2$）。实线表示啸叫频率，虚线表示相邻频率。$St_1 = 0.234$，$\Delta St = 0\ 042$ 。

啸叫的关键。图7(a)显示了沿 y/h = 5追踪的波信号的相对幅值 α 。由于该信号距离射流边界较远，因此主要与声波 $c-$有关。图7(b)对沿 y/h = 0追踪的波信号进行互相关分析，表明射流羽流内部的 $k-$ 波正在增长。 c_- 和 k_- 之间的空间增长模式有两点不同。首先，在啸叫基频处， α_{k_-} 的最大值比 α_{c_-} 高一个数量级。这表明，相对于喷管出口， k_- 波的空间增长远比 c_-显著。其次， α_{k_-} 对频率高度敏感；其空间增长在啸叫频率 St_1处最大。相比之下， α_{c_-} 的主峰在St_1 及其附近的几个频率之间变化不大。在两个较高的非共振频率处， c_- 波在 x/h = 20 与 x/h = 25 之间出现次峰，其 α 达到与啸叫声波相近或略高的值；正如Nekkanti和Schmidt（2021）所讨论的，这些次峰可能是由喷流势核末端附近的K-H 波引起的超指向性宽带声辐射的上游分量。总体而言，与k_-不同， c_- 的增长对啸叫频率附近的频率范围不敏感。这些差异直接证明，在闭合啸叫反馈回路时， k_- 波占主导地位，而非 $c-$波。

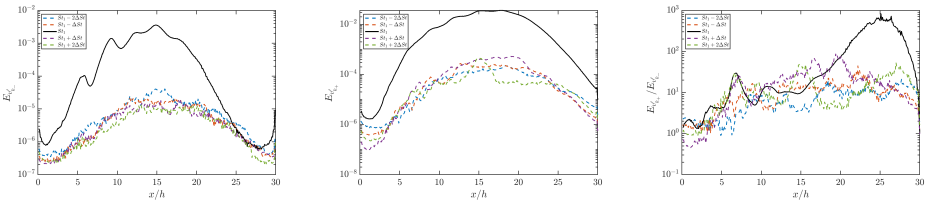


图 8：不同频率下 k_-, k_+ 波的波能量及其比值。实线表示啸叫频率，虚线表示相邻频率。

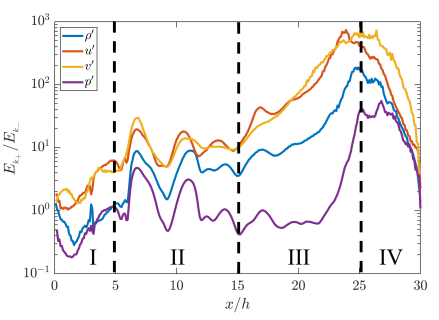


图 9： ρ',u',v' 和 p' 波的下游传播能量与上游传播能量之比。虚线标出了与啸叫不同过程对应的四个不同区域，并以罗马数字标注。

5. 波能量估算

第 3 节表明，激波胞之间可以通过三波相互作用传递能量k_s、 k_+ 和 k_- 波。第 4 节随后表明， k_- 波是能量向上游传播的决定因素。通过使用公式（2.16）量化这些反向传播波所携带的波能量，可以进一步支持上述论点。

图8展示了使用 v' 的 SPOD 数据得到的 E_{k_-}、 E_{k_+} 和 E_{k_+}/E_{k_-} 随 x/h 的变化。这些结果最好结合图2和图5进行解读。 E_{k_-} 和 E_{k_+} 反映了沿流向传播时， k_- 和 k_+ 波的非线性增长与衰减。它们也取决于频率。在啸叫基频处， E_{k_-} 和 E_{k_+} 的最大值分别出现在 x/h $= 14.4$ 和 x/h $= 16.9$。有趣的是，聚焦于啸叫音调 St_1时， E_{k_+}/E_{k_-}的数值显示射流羽流中存在四个明显区域： x/h:$[0, 5]$, $[5, 15]$, $[15, 25]$, $[25, 30]$。第一区域（I）位于 x/h $= 0$ 和 x/h $= 5$之间，此处 E_{k_+}/E_{k_-} 从较低的初始值开始增长。这可能对应于受容过程，在此过程中， k_- 的能量激发喷流初始剪切层，形成初生的 k_+ 波。第二区域（II）位于 $5 \leqslant x$/h $\leqslant 15$处，此处 E_{k_+}/E_{k_-}达到平台。在该区域内，沿下游方向， E_{k_-} 和 E_{k_+} 以相近的速率增长。前两个区域也与射流超声速核心重合，在此可观察到激波胞的影响。第三区域（III）位于 x/h $= 15$ 和 x/h $= 25$之间，此处由于 E_{k_-}快速衰减， E_{k_+}/E_{k_-} 迅速增大。在 x/h $= 25$处，E_{k_+}/E_{k_-} 达到最大值。 E_{k_+}/E_{k_-} 的最大值表明了一个终点，在此处，k_- 波相对于 k_+ 波达到显著幅值。请注意， $k-$ 波沿 $-x$ 方向传播，因此， x/h $= 15$ 和 x/h $= 25$ 之间的曲线表明，E_{k_-} 沿 $-x$ 方向增长、饱和并衰减。因此，第三区域对应于导引射流模态的激发。结合图2中的平均速度等值线，

