arXiv:2304.00669v1 [math.OC] 3 Apr 2023

# 随机竞争市场中的中间服务设施规划：纳入网络中的主体—基础设施交互

Sina Baghali[a]、Zhaomiao Guo[a, *]、Julio Deride[b]、Yueyue Fan[c]

[a]*Department of Civil, Environmental and Construction Engineering University of Central Florida*[b]*Department of Mathematics Universidad Técnica Federico Santa MaríaSantiago, Chile*
[c]*Department of Civil and Environmental Engineering University of California Davis*

**摘要**

本文提出了一种基于网络的多主体优化模型，用于随机竞争市场中服务设施的战略规划。我们重点研究中间服务设施，即用户可能需要偏离最短路径，才能在其计划起点与终点之间接受或提供服务。这类问题在新兴交通出行领域有许多应用，包括动态拼车枢纽设计，以及替代燃料汽车加油站的竞争性设施选址与分配问题。本文的主要贡献是建立了一种新的多主体优化框架，考虑设施投资者和用户在交通网络上的分散决策，并对其数学性质进行严格分析，例如系统均衡的唯一性与存在性。此外，我们为原始多主体优化问题构建了精确的凸重构，以克服非凸性带来的计算难题。案例研究的广泛分析表明，所提出的模型能够刻画不确定环境下不同利益相关者之间的复杂互动。此外，我们通过在多主体框架中考察随机指标（包括随机解的价值（VSS）和完全信息期望价值（EVPI）），量化了随机建模与信息可用性的价值。关键词：中间服务设施、竞争性设施选址、多主体优化、凸重构

*（通讯作者）助理教授，土木、环境与建设工程系，弹性、智能与可持续能源系统集群，中佛罗里达大学，佛罗里达州奥兰多，邮编 32816。电话：407-823-6215，电子邮箱：guo@ucf.edu

## 1. 引言

设施选址-分配问题（FLAPs）旨在寻找设施选址和需求分配的最佳策略，广泛应用于交通科学、供应链与物流以及基础设施系统领域（Cornu´ejols 等，1983年；Melo 等，2009a；Hekmatfar，2009年）。本文重点研究中间服务设施，即用户可能需要偏离预先设定的最短路径，才能在其计划起点与终点之间接受或提供服务。我们所建模的利益相关者包括设施投资者和设施用户。设施投资者决定投资容量，并向设施用户提供服务，以实现自身利润最大化。设施用户则决定选择哪些设施以及如何规划路径，以获得服务。这类问题在新兴交通出行领域有许多应用，包括替代燃料汽车加油站的竞争性设施选址问题，以及动态拼车枢纽设计。

尽管针对特定领域应用进行了相应调整，替代燃料车辆和新兴出行方式的设施规划仍有一些共同特征，尚未在统一框架下得到系统研究。首先，服务需求可能出现在出行起点、目的地和／或中间地点。例如，插电式电动汽车（PEV）可以在家中、工作场所或公共充电站充电；拼车／众包司机可能希望接送乘客或货物时，尽量减少偏离预定路径的距离。这些行为要求模型具备额外的建模能力，以便以内生方式灵活捕捉基于节点和／或基于路段的需求，以及需求可能偏离预定义路径的情况。第二个特征是，系统涉及来自供需双方、受自身利益驱动的多个竞争性利益相关者。例如，单个设施提供者会投资建设服务设施，以实现自身利润最大化。使用设施的出行者则旨在优化自身效用，其中可能包括出行时间和／或服务成本／收入。这一特征要求建模框架能够反映不同决策主体的利益，并支持系统层面的分析，因为系统表现是由所有主体共同塑造的。第三个特征涉及复杂的主体—基础设施交互，即用户对设施和出行路线的选择、设施提供者的设施选址决策，以及由此产生的路段行程时间和位置服务价格之间的紧密耦合；这些交互需要在网络结构中进行研究。

本文旨在开发一种通用建模框架和高效计算

算法，用于对竞争性随机市场中的中间服务设施规划（ISFP）进行建模与分析。具体而言，我们在以下三个方面作出了贡献：（1）提出了一个统一的系统建模框架，用于刻画竞争性随机市场供需双方的分散决策，并对其数学性质（包括均衡存在性与唯一性）进行了严格分析；（2）扩展了组合分布与分配（CDA）模型（Evans，1976年），以捕捉拥堵交通网络中路径选择与中间设施选择之间的耦合关系；（3）从计算角度出发，针对所提出的均衡模型设计了一种精确凸重构，在保证全局收敛的同时显著提高了计算效率。

本文其余部分安排如下。第 2 节讨论有关竞争性 ISFP 的文献。第 3 节介绍本文提出的建模框架和数学公式。第 4 节阐述模型的性质和计算策略。第 5 节通过在 Sioux Falls 测试网络上进行数值实验，提供分析和数值方面的见解。第 6 节总结全文，并讨论未来可能的扩展方向。

## 2. 文献综述

鉴于有关设施选址与分配问题的文献不断增长，本文将着重从凸显本研究与以往研究区别的角度讨论相关文献。读者可参阅 (Owen 和 Daskin，1998年；Hale 和 Moberg，2003年；Snyder，2006年；Melo 等，2009b；Daskin，2011年)，以了解关于经典设施选址模型更全面的综述。大多数设施选址与分配模型均从中央规划者的视角构建，假设不同设施的位置选择和规模均可由单一的空间垄断者/规划者控制。覆盖问题 (Farahani 等，2012年)、p-中心问题 (Lin 和 Lin，2018年)、p-中位数 (Hansen 和 Mladenovi´c，1997年) 以及流量捕获问题 (Hodgson，1990年) 都是这一类别中的经典问题。然而，在现实中，基础设施系统往往涉及多个受自身利益驱动的设施开发商 (Plastria，2001年)。

为体现供给侧的竞争性，设施选址文献提出并发展了由 Hotelling（1929年）开创的竞争性设施选址与分配问题（Hakimi，1983年；Eiselt 等人，1993年；Miller 等人，1996年；Aboolian 等人，2007年；Friesz，2007年；Drezner，2009年；Smith 等人，2009年；Kress 和 Pesch，2012年）。竞争性设施选址与分配问题关注如何确定相互竞争的设施（如购物中心、充电站、

网约车枢纽、餐厅等）的位置和/或容量。与经典设施选址问题不同，相互竞争的设施布局由一组旨在优化自身利益的竞争者决定。竞争性设施选址模型可根据竞争方式（如静态/动态）、需求特征（如固定/弹性、离散/连续、确定性/概率性）以及决策空间（如离散/网络/连续）的建模方式进行大致分类。这些研究通常侧重于供给侧的分散决策，同时简化需求侧建模。例如，现有大多数竞争性设施选址与分配问题研究考虑的是节点需求（即出现在离散地点的需求）（Klose 和 Drexl，2005年），或空间连续分布的需求（Li 和 Ouyang，2010年），而未考虑可能受设施选址影响的内生需求。此外，这些研究通常不对设施用户在交通网络上的出行和路径选择行为建模。少数竞争性设施选址与分配问题研究考虑了基于流的需求和用户出行路径（例如，Berman 和 Krass，1998年；Wu 和 Lin，2003年），但采用中央规划者视角，这可能削弱对由多位投资者共同塑造的设施网络进行预测和分析的能力。此外，尽管已有研究（Yang 和 Wong，2000年；Ouyang 等人，2015年）表明，交通拥堵与用户的设施选择密切相关，现有研究通常只考虑设施层面的拥堵（Guo 等人，2016年；Luo 等人，2015年），并假定交通拥堵、出行路线和设施服务价格均为外生给定。

过去十年间，基于流的设施选址问题受到广泛研究，尤其是在电动汽车充电站的研究背景下。基于流量拦截选址模型（FILM）（Hodgson，1990年；Berman 等人，1992年），Shukla 等人（2011年）和 Wen 等人（2014年）开发了数学规划模型，以确定具有成本效益的充电站位置，从而最大化拦截交通流。在这些研究中，未考虑潜在的出行路径偏离。Berman 等人（1995年）提出了若干带绕行的 FILM 版本，包括在最大绕行容许量约束下最大化被拦截的起讫点流，以及在覆盖所有起讫点流的约束下最小化总绕行量。沿着 Berman 等人（1995年）的研究，(Li 和 Huang，2014年；Zockaie 等人，2016年) 考虑了偏离路径。这一类研究可能未明确考虑电动汽车的续航里程。Kuby 和 Lim（2005年）提出了流量加油选址模型（FRLM），以考虑替代燃料车辆的续航里程限制；该模型随后在 (Kuby 等人，2009年；Lim 和 Kuby，2010年；Capar 和 Kuby，2012年；MirHassani 和 Ebrazi，2013年；Kim 和 Kuby，2013年；de Vries 和 Duijzer，2017年；Wang 等，2018年；Guo 等人，2018年；He 等人，2018年；Boujelben 和 Gicquel，2019年) 中得到进一步发展。

中间 FLAP 已应用于电动汽车途中充电场景，以促进

电动汽车普及（Kchaou-Boujelben，2021年）。Wang 等（2019年）针对电动汽车市内出行设计了充电站容量与选址问题；Xu 等（2020年）则开发了电动汽车电池更换设施选址问题，以缓解驾驶员的续航焦虑。这两项研究均着眼于满足驾驶员出行途中的充电需求，未考虑交通网络拥堵，也未对驾驶员的设施选址与路径选择进行建模。Xu和Meng（2020年）在设施选址与分配问题中，将驾驶员的弹性需求及其路径偏离纳入考量。Li等人（2022年）提出了一种基于元网络的方法，用于对途中充电站规划建模，以改进分支定界框架中的基于网络的算法。Tran等人（2021年）提出了一种双层优化方法：上层通过最小化总出行时间和安装成本来确定充电站位置，下层则根据出行者的续航里程捕捉其重新规划路径行为。作者使用迭代算法求解该双层问题，但该算法无法保证找到全局最优点。Schoenberg等人（2022年）开发了一种结合协调充电的充电站选址与定容问题，以支持途中充电和目的地充电；该研究侧重于充电调度，而非交通网络建模。上述研究均从中央规划者的视角出发，由单一决策者部署所有充电设施。

近年来，关于设施选址问题中分散决策者的建模受到了越来越多的关注（Guo 等人，2016；Zhao等人，2020；Bao和Xie，2021；Chen等人，2020）。例如，Zhao等人（2020）研究了如何在现有竞争性充电站中选址新充电站，以使私人投资者的利润最大化。该研究采用概率模型来描述驾驶员的决策过程，但交通网络的拥堵情况并未影响驾驶员的充电站选择。Bao和Xie（2021）针对拥堵网络中的途中充电，构建了一个双层模型，以确定充电站的最优位置。作者假设所有充电站的充电价格相近，且不会影响用户的设施选择。Chen等人（2020）提出了一个类似的双层优化框架：投资者在上层决定设施选址及其容量，在下层则对驾驶员的选择进行建模。两项研究均未考虑路径偏离和途中充电，而这两者在此情境下至关重要。

Guo 等人（2016）提出了一种基于网络的多主体优化建模框架，用于在公共快速充电桩规划背景下，明确刻画多个设施投资者和用户的分散行为。该研究仅在确定性市场条件下，对出行

目的地的服务需求进行建模。此外，该公式在（Guo 等人，2016）中是非凸的。本文从以下三个方面对（Guo 等人，2016）进行推广。首先，我们放宽了出行者仅在行程终点接受设施服务的假设，同时对节点型和流量型设施服务需求进行建模。其次，我们考虑了随机市场，其中起讫点出行需求、路段行程时间和运营成本等参数可能存在不确定性。这些扩展的建模能力提高了所研究问题设定的现实性。第三，当多主体优化问题与高维随机参数相耦合时，组合问题变得过于复杂，无法通过 Guo 等人（2016）提出的基于双变量函数的非对称收敛的求解方法进行求解。为克服这一挑战，我们建立了所提出建模框架的精确凸重构形式，从而显著提高了计算效率。

