极化激元超强耦合：基态中的量子纠缠

Qingtian Miao[1], * 和 G.S. Agarwal[2†] [1] *Department of Physics and Astronomy, Texas A&M University, Texas 77843, USA* [2] *Institute for Quantum Science and Engineering, Department of Biological and Agricultural Engineering, Department of Physics and Astronomy, Texas A&M University, College Station, Texas 77843, USA*（日期：2023年4月4日）

本文在完全解析的量子力学理论框架下，研究物质基本激发与微腔模式之间的超强耦合。基本激发可以是声子、激子、等离激元等。通过对哈密顿量进行对角化，我们得到极化激元哈密顿量的基态。该基态属于高斯类。利用其高斯性质，我们计算了基态中的量子纠缠。我们采用两种不同的量度来衡量量子纠缠——纠缠熵和对数负性参数，并得到了相当简洁的纠缠度量解析表达式。我们的研究结果表明，在超强耦合区，基态中的量子纠缠相当显著。通过测量极化激元频率即可获得这一结果。

arXiv:2304.00680v1 [quant-ph] 3 Apr 2023

I. 引言

物质与腔场相互作用时的行为已知会呈现出有别于自由空间中的特性 [1–3]。这是因为相互作用参数 g 可以处于弱耦合范围，也可以处于强耦合甚至超强耦合范围。强耦合区已得到深入研究，而超强耦合目前正受到广泛关注[4, 5]。对于与腔相互作用的量子比特，约为 0.5 或更高的超强耦合 g/ω 尚未实现。在这类情况下，有研究提出利用参量相互作用达到超强耦合区[6–8]。对于与腔场相互作用的大型集体系统，情况则有所不同，因为可以利用耦合通过 $\sqrt{N}$ 因子 [9]得到有效增强这一优势。即使 g 处于弱耦合范围，这种增强因子也有助于实现强耦合的观测 [10–12]。近期有多项研究成功观测到超强耦合区，此时基本激发的密度处于固态材料的密度范围内。近期的一些实验包括：含有六方氮化硼（hBN）的腔中的声子极化激元 [13]；等离激元极化激元 [14, 15]；激子系统 [16–20]；二维电子气 [21]。研究人员还探讨了超强耦合下腔中的新型光化学可能性 [22]。此外，利用超材料也实现了无腔超强耦合 [23, 24]。典型的实验观测包括测量透射光谱以及光谱中的极化激元劈裂——劈裂量级为 g，约为腔裸频率的 $30-70\%$；该腔被假定与固态材料中基本激发的频率共振。所有这些都可以通过层状介质透射的经典计算来解释 [25]。

在量子层面，基本激发与辐射场模发生耦合，对哈密顿量进行对角化以获得新的准粒子，即极化激元 [26–28]。透射光谱基本上探测两个极化激元频率之间的分离，尽管必须注意，观测到的分离还取决于构成腔的镜面的反射和透射特性。后者尚未得到充分研究。本文研究 Hopfield 哈密顿量基态中存在的量子纠缠。我们推导了属于高斯态类别的基态。随后，我们采用两种不同的纠缠度量——纠缠熵 [29] 和对数负性参数 [30]。随着 g/ω 增加，量子纠缠增强。在弱耦合和强耦合极限下，不存在量子纠缠，如$g/\omega \ll 1$所示。纠缠的大小以极化激元频率表示，因此可利用对透射光谱的实验研究来评估纠缠量。

II. 超强耦合中的极化激元

下文中，我们将考虑一个完全填充六方氮化硼的微腔，其中已证实存在超强声子-光子耦合 [13]。我们的理论也适用于其他处于超强耦合区的系统，例如激子-极化激元和等离激元-极化激元。透射光谱可在正入射条件下测量，此时出现的极化激元劈裂表明，光与六方氮化硼的面内横光学（TO）声子耦合，该声子垂直于传播方向振动。因此，我们考虑两个谐振子的超强耦合：正入射法布里-

