arXiv:2304.00694v1 [eess.SY] 3 Apr 2023

带切换的非线性负虚系统⋆

Kanghong Shi *、Ian R. Petersen *、Igor G. Vladimirov *

*工程学院，工程与计算机科学学院，澳大利亚国立大学，澳大利亚堪培拉 ACT 2601。kanghong.shi@anu.edu.au、ian.petersen@anu.edu.au、igor.vladimirov@anu.edu.au。

摘要：本文将非线性负虚（NI）系统理论扩展至切换系统。定义了切换非线性负虚系统和切换非线性输出严格负虚（OSNI）系统。我们证明，两个切换非线性负虚系统的互连仍然是切换非线性负虚系统。在一定假设下，切换非线性负虚系统与切换非线性 OSNI 系统的互连是渐近稳定的。随后通过一个数值示例说明了这一稳定性结果。

关键词：非线性负虚系统、切换系统、鲁棒控制、非线性系统、储能函数

1. 引言

负虚（NI）系统理论由Lanzon and Petersen（2008）提出，此后受到广泛关注；参见Bhikkaji et al.（2011）；Mabrok et al.（2014）；Petersen and Lanzon（2010）；Shi et al.（2021b）；Song et al.（2012）；Wang et al.（2015）；Xiong et al.（2009，2010）等。受柔性结构鲁棒控制的推动，Halim and Moheimani（2001）；Pota et al.（2002）；Preumont（2018），NI系统理论采用正位置反馈控制，因为在无法测量速度时，常用的负速度反馈控制可能并不适用。NI系统可视为一个正实（PR）系统与一个积分器的串联。典型的机械NI系统是由力执行器和位置传感器共置的系统。与相对阶可为零或一的PR系统相比（例如参见Brogliato et al.（2007）），NI系统的相对阶可为零、一或二，Shi et al.（2021a）。粗略而言，如果一个方形实有理真传递矩阵 $F(s)$ 是稳定的，并且 $j(F(j\omega) - F(j\omega)^*) \geq 0$ 对于所有 $\omega \geq 0$ 均成立，则称其为NI系统。NI系统理论已应用于许多领域，包括纳米定位控制Das et al.（2014a，b，2015）；Mabrok et al.（2013），以及轻阻尼结构的控制Bhikkaji et al.（2011）；Cai and Hagen（2010）；Rahman et al.（2015）等。

鉴于许多控制系统都是非线性的，Ghallab et al. (2018) 将 NI 系统理论扩展到了非线性系统。随后，Shi et al. (2021年（c）) 扩展了非线性 NI 系统的定义，使其涵盖多输入多输出（MIMO）系统。之后，Shi et al. (2023年) 再次扩展了该定义，使其适用于具有自由体运动的系统。更准确地说，一个系统——被称为非线性 NI 系统，当且仅当存在一个半正定函数 $V(x)$，使其时间导数满足 $\dot{V}(x) \leq u^T\dot{y}$，其中 x、u和y分别为系统的状态、输入和输出。在某些假设下，非线性 NI 系统与非线性输出严格负虚（OSNI）系统的闭环互连（例如，线性输出严格负虚系统可参见 Bhowmick andLanzon (2019)；Bhowmickand Patra (2017)）是渐近稳定的。

切换系统是混合系统中的一个重要类别，因许多现实世界中的动态系统具有混合特性而备受关注；例如，参见Brockett(1993)；Liberzon (2003)。此类系统由连续时间系统和离散时间切换事件构成，广泛应用于控制领域DeCarlo 等人(2000)；Narendra 等人(2003)；Sun (2006)。此外，采用切换控制器能够提升控制性能，这也推动了对切换系统的研究Deenen 等人(2017)；Heertjes 等人(2019)；Kolmanovskyand Sun (2006)；Skafidas 等人(1999)。

关于切换系统的稳定性问题已在许多书籍和论文中针对一般系统进行了研究（例如，参见 Goebel 等人 (2009年)；Liberzon (2003年)；Liberzon 和 Morse (1999年)，也专门针对包括无源系统在内的耗散系统进行了研究 Chen 和 Saif(2005)；Zhao 和 Hill (2008年（a），b)。然而，针对切换非线性负虚系统的控制问题尚未得到研究。由于非线性负虚系统理论扩展了无源性理论，使系统能够具有相对阶二，而此类系统在许多控制应用中都有出现（参见Petersen(2016及其中的参考文献），因此值得研究切换非线性负虚系统这一类系统及其相应的稳定性问题。