## 3. 方法论

### *3.1.* 问题描述与建模框架

我们的目标是研究中间服务设施的长期均衡模式，同时考虑来自设施供给侧和需求侧的利益相关者之间的相互作用。在设施供给侧，我们考虑多个投资者，每个投资者都通过设施部署和运营决策来最大化自身利润。我们假设每个设施提供商都没有足够的市场势力，无法通过自身的决策策略性地影响位置服务价格（即，服务提供商处于完全竞争状态）[1]。在需求侧，存在（许多）潜在设施服务用户，他们会分别对设施和出行路线作出选择，以最大化自身效用；这些效用可能取决于设施服务价格、位置偏好以及到达设施所需的出行时间。位置设施服务价格和出行时间通过交通网络上服务供给与需求之间的相互作用内生决定。

我们在带均衡约束的基于网络的多主体优化问题（N-MOPEC）框架下对该问题建模（Guo 等人，2016年）。该框架既体现了各决策实体的“自利”本质，同时也捕捉了所有实体在复杂

[1]我们承认，某些市场可能不属于完全竞争类别，例如美国电力批发市场，其中进入壁垒和容量约束可能导致不完全竞争，尤其是在突发事件期间（Guo and Fan，2017年）。对于涉及显著市场势力的市场，采用寡头竞争模型（如古诺模型、伯特兰模型或霍特林模型）可能更为合适。这些市场设置超出了本文的研究范围，我们将把对替代性市场结构的研究留待未来开展。

网络结构中的相互作用。MOPEC 最初由 Ferris 和 Wets（2013年）提出，涵盖了多种作为特例的变分问题：变分不等式、互补问题、不动点问题等。MOPEC 广泛应用于经济学（Deride 等人，2015年）、交通运输与电力耦合系统（Guo 等人，2021年；Baghali 等人，2022年）以及网约车出行系统（Afifah 和 Guo，2022年）。

考虑一组智能体 $A$，其决策表示为 $\boldsymbol{x}_A = (\boldsymbol{x}_a,\ a \in A)$。一般而言，MOPEC 模型可表示为：

$$\boldsymbol{x}_a \in \operatorname{argmax}_{\boldsymbol{x} \in X_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{x}_{-a}} \subset \boldsymbol{R}^{n_a}} f_a(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_{-a}),\ a \in A, \tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{x}$ 表示投资者 $a$的决策变量向量，$X_{\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{x}_{-a}}$ 是该投资者问题的可行集，它可能取决于系统参数 $\boldsymbol{p}$ 以及其他投资者的决策 $\boldsymbol{x}_{-a}$（$-a$ 表示 $A \setminus a$）。 $\mathbb{R}^{n_a}$ 表示集合的定义域，其中 $n_a$ 为投资者 $a$的决策变量维度。 $f_a$ 是主体 $a$的目标函数，取决于其他主体的决策和系统参数 $(\boldsymbol{p})$，这些参数可能由系统内生决定，例如价格。多主体优化问题产生的参数 $\boldsymbol{p}$ 和决策 $\boldsymbol{x}_A$ 通常需要满足全局均衡约束，该约束可表示为函数变分不等式 (2)：

$$D(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}_A) \in \partial g(\boldsymbol{p}), \tag{2}$$

其中，$g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 是一个适当的、下半连续且凸的函数，而 $D$ 是从 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{\sum_{a \in A} n_a}$ 到 $\mathbb{R}^d$ 的集值映射。

图 1 展示了竞争性 ISFP 背景下提出的 N-MOPEC 建模框架。我们考虑两类利益相关者：（1）个人投资者 $i$（$\in \mathcal{I}$）决定设施选址、设施服务能力和供应量，以实现自身利润最大化；（2）个人服务用户 $j$（$\in \mathcal{J}$）在特定起点和终点之间出行。用户 $j$选择设施服务地点和出行路线，以实现自身效用最大化。尽管这些智能体各自独立作出决策，但由于共享市场、基础设施和资源，这些决策彼此相互依存。为确保达到均衡状态，还需要施加市场出清条件，即每个设施位置的供给等于需求。

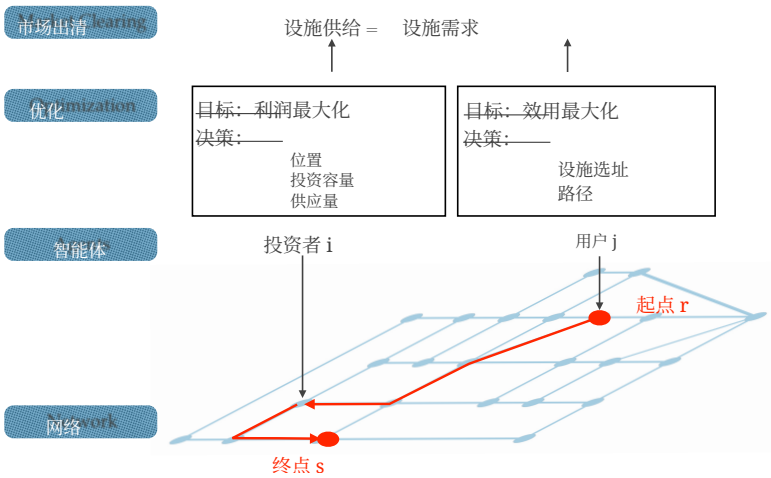



图 1：基于网络的 MOPEC 示意图

### *3.2.* 各主体的详细建模

#### *3.2.1.* 设施投资者决策建模

尽管本文从投资者的角度关注长期设施布局，但若不考虑运营阶段的表现，就无法恰当地评估规划决策的有效性。因此，我们采用两阶段随机规划框架，以区分设施投资者需要作出的两类决策：（1）在规划阶段，每位投资者在面临需求、通行时间和边际运营成本等未来不确定性时，决定设施的投资容量；（2）在运营阶段，不确定参数揭示后，每位投资者根据市场节点价格和运营成本选择供应量。由于假设市场为完全竞争市场，在不失一般性的前提下，我们可以将所有投资者的决策汇总为一个代表性投资者的决策，并使用总投资与运营成本函数来刻画其集体决策。代表性投资者的详细模型表述见模型（3）。

$$\underset{c^k, g^k_{\boldsymbol{\xi}} \in \mathbf{R}_+, k \in K, \boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{\Xi}}{\text{最大化}} \quad \mathbb{E}_{\boldsymbol{\xi}} \sum_{k \in K} \left[ \rho^k_{\boldsymbol{\xi}} g^k_{\boldsymbol{\xi}} - \phi_g(g^k_{\boldsymbol{\xi}}) \right] - \sum_{k \in K} \phi_c(c^k) \tag{3a}$$

$$\text{满足以下约束条件} \quad g^k_{\boldsymbol{\xi}} - c^k \leq 0, \forall k \in K, \boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{\Xi} \tag{3b}$$

其中：

$K$ 候选投资地点集合，索引为 $k$；$\Xi$ 不确定参数向量集合，索引为 $\boldsymbol{\xi}$；$c^k$ 分配至位置 $k$ 的投资容量；$g^k_{\boldsymbol{\xi}}$ 情景 $\boldsymbol{\xi}$ 下位置 $k$ 的总供应量；$\rho^k_{\boldsymbol{\xi}}$ 情景 $\boldsymbol{\xi}$ 下位置 $k$ 的单位服务价格，由市场内生决定；$\mathbb{E}_{\boldsymbol{\xi}}$ 关于不确定参数 $\boldsymbol{\xi}$的期望；$\phi_c(\cdot)$关于设施容量的总资本成本函数；$\phi_g(\cdot)$关于供应量的总运营成本函数。

目标函数 (3a) 最大化预期净利润，即总收入 $\sum_{k\in K}\rho^k_{\boldsymbol{\xi}}g^k_{\boldsymbol{\xi}}$ 减去运营成本 $\sum_{k\in K}\phi_g(g^k_{\boldsymbol{\xi}})$ 后的期望值，再减去规划阶段 $\sum_{k\in K}\phi_c(c^k)$ 的总投资成本。总投资成本可能包括土地购置、建设和设备采购相关的成本。约束 (3b) 是容量约束，确保各位置 $k$ 和情景 $\xi$ 下的供应量不超过其总容量。其余约束均为非负约束。请注意，本文始终使用小写粗体表示向量。

不确定性 $\boldsymbol{\xi}$ 有两种含义。首先，由于总需求（例如电动汽车普及）、市场竞争、出行/充电时间与成本等因素存在不确定性，投资者无法预测未来的服务需求。在这种情况下，$\boldsymbol{\xi}$ 的概率表示不确定参数发生的概率。其次，系统状态（例如设施服务需求）可能随时间变化，这些状态可归纳为同质时间段（例如高峰和非高峰时段）。在这种情况下，$\boldsymbol{\xi}$ 的概率衡量特定同质时间段在研究时域内所占的时长比例。换言之，$\boldsymbol{\xi}$ 可以表示不确定参数的一种实现，和/或一个特定的同质时间段。

请注意，$\phi_c(\cdot)$ 和 $\phi_g(\cdot)$ 分别表示各位置的总资本成本函数和运营成本函数。本文假设 $\phi^k_c(\cdot)$ 和 $\phi^k_g(\cdot)$ 为凸函数，例如线性函数，或首项系数为正的二次型。除数学上的便利性外，凸生产成本函数还意味着两个理想特性：（1）随着某一位置的服务需求增加，上游供应链可能出现拥堵，从而导致边际成本上升；（2）随着需求增加，由于低成本资源的容量限制，可能开始使用成本较高的生产资源。例如，由于空间限制，早期投资可以选在租金和／或建设成本较低的位置；但后续投资可能不得不建在成本更高的位置。边际成本递增的容量成本函数常用于对充电站成本建模（Ghamami 等人，2020年、2016年；Guo 等人，2018年）。就运营成本而言，当设施需求

某些资源才能运行，且资源供给有限时，边际生产成本通常会随产量单调递增。例如，对于充电设施，随着需求量增加，能源价格会上涨，因为较便宜的能源资源会优先调度。对于共享出行，为了吸引更多驾驶员，交通网络公司通常需要支付更高的价格。

*3.2.2.* 拥堵交通网络中设施用户决策的建模

设施用户的行为（设施选择和路径选择）不仅受设施特征影响，也受交通网络影响。组合分布与分配（CDA）模型（例如，参见（Sheffi，1985年；Lam 和 Huang，1992年））已被证明能够有效地将离散选择（如出行方式选择和目的地选择）与充电基础设施规划中的交通分配相结合（He 等人，2013年；Guo 等人，2016年）。本研究不再将服务位置限制在出行目的地，而是提出一种广义组合分布与分配（GCDA）模型，其中设施位置可以设在起点、终点或两者之间的任意位置。由于需求侧的所有决策都是运营决策，且取决于具体情景，因此为简洁起见，本小节中省略符号 $\boldsymbol{\xi}$ 。

采用多项Logit模型来描述从起点 $r$ 到终点 $s$选择不同设施选址 $k$ 的情况，其效用函数定义见式 (4)。

$$U^{rsk} = \beta_0^k - \beta_1 t^{rsk} - \beta_2 \rho^k e^{rs} + \epsilon^{rsk} \tag{4}$$

其中：

$U^{rsk}$ ： 用户从 $r$ 前往 $s$ 并在 $k$接受服务的效用度量；$\beta$ ： 效用函数参数（模型输入）；$t^{rsk}$ ： 从 $r$ 到 $s$并绕行至服务位置 $k$的均衡旅行时间；$e^{rs}$ ： 从 $r$ 到 $s$ 的平均服务需求（模型输入）；$\epsilon^{rsk}$ ： 从 $r$ 到 $s$并绕行至服务位置 $k$的效用误差项。 $\epsilon^{rsk}$ 服从极值分布。

假设从起点节点 $r$ 前往终点节点 $s$ 并选择设施$k$ 的旅行者，其效用函数由四部分构成：位置特定吸引力因子（$\beta_0$）、出行时间（$\beta_1$）、服务成本（$\beta_2$）和误差项（$\epsilon^{rsk}$）。效用函数（4）中的 $\beta_2 \rho^k e^{rs}$ 是货币服务成本。 $\rho^k e^{rs}$ 表示驾驶员为在设施 $k$接受服务所支付的价格。该价格按站点 $k$ 的单位服务成本（即 $\rho^k$）乘以平均