* qm8@tamu.edu

-P $\omega_c$erot 微腔模，其能量为 ω_c；以及能量为 ω_0 的横光学声子模（设定 $\hbar = 1$）。该系统的行为可由 Hopfield 哈密顿量描述，其形式为 [31]

$$\hat{H} = \omega_c \left(\frac{1}{2} + \hat{a}^\dagger \hat{a}\right) + \omega_0 \left(\frac{1}{2} + \hat{b}^\dagger \hat{b}\right) + \Omega \left(\hat{a}^\dagger + \hat{a}\right)\left(\hat{b}^\dagger + \hat{b}\right) + G\left(\hat{a}^\dagger + \hat{a}\right)^2, \tag{1}$$

其中，$\hat{a}$ 和 b 分别是微腔和 TO 声子的湮灭算符，Ω 为真空拉比能量。式（1）中的第三项包含反共振项或反旋转项，在超强耦合区不能将其忽略。第四项称为抗磁项，源自光-物质最小耦合中的电磁矢势二次项$\mathbf{A}^2$。准共振跃迁都会对系数 G产生贡献，但本文忽略其他跃迁的影响，因此$G = \Omega^2/\omega_0$ [5]。所考虑的声子极化激元的真空拉比能量可写为 [26]

$$\Omega = g\sqrt{\frac{\omega_0}{\omega_c}}, \tag{2}$$

本文将 g 称为耦合强度。

声子-腔极化激元跃迁能量 $\omega_\pm$可通过双模哈密顿量对角化得到，

$$\omega_+^2 = \omega_0^2 + 2\Omega\sqrt{\omega_c\omega_0}\tan\frac{\theta}{2},$$
$$\omega_-^2 = \omega_0^2 - 2\Omega\sqrt{\omega_c\omega_0}\cot\frac{\theta}{2}, \tag{3}$$

其中，$\theta = \arctan\left(\frac{\omega_c(4G+\omega_c)-\omega_0^2}{\Omega\sqrt{\omega_c\omega_0}}\right) + \frac{\pi}{2}$，（$0 < \theta < \pi$），且$\sqrt[4]{\omega_+ > \omega_-}$ 极化激元能量 $\omega_\pm$ 与经典体介质色散关系 [32],一致

$$\epsilon(\omega) = \frac{c^2k^2}{\omega^2} = \epsilon_\infty + \frac{4\epsilon_\infty g^2}{\omega_0^2 - \omega^2}, \tag{4}$$

其中，$\epsilon(\omega)$ 是六方氮化硼的介电函数，$\mathbf{k}$ 是波矢，且 $\omega_c = kc/\sqrt{\epsilon_\infty}$。

系统对角化后的哈密顿量可写成简单的形式，

$$H = \omega_-\left(\frac{1}{2} + \hat{A}_-^\dagger \hat{A}_-\right) + \omega_+\left(\frac{1}{2} + \hat{A}_+^\dagger \hat{A}_+\right), \tag{5}$$

其中，声子-腔极化激元正则模，即新的准粒子湮灭算符，可引入为

$$\hat{A}_- = -\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\left(\mu + \frac{1}{\mu}\right)\hat{a} + \frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}\left(\nu + \frac{1}{\nu}\right)\hat{b} - \frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\left(\mu - \frac{1}{\mu}\right)\hat{a}^\dagger - \frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}\left(\nu - \frac{1}{\nu}\right)\hat{b}^\dagger, \tag{6}$$

$$\hat{A}_+ = \frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}\left(\nu + \frac{1}{\nu}\right)\hat{a} + \frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\left(\mu + \frac{1}{\mu}\right)\hat{b} + \frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}\left(\nu - \frac{1}{\nu}\right)\hat{a}^\dagger - \frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\left(\mu - \frac{1}{\mu}\right)\hat{b}^\dagger, \tag{7}$$