⋆本研究得到澳大利亚研究委员会资助，资助项目编号为 DP190102158。

本文将非线性负虚系统理论扩展到切换系统。我们给出了切换非线性负虚系统和 OSNI 系统的定义。若一个切换非线性系统中所有被切换到的子系统均为 NI，且切换序列中各子系统的储能函数均不增，则称该系统为 NI。切换非线性 OSNI 系统的定义类似。研究表明，在考虑外部输入和输出时，两个切换非线性负虚（OSNI）系统的闭环互连仍然是切换 NI（OSNI）系统。在零输入下，两个切换非线性负虚系统的互连在李雅普诺夫意义下稳定。本文的主要结果是，在一定假设下，切换非线性负虚系统与切换非线性 OSNI 系统的闭环互连渐近稳定。通过一个实例说明了这一稳定性结果：某个切换非线性负虚控制器使一个非线性质量-弹簧-阻尼器系统渐近稳定化。

本文其余部分安排如下：第2节给出了无切换非线性负虚系统和 OSNI 系统的定义。第3节定义了切换非线性负虚系统和 OSNI 系统，并研究了两个带有外部输入的切换非线性负虚系统互连的负虚性质。本文的主要结果在第 4 节给出，其中研究了切换非线性负虚系统互连的稳定性。第 5 节通过一个控制示例说明稳定性结果，其中切换非线性 NI控制器使一个非线性质量-弹簧-阻尼系统稳定。第6节总结全文。

符号说明：本文采用标准符号。 $\mathbb{R}$表示实数集。 $\mathbb{N}$ 表示非负整数集。 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 表示维数为 $m\times n$的实矩阵空间。 A^T和 A^* 分别表示矩阵A的转置和共轭转置。$(\cdot)$表示给定向量或标量信号的常数值。 $\|\cdot\|$ 表示向量的欧几里得范数。 C^k 表示 k 次连续可微函数类。

2. 预备知识

考虑以下一般非线性系统：

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \tag{1a}$$
$$y(t) = h(x(t)), \tag{1b}$$

其中， $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 为状态， $u(t) \in \mathbb{R}^p$ 为局部可积输入， $y(t) \in \mathbb{R}^p$ 为输出， $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ 为利普希茨连续函数， $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ 为 C^1 类函数。

定义 1. Ghallabet al. (2018); Shi等（2021c）） 系统(1)称为非线性负虚系统，若存在半正定储能函数 V：$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 属于 C^1 类，使得对于任意局部可积输入 u 以及任意满足系统 (1) 的解 x，

$$\dot{V}(x(t)) \le u(t)^T \dot{y}(t), \tag{2}$$

对所有 $t \ge 0$ 均成立。

定义 2. 如果存在一个半正定储能函数 V： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，则称系统 (1) 为非线性输出严格负虚（OSNI）系统。

其属于 C^1 类，且存在一个标量 $\epsilon > 0$，使得对于任意局部可积的输入以及 (1) 的任意解，

$$\dot{V}(x(t)) \le u(t)^T \dot{y}(t) - \epsilon \|\dot{y}(t)\|^2, \tag{3}$$

对所有 $t \ge 0$ 均成立。在这种情况下，我们还称系统 (1) 为非线性 OSNI 系统，其输出严格度为 ϵ。

3. SWITCHED NONLINEAR NI SYSTEMS

本节中，我们给出切换系统的非线性负虚和 OSNI 性质的定义。我们表明，考虑外部输入和输出时，两个切换非线性负虚系统的正反馈互联也构成一个切换非线性负虚系统。对于切换非线性输出严格无源系统，也有类似的结果。