充电量（$e^{rs}$）计算。 $\beta_2$ 是一个效用系数，表示每花费一个单位货币所产生的负效用。这里，我们假设来自每个起讫点对的车辆具有相似的设施需求 $e^{rs}$ 。不过，这一假设可以通过根据各起点节点驾驶员不同的设施需求水平对其进行分类而轻松放宽。例如，对于电动汽车，可以将 $e^{rs}$ 划分为不同的同质群体，以模拟具有不同充电需求水平的电动汽车。可以在效用函数中纳入不同的外生效用因素，而不影响本研究提出的关键建模和计算策略。此外，尽管效用函数（4）未显式建模服务时间，在我们的模型中，可以考虑添加一条虚拟链路，将距离设施最近的交通节点与该设施连接起来。该虚拟链路的出行时间表示根据设施服务能力确定的、在该设施接受服务所需的时间。

将交通网络表示为有向图 $\mathcal{G}=(\mathcal{N},\ \mathcal{A})$，其中 $\mathcal{N}$是节点集合（由 $n$索引）， $\mathcal{A}$ 是链路集合（由 $a$索引）。节点可以表示交通分析区（汇总出行需求的起点/终点）、交通枢纽或交叉口。链路可以表示连接两个节点的路径或道路实体路段。情景 $\xi(\in \Xi)$ 的 GCDA模型表示为式（5）。

$$\text{最小化}_{\boldsymbol{x}\geq \mathbf{0}} \quad \sum_{a\in\mathcal{A}}\int_0^{v_a} t_a(u)\mathrm{d}u + \frac{1}{\beta_1}\sum_{r\in R}\sum_{s\in S}\sum_{k\in K^{rs}} q^{rsk}\left(\ln q^{rsk} - 1 + \beta_2\rho^k e^{rs} - \beta_0^k\right) \tag{5a}$$

$$\text{满足约束条件} \quad v_a = \sum_{r\in R}\sum_{s\in S}\sum_{k\in K^{rs}} (\hat{x}_a^{rsk} + \check{x}_a^{rsk}), \forall a\in\mathcal{A} \tag{5b}$$

$$(\boldsymbol{\gamma}) \qquad \hat{\boldsymbol{x}}^{rsk} + \check{\boldsymbol{x}}^{rsk} = \sum_{p\in P^{rsk}} (B_{\hat{p}} + B_{\check{p}}) x_p,\ \forall r\in R, s\in S, k\in K^{rs} \tag{5c}$$

$$(\hat{\boldsymbol{\lambda}}) \qquad A\hat{\boldsymbol{x}}^{rsk} = q^{rsk}E^{rk},\ \forall r\in R, s\in S, k\in K^{rs} \tag{5d}$$

$$(\check{\boldsymbol{\lambda}}) \qquad A\check{\boldsymbol{x}}^{rsk} = q^{rsk}E^{ks},\ \forall r\in R, s\in S, k\in K^{rs} \tag{5e}$$

$$(\mu^{rs}) \qquad \sum_{k\in K^{rs}} q^{rsk} = d^{rs}, \forall r\in R, s\in S \tag{5f}$$

其中:

$v_a$ ： 链路 $a$上的交通流；$t_a(\cdot)$：链路 $a$的出行时间函数，例如美国公共道路局（BPR）函数；$d^{rs}$ ： 从 $r$ 到 $s$ 的出行需求（模型输入）；

$q^{rsk}$：从 $r$ 到 $s$ 并在 $k$处接受服务的交通流；$x_p$：路径 $p$上的交通流；$\hat{x}_a^{rsk}$：属于与起点-服务点-终点三元组 $rks$关联的从 $r$ 到 $k$ 出行的链路 $a$ 上的交通流。$\hat{\boldsymbol{x}}^{rsk}$ 表示所有链路上的$\hat{x}_a^{rsk}$的向量形式；$\check{x}_a^{rsk}$：属于与起点-服务点-终点三元组 $rks$关联的从 $k$ 到 $s$ 出行的链路 $a$ 上的交通流。$\check{\boldsymbol{x}}^{rsk}$ 表示所有链路上的$\hat{x}_a^{rsk}$的向量形式；$A$：网络的节点-链路关联矩阵，起始节点处为1，终止节点处为 $-1$；$\hat{p}$：路径 $p \in P^{rsk}$ 中连接 $r$ 和 $k$的子路径；$\check{p}$：路径 $p \in P^{rsk}$ 中连接 $k$ 和 $s$的子路径；$B_p$：链路-路径 $p$ 关联向量；若路径 $p$ 包含链路 $i$，则第 $i$行为1，否则为0；$E^{ij}$：起讫点对 $ij$ 的起讫点关联向量，起点 $i$处为1，终点 $j$处为 $-1$；$\check{}\hat{}\gamma, \lambda, \lambda, \mu$：相应约束的对偶变量。

约束 (5b) 根据与 $rsk$ 相关的路段流量 $v_a$：$\hat{x}_a^{rsk}$ 和 $\check{x}_a^{rsk}$，计算总链路流量；约束 (5c) 保证始终存在一个可行的路径流量解 $x_p(p \in P)$，能够产生给定的路段流量模式；约束 (5d, 5e) 确保每个节点（包括起点、中间停靠点和终点节点）的流量守恒；约束 (5f) 保证流向所有设施的流量之和等于每个起讫点对之间的总出行需求。请注意，在模型 (5) 中，无需使用设施服务的 OD 需求可视为背景交通流。此外，总需求 $d^{rs}$ 可能具有弹性；我们的建模框架可自然扩展，以考虑取决于出行距离、时间、服务拥堵和成本的弹性出行需求。对弹性需求感兴趣的读者可参阅 (Berman and Kaplan, 1987; Aboolian et al., 2012; Berman and Drezner, 2006)。其余约束对路径/路段流量和出行分布施加非负约束。

在目标函数 (5a) 中，第一项对应于传统静态交通均衡模型所描述的总用户成本；包含 $q \ln q$ 的第二项对应于出行分布的熵，其余各项对应于出行者的效用度量 (4)。该目标函数没有物理含义，但能够保证满足第一 Wardrop 原理（Wardrop, 1952）以及多项Logit设施选择假设，正如**引理1**中所正式陈述的那样。

**引理1**。（广义组合分布与分配）问题（*5*）的最优解$(\hat{\boldsymbol{x}}^*, \check{\boldsymbol{x}}^*, \boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{q}^*)$ 是具有 *Logit* 设施需求函数和 *Wardrop* 用户均衡的服务地点选择问题的均衡解。

**证明**。 见附录A。 □

本文提出的 GCDA 模型包含三种特殊情形，分别称为中途设施服务 、起点/目的地设施服务和往返设施服务，参见图2。中途设施服务情形指设施用户在前往目的地途中使用设施服务，例如加油、银行服务和便利店服务。在目的地设施服务 情形下，驾驶员选择目的地，并同时在目的地接受服务。例如，电动汽车驾驶员可能会选择一家餐厅，同时为车辆充电。这种情形正是传统的 CDA 模型（Sheffi，1985）。在往返设施服务 情形下，从起点出发的用户会专程前往某个设施位置接受服务，并在服务结束后返回同一起点。例如，员工午餐后需要返回工作场所。若要将模型简化为目的地设施服务 情形，可以指定 $s = k$；而往返设施服务 则可通过指定 $r = s$ 纳入模型。

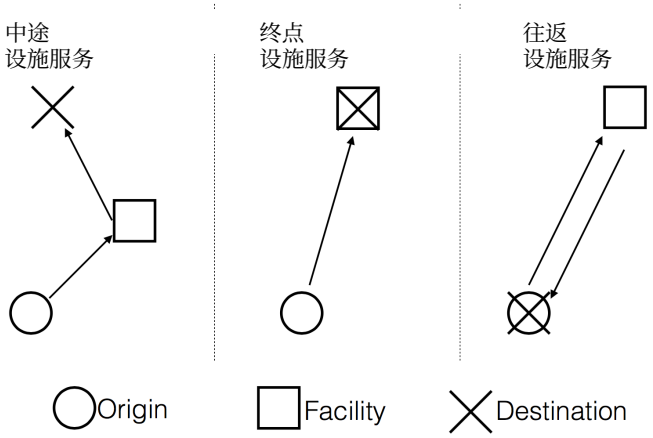



图2：GCDA模型的特殊情况

请注意，按照 Daganzo 和 Sheffi（1977年）的定义，该框架并非随机用户均衡（SUE），而且我们无需预先生成一组路径。本文所说的“随机性”是指设施投资者在做出长期规划决策时面临的不确定性。模型（5）取决于情景，我们旨在对每种特定情景实现下的均衡交通模式进行建模。换言之，出行者并不

会在做出设施选择和路径选择时面临不确定性。模型（5）是在标准 Beckmann 公式的 Wardrop 用户均衡（Wardrop, 1952）基础上扩展而来，纳入了使用 Logit 模型进行的中间设施选址选择。与之密切相关的一类模型称为组合分布与分配（CDA）模型（Sheffi，1985；Lam 和 Huang，1992），在该模型中，出行者选择的是目的地，而非中间设施地点。

### *3.2.3.* 市场出清条件

最后，为确保市场稳定，我们制定了市场出清条件，要求在每种情景下，每个设施位置的总需求（$\sum_{r\in R}\sum_{s\in S} e^{rs} q_{\boldsymbol{\xi}}^{rsk}$）等于总供应量（$g_{\boldsymbol{\xi}}^{k}$），如式（6）所示。请回忆，$\boldsymbol{q}^{rsk}$ 表示在位置 $k$接受服务的 $rs$ 的出行需求。 $\boldsymbol{e}^{rs}$ 表示来自 $rs$的每位用户的平均服务需求量。因此，总服务需求计算为 $\sum_{r\in R}\sum_{s\in S} e^{rs} q_{\boldsymbol{\xi}}^{rsk}$。

位置服务价格 $\rho_{\boldsymbol{\xi}}^{k}$ 可解释为式（6）的对偶变量。位置服务价格 $\rho_{\boldsymbol{\xi}}^{k}$ 会影响供需双方（即问题（3）和（5））的决策，使其优化各自的目标。另一方面，供需失衡也会影响位置服务价格。我们重点估算能够在均衡状态下实现市场出清的位置服务价格。请注意，由于网络拥堵和可达性成本，即使每个位置提供的服务相同，价格也可能因位置而异。

$$(\rho_{\boldsymbol{\xi}}^{k}) \quad g_{\boldsymbol{\xi}}^{k} - \sum_{r\in R}\sum_{s\in S} e^{rs} q_{\boldsymbol{\xi}}^{rsk} = 0,\ \forall k \in K, \boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{\Xi}. \tag{6}$$

### *3.2.4.* 系统均衡

该系统中所有参与者的决策相互依存，应将其作为一个整体系统同时建模并求解。根据纳什均衡的概念，在系统均衡下，给定市场出清价格$\rho$ 和其他主体的决策，任何一个主体的单边决策变更都会降低其收益。我们在定义1中对系统均衡作出更正式的表述。

**定义1.**（系统均衡）。系统的均衡状态是指：在给定市场出清价格 $\boldsymbol{\rho}$ 以及所有其他主体的决策后，所有设施提供者均实现自身最优（即问题（3））， 且设施用户均实现自身最优（即问题（5））。此外，每个位置的市场均满足条件（6）而出清。因此，系统均衡由投资者策略 ($\boldsymbol{c}^{*}$, $\boldsymbol{g}^{*}$)、*GCDA* 交通流模式 ($\hat{\boldsymbol{x}}^{*}$, $\check{\boldsymbol{x}}^{*}$, $\boldsymbol{x}^{*}$, $\boldsymbol{q}^{*}$)以及一个向量定义，内容为