Rapids 文章不得超过此页数限制

喷管压力比 Stsc	在 $\phi = 30$ 度处的声压级(dB)	在 $\phi = 150$ 度处的声压级(dB)
4.02 0.31	119	116
4.86 0.23	131	124
5.57 0.20	136	134

表3：在距离 $100h$ 处测得的啸叫频率和振幅汇总。不同喷管压比条件下的喷管出口

第三区域延伸至射流超声速核心的末端。此外，第二和第三区域均与声波发射位置相吻合，这一点可从图5中的 SPOD结构看出。这一点也在第7节中得到了进一步验证。最后，第四区域（IV）位于下游的 $x/h = 25$处，此处E_{k_+}/E_{k_-} 迅速下降，这是因为 k_+ 波在喷流势核末端发生了破裂。

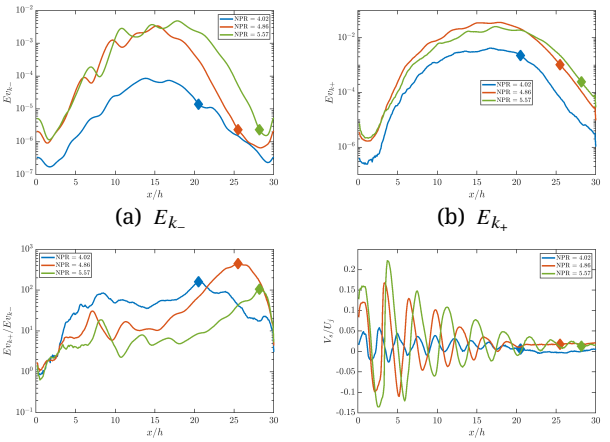
如图 9 所示，利用 ρ'、 u'、 v' 和 p'的 SPOD 数据，在其他流动变量中也观察到了这四个不同区域。总之， E_{k_-}、 E_{k_+}和 E_{k+}/E_{k-} 的数值凸显了啸叫共振所涉及的各种过程在空间上的非局部性和非周期性特征。 E_{k+}/E_{k-} 可用作识别射流羽流中不同区域的指标，这些区域分别对应啸叫的不同过程。对于 K-H 波：区域 I 对应初始剪切层中 K-H 波的感受性/激发（k_+）；区域 II 对应 k_+ 波的增长及其与激波胞的相互作用；区域 III 和 IV 则与 k+ 波的饱和和衰减有关。对于导引射流模态 k_-，区域 III 对应其沿 $-x$ 方向的激发和增长，区域 II 则与 k_- 波的饱和以及激波相关调制有关。

6. 喷管压比变化的影响

本节重复了第 5 节中针对另外两种喷管压力比所进行的相同分析。对于所研究的三种啸叫情况，在图 E_{k_-}、 E_{k_+}和E_{k+}/E_{k-} 中均观察到了类似的空间变化。10。图 10（c）显示，随着喷管压力比增大，区域 I 变短，而区域 II 和 III 变长。在较高的喷管压力比下，射流羽流与周围介质之间增大的速度差使初始剪切层变得更加不稳定，也更容易发生开尔文–亥姆霍兹不稳定性。更强的激波胞和更长的超声速核心也使 $k-$ 波受到更强的激励。图 E_{k+}/E_{k-} 中的实心圆标出了其最大值。其流向位置也标示在其他子图中。图 10（d）表明，终点可取为射流超声速核心的末端，并且该位置会随着喷管压力比增大而进一步向下游移动。表 3汇总了距喷管出口 $100h$ 处、从两个射流极角测得的啸叫频率和啸叫幅值。随着喷管压力比增大，啸叫幅值增大，这与所观察到的区域 II 和 III 长度增加相一致。正如第 7节稍后所验证的，这两个区域确实与啸叫音调的分布式声源相关。

7. SPOD模态与声音

如前文所示，在啸叫频率处，近场流体动力学波动主要由时空相干结构主导，可由主导阶SPOD模态表示。本节使用Lighthill方程（Lighthill，1952），直接证明啸叫声学与SPOD结构之间的联系。通过精确