考虑如下形式的连续时间切换系统（例如，参见 Liberzon (2003年); Liberzon 和 Morse(1999 年); Lin 和 Antsaklis (2009 年))

$$\dot{x} = f_\sigma(x, u), \tag{4a}$$
$$y = h(x), \tag{4b}$$

其中， $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 为绝对连续状态， $u(t) \in \mathbb{R}^p$ 为局部可积输入， $y(t) \in \mathbb{R}^p$ 为输出。这里， $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ 为一类 C^1 函数，且$\{f_i: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n, i \in \mathcal{I}\}$ 为由指标集 $\mathcal{I} = \{1, 2, \cdots, N\}$参数化的一族利普希茨连续函数。切换信号 $\sigma: [0, \infty) \to \mathcal{I}$为时间的分段常值函数。指标 $i = \sigma(t)$ 称为时刻 t的激活模式。我们假设 σ处处右连续；即，对于每个 $t \ge 0$， $\sigma(t) = lim_{\tau \to t^+} \sigma(\tau)$。一般而言， σ 在时刻 t 的取值可以依赖于 t、 $x(t)$ 或二者，也可以通过环路中带有记忆的混合反馈生成。由于(4)的状态 $x(t)$是时间的绝对连续函数，因此其在切换时刻不会发生跳变。我们假设系统在任意有限时间区间内仅切换有限次；即，不存在抖振。于是，我们可以用 $\{(i_0, t_0), (i_1, t_1) \cdots, (i_k, t_k) \cdots\}, (k \in \mathbb{N})$ 表示切换指标序列。这里， t_0 为初始时刻， $\mathbb{N}$ 表示非负整数集合。这意味着，在时刻t_k，系统的状态方程变为 $\dot{x} = f_{i_k}(x, u)$。注意，切换系统具有公共状态、公共输入和公共输出，而系统的动态方程在每个切换时刻切换到另一个映射 f。

现在，我们将切换非线性负虚系统定义如下。

定义 3. 若切换非线性系统 (4) 满足以下两个条件，则称其为切换非线性负虚系统：

对于所有 $i \in \mathcal{I}$，存在半正定函数$V_i(x)$，使得对于任意输入 u 以及满足 $\sigma = i$ 的 (4) 的任意解 x，

$$\frac{\partial V_i(x)}{\partial x} f_i(x, u) \le u^T \frac{\partial h(x)}{\partial x} f_i(x, u). \tag{5}$$

对于所有 $k \in \mathbb{N}$， $V_{i_{k+1}}(x) \le V_{i_k}(x)$ 对所有 $x \in \mathbb{R}^n$ 均成立。

类似地，我们将切换非线性 OSNI 系统定义如下。

定义 4. 若以下两个条件成立，则称切换非线性系统 (4) 为切换非线性 OSNI 系统：

1. 对所有 $i \in \mathcal{I}$，存在半正定函数$V_i(x)$，使得对于任意输入 $u \in \mathbb{R}^p$ 以及满足 $\sigma = i$ 的 (4) 的任意解$x \in \mathbb{R}^n$，

$$\frac{\partial V_i(x)}{\partial x} f_i(x,u) \le u^T \frac{\partial h(x)}{\partial x} f_i(x,u) - \epsilon \| \frac{\partial h(x)}{\partial x} f_i(x,u) \|^2. \tag{6}$$

2. 对所有 $k \in \mathbb{N}$, $V_{i_{k+1}}(x) \le V_{i_k}(x)$，对所有 $x \in \mathbb{R}^n$。

注 1. 定义 3 和 4 指出，如果每个子系统都满足定义 1 和 2 中给出的常规非线性 NI（OSNI）系统定义，并且系统以这样的模式切换，使得切换指标序列中各子系统的储能函数不递增，则该系统为切换非线性 NI（OSNI）系统。注意，不等式 (5) 和 (6) 分别对应不等式 (2) 和 (3)。这里使用方向导数表示时间导数，以便为与当前切换指标 i_k 对应的子系统指定 NI 和 OSNI 不等式。

下面我们研究如图 1 所示的两个具有外部输入和输出的切换非线性 NI（OSNI）系统互连后的切换非线性 NI（OSNI）性质。下文中，“波浪号”即 $\tilde{\cdot}$ 表示与系统 H_2 相关的变量。

ag 替换内容

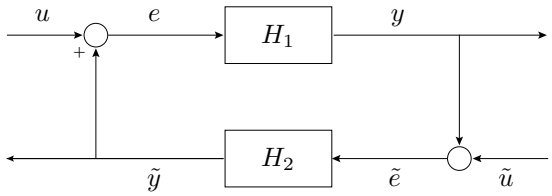

图 1. 切换非线性系统 H_1 和 H_2 的闭环互连，外部输入为 u、$\tilde{u}$，外部输出为 y、$\tilde{y}$。

假设图 1 所示闭环互连中的切换系统 H_1 和 H_2 具有同步切换时刻，这不失一般性。图 2 所示的下述互连也适用这一假设。

定理 1. 假设图 1 所示正反馈互连中的系统 H_1 和 H_2 是形式为 (4) 的切换非线性 NI（OSNI）系统，其状态分别为 $x \in \mathbb{R}^n$、$\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$，输入分别为 e、$\tilde{e} \in \mathbb{R}^p$，输出分别为 y、$\tilde{y} \in \mathbb{R}^p$。此外，假设对于所有 $i_k \in \mathcal{I}$，