价格 $\boldsymbol{\rho}^*$，使得

（$\boldsymbol{c}^*, \boldsymbol{g}^*$）在价格 $\boldsymbol{\rho}^*$ 下满足式（3）中的投资者问题；（$\hat{}\boldsymbol{x}^*_{\boldsymbol{\xi}}$，$\check{}\boldsymbol{x}^*_{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{x}^*_{\boldsymbol{\xi}}$，$\boldsymbol{q}^*_{\boldsymbol{\xi}}$）在价格 $\boldsymbol{\rho}^*_{\boldsymbol{\xi}}$ 下分别满足式（5）中的*GCDA*问题； $\forall \boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{\Xi}$且（$\boldsymbol{g}^*, \boldsymbol{q}^*$）满足式（6）中的市场出清条件。 (7) (8) (9)

## 4. 求解方法

第3节提出的建模框架由于互补条件而成为一个高度非凸问题，尤其是在情景数量较多时，求解起来颇具挑战。本节针对原始 N-MOPEC问题提出一种精确凸重构，可进一步进行情景分解以提升可扩展性。此外，借助凸重构，我们证明了原始 N-MOPEC问题的均衡解存在且唯一。

### *4.1.* 精确凸重构

由于模型公式具有互补性，按照定义1求解系统均衡状态并非易事。我们提出了一种精确凸重构方法来求解系统均衡，如模型(10)所示。类似的方法见（Dvorkin，2020），并已用于将耦合交通与电力系统中的多主体系统均衡问题（Guo 等人，2021；Baghali 等人，2022）以及网约车系统中的问题（Afifah 和 Guo，2022）凸化。在所提出的精确凸重构（即模型(10)）中，目标函数是最小化社会非交易成本总和，即投资者成本与归一化[2] CDA目标函数的线性组合，且不考虑与价格向量 $\boldsymbol{\rho}$相关的项。模型(10)的约束包括

[2]CDA目标函数除以 $\beta_1/\beta_3$后进行了归一化。此步骤的直观目的是将CDA目标函数的单位转换为美元。关于为何采用这种形式的更严谨证明，见引理3。

投资者的约束 (3b)、GCDA 的约束 (5b)-(5f)，以及市场出清条件 (6)。

$$\underset{(\boldsymbol{c},\boldsymbol{g},\hat{\boldsymbol{x}},\check{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x},\boldsymbol{q})}{\text{minimize}} \quad \sum_{k\in K}\phi_c(c^k)+\mathbb{E}_{\boldsymbol{\xi}}\sum_{k\in K}\left[\phi_g(g^k_{\boldsymbol{\xi}})\right] + \mathbb{E}_{\boldsymbol{\xi}}\left\{\frac{\beta_1}{\beta_3}\sum_{a\in\mathcal{A}}\int_0^{v_{a,\boldsymbol{\xi}}} t_a(u)\mathrm{d}u+\frac{1}{\beta_3}\sum_{r\in R}\sum_{s\in S}\sum_{k\in K^{rs}} q^{rsk}_{\boldsymbol{\xi}}\left(\ln q^{rsk}_{\boldsymbol{\xi}}-1-\beta^k_0\right)\right\} \tag{10a}$$

满足以下条件:

$$(\lambda^k_{\boldsymbol{\xi}})\ \ g^k_{\boldsymbol{\xi}}-\sum_{r\in R}\sum_{s\in S}e^{rs}q^{rsk}_{\boldsymbol{\xi}}=0,\ \forall k\in K,\boldsymbol{\xi}\in\boldsymbol{\Xi}. \tag{10b}$$

$$(\boldsymbol{c},\boldsymbol{g})\,\text{satisfies constraint (3b)} \tag{10c}$$

$$(\hat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{\xi}},\check{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{\xi}},\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\xi}},\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{\xi}})\,\text{satisfies constraints (5b)-(5f)}_{\boldsymbol{\xi}},\ \forall\boldsymbol{\xi}\in\boldsymbol{\Xi} \tag{10d}$$

为考察系统均衡的存在性与唯一性及其与模型(10)解之间的关系，我们首先证明，在温和条件下，模型(10)是一个严格凸优化问题（见引理 2）。随后我们证明，任何模型(10)的解也都满足系统均衡定义1（见引理3）。

**引理 2.** *(*模型(10) 的凸性与解的唯一性*)* 若 $\phi_c(\cdot)$ 和$\phi_g(\cdot)$ 为凸函数，且 $t_a(\cdot)$ 单调递增，则模型 (10) 为凸模型。此外，若 $\phi_c(\cdot)$ 和 $\phi_g(\cdot)$ 为严格凸函数，且 $t_a(\cdot)$ 严格单调递增，则模型(10) 为严格凸模型，并具有唯一解。

**证明**。 见附录A。

引理*3.*（模型 *(10)* 的解及其与系统均衡的关系）假设 $\phi_c$*(·)* 和 $\phi_g$*(·)* 为凸函数，且 $t_a$*(·)* 单调递增。当且仅当 $(\boldsymbol{c}^*,\boldsymbol{g}^*,\hat{\boldsymbol{x}}^*,\check{\boldsymbol{x}}^*,\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{q}^*)$ 是一个系统均衡（定义*1*），且均衡价格向量为 $\rho^k_{\boldsymbol{\xi}}=\frac{\lambda^k_{\boldsymbol{\xi}}}{\pi_{\boldsymbol{\xi}}}$ 时，$(\boldsymbol{c}^*,\boldsymbol{g}^*,\hat{\boldsymbol{x}}^*,\check{\boldsymbol{x}}^*,\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{q}^*;\boldsymbol{\lambda})$ 才是模型 *(10)* 的一个原始-对偶解；上述结论对每个 $\boldsymbol{\xi}$ 和 $k$ 均成立，其中 $\{\pi_{\boldsymbol{\xi}}:\boldsymbol{\xi}\in\boldsymbol{\Xi}\}$ 是 $\boldsymbol{\xi}$ 的概率分布。 —

**证明**。见附录A。

引理3确立了我们的凸重构与均衡模型（即模型（3）、（5）和（6））之间的等价性。此外，基于引理 2，我们可以进一步讨论精确重构在严格凸性条件下系统均衡的唯一性，如定理1所示。

**定理1**。（系统均衡的存在性与唯一性）如果 $\phi_c(\cdot)$ 和 $\phi_g(\cdot)$ 是严格凸函数，且 $t_a(\cdot)$ 是严格单调递增的，则该系统存在唯一的均衡（$\boldsymbol{c}^*, \boldsymbol{g}^*$、$\hat{\boldsymbol{x}}^*$、$\check{\boldsymbol{x}}^*, \boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{q}^*, \rho^*$），满足定义*1*，其中（$\boldsymbol{c}^*, \boldsymbol{g}^*$、$\hat{\boldsymbol{x}}^*$、$\check{\boldsymbol{x}}^*, \boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{q}^*$）是模型（10）的解，并且对于每个 $\boldsymbol{\xi}$ 和 $k$，$\rho_{\boldsymbol{\xi}}^k = \frac{\lambda_{\boldsymbol{\xi}}^k}{\pi_{\boldsymbol{\xi}}}$。

—

**证明**。见附录A。

凸重构（10）可直接通过商业非线性求解器（例如 IPOPT）求解，从而有效地找到定义1中所述的系统均衡。随着不确定性的维度增加，问题可能会变得更难求解。但由于模型（10）是凸的，因此可以通过经典的情景分解方法求解，例如渐进式对冲（PH）算法。

## 5. 数值示例

我们采用图3所示的苏福尔斯网络这一广泛使用的基准网络，测试求解方法的数值表现，并总结实际启示。该网络包含24个节点和76条有向链路。图3中每个节点/链路旁的数字表示其索引。

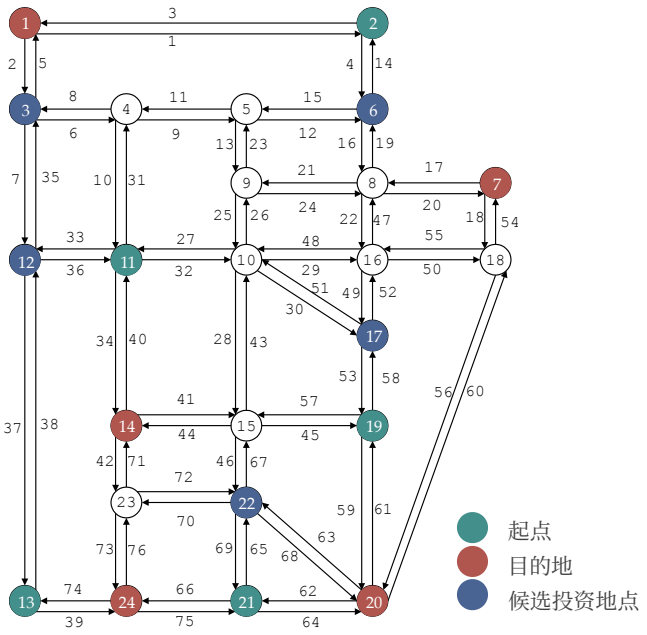



图3：基准案例Sioux Falls测试网络

在图3中，绿色、红色和蓝色节点（每种颜色各5个）分别表示起点集合、目的地集合和候选设施选址。我们考虑25个起讫点对，每个起讫点对的出行需求均为100单位。对于链路出行成本函数，$t_a(v_a)$，我们采用 $4^{th}$阶美国公共道路局（BPR）函数：$t_a = t_a^0[1 + 0.15 * (v_a/c_a)^4]$, 其中，$t_a^0$ 为自由流行驶时间（FFT），$c_a$ 为路段容量参数[3]。$t_a^0$ 和 $c_a$ 的取值见附录B中的表B.1。为便于说明，假设出行者效用函数中的参数为 $\beta_0 = 0$、$\beta_1 = 1$、$\beta_2 = 0.06$、$e = 1$。这些效用参数设定表示这样一种情形：用户在选择设施和路径时会考虑出行时间和服务价格，没有特定的位置偏好，且所有用户的服务需求和时间价值均相同。对于设施提供者，我们采用二次型投资与运营成本函数：$\phi_c(c) = 0.1c^2 + 170c$ 和 $\phi_g(g) = 0.1g^2 + 130g$。我们将上述设定称为基准情形，并将在此基础上进一步开展敏感性分析。请注意，这些参数的大小是任意设定的，仅用于说明。本节所有数值实验均在 Mac OS X 操作系统下，使用配备 8 GB 内存的 3.5 GHz Intel Core i5 处理器运行。

### *5.1.* 确定性情形

首先，我们研究确定性情形，即投资者基于未来电动汽车出行需求的基准水平做出投资决策。道路拥堵是交通系统中的一个重要因素，它会影响投资者的决策，因为它会影响出行者的设施选择和路径选择（Duranton 和 Turner，2011年）。然而，现有的大多数研究在规划中间服务设施时并未考虑交通拥堵（例如，Wang 等，2019年；Xu 等，2020年）。为定量展示因未考虑拥堵而导致的投资偏差，我们比较了考虑和不考虑拥堵两种情形下的数值结果。图4展示了考虑网络拥堵对模型结果的影响，包括均衡容量、价格以及交通网络的交通流分布。图4a对应投资者决策中未考虑交通网络拥堵的情形（将路段容量设为无穷大），而图4c对应明确建模网络拥堵的基准情形。请注意，为确保公平比较，两幅图中用于报告流量与容量比的路段容量均设为该路段的实际容量（即基准情形中的路段容量）。图4a中的路段流量是假设在

[3]请注意，$c_a$ 是 BPR 中使用的“容量”参数，而非实际的路段容量

中间设施选址问题中未对拥堵进行建模时的流量。我们发现，图4c中的链路拥堵没有图4a中那么严重，因为在模型考虑拥堵后，用户会调整设施位置和路径选择以避开拥堵。此外，在设施选址选择中考虑拥堵成本会导致设施需求分布发生变化，进而造成图4所示的均衡服务价格差异。