(a) E_{k_-} (b) E_{k_+}

(c) E_{k_+}/E_{k_-} (d) V_{lip}/U_j

图 10：三种喷管压力比工况下波能量与激波的比较。实心菱形表示各工况下 E_{k_+}/E_{k_-} 的最大值位置。

对质量和动量平衡方程进行重排，Lighthill表明，任意运动流场在远场产生的压力脉动$p' = p - p_0$，与静止理想介质中四极子声源所产生的声学响应相类似。

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \nabla^2 p' = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \tag{7.1}$$

and

$$T_{ij} = \rho u_i u_j - \tau_{ij} + (p' - c_0^2 \rho')\delta_{ij} \tag{7.2}$$

项 T_{ij} 是 Lighthill应力张量，在声学类比中包含了噪声生成所涉及的所有实际流动效应，其中 $\rho u_i u_j$ 是动量分量，τ_{ij} 是黏性应力，$p' - c_0^2 \rho' \delta_{ij}$ 则由熵变引起。在接下来的分析中，我们将展示如何直接利用 SPOD模态来近似啸叫音调相关的 T_{ij}。

在频域中，远离声源区域处位置**y**的 p' 解可写为

$$\hat{p}'(\mathbf{y}, \omega) = \int_V \frac{\partial^2 \hat{T}_{ij}(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_i \partial x_j} G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega) \mathrm{d}x \tag{7.3}$$

其中，ω 为角频率，V 为包围声源的控制体积，$\hat{T}_{ij}(\mathbf{x}, \omega)$ 是 T_{ij} 的傅里叶分量，G_0 是自由空间格林函数。应用分部积分和散度定理，并令面积分为零后，我们可以将空间导数从 $\hat{T}_{ij}$ 移至格林函数上。

$$\hat{p}'(\mathbf{y}, \omega) = \int_V \hat{T}_{ij}(\mathbf{x}, \omega) \frac{\partial^2 G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)}{\partial x_i \partial x_j} \mathrm{d}x \tag{7.4}$$

在非加热高雷诺数射流中，与动量相比，黏性应力和熵不均匀性的影响较小，因此

$$T_{ij} \approx \rho u_i u_j. \tag{7.5}$$

利用雷诺分解，$\rho u_i u_j$ 可以表示为

$$\rho u_i u_j = (\bar{\rho} + \rho^t)(\bar{u}_i + u_i^t)(\bar{u}_j + u_j^t) \tag{7.6}$$

其中，$\bar{()}$表示时间平均量，$()^t$ 表示非定常分量。为了计算远场声压，我们忽略时间上的稳态项，仅保留一阶非定常项。

$$T_{ij} \approx \bar{\rho}\bar{u}_i u_j^t + \bar{\rho} u_i^t \bar{u}_j + \rho^t \bar{u}_i \bar{u}_j \tag{7.7}$$

因此，T_{ij} 的时间傅里叶分量可简化为

$$\hat{T}_{ij} \approx \bar{\rho}\bar{u}_i \hat{u}_j^t + \bar{\rho}\hat{u}_i^t \bar{u}_j + \hat{\rho}^t \bar{u}_i \bar{u}_j \tag{7.8}$$

在啸叫频率处，近场流体动力学波动主要由空间—时间相干结构主导，如前文所示。这表明，利用主导阶 SPOD 模态产生的波，可以很好地近似啸叫噪声的生成。为验证这一假设，我们用 SPOD 数据替代 $\hat{}\rho^t$、$\hat{u}_i^t$ 和 $\hat{u}_j^t$，以计算 $\hat{}\, T_{ij}$。图 11 显示了喷管压力比 NPR 为 = 4.86 时，啸叫频率处复数值 $\hat{}\, T_{ij}$ 的幅值和相位。由于流向速度脉动较大，$\hat{}\, T_{11}$ 和 $\hat{}\, T_{12}$ 是最主要的项，其空间分布范围为 x/h = 5 至 x/h = 25，这与第 5 节通过 E_{k+}/E_{k-} 确定的区域 II 和 III 相吻合。

积分解中涉及自由空间格林函数的、关于 $\hat{}\, p'$ 的项为

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = \frac{r_i r_j}{4\pi |\mathbf{r}|^5} \left(3 - 3\mathrm{i}k_c|\mathbf{r}| - k_c^2|\mathbf{r}|^2\right) e^{\mathrm{i}k_c|\mathbf{r}|} \tag{7.9}$$

其中，$\mathbf{r} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$ 是从声源指向观察点位置的位移矢量，$k_c = \omega/c_0$ 是声学波数。对于 $|\mathbf{r}|/L_s >> 1$，其中 L_s 是与分布式声源相关的长度尺度，涉及格林函数的项可近似为