PSfrag 替换 nts

$$V_{i_k}(x) + \tilde{V}_{i_k}(\tilde{x}) - h(x)^T \tilde{h}(\tilde{x}) \ge 0, \tag{7}$$

对于所有 $x \in \mathbb{R}^n$、$\tilde{x} \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}$，其中 $V_{i_k}(x)$ 和 $\tilde{V}_{i_k}(\tilde{x})$ 是半正定储能函数，分别满足系统 H_1 和 H_2的定义 3（定义 4）。那么，以 $\widehat{u} = \begin{bmatrix} u^T & \tilde{u}^T \end{bmatrix}^T$为输入、$\widehat{y} = \begin{bmatrix} y^T & \tilde{y}^T \end{bmatrix}^T$ 为输出的闭环系统也是切换非线性 NI（OSNI）系统。

证明。我们首先证明该定理中的 OSNI 部分。设 H_1 和 H_2 是经过切换的非线性 OSNI 系统。根据定义 4，对于每个切换指标 $i_k \in \mathcal{I}$，存在半正定函数 $V_{i_k}(x)$ 和 $\tilde{V}_{i_k}(\tilde{x})$，使得

$$\frac{\partial V_{i_k}(x)}{\partial x} f_{i_k}(x,e) \le e^T \frac{\partial h(x)}{\partial x} f_{i_k}(x,e) - \epsilon \| \frac{\partial h(x)}{\partial x} f_{i_k}(x,e) \|^2;$$
$$\frac{\partial \tilde{V}_{i_k}(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}} \tilde{f}_{i_k}(\tilde{x},\tilde{e}) \le \tilde{e}^T \frac{\partial \tilde{h}(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}} \tilde{f}_{i_k}(\tilde{x},\tilde{e}) - \tilde{\epsilon} \| \frac{\partial \tilde{h}(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}} \tilde{f}_{i_k}(\tilde{x},\tilde{e}) \|^2,$$

for all e, $\tilde{e}$ and x, $\tilde{x}$. In order to satisfy the conditions in Definition 4, we construct the storage function for the closed-loop system to be

$$W_{i_k}(x,\tilde{x}) = V_{i_k}(x) + \tilde{V}_{i_k}(\tilde{x}) - h(x)^T \tilde{h}(\tilde{x}) \tag{8}$$

对于切换指标 $i_k \in \mathcal{I}$。根据 (7)，函数 $W_{i_k}(x,\tilde{x})$ 是半正定的。对于定义 4 中的条件 1，我们有

$$\begin{aligned} \dot{W}_{i_k}(x,\tilde{x}) &= \dot{V}_{i_k} + \dot{\tilde{V}}_{i_k} - \dot{h}(x)^T \tilde{h}(\tilde{x}) - h(x)^T \dot{\tilde{h}}(\tilde{x}) \\ &\le e^T \dot{y} - \epsilon \|\dot{y}\|^2 + \tilde{e}^T \dot{\tilde{y}} - \tilde{\epsilon} \|\dot{\tilde{y}}\|^2 - \dot{y}^T \tilde{y} - y^T \dot{\tilde{y}} \\ &= (u+\tilde{y})^T \dot{y} - \epsilon \|\dot{y}\|^2 + (\tilde{u}+y)^T \dot{\tilde{y}} - \tilde{\epsilon} \|\dot{\tilde{y}}\|^2 \\ &\quad - \dot{y}^T \tilde{y} - y^T \dot{\tilde{y}} \\ &= u^T \dot{y} + \tilde{u}^T \dot{\tilde{y}} - \epsilon \|\dot{y}\|^2 - \tilde{\epsilon} \|\dot{\tilde{y}}\|^2 \\ &= \widehat{u}^T \dot{\widehat{y}} - \epsilon_{min} \|\dot{\widehat{y}}\|^2, \end{aligned} \tag{9}$$