其中定义了变量 $\mu = \sqrt{\omega_-/\omega_c}$ 和 $\nu = \sqrt{\omega_+/\omega_c}$。为得到这种形式的正则变换，我们还使用了简单关系 $\omega_-\omega_+ = \omega_c\omega_0$，该关系可由式 (4) 推导得到。我们还可以用正交分量表示 $A_\pm$，

$$\sqrt{2}\hat{A}_- = -\cos\frac{\theta}{2}\left(\mu x_1 + \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial x_1}\right) + \sin\frac{\theta}{2}\left(\frac{1}{\nu}x_2 + \nu\frac{\partial}{\partial x_2}\right), \tag{8}$$

$$\sqrt{2}\hat{A}_+ = \sin\frac{\theta}{2}\left(\nu x_1 + \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x_1}\right) + \cos\frac{\theta}{2}\left(\frac{1}{\mu}x_2 + \mu\frac{\partial}{\partial x_2}\right), \tag{9}$$

其中，系统中的厄米正交分量算符定义为 $\hat{x}_1 = \hat{a} + \hat{a}^\dagger/\sqrt{2}$，$\hat{p}_1 = \hat{a} - \hat{a}^\dagger/\sqrt{2}i$，$\hat{x}_2 = \hat{b} + \hat{b}^\dagger/\sqrt{2}$，$\hat{p}_2 = \hat{b} - \hat{b}^\dagger/\sqrt{2}i$。

III. 基态

现在我们考虑能量为 $\omega_{0,0} = \frac{\omega_- + \omega_+}{2}$ 的双模系统的基态福克态$|0_{\hat{A}_-}, 0_{\hat{A}_+}\rangle$。根据公式 ($\sqrt{4\omega_+ + \omega_-^2 = \omega_c + \omega_0^2 + 4g^2}$ $\omega_{0\,0} >$), ( ) $\frac{\omega_c + \omega_0}{2}$ ( )，因此，。基态含有虚光子，因为我们的哈密顿量不守恒光子数。由于它是极化激元激发的真空，$\hat{A}_-|0_{\hat{A}_-}, 0_{\hat{A}_+}\rangle = 0$, $A_+|0_{\hat{A}_-}, 0_{\hat{A}_+}\rangle = 0$，且基态波函数 $\Psi_{0,0}(x_1, x_2) = \langle x_1, x_2|0_{\hat{A}_-}, 0_{\hat{A}_+}\rangle$，我们

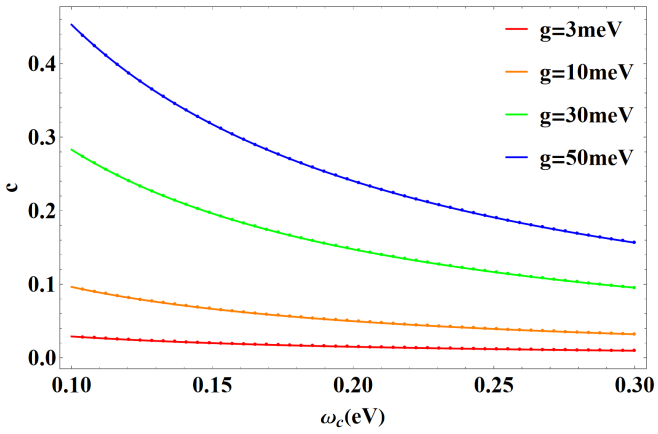

图 1. 高斯波函数中的系数 c 随裸腔能量 ω_c 的变化曲线，其中 $\omega_0 = 169.1$ meV，且 g 取不同值。

可以得到一阶微分方程

$$\left[-\cos\frac{\theta}{2}\left(\mu x_1+\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)+\sin\frac{\theta}{2}\left(\frac{1}{\nu}x_2+\nu\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\right]\Psi_{0,0}(x_1,x_2)=0, \tag{10}$$

$$\left[\sin\frac{\theta}{2}\left(\nu x_1+\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)+\cos\frac{\theta}{2}\left(\frac{1}{\mu}x_2+\mu\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\right]\Psi_{0,0}(x_1,x_2)=0. \tag{11}$$

因此，通过求解这些方程，可以计算出基态在正交空间中的归一化双模高斯波函数，

$$\Psi_{0,0}(x_1,x_2)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(ax_1^2+bx_2^2+2cx_1x_2\right)\right), \tag{12}$$