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) \approx \left(\frac{-k_c^2 r_{0i} r_{0j}}{4\pi |\mathbf{r_0}|^3}\right) e^{\mathrm{i}k_c\left(|\mathbf{r_0}| + \frac{\mathbf{r_0}}{|\mathbf{r_0}|}\cdot\xi\right)} \tag{7.10}$$

其中，$\mathbf{r_0} = \mathbf{y} - \mathbf{x_c}$ 是从声源中心指向观察点的位移，$\xi = \mathbf{x_c} - \mathbf{x}$。对于所分析的情况，$x_c$ 取为 $15h$。

使用式 $270h$ 计算短轴平面内距喷管出口7.4处的远场声压。T_{ij} 假设在长轴方向上于 $z/h = -5$ 与 $z/h = 5$ 之间均匀分布，其他位置为零。这是对声源的一种粗略简化；由于矩形喷管几何形状的影响，声源沿 z 方向并非均匀分布。尽管如此，计算得到的啸叫音调幅值与 LES-FWH 计算结果吻合良好，如图 12所示。特别是，黑色圆圈标记的值是用式 7.4、式 7.8 和式 7.9计算得到的。由于 T_{11} 和 T_{12} 相较于 T_{ij}的其他分量大得多，因此红色叉号标示的值仅将这两项作为源项计算得到。紫色曲线所示的值则是在进一步简化 $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} G_0$ 并使用式 7.10后得到的。各种简化形式对计算得到的啸叫音调幅值影响不大。随着短轴平面内射流极角的变化，声学类比解也很好地捕捉了啸叫音调指向性。

声学类比与 FW-H 结果之间的良好一致性具有几项重要意义。首先，这验证了 SPOD 得到的相干波结构是

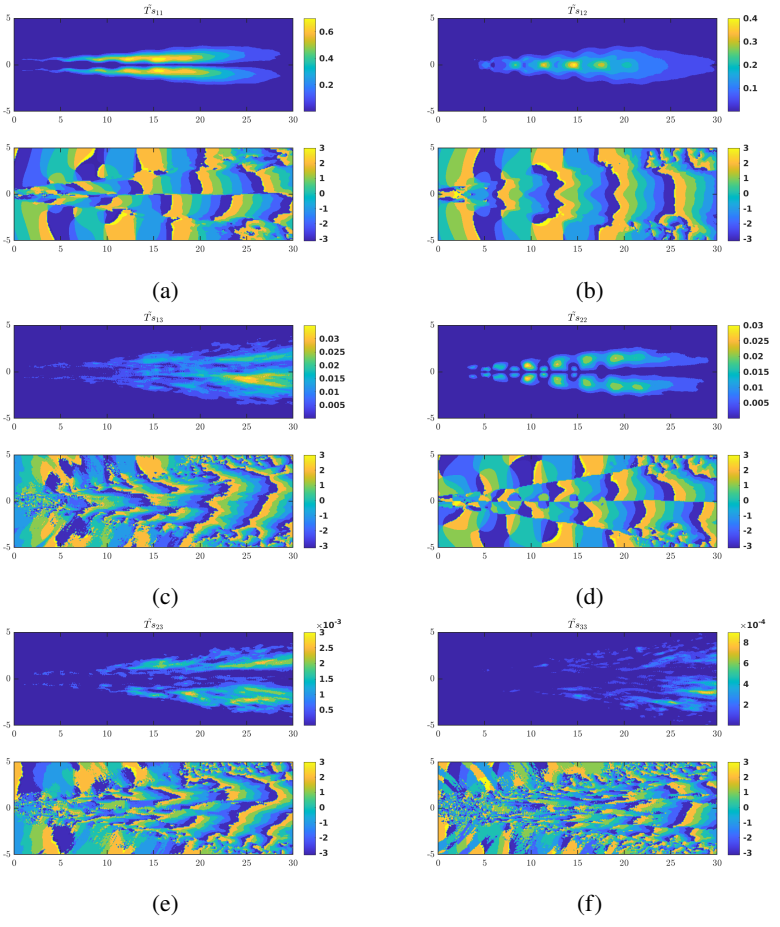


图 11：基于 SPOD 数据估算的 T_{ij}。

能够良好表征产生远场啸叫音调的噪声生成机制。SPOD 数据包含 k_- 和 k_+ 波，它们在射流羽流内部向上游和下游传播能量，并建立反馈共振。同时，这些波与激波胞发生增长和相互作用的区域（区域II&III）也对应于啸叫音调的空间分布式声源区域。波与平均流场（包括平均激波胞结构）相互作用的结果包括 $k-$ 以及声波。声波在穿过平均射流剪切层传播时也会发生折射。这些过程反映在图 $\hat{T}_{ij}$ 中射流横向的快速相位变化上。远场格林函数 7.10 包含几何角度因子，以及与声源区域内迟滞时间变化相关的相位变化。将其与方程 7.4 中的空间分布式声源结合后，远场声辐射体现了有效声源之间的相长与相消干涉，从而形成啸叫音调指向性模式。未来，可通过采用 SPOD 模态和平均射流状态所提示的函数形式构造声源，利用这些结果改进啸叫幅值预测模型。