假设一种情景：如果投资者在规划基础设施时不考虑交通网络拥堵（即采用图4a所示的设施容量结果），那么当用户遭遇严重拥堵时，他们实际的位置和路径选择会随之调整，这意味着计算得出的均衡容量和服务价格将不再是个人投资者的最优选择。因此，投资者会有相应调整的动机。如果让该系统持续演化，最终系统将收敛至与基准情形结果相同的均衡状态，如图4b所示。该实验说明，要找到稳定的系统均衡状态，准确反映真实的用户与基础设施交互（例如用户选择和交通拥堵）十分重要。

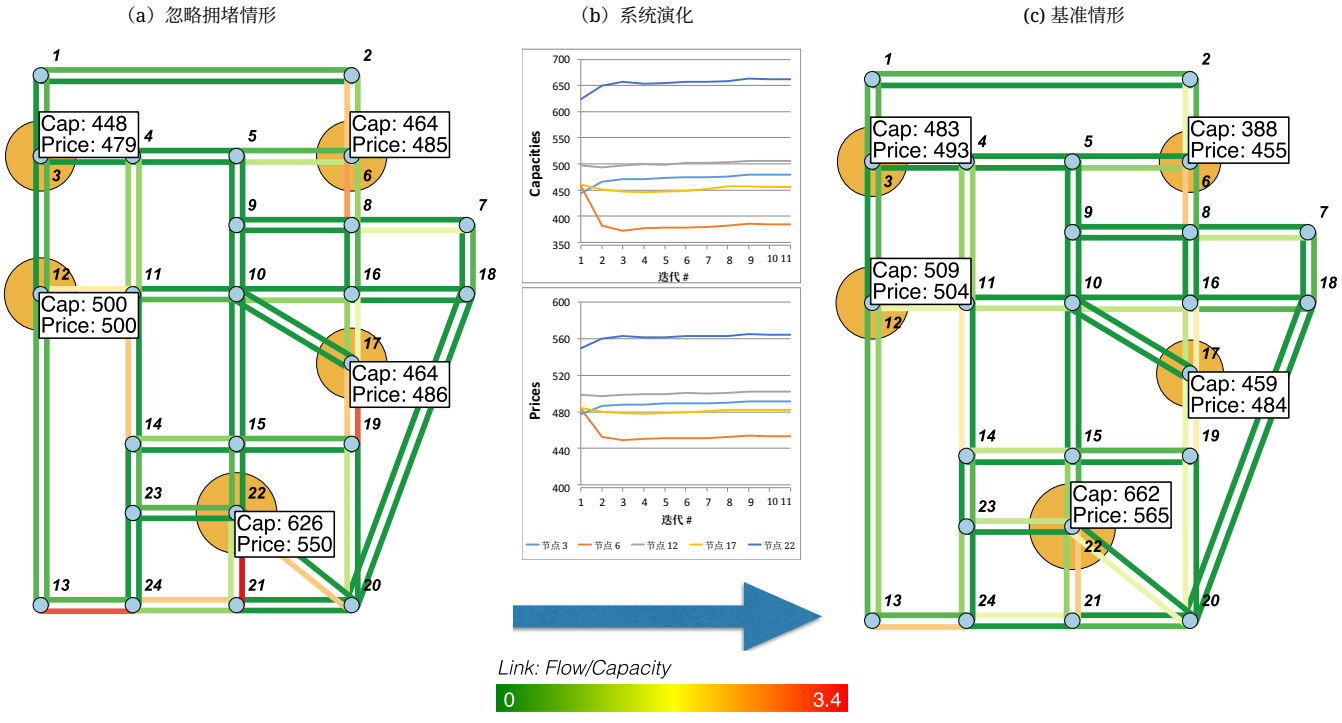



图4：网络拥堵建模的影响

接下来，我们研究不同的价格敏感度如何影响均衡投资布局

和出行时间，方法是比较 $\beta_2$ 取值分别为 0、0.06 和 0.6 的情形。图5展示了针对 $\beta_2$ 的敏感性分析，所选的具体数值仅用于说明不同时间价值对均衡结果的影响。更具体地说， $\beta_1$和 $\beta_2$ 分别表示单位时间和单位成本对应的负效用。因此， $\beta_1/\beta_2$ 表示时间价值，即单位时间的货币成本。由于 $\beta_1 = 1$， $\beta_2 = 0$ 表示时间价值趋于无穷大的情形，这意味着用户会选择绕行最少的设施，而不在意服务价格。这种情形可代表在紧急情况下提供生命攸关服务的设施。 $\beta_2$ 越大，用户在选择设施时，除了出行时间外，也越看重服务成本。这种情形可代表日常设施服务，例如电动汽车充电设施。随着价格敏感度提高，系统均衡下的总出行时间也会增加。原因在于，出行者对价格越敏感，就越愿意选择价格较低、但距离更远或更拥挤的服务设施。就均衡投资而言，价格敏感度越高，投资模式的分布就越均匀，因为出行者对低价地点的偏好会自然拉近不同地点的均衡价格，使各地点对投资者具有相近的吸引力。

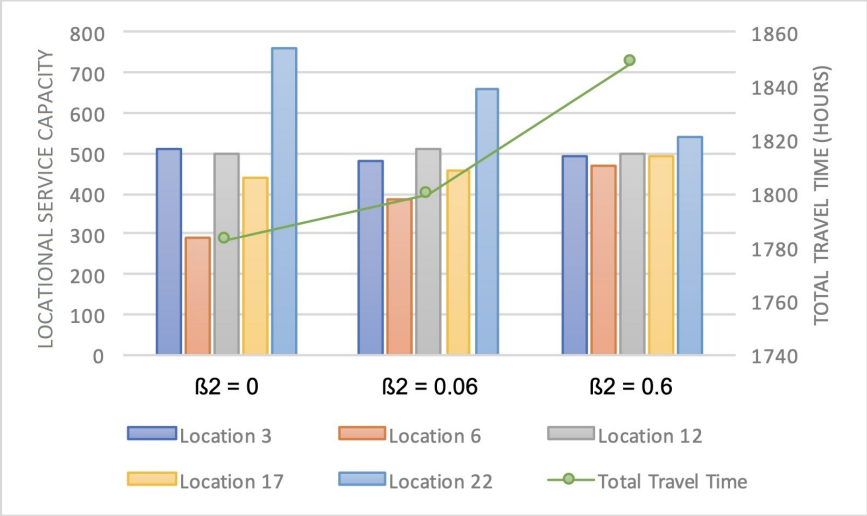



图5：用户偏好对投资的影响

### *5.2.* 随机情形

不同来源的不确定性会影响设施提供者和用户的选择。在多智能体框架中，不确定性的影响会更加显著，因为

每个主体对不确定性的响应也会影响其他主体的决策。本节将重点讨论每个 OD 对的总出行需求的不确定性 $d_{rs}$。其他不确定性来源也可以采用类似的方法进行研究。

服务需求建模时，将每个情景的随机系数 $\theta_\xi \in [\theta_{\min}, \theta_{\max}]\ \xi$ 乘以基准服务需求。在 Sioux Falls 测试网络中，我们将$\theta_{\min}$ 和 $\theta_{\max}$ 分别设为 1 和 1.2，并从均匀分布中生成了 20 个服务需求情景。我们比较了以下三种情形：

- 情形 1：确定性问题，仅考虑期望弹性需求。
- 情形 2：随机问题，对可能的需求情景及其对应概率进行建模。
- 情形 3：等待观望问题，所有利益相关者在做出投资决策时都能完美预测不确定性参数（即将容量变量放宽为依赖于情景，且不设置非预见性约束）。

这三种情形使我们能够研究利益相关者在不同信息可用性情景下的决策（第 5.2.1 节），并量化每位利益相关者的随机规划指标（例如随机解的价值（VSS）和完全信息的期望价值（EVPI）（Birge 和 Louveaux，2011年））（第 5.2.2 节）。

三个案例的仿真时间分别为 0.153、7.938 和 3.019 分钟。与案例 1 相比，案例 2 和 3 的仿真时间有所增加，这表明随机建模带来了额外的计算负担。此外，案例 3 的计算时间短于案例 2，因为案例 3 实际上是针对多个情景（此处为 20 个情景）反复运行确定性问题（案例 1）。

### *5.2.1.* 利益相关者决策结果

图6展示了三种情形下各设施选址的服务供应量、服务价格和总容量。从图6a可以看出，情形1与情形3中的平均值（即“平均需求下的供给与各需求情景下供给的平均值相近”）相比，各设施选址的服务供给量都相近。不过，情形2和情形3中的服务供给范围在不同地点各不相同。主要原因是，在情形3中，主体能够针对每种情景做出不同的投资决策，因此在优化供应量时拥有更大的灵活性。例如，所提供的服务

在地点6的平均供给量在情形3中高于情形2，这意味着关于OD需求的完全信息可以促进在地点6配置设施。就服务供给方差而言，完全信息（情形3）对不同地点的影响并不一致。例如，与情形2相比，情形3在地点6的服务供给方差较低，而在地点22则较高。方差较小表明服务供给对不确定参数的敏感度较低。

与所提供的服务类似，情形1中的位置容量接近情形3随机问题的平均容量（见图6b）。这符合预期，因为在情形1和情形3中，投资者都会针对每种情景投资与供应量相同的容量，且不存在闲置容量。在情形2中实施非预见性约束，会导致所有情景下的位置容量保持不变（见图6a）。总体而言，情形2中每个地点的容量高于情形3中的容量投资平均值，这是因为情形2中的投资者会考虑所有情景，并且可能需要过度投资，以考虑服务价格最高、利润最丰厚的需求情景，从而最大化其预期利润。然而，在情形3中，投资者独立地确定每种情景下的容量，并可针对所需容量较低的情景减少投资。此外，在完全信息条件下，投资者可以灵活地将每种情景下的容量分配到各个地点。例如，与情形2相比，地点3、12和22的设施在某些极端情景下可能具有更高的容量投资。

图 6c 展示了各情形下的均衡服务价格。总体而言，情形 1 和情形 3 的服务价格高于情形 2（见图 6c）。不过，在设施容量达到约束上限的情景中（$g_\xi^k = \bar{c}_\bullet^k$），我们观察到情形 2 的服务价格大幅上涨。这些服务价格的飙升源于基于市场的建模框架：服务价格取决于增加服务量所产生的边际成本。在情形 2 中，容量受限情景下增加服务量的成本，需要计入其他情景中的闲置容量成本。基于边际成本的定价机制也解释了为什么面对未来不确定性时，设施投资者往往倾向于增加投资，因为他们可以在供给短缺期间获得更多利润。

总之，案例分析的主要观察结果如下：

- 对于不确定参数具有完美预测的情形（情形 3），与确定性情形（情形 1）相比，决策者在供给能力和供给量方面的平均决策相似，如图 6a 和 6b 所示。换言之，情景到设施供给的映射具有这样的性质：对于平均需求，供给与