其系数为实数

$$a=\mu^2\cos^2\frac{\theta}{2}+\nu^2\sin^2\frac{\theta}{2},\quad b=\frac{1}{\mu^2}\cos^2\frac{\theta}{2}+\frac{1}{\nu^2}\sin^2\frac{\theta}{2}, \tag{13}$$

and

$$c=\frac{\omega_+-\omega_-}{2\sqrt{\omega_c\omega_0}}\sin\theta=\frac{2\Omega}{\omega_-+\omega_+}, \tag{14}$$

其中我们使用简单关系 $\omega_+^2-\omega_-^2=4\Omega\sqrt{\omega_c\omega_0}/\sin\theta$，该关系可由式（3）推导得到。系数 c直接影响纠缠；对于六方氮化硼的声子频率 $\omega_0=169.1$ meV 和不同的耦合强度 g，我们在图 1 中绘出了它随裸腔能量 ω_c 的变化。由于 $c\neq 0$，双模波函数 $\Psi_{0,0}(x_1,x_2)\neq f_1(x_1)f_2(x_2)$，其中 $f_1[f_2]$ 仅是 $x_1[x_2]$ 的函数。因此我们发现，系统的基态是不可分离的，即处于纠缠态。显然，要实现显著的纠缠，g 不能太小。对于弱耦合，即 $g\to 0$，极化激元正则模退化为腔模和声子模，因此可以预期纠缠程度会降至 0。

我们还可以在正交空间中计算第一激发态，

$$\begin{aligned}\Psi_{1,0}(x_1,x_2)&=A_-^\dagger\Psi_{0,0}(x_1,x_2)\\&=\sqrt{2}\left(-\mu\cos\frac{\theta}{2}x_1+\frac{1}{\nu}\sin\frac{\theta}{2}x_2\right)\Psi_{0,0}(x_1,x_2),\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\Psi_{0,1}(x_1,x_2)&=A_+^\dagger\Psi_{0,0}(x_1,x_2)\\&=\sqrt{2}\left(\nu\sin\frac{\theta}{2}x_1+\frac{1}{\mu}\cos\frac{\theta}{2}x_2\right)\Psi_{0,0}(x_1,x_2),\end{aligned} \tag{16}$$

具有一个极化激元激发。$\Psi_{1,0}(x_1,x_2)$ 是下极化激元的波函数，而 $\Psi_{0,1}(x_1,x_2)$ 表示上极化激元。

IV. 纠缠的定量度量

A. 纠缠熵

对于一般的纯双部量子态，任一子系统的约化密度矩阵的冯·诺依曼熵可作为纠缠熵，用来衡量量子纠缠的程度，并且可以证明二者的数值相同。对于我们的系统，基态密度算符为 $\hat{\rho}=|0_{A_-},0_{A_+}\rangle\langle 0_{A_-},0_{A_+}|$。由于它是纯态，双部量子态的熵为 $S(\hat{a},b)=0$，而约化密度矩阵的熵相同，即 $S(\hat{a})=S(b)$[33]。基态是高斯态，因此每个模式的状态都是混合高斯态，在正交空间中具有高斯维格纳函数，

$$W(x,p)=\frac{1}{2\pi\sqrt{\alpha\beta-\gamma^2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\alpha x^2+\beta p^2-2\gamma xp}{\alpha\beta-\gamma^2}\right), \tag{17}$$

其中方差为 $\alpha=\langle\hat{p}^2\rangle$, $\beta=\langle\hat{x}^2\rangle$, $\gamma=\frac{1}{2}\langle\hat{x}\hat{p}+\hat{p}\hat{x}\rangle$，且无位移，即 $\langle\hat{x}\rangle=\langle\hat{p}\rangle=0$。那么，任一模式的约化密度算符的熵表达式可写为 [33, 34]

$$S=k_B\left[(\sigma+1)\ln(\sigma+1)-\sigma\ln\sigma\right], \tag{18}$$

其中 k_B 为玻尔兹曼常数，且

$$\sigma=\left(\alpha\beta-\gamma^2\right)^{1/2}-\frac{1}{2}. \tag{19}$$

在我们的基态中，

$$\begin{aligned}&\langle\hat{x}_1^2\rangle=\langle\hat{p}_2^2\rangle=\frac{b}{2},\qquad\langle\hat{x}_2^2\rangle=\langle\hat{p}_1^2\rangle=\frac{a}{2},\\&\frac{1}{2}\langle\hat{x}_1\hat{p}_1+\hat{p}_1\hat{x}_1\rangle=\frac{1}{2}\langle\hat{x}_2\hat{p}_2+\hat{p}_2\hat{x}_2\rangle=0,\end{aligned} \tag{20}$$