其中也采用了图 1 所示的系统设置 $e = u + \tilde{y}$ 和 $\tilde{e} = \tilde{u} + y$。这里，$\epsilon_{min} = \min\{\epsilon, \tilde{\epsilon}\} > 0$是$H_1$ 与 H_2 互连的输出严格性等级。对于定义 4 中的条件 2，我们有

$$W_{i_{k+1}}(x,\tilde{x}) \le W_{i_k}(x,\tilde{x}) \tag{10}$$

~对所有 $k \in \mathbb{N}$均成立，因为 $V_{i_{k+1}}(x) \le V_{i_k}(x)$，$V_{i_{k+1}}(\tilde{x}) \le$ ~$V_{i_k}(\tilde{x})$，且 $h(x)$ 和 $h(\tilde{x})$ 均连续。因此，由于满足定义 4 中的条件1和条件2，图 1 所示的系统是一个切换非线性 OSNI 系统。当 H_1 和 H_2 均为切换非线性负虚系统时，其互连具有切换非线性负虚性质的证明，可通过对 $\epsilon = \tilde{\epsilon} = 0$的极限情形进行类似分析得出。■

4. 切换非线性负虚系统互连的稳定性

本节证明，不含外部输入的两个切换非线性负虚系统互连后是李雅普诺夫稳定的。此外，在某些假设下，切换非线性负虚系统与切换非线性 OSNI 系统互连后是渐近稳定的。

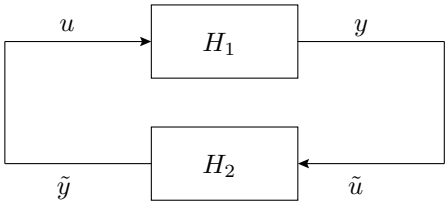

图 2. 切换非线性系统 H_1 和 H_2的闭环互连。

定理2。假设图 2 中互连的系统 H_1 和 H_2 是具有形式 (4) 的切换非线性 NI 系统，其状态分别为 $x \in \mathbb{R}^n$，$\tilde{x} \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}$，输入分别为 $u, \tilde{u} \in \mathbb{R}^p$，输出分别为 $y, \tilde{y} \in \mathbb{R}^p$。此外，假设对于所有$i_k \in \mathcal{I}$，函数

$$V_{i_k}(x) + \tilde{V}_{i_k}(\tilde{x}) - h(x)^T \tilde{h}(\tilde{x}) \tag{11}$$

对所有 $x \in \mathbb{R}^n, \tilde{x} \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}$ 均为正定，其中 $V_{i_k}(x)$ 和 $V_{i_k}(\tilde{x})$ 是储能函数，分别满足系统 H_1 和 H_2 的定义 3。则图 2 所示的 H_1 和 H_2 互连是李雅普诺夫稳定的。

证明。根据定理 1，两个切换非线性负虚系统的互连也是一个切换非线性负虚系统。根据式 (9)，在没有外部输入时，式 (8) 中的函数满足 $W_{i_k}(x,\tilde{x}) \leq 0$。假设式 (11) 给出的函数为正定函数，则可确保对于每个切换指标 i_k，$W_{i_k}(x,\tilde{x})$ 都是一个李雅普诺夫函数。此外，由于 $W_{i_k}(x,\tilde{x})$ 满足式 (10)，因此我们得出结论：对于任意 $t_2 > t_1 \geq 0$，$W_{\sigma(t_2)}(x,\tilde{x}) \leq W_{\sigma(t_1)}(x,\tilde{x})$。因此，$H_1$ 和 H_2的互连是李雅普诺夫稳定的。■

自然会产生这样一个问题：如果 H_1 和 H_2都是切换非线性 OSNI 系统，那么图 2 所示的 H_1 和H_2 的互连是否渐近稳定。事实上，只要系统 H_1 和 H_2 中至少有一个是 OSNI，图 2 中的互连就是渐近稳定的。定理 3 给出了证明，其中需要对系统 H_1 和 H_2 作出若干额外假设。为简化符号表示，在以下两个假设中，我们省略“波浪号”。