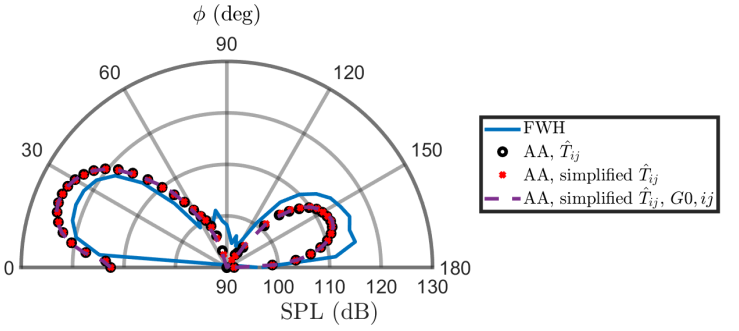


图12：采用 Lighthill声学类比计算的远场声压，条件为 $|\mathbf{r}|/h$ = 270，并与 LES-FWH 计算结果进行比较。

8. 结论

本研究利用高保真大涡模拟数据，研究了欠膨胀喷管压力比条件下 4:1 矩形射流的啸叫产生机制。分析结合了谱本征正交分解（SPOD）、流向傅里叶分解以及基于大涡模拟数据的空间互相关。针对喷管压力比 =4.86 的工况，详细评估了主导相干结构及其与啸叫产生的关系。通过对另外两种喷管压力比条件重复相同分析，评估了喷管压比变化的影响。啸叫基频处的第一阶 SPOD 模态由声波、向上游传播的导引射流模态以及向下游传播的 Kelvin–Helmholtz波组成。波能量估算表明，流向上存在整体非线性特征。

分析的主要发现与近期关于啸叫不稳定性的理论认识一致，并阐明了啸叫产生中各个独立过程在空间上的分离。通过考察啸叫频率及其邻近频率处波的增长，获得了直接证据，表明啸叫闭合机制是导引射流模态，而非外部声波。对波能量（E_{k_+}、E_{k_-}及其比值 E_{k_+}/E_{k_-}）进行量化，可识别啸叫产生中不同过程发生的区域，包括初始剪切层感受性、声生成、导引射流模态激发，以及湍流导致的相干性衰减。初始剪切层感受性区域的特征是 E_{k_+}/E_{k_-} 在喷嘴附近迅速空间增长。此后， E_{k_+}/E_{k_-} 先趋于平稳，随后数值急剧增大，这对应于导引射流模态在 $-x$ 方向上的起始、增长和饱和。该区域也与Lighthill应力张量 T_{ij}振幅较大的位置相吻合；这里的应力张量由SPOD模态和平均流场（包括激波胞）近似得到。采用 T_{ij} 和自由空间格林函数的声学类比公式，能够较好地估算远场啸叫音调噪声，其结果与使用原始大涡模拟数据进行的FW-H计算吻合良好。这进一步证实，领先阶SPOD模态所突显的相干结构同时捕捉到了主要的流体动力学和

啸叫产生中涉及的声学过程。未来可在当前发现的基础上，构建射流啸叫振幅预测模型。

致谢

我们感谢 Cascade Technologies 提供大涡模拟求解器，并感谢 Guillaume A. Brès 博士在我们的工作中给予的大力支持和指导。我们感谢佛罗里达州立大学的 Rajan Kumar 教授与我们分享实验数据。

资金支持

本研究由美国海军研究办公室资助，资助编号为 N00014-18-1-2391，项目经理为 Steve Martens 博士；同时也得到 XSEDE（TG-CTS190021）计划的支持。

利益冲突声明

作者声明不存在利益冲突。

附录 A。 p'、 u'、 w'和 ρ'的 SPOD模态

本附录展示了压力脉动 p'、密度脉动 ρ'和速度脉动 u' 以及 w' 图13 至16中的 SPOD能量谱和一阶 SPOD模态形状。这些结果补充了论文中关于 v' SPOD模态的结果。这些模态通过优化相应变量脉动的方差计算得到。除 v' 第3 节中介绍的 w' 之外，所有变量的能量谱和模态形状的主要特征均与 w' SPOD模态相似。在短轴平面中，SPOD模态在啸叫频率及其谐波处没有出现峰值。在 w' 啸叫频率下，SP OD模态形状中不存在驻波，相干结构主要由下游传播的凯尔文–亥姆霍兹波主导。这表明，面外速度脉动（沿短轴平面方向）与矩形射流中啸叫反馈的主导相干性并无强相关性。