并利用可由式（13）和式（14）推导出的简单关系 $ab=1+c^2$，显然参数 $\sigma=\frac{1}{2}\left(\sqrt{c^2+1}-1\right)=\sinh^2\left(\frac{r}{2}\right)$，其中我们令 $c=\sinh r$。因此，纠缠熵可以写成仅依赖于 c 的形式，

$$\begin{aligned}S/k_B&=\sqrt{c^2+1}\ln\frac{\sqrt{c^2+1}+1}{c}+\ln\frac{c}{2}\\&=\cosh r\ln\left(\coth\frac{r}{2}\right)+\ln\left(\frac{\sinh r}{2}\right).\end{aligned} \tag{21}$$

当耦合强度 $g\to 0$ 时，由于 $\sigma\to 0$，我们得到纠缠熵 $S\to 0$。图 2 展示了六方氮化硼的声子频率 $\omega_0=169.1$ meV 时，纠缠熵随裸腔能量 ω_c 的变化，以及不同耦合强度 g 下的结果。随着耦合强度增大，纠缠熵也随之增大，这与预期一致。

B. 对数负性参数

Simon [35], 提出了用于判定双体连续变量态是否可分的 Peres-Horodecki可分性判据。对于方差矩阵为 V 的双模高斯态，该判据可简化为一组完备的 Sp(2, R)$\otimes$Sp(2, R) 不变量所满足的不等式，其中 V。方差矩阵 V 的元素为

$$V_{ij} = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\hat{\rho}\left\{\hat{\xi}_i, \hat{\xi}_j\right\}\right), \tag{22}$$

其中不存在位移， ξ = 为双模系统的四维向量 $\hat{x}_1$, $\hat{p}_1$, $\hat{x}_2$, $\hat{p}_2$。协方差矩阵的形式为 $V = \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix}$, 不变量为 det A、det B、det C和 det V。对于纯高斯态, det $V = \frac{1}{16}$, 且 det A + det B + 2 det $C = \frac{1}{2}$ [30]。

Peres-Horodecki可分性判据指出，可分密度算符经过部分转置后必然变为一个非负算符，而对数负性参数不过是该判据的定量版本，用于量化新的密度算符偏离非负矩阵的程度。

与密度算符部分转置相关联的协方差矩阵 V 的两个辛特征值可推导如下 [30, 36],

$$\tilde{\nu}_{\pm} = \sqrt{\frac{\tilde{\Delta}(V) - \sqrt{\tilde{\Delta}(V)^2 - 4\det V}}{2}}, \tag{23}$$

其中 $\tilde{\Delta}(V)$ = det A + det B − 2 det C。等价于 Simon 提出的判据，$\nu_- < \frac{1}{2}$ 是双模高斯态发生纠缠的充要条件。在我们的基态中，Sp(2, R) $\otimes$ Sp(2, R) 不变量已计算,

$$\det A = \det B = \frac{1}{4}(1 + c^2), \qquad \det C = -\frac{1}{4}c^2, \tag{24}$$

因此 $\tilde{\Delta}(V) = \frac{1}{2} + c^2$,

$$\tilde{\nu}_- = \frac{1}{2}(\sqrt{c^2 + 1} - c) = \frac{1}{2}e^{-r}. \tag{25}$$