假设 I：在任何满足 $t_b > t_a$ 的时间区间 $[t_a, t_b]$ 内，若且唯若 $x(t)$ 保持恒定，则 $h(x(t))$ 保持恒定；即 $h(x(t)) \equiv 0 \iff \dot{x}(t) \equiv 0$。此外，$h(x(t)) \equiv 0 \iff x(t) \equiv 0$。

假设 II：在任何满足 $t_b > t_a$ 的时间区间 $[t_a, t_b]$ 内，只有当 $u(t)$ 保持恒定时，$x(t)$ 才保持恒定；即 $x(t) \equiv \bar{x} \implies u(t) \equiv \bar{u}$。此外，$x(t) \equiv 0 \implies u(t) \equiv 0$。

此外，对于图 3 所示系统 H_1 和 H_2 的级联互联，假设：

假设 III：对于系统 H_1 的任意非零恒定输入 $\bar{u}$，可得到相应的输出 $y(t)$。在图 3 所示的级联互联中，将系统 H_2 的输入设为 $\tilde{u}(t) \equiv y(t)$。如果系统 H_2 的相应输出为恒定值；即 $\tilde{y}(t) \equiv \bar{\tilde{y}}$，则有

$$\bar{u} \neq \bar{\tilde{y}}. \tag{12}$$



图 3. 系统 H_1 与 H_2的级联互联。

注2. 假设 I 和 II 是线性系统标准性质的非线性推广。假设 I 是可观测性假设。假设 II 要求所有输入均参与影响系统动力学，这一假定不失一般性。对于线性系统，假设 II 要求线性系统的实现（A, B, C, D）中的矩阵 B 列满秩。

假设 III 要求图 3 中 H_1 和 H_2 的级联互联系统在非零输入下的稳态输入和输出不同。该假设与定理 3 中的正定性条件构成了直流增益条件的非线性对应形式用于线性 NI 系统稳定性结果中（例如，Lanzon and Petersen (2008)；Petersen和 Lanzon(2010)）。

定理 3. 假设切换非线性 NI 系统 H_1与切换非线性 OSNI 系统 H_2均具有形式 (4)，其状态分别为 $x \in \mathbb{R}^n$、$\tilde{x} \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}$，输入分别为 u、$\tilde{u} \in \mathbb{R}^p$，输出分别为 y、$\tilde{y} \in \mathbb{R}^p$，并按图 2 所示进行正反馈互联。另假设满足假设 I-III，且对于所有 $i_k \in \mathcal{I}$，储能函数

$$W_{i_k}(x,\tilde{x}) := V_{i_k}(x) + \tilde{V}_{i_k}(\tilde{x}) - h(x)^T \tilde{h}(\tilde{x}), \tag{13}$$

对于所有 $x \in \mathbb{R}^n$，该函数均为正定，其中 $V_{i_k}(x)$ 和 $V_{i_k}(\tilde{x})$ 分别是满足系统 H_1 的定义 3 和系统 H_2 的定义 4 的半正定储能函数。因此，图 2 中系统 H_1 和 H_2 的闭环互连是渐近稳定的。

证明。我们采用李雅普诺夫直接法。式 (13) 中定义的储能函数对于所有切换指标 $i_k \in \mathcal{I}$ 均为正定。因此，闭环系统 $W_\sigma(x,\tilde{x})$ 的储能函数是正定的。我们需要证明 $W_\sigma(x,\tilde{x})$ 持续递减直至达到零。证明分为两部分。首先，我们证明对于 $t \in (t_k, t_{k+1})$（其中 $k \in \mathbb{N}$），函数 $W_{i_k}(x,\tilde{x})$ 持续递减，除非 $x = 0$。对 $W_{i_k}(x,\tilde{x})$ 求时间导数，得到