参考文献

Alkislar, Mehmet B, Krothapalli, Anjaneyulu, Choutapalli, Isaac & Lourenco, Luiz M 2005 超声速双射流的结构。*AIAA*期刊 **43** (11), 2309–2318. Bogey, Christophe & Gojon, Romain 2017 理想膨胀超声速冲击圆射流中的反馈回路与逆风传播波。《流体力学杂志》**823**, 562–591. Brès, Guillaume A, Bose, Sanjeeb T, Emory, Michael, Ham, Frank E, Schmidt, Oliver T, Rigas, Georgios & Colonius, Tim 2018 使用基于 Voronoi 网格生成框架的共环湍流射流大涡模拟。AIAA论文2018-3302。Brès, Guillaume A, Ham, Frank E, Nichols, Joseph W & Lele, Sanjiva K 2017 超声速射流的非结构化大涡模拟。*AIAA*期刊 pp. 1164–1184. Brès, Guillaume A, Towne, Aaron & Sanjiva, K. Lele 2019 采用大涡模拟研究温度非均匀性对超声速射流噪声的影响。AIAA Paper 2019-2730。Chandrashekar, Praveen 2013 用于可压缩欧拉方程和纳维–斯托克斯方程的动能保持型熵稳定有限体积格式。计算物理通讯 **14** (5), 1252–1286. Edgington-Mitchell, Daniel 2019 啸叫与冲击超声速射流中的气动声学共振和自激——综述。《国际气动声学杂志》 **18** (2-3), 118–188.

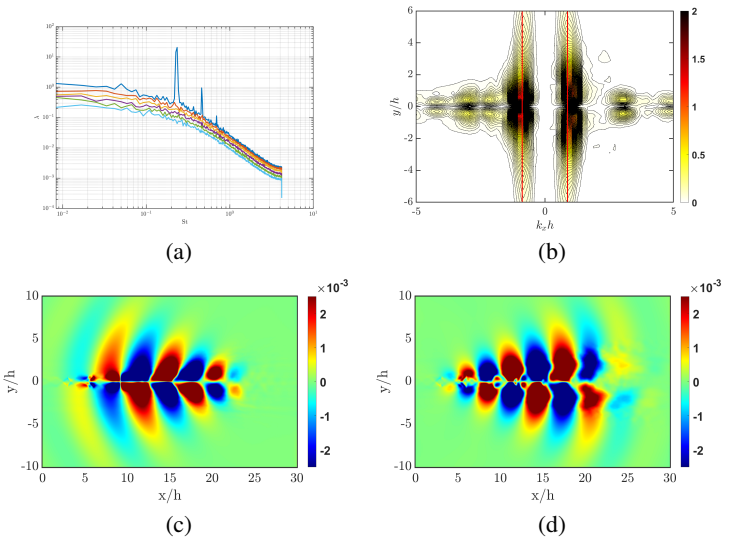


图13：（a） p' SPOD模态的能量谱；（b） p' 在啸叫基频处的主导阶SPOD模态形状函数的模值；（c）主导阶 p' SPOD模态中的上游传播波；（d）主导阶 p' SPOD模态中的下游传播波。

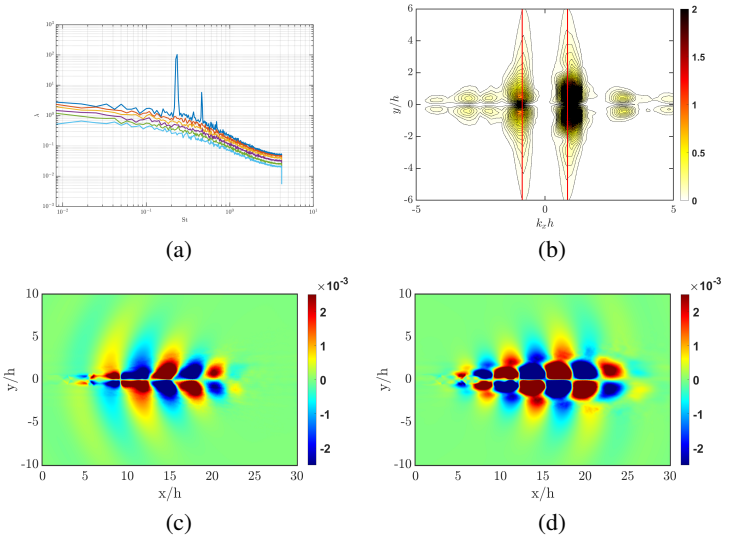


图14：（a） ρ' SPOD模态的能量谱；（b） ρ' 在啸叫基频处的主导阶SPOD模态形状函数的模值；（c）主导阶 ρ' SPOD模态中的上游传播波；（d）主导阶 ρ' SPOD模态中的下游传播波。