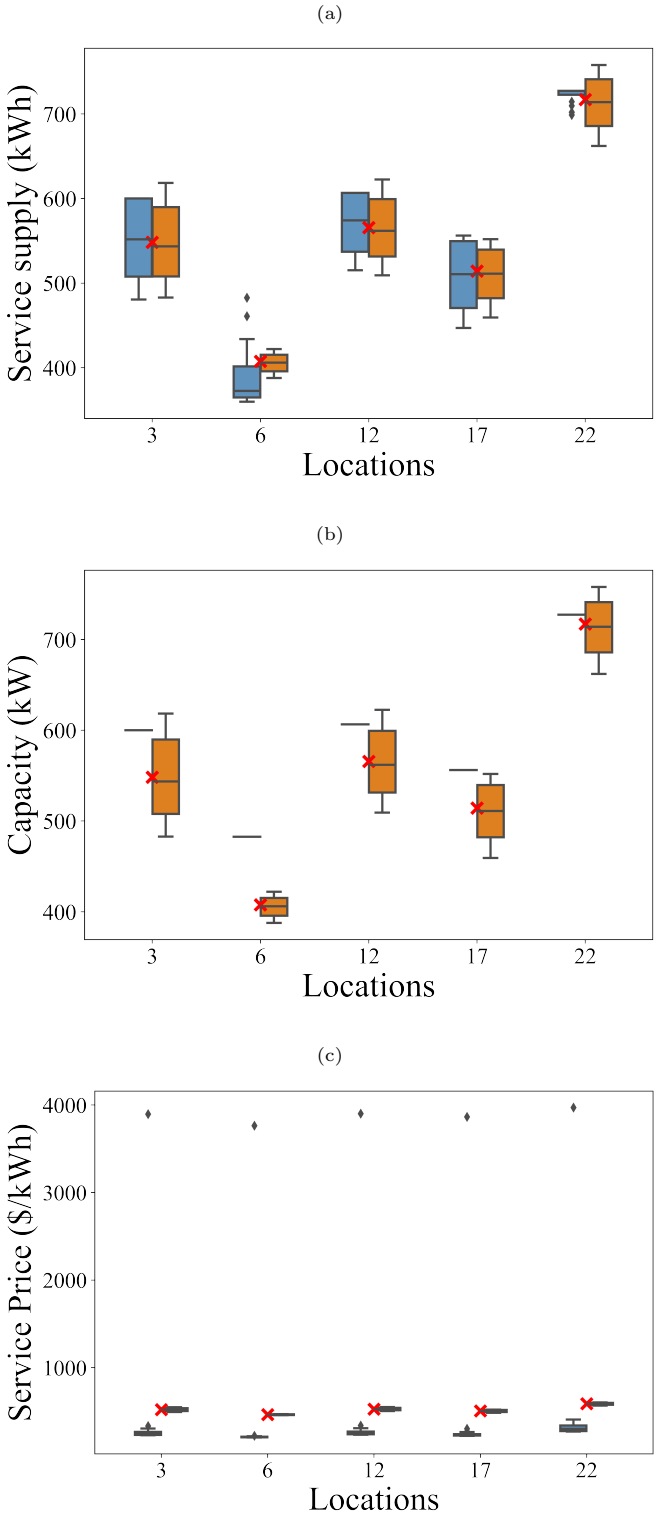



图6：最终决策变量：（a）设施选址提供的服务；（b）确定的设施选址容量；（c）所提供服务的价格；× 案例1、案例2和案例3。

每种需求情景下的平均供给量。

- 随机决策（案例 2）会促使人们为应对未来需求的不确定性而增加设施容量投资，与不确定性信息完全已知的情形（案例 3）相比，这将导致各地点的服务供给量和需求量有所不同。例如，图 6b 显示，案例 2 的投资容量明显高于案例 3（尤其是位置 6），由此造成服务供给量不同，如图 6a 所示。

- 服务定价的市场机制可能会使随机问题（案例 2）中容量约束紧 binding 的情景出现高价格，进而导致案例 2 的投资高于案例 3。图 6c 所示的各地点边际服务价格清楚地体现了这一点。

*5.2.2.* 随机规划指标

为量化随机规划和不确定性信息对各利益相关者收益的影响，我们在网络均衡背景下考察两项经典的随机规划指标：(1) 随机解的价值（VSS）和 (2) 完全信息期望价值（EVPI）。

VSS 用于评估在考虑系统不确定性的情况下，采用随机规划解相较于确定性解可能带来的收益。EVPI 是另一项随机规划指标，用于量化对不确定参数进行完美预测对利益相关者决策的价值。为计算这些指标，我们首先根据前文定义的三种情形所得结果，计算每位利益相关者的目标值。随后，VSS 即情形 2（随机问题）与情形 1（确定性问题）下各利益相关者目标值之差。由于情形 3 模拟了所有利益相关者都能获得不确定情景信息的情况，因此 EVPI 即情形 3（等待并观察问题）与情形 2 下的目标值之差。请注意，与单主体随机规划不同，由于多主体情境下存在复杂的相互作用，VSS 和 EVPI 可能为负值。

设施提供方的目标值可通过模型（3）确定，而服务用户的目标将根据方程（11）计算为总期望效用，其中$U^{\text{total}}$ 为用户的总效用， $\boldsymbol{U}$ 为方程（4）中定义的驾驶员效用， $\boldsymbol{q}$ 为

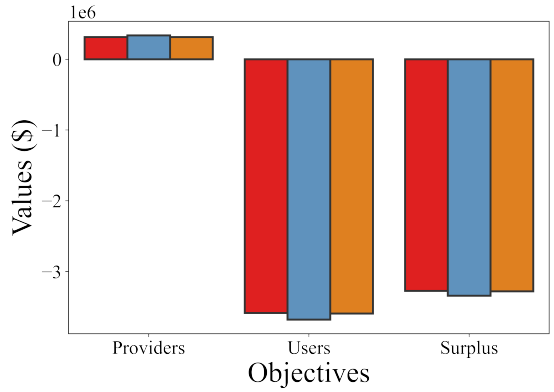



图7：利益相关者的目标与系统剩余；案例1、案例2和案例

求解该问题后得到的交通流。

$$U^{\text{total}} = \mathbb{E}_{\boldsymbol{\xi}} \sum_{k \in K} \frac{1}{\beta_2} (q_{\xi}^{rsk} \times U_{\xi}^{rsk}) \tag{11}$$

请注意，在方程（11）中，我们将期望效用除以 $\beta_2$，以将效用归一化为以美元计量。因此，我们也可以将系统福利或剩余分析为服务提供商的目标与用户总效用之和。

三个案例计算得到的目标值和系统剩余如图7所示。可以看出，在案例2中，设施提供者的目标值最高，而设施用户的效用最低，因为在案例2中，当情景受到容量约束时，市场会向设施用户收取高得多的服务价格（图6c），从而使投资者获益更多，而用户的效用降低。与案例2相比，在完全信息下（案例3），提供者的目标值有所下降，主要原因是案例2中设施的供给量受容量限制时，服务价格会大幅飙升。用户的目标值变得不那么负，这意味着用户从完全信息中受益。用户目标值的改善幅度大于提供者，因此，与案例2相比，案例3的系统剩余有所提高。

上述随机指标将有助于我们明确这些比较。根据随机解的价值（VSS）的定义，服务提供商的 VSS 为 24652.7 个单位，这代表投资者通过实施随机解相较于采用确定性建模所获得的利润。比较情形 2 和情形 3 的目标值可见，服务提供商的目标值减少了 23394.0 个单位，而用户的目标值提高了 84225.6 个单位。这些变化可解释为完全信息期望价值（EVPI）。这些指标还表明，服务提供商在没有

关于不确定参数实现值的完全信息时境况更好，而用户则从完全信息中受益。从系统角度来看，与随机解（情形 2）相比，完全信息（情形 3）和确定性解（情形 1）实现了更高的系统剩余。

### *5.3.* 分散投资者的结果

上一节关于投资容量的结果基于各设施选址处投资者的聚合成本函数。本节将明确对具有异质成本函数的多个投资者进行建模，以研究投资者之间的均衡容量份额。每位投资者的目标函数都采用相同的二次形式

$$\Phi(c_i^k) = a_i {c_i^k}^2 + b_i c_i^k, \tag{12}$$

其中 $a_i$ 和 $b_i$ 是每位投资者 $i$的成本系数。

例如，我们考虑两位分散投资者 $i \in \{1, 2\}$。第一位投资者的成本系数为 $a_1 = 0.1$ 和 $b_1 = 170$，第二位投资者的成本系数为 $a_2 = 1$ 和$b_2 = 17$。第一位投资者代表安装边际成本较高、但边际成本随容量增加而上升较慢的投资者；第二位投资者则代表成本结构相反的投资者。第一位投资者的例子是拥有大片土地但没有现有基础设施的企业；第二位投资者的例子则是土地有限、但已安装基础设施的企业（例如加油站业主）。

图8展示了随机情形（情形2）下这两位投资者之间的容量份额。由于第二位投资者在高容量下的投资成本较高，因此其在每个位置上的投资容量份额都较低。不同地点安装的总容量之所以存在差异，取决于驾驶员的路线与路径选择，这一点我们已在随机和确定性分析中讨论过。请注意，我们可以使用聚合成本函数对每个节点的总容量进行建模。我们的示例清楚地表明，图8所示每个位置的总容量与基于聚合成本函数得到的总容量相等。

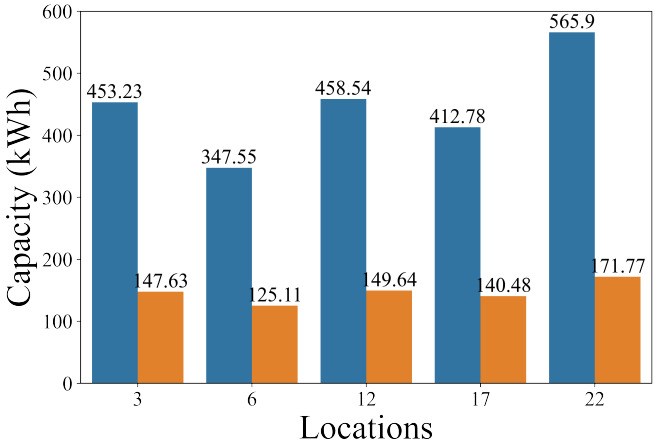



图 8：投资者在各设施选址处的容量份额。

## 6. 讨论

本文提出了一种新的建模框架以及一种高效的求解方法，用于应对长期基础设施系统规划问题中由中间设施供给、非合作利益相关方以及复杂的主体—基础设施交互所带来的挑战。本文证明了均衡的存在性与唯一性。通过数值示例，我们展示了：（1）由于主体—基础设施交互，价格、投资和利润可能因地点而显著不同；（2）忽略交通拥堵可能导致系统评估偏差；（3）均衡投资模式可能对用户偏好较为敏感；（4）面对不确定性的随机决策可能导致投资高于完全信息下的平均投资，而在容量约束具有约束力的情景中，则会导致服务价格显著升高；（5）有关不确定参数的信息可能对设施提供者无益，但会使用户受益并增加系统剩余。

本研究可从多个方向进一步拓展。从方法论角度来看，当供给侧或需求侧存在显著市场势力时，完全竞争的假设可能并不适用于所有应用。因此，可以进一步研究不同的市场结构。例如，如果供应商拥有较强的市场势力，能够预判并影响用户的响应，那么双层领导者—跟随者模型会更为合适。此外，我们可以利用现有的建模框架，研究如何通过控制策略影响市场交互，从而构建更具韧性的设施网络。另外，

我们观察到，服务提供商与服务用户之间的信息价值存在不对称性，这在去中心化决策环境中具有独特性。如何在这一背景下设计有效的信息获取与共享机制，将是未来值得探讨的课题。

**参考文献**

**参考文献**

Aboolian, R., Berman, O., Krass, D., 2007年。竞争性设施选址与设计问题。《European Journal of Operational Research》182 (1), 40–62。网址：http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221706008009

Aboolian, R., Berman, O., Krass, D., 2012年。考虑拥堵和弹性需求的利润最大化分布式服务系统设计。《Transportation Science》46 (2), 247–261。

Afifah, F., Guo, Z., 2022年。拥堵交通网络中的网约车服务空间定价。《Transportation Research Part C: Emerging Technologies》1, 1–21。

Baghali, S., Guo, Z., Wei, W., Shahidehpour, M., 2022年。高压力条件下用于配电系统负荷接取的电动汽车：一种网络均衡方法。《IEEE电力系统汇刊》1 (1), 1–13。

Bao, Z., Xie, C.，2021年。拥堵城际网络中电动汽车途中充电的最优站点位置：一种新的问题表述以及精确和近似划分算法。《Transportation Research Part C: Emerging Technologies》133，103447。

Berman, O., Bertsimas, D., Larson, R. C.，1995年。可选择服务设施的选址，II：最大化市场规模、最小化不便。《运筹学》43（4），623–632。

Berman, O., Drezner, Z.，2006年。具有距离敏感型需求的拥堵容量受限设施选址。《IIE Transactions》38（3），213–221。

Berman, O., Kaplan, E.，1987年。具有延迟相关需求的设施选址与容量规划。《International Journal of Production Research》25（12），1773–1780。