由于我们的系数 $c > 0$, 因此 $\tilde{\nu}_- < \frac{1}{2}$, 基态波函数处于纠缠态。当耦合强度$g \to 0$, 即 $c \to 0$时，我们有 $\tilde{\nu}_- = \frac{1}{2}$, 此时态变为可分离态。对数负性 $E_N(\rho)$ 用于衡量量子纠缠的程度,

$$E_N(\rho) = \max[0, -\log_2(2\tilde{\nu}_-)]. \tag{26}$$

图3展示了六方氮化硼的 $\omega_0 = 169.1$ meV 条件下，对数负性随裸腔能量 ω_c 变化的情况，其中耦合强度 g取不同值。对数负性的变化趋势与纠缠熵非常相似，因此我们可以得出相同结论：弱耦合时几乎不存在纠缠，而在声子-腔相互作用的超强耦合区间内，可以获得大量纠缠。

V. 结论

在实验中，我们可以从透射光谱中测量极化激元能量$\omega_{\pm}$ 。然后，将实验结果与式 (3) 及我们的理论模型相匹配，即可确定系统的耦合强度，并可通过式 (14) 轻松求得系数c 。由于纠缠熵和对数负性完全由系数 c 决定，我们可以按照这些步骤对基态中的量子纠缠进行可能的定量测量。需要指出的是，我们不讨论第一

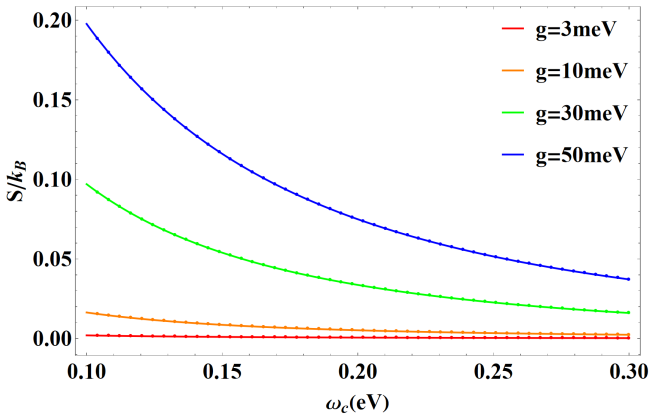

图2. 纠缠熵 S/k_B 随裸腔能量 ω_c 变化， $\omega_0 = 169.1$ 为 meV，g取不同值。

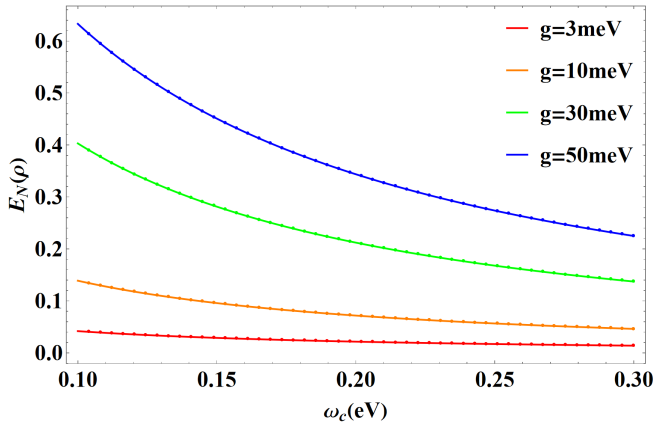

图3. 对数负性 $E_N(\rho)$ 随裸腔能量 ω_c 变化的曲线，其中 $\omega_0 = 169.1$ meV，且 g取不同值。

激发态中的纠缠。尽管这些态并不处于超强耦合区，它们仍表现出纠缠。

虽然我们的理论模型以腔体中的声子极化激元为核心，但也可以扩展到其他类型的极化激元。将我们的结论应用于激子极化激元是可行的 [16], ，但需要注意的是，应假设为正入射，即入射角 θ 必须设为零。我们还应忽略空间色散，此时真空拉比能量的表达式变为 $\Omega = \omega_0\sqrt{\frac{\pi\chi\omega_0}{\omega_c\epsilon_\infty}}$，其中 χ 表示光子与激子振子之间的耦合常数 [26, 28, 32]。由此可以建立 g 与 χ 之间的关系，具体为 $g = \omega_0\sqrt{\frac{\pi\chi}{\epsilon_\infty}}$。另一个例子是 —— —— 将我们的理论应用于等离激元极化激元。正如近期一项研究所探讨的 [15], ，真空拉比能量 Ω 与腔模的能量无关 ω_c。因此，我们可以修改理论中的相互作用参数，即令 $\Omega = g$。这一修改得出了相同的结论：基态中的量子纠缠熵随耦合强度增大而增加。