$$\begin{aligned}
&\dot{W}_{i_k}(x,\tilde{x}) \\
&= \dot{V}_{i_k}(x) + \dot{\tilde{V}}_{i_k}(\tilde{x}) - \dot{h}(x)^T \tilde{h}(\tilde{x}) - h(x)^T \dot{\tilde{h}}(\tilde{x}) \\
&= \frac{\partial V_{i_k}(x)}{\partial x} f_{i_k}(x,u) + \frac{\partial \tilde{V}_{i_k}(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}} f_{i_k}(\tilde{x},\tilde{u}) \\
&\quad - \left(\frac{\partial h(x)}{\partial x} f_{i_k}(x,u)\right)^T \tilde{h}(\tilde{x}) - h(x)^T \frac{\partial \tilde{h}(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}} \tilde{f}(\tilde{x},\tilde{u}) \\
&\leq u^T \frac{\partial h(x)}{\partial x} f_{i_k}(x,u) + \tilde{u}^T \frac{\partial \tilde{h}(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}} \tilde{f}_{i_k}(\tilde{x},\tilde{u}) \\
&\quad - \tilde{\epsilon} \left\| \frac{\partial \tilde{h}(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}} \tilde{f}_{i_k}(\tilde{x},\tilde{u}) \right\|^2 - \left(\frac{\partial h(x)}{\partial x} f_{i_k}(x,u)\right)^T \tilde{h}(\tilde{x}) \\
&\quad - h(x)^T \frac{\partial \tilde{h}(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}} \tilde{f}(\tilde{x},\tilde{u}) \\
&= -\tilde{\epsilon} \left\| \frac{\partial \tilde{h}(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}} \tilde{f}_{i_k}(\tilde{x},\tilde{u}) \right\|^2 \leq 0,
\end{aligned} \tag{14}$$

其中等式还用到了闭环设定，即 $u = \tilde{y} = h(x)$和 $\tilde{u} = y = h(x)$。不等式 (14)表明，$W_{i_k}(x,\tilde{x})$是非递增的。现在我们应用LaSalle不变性原理。根据 (14)，只有当 $\left(\frac{\partial h}{\partial \tilde{x}} \tilde{f}_{i_k}\right)(\tilde{x},\tilde{u})$保持为零时，$W_{i_k}(x,\tilde{x})$才会保持为零。这意味着根据假设 I，$\tilde{x}$ 保持不变。根据假设 II，$\tilde{x}$ 保持不变意味着 $\tilde{u}$ 保持不变。考虑图 2 所示的设定$\tilde{u} = y$，我们有 y 也保持不变。这意味着根据假设 I 和 II，x 和 u 都保持不变。因此，系统处于稳态。在这种情况下，输入 $u(t)$、$\tilde{u}(t)$，状态 $x(t)$、$\tilde{x}(t)$以及输出 $y(t)$、$\tilde{y}(t)$都是常向量，我们分别记为 $\bar{u}$、$\bar{\tilde{u}}$、$\bar{x}$、$\bar{\tilde{x}}$、$\bar{y}$、$\bar{\tilde{y}}$。根据假设 III，如果 $\bar{u} \neq 0$，则 $\bar{u} \neq \bar{\tilde{y}}$，这

¯与 $\bar{u}=\tilde{y}$矛盾。这意味着 (14) 只有在$\bar{u}=\tilde{y}=0$时才能成立。根据假设 I 和 II，我们有¯ ¯ ¯ $\tilde{y}=0 \implies \tilde{x}=0 \implies \tilde{u}=\bar{y}=0 \implies \bar{x}=0$。这意味着系统已经处于平衡点。否则，$W_{i_k}(x,\tilde{x})$会持续减小，直至达到零。至此，证明的第一部分完成。

我们还需要证明，在所有切换时刻 t_k，$W_\sigma(x,\tilde{x})$ 都不会增加。在切换时刻 t_{k+1}，切换指标从 i_k 变为 i_{k+1}，这会使 $W_\sigma(x,\tilde{x})$ 从 $W_{i_k}(x(t_{k+1})\ \tilde{x}(t_{k+1}))$ 跳变为$W_{i_{k+1}}(x(t_{k+1})\ \tilde{x}(t_{k+1}))$。注意，状态 x 和 $\tilde{x}$没有跳变。因此，根据式 (13)，我们有

$$\begin{aligned}
&W_{i_{k+1}}(x(t_{k+1}),\tilde{x}(t_{k+1}))-W_{i_k}(x(t_{k+1}),\tilde{x}(t_{k+1}))\\
=&V_{i_{k+1}}(x(t_{k+1}))+\tilde{V}_{i_{k+1}}(\tilde{x}(t_{k+1}))\\
&-h(x(t_{k+1}))^T\tilde{h}(\tilde{x}(t_{k+1}))-V_{i_k}(x(t_{k+1}))\\
&-\tilde{V}_{i_k}(\tilde{x}(t_{k+1}))+h(x(t_{k+1}))^T\tilde{h}(\tilde{x}(t_{k+1}))\\
=&V_{i_{k+1}}(x(t_{k+1}))-V_{i_k}(x(t_{k+1}))+\tilde{V}_{i_{k+1}}(\tilde{x}(t_{k+1}))\\
&-\tilde{V}_{i_k}(\tilde{x}(t_{k+1}))\le 0,
\end{aligned}$$