Berman, O., Krass, D., 1998年。流量拦截空间交互模型：竞争性设施最优选址的新方法。《选址科学》6 (1-4), 41–65。

Berman, O., Larson, R. C., Fouska, N., 1992年。可选择服务设施的最优位置。《Transportation Science》26 (3), 201–211。Birge, J. R., Louveaux, F., 2011年。随机规划导论。Springer Science & Business Media。Boujelben, M. K., Gicquel, C., 2019年。行驶里程不确定性下电动汽车快速充电站选址的高效求解方法。Computers & Operations Research 109, 288–299。Capar, I., Kuby, M., 2012年。替代燃料站流量加油选址模型的高效建模。《IIE Transactions》44 (8), 622–636。Chen, R., Qian, X., Miao, L., Ukkusuri, S. V., 2020年。考虑路径选择和充电时间均衡的电动汽车充电设施最优选址与容´量。Computers & Operations Research 113, 104776。Cornu´ejols, G., Nemhauser, G., Wolsey, L., 1983年。无容量限制的设施选址问题。技术报告，康奈尔大学运筹学与工业工程系。Daganzo, C. F., Sheffi, Y., 1977年。关于交通分配随机模型。《Transportation Science》11 (3), 253–274。Daskin, M. S., 2011年。网络与离散选址：模型、算法与应用。John Wiley & Sons。de Vries, H., Duijzer, E., 2017年。将行驶里程变异性纳入加油设施网络设计。Omega 69, 102–114。Deride, J., Jofr´e, A., Wets, R., 2015年。通过增广瓦尔拉斯方法求解确定性和随机均衡问题。技术报告，数学系，加利福尼亚大学戴维斯分校。Drezner, T., 2009年。竞争性设施选址，《竞争性设施选址》。Springer US, 波士顿，MA，第396–401页。URL http://dx.doi.org/10.1007/978-0-387-74759-0_73Duranton, G., Turner, M. A., 2011年。道路拥堵基本定律：来自美国城市的证据。《American Economic Review》101 (6), 2616–2652。

Dvorkin, V., 2020年. 随机与隐私能源系统优化. Eiselt, H. A., Laporte, G., Thisse, J.-F., 1993年. 竞争性选址模型：框架与参考文献.《Transportation Science》27 (1), 44–54. URL http://pubsonline.informs.org/doi/abs/10.1287/trsc.27.1.44 Evans, S. P., 1976年. 出行分布与分配组合模型的推导与分析. Transportation research 10 (1), 37–57. Farahani, R. Z., Asgari, N., Heidari, N., Hosseininia, M., Goh, M., 2012年. 设施选址中的覆盖问题：综述.《Computers & Industrial Engineering》62 (1), 368–407.

Ferris, M. C., Wets, R., 2013年. MOPEC：具有均衡约束的多个优化问题. URL: http://pages. cs. wisc. edu/˜ ferris/talks/mopta-aug. pdf.

Friesz, T. L., 2007年. 竞争性设施选址.《Networks and Spatial Economics》7 (1), 1–2. URL http://dx.doi.org/10.1007/s11067-006-9008-1

Ghamami, M., Kavianipour, M., Zockaie, A., Hohnstadt, L. R., Ouyang, Y., 2020年. 考虑混合电动汽车与传统汽车车队的路径选择和旅行时间延误的城际网络加油基础设施规划.《Transportation Research Part C: Emerging Technologies》120, 102802.

Ghamami, M., Zockaie, A., Nie, Y. M., 2016年. 用于支持城际出行的插电式电动汽车充电基础设施设计通用走廊模型.《Transportation Research Part C: Emerging Technologies》68, 389–402.

Guo, F., Yang, J., Lu, J., 2018年. 电池充电站选址问题：用户续航焦虑和距离便利性的影响.《Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review》114, 1–18.

Guo, Z., Afifah, F., Qi, J., Baghali, S., 2021年。用于交通与电力系统相互依存分析的随机多智能体优化框架。《IEEE Transactions on Transportation Electrification》7（3），1088–1098。Guo, Z., Deride, J., Fan, Y., 2016年。竞争市场中的快速充电站基础设施规划。《Transportation Research Part C: Emerging Technologies》68，215–227。

Guo, Z., Fan, Y., 2017年。寡头市场中不确定性条件下能源基础设施规划的随机多主体优化模型。《Networks and Spatial Economics》17（2），581–609。Hakimi, S. L., 1983年。竞争环境中的新设施选址。《欧洲运筹学杂志》12（1），29–35。Hale, T. S., Moberg, C. R., 2003年10月。位置科学研究：综述。《运筹学年鉴》123（1），21–35。URL https://doi.org/10.1023/A:1026110926707 Hansen, P., Mladenovi´c, N., 1997年。用于p-中位数问题的变邻域搜索。《选址科学》5（4），207–226。

He, F., Wu, D., Yin, Y., Guan, Y., 2013年. 插电式混合动力电动汽车公共充电站的最优部署。《交通研究B辑：方法论》47, 87–101.

He, J., Yang, H., Tang, T.-Q., Huang, H.-J., 2018年. 考虑电动汽车续航里程的最优充电站选址模型。《Transportation Research Part C: EmergingTechnologies》86,641–654.

Hekmatfar, R. M., 2009年。《设施选址》。Physica-Verlag。Hodgson, M. J., 1990年。一种流量捕获选址分配模型。《地理分析》22 (3), 270–279。Hotelling, H., 1929年。竞争稳定性。《经济学杂志》39 (153), 41–57。URL http://www.jstor.org/stable/2224214 Kchaou-Boujelben, M., 2021年。充电站选址问题：模型与求解方法综述。《Transportation Research Part C: Emerging Technologies》132, 103376。Kim, J.-G., Kuby, M., 2013年。针对偏移流量加油站选址模型的网络变换启发式方法。《Computers & Operations Research》40 (4), 1122–1131。Klose, A., Drexl, A., 2005年。用于配送系统设计的设施选址模型。《欧洲运筹学杂志》162 (1), 4–29。Kress, D., Pesch, E., 2012年。网络上的序贯竞争选址。《欧洲运筹学杂志》217 (3), 483–499。

Kuby, M., Lim, S., 2005年。面向替代燃料汽车的流量加油选址问题。《社会经济规划科学》39 (2), 125–145。Kuby, M., Lines, L., Schultz, R., Xie, Z., Kim, J.-G., Lim, S., 2009年。利用流量加油选址模型优化佛罗里达州的加氢站。《国际氢能杂志》34 (15), 6045–6064。Lam, W., Huang, H., 1992年。面向多种用户类别的出行分布与分配组合模型。《交通研究B辑：方法论》26 (4), 275–287。Li, J., Xie, C., Bao, Z., 2022年。电动汽车途中充电站的最优选址：一种新的建模视角，以及对基于网络和元网络方法的比较评估。《Transportation Research Part C: Emerging Technologies》142, 103781。Li, S., Huang, Y., 2014年。针对包含偏离路径的基于流的集合覆盖问题的启发式方法。《Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review》72, 144–158。Li, X., Ouyang, Y., 2010年。针对相关概率性中断下可靠设施选址设计的连续体近似方法。《交通研究B辑：方法论》44 (4), 535–548。Lim, S., Kuby, M., 2010年。利用流量加油选址模型确定替代燃料站位置的启发式算法。《欧洲运筹学杂志》204 (1), 51–61。Lin, C.-C., Lin, C.-C., 2018年。p-中心流量加油设施选址问题。《交通研究B辑：方法论》118, 124–142。Luo, C., Huang, Y.-F., Gupta, V., 2015年。电动汽车充电站的布局——在多个实体之间平衡效益。《IEEE智能电网汇刊》8 (2), 759–768。Melo, M. T., Nickel, S., Saldanha-Da-Gama, F., 2009a. 设施选址与供应链管理综述。《欧洲运筹学杂志》196 (2), 401–412。Melo, M. T., Nickel, S., Saldanha-da Gama, F., 2009b。设施选址与供应链管理综述。《欧洲运筹学杂志》196 (2), 401–412。Miller, T. C., Friesz, T. L., Tobin, R. L., 1996年。网络上的均衡设施选址。Springer Science & Business Media。

MirHassani, S., Ebrazi, R., 2013年。加油站点选址问题的一种灵活重构方法。《Transportation Science》47 (4), 617–628。

Ouyang, Y., Wang, Z., Yang, H., 2015年。连续交通均衡下的设施选址设计。《交通研究B辑：方法论》81, Part 1, 18–33。网址 http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0191261515001204http: //ac.els-cdn.com/S0191261515001204/1-s2.0-S0191261515001204-main. pdf?_tid=5b5d33c2-ccf7-11e5-9336-00000aab0f01&acdnat=1454780026_89a34c785e7f378378e777aa55648805

Owen, S. H., Daskin, M. S., 1998年。战略设施选址：综述。《欧洲运筹学杂志》111 (3), 423 – 447。网址 http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221798001866

Plastria, F., 2001年。《静态竞争性设施选址：优化方法综述》。《欧洲运筹学杂志》129 (3), 461–470。网址：http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221700001697

Rockafellar, R., Wets, R., 1998年。《变分分析》。数学科学基础丛书第317卷。Springer（2009年第三次印刷）。

Schoenberg, S., Buse, D. S., Dressler, F., 2022年。电动汽车协同再充电的充电基础设施选址与规模确定。《IEEE Transactions on Intelligent Vehicles》。

Sheffi, Y., 1985年。《城市交通网络：采用数学规划方法进行均衡分析》。

Shukla, A., Pekny, J., Venkatasubramanian, V., 2011年。替代燃料车辆加油站基础设施成本效益设计的优化框架。《计算机与化学工程》35 (8), 1431–1438。

Smith, H. K., Laporte, G., Harper, P. R., 2009年。选址分析：从发展到成熟的亮点。运筹学学会杂志，S140–S148。

Snyder, L. V., 2006年。《不确定性下的设施选址：综述》。《IIE Transactions》38 (7), 547–564。网址：https://doi.org/10.1080/07408170500216480

Tran, C. Q., Ngoduy, D., Keyvan-Ekbatani, M., Watling, D., 2021年。《考虑城市路网中异质车辆的基于用户均衡的快速充电站选址模型》。《Trans-portmetrica A: Transport Science》17 (4), 439–461。Wang, C., He, F., Lin, X., Shen, Z.-J. M., Li, M., 2019年。《为支持电动汽车城际出行而设计充电站的位置和容量：扩展网络方法》。《Transportation Research Part C: Emerging Technologies》102, 210–232。Wang, Y., Shi, J., Wang, R., Liu, Z., Wang, L., 2018年。《预算约束下高速公路网络中快速充电站的选址与规模确定》。《应用能源》228, 1255–1271。Wardrop, J. G., 1952年。道路论文：道路交通研究的若干理论方面。载于：《ICE会议录：工程分部》。第1卷。Thomas Telford，325–362页。Wen, M., Laporte, G., Madsen, O. B., Nørrelund, A. V., Olsen, A., 2014年。《电动汽车补给站选址：丹麦交通数据的应用》。《运筹学学会杂志》65 (10), 1555–1561。Wu, T.-H., Lin, J.-N., 2003年。《求解竞争性自由选择服务设施选址问题》。《欧洲运筹学杂志》144 (2), 366–378。Xu, M., Meng, Q., 2020年。《考虑路径偏离和非线性弹性需求的充电站最优布局》。《交通研究B辑：方法论》135, 120–142。Xu, M., Yang, H., Wang, S., 2020年。《缓解续航焦虑：为电动汽车驾驶员选址电池充电站》。《Transportation Research Part C: Emerging Technologies》114, 164–188。Yang, H., Wong, S., 2000年。《用于估算具有弹性需求和市场外部性的竞争性设施市场区域的连续均衡模型》。《Transportation Science》34 (2), 216–227。Zhao, Y., Guo, Y., Guo, Q., Zhang, H., Sun, H., 2020年。《考虑现有竞争者的电动汽车充电站布局》。《IEEE智能电网汇刊》11 (5), 4236–4248。Zockaie, A., Aashtiani, H. Z., Ghamami, M., Nie, Y., 2016年。《求解基于绕行的加油站选址问题》。《计算机辅助土木与基础设施工程》31 (2), 132–144。