Edgington-Mitchell, Daniel, Jaunet, Vincent, Jordan, Peter, Towne, Aaron, Soria, Julio & Honnery, Damon 2018 上游传播声学射流模态作为啸叫的闭合机制。《流体力学杂志》 **855**.
Edgington-Mitchell, Daniel, Li, Xiangru, Liu, Nianhua, He, Feng, Wong, Tsz Yeung, MacKenzie, Jacob & Nogueira, Petronio 2022 射流啸叫统一理论。《流体力学杂志》 **945**.

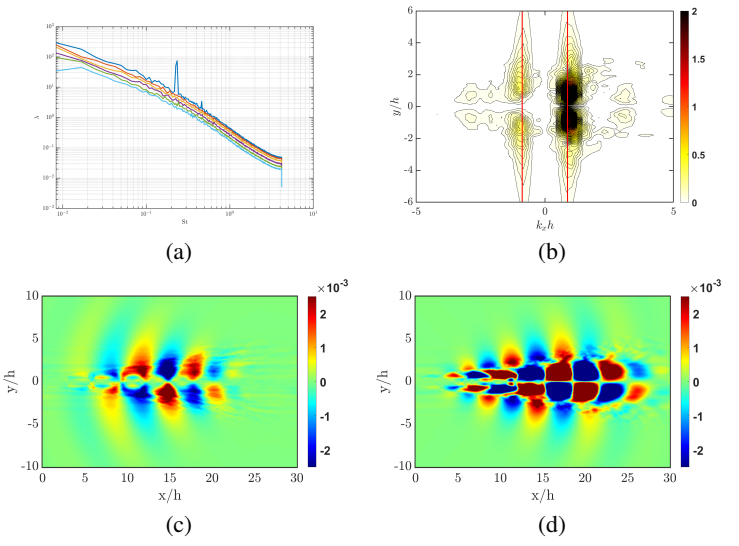


图15：(a) u' SPOD模态的能量谱，(b) 啸叫基频处 u' 的主导阶SPOD模态形状函数的模值，(c) 主导阶 u' SPOD模态中的上游传播波，(d) 主导阶 u' SPOD模态中的下游传播波。

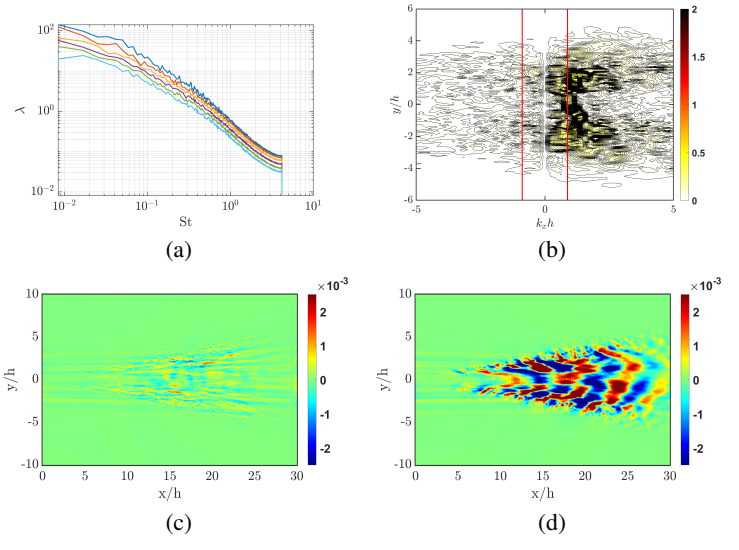


图16：(a) w' SPOD模态的能量谱，(b) 啸叫基频处 w' 的主导阶SPOD模态形状函数的模值，(c) 主导阶 u' SPOD模态中的上游传播波，(d) 主导阶 w' SPOD模态中的下游传播波。

Edgington-Mitchell, Daniel, Wang, Tianye, Nogueira, Petronio, Schmidt, Oliver, Jaunet, Vincent, Duke, Daniel, Jordan, Peter & Towne, Aaron 2021年 喷流啸叫中的波。《流体力学杂志》**913**。Edgington-Mitchell, Daniel, Weightman, Joel, Lock, Samuel, Kirby, Rhiannon, Nair, Vineeth, Soria, Julio & Honnery, Damon 2020 喷流啸叫音调的激波泄漏生成机制。《流体力学杂志》。