致谢

我们感谢美国空军科学研究办公室（资助编号 FA-9550-20-1-0366）和罗伯特·A·韦尔奇基金会（ A-1943-20210327）的支持。

[1] S. Haroche 和 J.-M. Raimond, *Exploring the Quantum:Atoms, Cavities, and Photons* (牛津大学出版社, 纽约, 2006年). [2] W. Becker, F. Grasbon, R. Kopold, D. B. Milo˘sevi´c, G. G. Paulus, 和 H. Walther, 阈上电离：从经典特征到量子效应, Adv. Atom. Molec. Opt. Phys. **48**, 35 (2002年). [3] G. S. Agarwal, 强耦合原子-腔系统的光谱学：专题综述, J. Mod. Opt. **45**, 449 (1998年). [4] P. Forn-D´ıaz, L. Lamata, E. Rico, J. Kono, 和 E. Solano, 光-物质相互作用的超强耦合区, 《现代物理评论》**91**, 025005 (2019年). [5] A. F. Kockum, A. Miranowicz, S. De Liberato, S. Savasta, 和 F. Nori, 光与物质之间的超强耦合, Nat. Rev. Phys. **1**, 19 (2019年). [6] C. Leroux, L. C. G. Govia, 和 A. A. Clerk, 通过反压缩增强腔量子电动力学：合成超强耦合, 《物理评论快报》**120**, 093602 (2018年). [7] W. Qin, A. Miranowicz, P.-B. Li, X.-Y. L¨u, J. You, 和 F. Nori, 利用参量放大实现增强倍增的光-物质相互作用、协作性和稳态纠缠, 《物理评论快报》**120**, 093601 2018( ). [8] R. Guti´errez-J´auregui 和 G. S. Agarwal, 通过其与置于参量放大器腔中的原子的同构关系探测 Jaynes-Cummings-Rabi模型的谱, 《物理评论A辑》**103**, 023714 (2021年). [9] G. S. Agarwal, 腔中里德伯原子的微波吸收中的真空场拉比分裂, 《物理评论快报》**53**, 1732 (1984年). [10] Y. Tabuchi, S. Ishino, T. Ishikawa, R. Yamazaki, K. Usami, 和 Y. Nakamura, 在量子极限下杂化铁磁磁振子与微波光子, 《物理评论快报》**113**, 083603 (2014年). [11] B. Yao, Y. S. Gui, J. W. Rao, S. Kaur, X. S. Chen, W. Lu, Y. Xiao, H. Guo, K. P. Marzlin, 和 C. M. Hu, 反馈耦合腔中的协同极化激元动力学, 自然·通讯**8**, 1437 (2017年). [12] X. Liu, T. Galfsky, Z. Sun, F. Xia, E.-c. Lin, Y.-H. Lee, S. K´ena-Cohen, 和 V. M. Menon, 二维原子晶体中的强光-物质耦合, Nat. Photonics **9**, 30 (2015 年). [13] M. Barra-Burillo, U. Muniain, S. Catalano, M. Autore, F. Casanova, L. E. Hueso, J. Aizpurua, R. Esteban 和 R. Hillenbrand，从弱声子–光子耦合到超强声子–光子耦合区间的微腔声子极化激元，自然·通讯 **12**, 6206 (2021)。[14] P.-H. Ho, D. B. Farmer, G. S. Tulevski, S.-J. Han, D. M. Bishop, L. M. Gignac, J. Bucchignano, P. Avouris 和 A. L. Falk，结晶碳纳米管薄膜中本征超强的等离激元–激子相互作用，美国国家科学院院刊 **115**, 12662 (2018)。[15] D. G. Baranov, B. Munkhbat, E. Zhukova, A. Bisht, A. Canales, B. Rousseaux, G. Johansson, T. J. Antosiewicz 和 T. Shegai, 环境条件下纳米颗粒等离激元与腔光子的超强耦合，自然·通讯 **11**, 2715 (2020)。[16] S. K´ena-Cohen, S. A. Maier 和 D. D. C. Bradley，金属包覆有机半导体微腔中超强耦合的激子–极化激元，先进光学材料 **1**, 827 2013( )。[17] S. Gambino, M. Mazzeo, A. Genco, O. D. Stefano, S. Savasta, S. Patan`e, D. Ballarini, F. Mangione, G. Lerario, D. Sanvitto 和 G. Gigli, 探索超强耦合区间下的光–物质相互作用现象，ACS 光子学 **1**, 1042 (2014)。[18] A. Genco, A. Ridolfo, S. Savasta, S. Patan`e, G. Gigli 和 M. Mazzeo，在超强耦合区间工作的明亮香豆素基有机发光二极管极化激元，先进光学材料 **6**, 1800364 (2018)。[19] M. Held, A. Graf, Y. Zakharko, P. Chao, L. Tropf, M. C. Gather 和 J. Zaumseil，高迁移率聚合物中电泵浦近红外激子极化激元的超强耦合，先进光学材料 **6**, 1700962 (2018)。[20] W. Gao, X. Li, M. Bamba 和 J. Kono，通过碳纳米管微腔激子–极化激元中的例外点实现弱耦合与超强耦合之间的连续转变，自然·光子学 **12**, 362 (2018)。[21] G. Scalari, C. Maissen, D. Tur˘cinkov´a, D. Hagenm¨uller, S. D. Liberato, C. Ciuti, C. Reichl, D. Schuh, W. Wegscheider, M. Beck 和 J. Faist，二维电子气回旋跃迁与太赫兹超材料的超强耦合，科学 **335**, 1323 (2012)。[22] K. Bennett, M. Kowalewski 和 S. Mukamel，光学腔中分子极化激元的新型光化学，法拉第讨论 **194**, 259 (2016)。