**附录A. 证明.**

**证明（引理1）**。首先，目标函数 (5a) 是凸函数，因为它是三个基本凸函数的线性组合：(1) $f_1(x) = \int_0^x g(u)\mathrm{d}u$，其中 $g(u)$ 是正值且非递减的函数；(2) $f_2(x) = x\ln x$；以及 (3) $f_3(x) = cx$。此外，问题 (5) 的约束均为线性。因此，优化问题 (5) 是凸的。由于函数 (5a) 可微，问题 (5) 的最优性条件等价于以下互补条件以及约束 (5c $\sim$ 5f)：$\forall a \in \mathcal{A},\ r \in R,\ s \in S,\ k \in K^{rs},\ p \in P^{rsk}$

$$0 \le x_p \quad \perp \quad \sum_{a\in\mathcal{A}_p} t_a(\cdot) - \boldsymbol{\gamma}^T(B_{\hat{p}} + B_{\check{p}}) \ge 0 \tag{A.1a}$$

$$0 \le \hat{x}_a^{rsk} \quad \perp \quad \gamma_a - A_a^T\hat{\boldsymbol{\lambda}} \ge 0 \tag{A.1b}$$

$$0 \le \check{x}_a^{rsk} \quad \perp \quad \gamma_a - A_a^T\check{\boldsymbol{\lambda}} \ge 0 \tag{A.1c}$$

$$0 \le q^{rsk} \quad \perp \quad \frac{1}{\beta_1}(ln(q^{rsk}) + \beta_3\frac{\rho^k e^{rs}}{inc^{rs}} - \beta_2\sum_{i\in I_k} c_i^s - \beta_0^k) + E^{rkT}\hat{\boldsymbol{\lambda}} + E^{ksT}\check{\boldsymbol{\lambda}} + \mu^{rs} \ge 0 \tag{A.1d}$$

我们首先证明以下两个条件，以说明该交通流解是Wardrop用户均衡。

**1. 所有连接 $r$、$s$、$k$ 的已使用路径具有相同的出行时间**。$\forall r \in R$、$s \in S$、$k \in K^{rs}$，对于满足 $x_{\tilde{p}} > 0$ 的 $\tilde{p} \in P^{rsk}$，$\sum_{a\in\mathcal{A}_{\tilde{p}}} t_a(\cdot) = \boldsymbol{\gamma}^T(B_{\hat{\tilde{p}}} + B_{\check{\tilde{p}}})$（由 (A.1a) 可知）。由于以下两个条件：

- for $\tilde{a} \in \hat{\tilde{p}}$, i.e. $B_{\hat{\tilde{p}},\tilde{a}} = 1$, $\hat{x}_{\tilde{a}}^{rsk} > 0$ and therefore $\gamma_{\tilde{a}} = A_{\tilde{a}}^T\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ (because of (A.1b)). So $\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{a}}^T B_{\hat{\tilde{p}},\tilde{a}} = \hat{\boldsymbol{\lambda}}^T A_{\tilde{a}} B_{\hat{\tilde{p}},\tilde{a}}$
- for $\tilde{a} \notin \hat{\tilde{p}}$, i.e. $B_{\hat{\tilde{p}},\tilde{a}} = 0$, $\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{a}}^T B_{\hat{\tilde{p}},\tilde{a}} = \hat{\boldsymbol{\lambda}}^T A_{\tilde{a}} B_{\hat{\tilde{p}},\tilde{a}} = 0$

我们有 $\boldsymbol{\gamma}^T B_{\hat{\tilde{p}}} = \hat{\boldsymbol{\lambda}}^T A B_{\hat{\tilde{p}}}$。注意到 $AB_{\hat{p}} = E^{rk}$，因此 $\boldsymbol{\gamma}^T B_{\hat{\tilde{p}}} = \hat{\boldsymbol{\lambda}}^T E^{rk}$。

同理，我们有 $\boldsymbol{\gamma}^T B_{\check{\tilde{p}}} = \check{\boldsymbol{\lambda}}^T E^{ks}$。

因此，$\sum_{a\in\mathcal{A}_{\tilde{p}}} t_a(\cdot) = \boldsymbol{\gamma}^T(B_{\hat{\tilde{p}}} + B_{\check{\tilde{p}}}) = \hat{\boldsymbol{\lambda}}^T E^{rk} + \check{\boldsymbol{\lambda}}^T E^{ks} \doteq \tau^{rsk}$，它仅取决于$r, s, k$。

**2. 连接 $r, s, k$ 的所有未使用路径，其出行时间都不短于已使用路径的出行时间**。$\forall r \in R$, $s \in S, k \in K^{rs}$，对于那些 $\tilde{p} \in P^{rsk}$ 具有 $x_{\tilde{p}} = 0$, $\sum_{a\in\mathcal{A}_{\tilde{p}}} t_a(\cdot) \ge$

$\boldsymbol{\gamma}^T(B_{\hat{p}}+B_{\check{p}})$（因为 (A.1a)）。根据 (A.1b, A.1c)，$\gamma_{\bar{a}} \geq A_{\bar{a}}^T \hat{\boldsymbol{\lambda}}$ 和 $\gamma_a \geq A_a^T \check{\boldsymbol{\lambda}}, \forall a$。因此 $\sum_{a\in\mathcal{A}_{\bar{p}}} t_a(\cdot) \geq \boldsymbol{\gamma}^T(B_{\hat{p}}+B_{\check{p}}) \geq \hat{\boldsymbol{\lambda}}^T AB_{\hat{p}} + \check{\boldsymbol{\lambda}}^T AB_{\check{p}} = \hat{\boldsymbol{\lambda}}^T E^{rk} + \check{\boldsymbol{\lambda}}^T E^{ks} = \tau^{rsk}$。

接下来，我们说明 OD需求解就是采用 Logit设施需求函数的服务地点选择。这可以从 (A.1d) 轻易看出：对于任意 $k$ 满足 $q^{rsk}>0$, $\frac{1}{\beta_1}(ln(q^{rsk}) + \beta_3 \frac{\rho^k e^{rs}}{inc^{rs}} - \beta_2 \sum_{i\in I_k} c_i^s - \beta_0^k) + E^{rkT}\hat{\boldsymbol{\lambda}} + E^{ksT}\check{\boldsymbol{\lambda}} + \mu^{rs} = 0$。整理后，

$$
\begin{aligned}
q^{rsk} &= e^{\beta_0^k - \beta_1(E^{rkT}\hat{\boldsymbol{\lambda}} + E^{ksT}\check{\boldsymbol{\lambda}}) + \beta_2 \sum_{i\in I_k} c_i^s - \beta_3 \frac{\rho^k e^{rs}}{inc^{rs}} + \beta_1 \mu^{rs}} \\
&= e^{\beta_0^k - \beta_1 \tau^{rsk} + \beta_2 \sum_{i\in I_k} c_i^s - \beta_3 \frac{\rho^k e^{rs}}{inc^{rs}} + \beta_1 \mu^{rs}} \\
&= e^{U^{rsk} + \beta_1 \mu^{rs}}
\end{aligned}
$$

□

**引理 2 的证明**。

目标函数 (10a) 是五类函数的线性组合：$\phi_c(\cdot)$、$\phi_g(\cdot)$、$\int_0^{v_{a,}} \xi t_a u \mathrm{d}u$、$q\ln q$ 和 $q$。首先，根据假设，代表性投资者成本函数 $\phi_c(\cdot)$ 和 $\phi_g(\cdot)$ 是凸函数。其次，由于链路性能函数 $t_a(\cdot)$单调递增，因此 $\int_0^{v_a,} \xi t_a u du$ 是凸函数，因为其二阶导数 $t_a'(\cdot) \geq 0$。第三，其余函数 $q\ln q$ 和 $q$ 可通过求二阶导数轻易证明为凸函数。因此，重构问题（模型 (10)）对应于在线性约束下最小化一个凸函数。因此，模型 (10) 是一个凸问题（Rockafellar 和 Wets，1998年）。在满足约束资格条件时，凸重构问题（即模型 (10)）至少存在一个解。

此外，若 $\phi_c(\cdot)$、$\phi_g(\cdot)$ 是严格凸函数，且 $t_a(\cdot)$ 严格单调递增，则按照上述相同的推理，模型 (10)) 对应于在线性约束下对严格凸函数进行最小化。因此，模型 (10)) 的解（若存在）是唯一的。

□

**引理3的证明**。

由于 $\phi_c(\cdot)$ 和 $\phi_g(\cdot)$ 是凸函数，且 $t_a(\cdot)$ 单调递增，根据引理 2，模型 (10) 是一个凸优化问题。不难看出，带有对偶乘子 $\{\lambda_\xi^k\}$ 的凸优化问题 (10) 的一阶条件可按智能体分解，分别对应于代表性投资者问题 (3a)-(3b) 和 GCDA问题 (5a)-(5f) 的一阶条件，其中均衡价格

向量 $\rho_{\boldsymbol{\xi}}^k = \frac{\lambda_{\boldsymbol{\xi}}^k}{\pi_{\boldsymbol{\xi}}}$，对每个 $\boldsymbol{\xi}$ 和 $k$ 均成立，其中 $\{\pi_{\boldsymbol{\xi}}:\ \boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{\Xi}\}$ 是 $\boldsymbol{\xi}$ 的概率分布。 □

**定理1的证明**。

定理1可直接由引理 2 和引理3推出。 □

## 附录B. 数据输入

表B.1：基准情景链路容量 $c_a$ (辆/小时)和自由流行程时间（FTT） $t_a^0$ (分钟)

| Link | FFT | 容量 | Link | FFT | 容量 | Link | FFT | 容量 | Link | FFT | 容量 | Link | FFT | 容量 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 12 | 777 | 17 | 6 | 235 | 32 | 10 | 300 | 47 | 10 | 151 | 62 | 12 | 152 |
| 2 | 8 | 702 | 18 | 4 | 702 | 33 | 12 | 147 | 48 | 8 | 146 | 63 | 10 | 152 |
| 3 | 12 | 777 | 19 | 4 | 147 | 34 | 8 | 146 | 49 | 4 | 157 | 64 | 12 | 152 |
| 4 | 10 | 149 | 20 | 6 | 235 | 35 | 8 | 702 | 50 | 6 | 590 | 65 | 4 | 157 |
| 5 | 8 | 702 | 21 | 20 | 151 | 36 | 12 | 147 | 51 | 16 | 150 | 66 | 6 | 146 |
| 6 | 8 | 513 | 22 | 10 | 151 | 37 | 6 | 777 | 52 | 4 | 157 | 67 | 6 | 288 |
| 7 | 8 | 702 | 23 | 10 | 300 | 38 | 6 | 777 | 53 | 4 | 145 | 68 | 10 | 152 |
| 8 | 8 | 513 | 24 | 20 | 151 | 39 | 8 | 153 | 54 | 4 | 702 | 69 | 4 | 157 |
| 9 | 4 | 533 | 25 | 6 | 417 | 40 | 8 | 146 | 55 | 6 | 590 | 70 | 8 | 150 |
| 10 | 12 | 147 | 26 | 6 | 417 | 41 | 10 | 154 | 56 | 8 | 702 | 71 | 8 | 148 |
| 11 | 4 | 533 | 27 | 10 | 300 | 42 | 8 | 148 | 57 | 6 | 437 | 72 | 8 | 150 |
| 12 | 8 | 148 | 28 | 12 | 405 | 43 | 12 | 405 | 58 | 4 | 145 | 73 | 4 | 152 |
| 13 | 10 | 300 | 29 | 8 | 146 | 44 | 10 | 154 | 59 | 8 | 150 | 74 | 8 | 153 |
| 14 | 10 | 149 | 30 | 16 | 150 | 45 | 6 | 437 | 60 | 8 | 702 | 75 | 6 | 146 |
| 15 | 8 | 148 | 31 | 12 | 147 | 46 | 6 | 288 | 61 | 8 | 150 | 76 | 4 | 152 |
| 16 | 4 | 147 | | | | | | | | | | | | |