Ffowcs-Williams, J. E. & Hawkings, D. L. 1969年 任意运动状态下湍流和表面的声生成。《伦敦皇家学会哲学汇刊》。A辑，数学与物理科学 264 (1151), 321–342。Fisher, Travis C. & Carpenter, Mark H. 2013 非线性守恒律的高阶熵稳定有限差分格式：有限区域。计算物理学杂志 252, 518–557。Gojon, Romain, Gutmark, Ephraim & Mihaescu, Mihai 2019 矩形啸叫射流中的反对称振荡模态。《AIAA期刊》57 (8)。Lighthill, M. J. 1952 气动声生成，第一部分。《伦敦皇家学会会刊》。A辑，数学与物理科学 211, 564–587。Lockard, David P 2000 Ffowcs-Williams和Hawkings方程的高效二维实现。《声学与振动杂志》229 (4), 897–911。Lumley, J. L., 编 1970 《湍流中的随机工具》。学术出版社。Majumdar, Dave 2014 美国价值4000亿美元的隐形喷气机机队停飞。《野兽日报》新闻。Mancinelli, Matteo, Jaunet, Vincent, Jordan, Peter & Towne, Aaron 2021 超声速射流中轴对称啸叫音调的复值共振模型。《流体力学杂志》928。Manning, Ted & Lele, Sanjiva 2000 超声速喷流啸叫中声生成的数值研究。AIAA 论文 2000-2081。Nekkanti, Akhil & Schmidt, Oliver T. 2020 湍流射流中波包声辐射指向性的模态分析。AIAA 论文 2020-0745。Nekkanti, Akhil & Schmidt, Oliver T. 2021 湍流射流声学指向性的模态分析。《AIAA期刊》59, 228–239。Nogueira, Petrônio A.S., Jaunet, Vincent, Mancinelli, Matteo, Jordan, Peter & Edgington- Mitchell, Daniel 2022a 喷流啸叫中A1和A2模态的闭合机制。《流体力学杂志》936。Nogueira, Petrônio A.S., Jordan, Peter, Jaunet, Vincent, Cavalieri, André V.G., Towne, Aaron & Edgington-Mitchell, Daniel 2022b 含激波射流中的绝对不稳定性。《流体力学杂志》930。Panda, J 1999 378, 71 96 喷流啸叫噪声生成的实验研究。《流体力学杂志》–。Powell, Alan 1953 堵塞射流噪声的机制。《物理学会会刊》。B辑 66 (12), 1039。Raman, Ganesh 1997 具有展向斜激波胞结构的矩形射流中的啸叫音调。《流体力学杂志》330, 141–168。Raman, Ganesh 1999 超声速喷流啸叫：从Powell到当下的半个世纪。《声学与振动杂志》225 (3), 543–571。Raman, Ganesh, Panickar, Praveen & Chelliah, Kanthasamy 2012 双股超音速射流的气动声学：综述。《国际气动声学杂志》11 (7-8), 957–984。Schmidt, Oliver T. & Colonius, Tim 2020 谱本征正交分解指南。AIAA期刊 58 (3), 1023–1033。Schmidt, Oliver T., Towne, Aaron, Rigas, Georgios, Colonius, Tim & Brès, Guillaume A. 2018 射流湍流的谱分析。《流体力学杂志》855, 953–982。Suzuki, Takao & Lele, Sanjiva K. 2003 非定常含涡混合层中的激波泄漏：在喷流啸叫研究中的应用。《流体力学杂志》490, 139–167。Tadmor, Eitan 2003 非线性守恒律差分近似及相关时变问题的熵稳定性理论。《数值分析学报》451–512页。Tam, Christopher KW, Seiner, John M & Yu, JC 1986 宽带激波相关噪声与啸叫音调之间的关系设想。《声学与振动杂志》110 (2), 309–321。Tam, C. K. W. & Ahuja, K. K. 1990 冲击射流离散音调生成的理论模型。《流体力学杂志》214, 67–87。Tam, Christopher K W & Hu, F. Q. 1989 高速射流的三类不稳定波。《流体力学杂志》201, 447–483。Towne, Aaron, Schmidt, Oliver T & Colonius, Tim 2018 谱本征正交分解及其与动态模态分解和预解式分析的关系。《流体力学杂志》847, 821–867。Valentich, Griffin, Upadhyay, Puja & Kumar, Rajan 2016 中等宽高比啸叫超声速矩形射流的混合特性。《流体实验》57 (5), 71。

Wu, Gao Jun, Lele, Sanjiva K. & Jeun, Jinah 2020 超声速矩形射流啸声的相干性与反馈。湍流研究中心年度研究简报 。Wu, Gao Jun, Lele, Sanjiva K., Jeun, Jinah, Kumar, Rajan & Gustavsson, Jonas 2022 矩形射流啸声的非结构化大涡模拟：评估与验证。*AIAA*期刊 。