[23] S.-A. Biehs, C. Xu 和 G. S. Agarwal，双曲超材料上发射体集合的强耦合，《光学杂志》**20**, 045601 (2018)。[24] P. A. Thomas, K. S. Menghrajani 和 W. L. Barnes，无腔超强光-物质耦合，《物理化学快报》**12**, 6914 (2021)。[25] P. Yeh, *Optical Waves in Layered Media* (约翰·威立父子出版公司编, 纽约，1988)。[26] J. J. Hopfield，晶体复介电常数中激子贡献的理论，《物理评论》**112**, 1555 (1958)。[27] C. Ciuti, G. Bastard 和 I. Carusotto，子带间腔极化激元场的量子真空性质，《物理评论B辑》**72**, 115303 (2005)。[28] M. Artoni 和 J. L. Birman，极化激元波的量子光学性质，《物理评论B辑》**44**, 3736 (1991)。[29] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki 和 K. Horodecki，量子纠缠，《现代物理评论》**81**, 865 (2009)。

[30] G. Vidal 和 R. Werner，可计算的纠缠度量，《物理评论A辑》**65**，032314（2002年）。[31] S. De Liberato，深强耦合区中的光-物质解耦：珀塞尔效应的失效，《物理评论快报》**112**，016401（2014年）。[32] A. Quattropani、L. C. Andreani 和 F. Bassani，具有空间色散的极化激元量子理论：精确解，《新物理评论D辑》**7**，55（1986年）。[33] R. Rendell 和 A. Rajagopal，纯双模高斯态的纠缠，《物理评论A辑》**72**，012330（2005年）。[34] G. S. Agarwal，熵、维格纳分布函数以及耦合谐振子系统趋近平衡态的过程，《物理评论A辑》**3**，828（1971年）。[35] R. Simon，连续变量系统的Peres-Horodecki 可分性判据，《物理评论快报》**84**，2726（2000年）。[36] G. S. Agarwal 和 S. Chaturvedi，放大器的量子噪声达到何种程度会损害纠缠，《光学通信》**283**，839（2010年）。