根据定义 3 和 4 中的条件 2。因此，我们得出结论：储能函数 $W_\sigma(x,\tilde{x})$ 除了在 $(x,\tilde{x})=(0,0)$ 处之外，始终单调递减。由于$W_\sigma(x,\tilde{x})\ge 0$，因此 $W_\sigma(x,\tilde{x})$ 有下界，进而 $W_\sigma(x,\tilde{x})$ 在 $t\to\infty$时趋于极限 c。我们用反证法证明 $c=0$。假设 $c>0$，则可推出，对于所有 $t\ge 0$，$\left[x(t)^T\ \tilde{x}(t)^T\right]^T\neq 0$。在这种情况下，$(x,\tilde{x})$ 收敛到一个极限集 $\mathcal{S}$，使得 $(x,\tilde{x})\in\mathcal{S}$ 蕴含. .
$W_\sigma(x,\tilde{x})=0$。然而，如上所证，$W_\sigma(x,\tilde{x})$ 仅在 $(x,\tilde{x})=(0,0)$ 处为零。这与$\left[x(t)^T\ \tilde{x}(t)^T\right]^T\neq 0$矛盾。因此，$c=0$，且系统渐近稳定。■

注 3. 定理 3 的一个特殊情况是：对于系统 H_1以及系统 H_2，分别存在一个适用于所有切换指标的公共储能函数；也就是说，对所有 $i,j\in\mathcal{I}$，$V_i(\cdot)=V_j(\cdot)$，并且对所有$i,j\in\mathcal{I}$，$V_i(\cdot)=V_j(\cdot)$。尽管这一特殊情况已包含在定理 3 中，但它对切换系统很重要，因为它允许指标集为有限集 $\mathcal{I}$ 的切换系统具有无限且任意的切换序列。因此，我们针对这一情况特别给出一个稳定性结果。

推论 1. 对于定理 3 中的系统设定，假设对所有 $i,j\in\mathcal{I}$，$V_j(\cdot)\ V_i(\cdot)$，并且对所有$i,j\in\mathcal{I}$，$V_j(\cdot)\ V_i(\cdot)$。此外，假设满足假设 I-III，且储能函数定义如下：

$$W(x,\tilde{x}):=V(x)+\tilde{V}(\tilde{x})-h(x)^T\tilde{h}(\tilde{x}),$$

对于所有 $x\in\mathbb{R}^n$、$\tilde{x}\in\mathbb{R}^{\tilde{n}}$，均为正定，其中 $V(x)$~和 $V(\tilde{x})$ 分别是满足系统 H_1 的定义 3 和系统 H_2 的定义 4 的公共半正定储能函数。那么，图 2 中系统 H_1 和 H_2 的闭环互连渐近稳定。

证明。由于推论 1 是定理 3 的一个特殊但重要的情形，其证明可直接由定理 3 的证明得出。■

5. 说明性示例

本节给出一个数值示例，展示第 4 节中切换非线性 NI 系统与切换非线性 OSNI 系统互连的稳定性。这里，我们将一种称为混合积分器-增益系统（HIGS）的状态依赖切换非线性 NI 系统用作控制器，应用于带有非线性弹簧的质量-弹簧-阻尼器系统。HIGS 由 Deenen 等人 (2017) 开发，旨在改善低频扰动抑制性能，并降低高频放大和超调 Heertjes 等人 (2019) 的影响。这通过在积分器模式和增益模式之间设置切换机制来实现。HIGS 的系统模型如下（见 Deenen 等人 (2017)）：

$$\mathcal{H}:\begin{cases}\dot{x}_h(t)=\omega_h e(t), & \text{if } (e(t),u(t),\dot{e}(t))\in\mathcal{F}_1\\ x_h(t)=k_h e(t), & \text{if } (e(t),u(t),\dot{e}(t))\in\mathcal{F}_2\\ u(t)=x_h(t)\end{cases}\tag{15}$$

其中 $x_h(t)\ e(t)\ u(t)\ \in\mathbb{R}$ 分别表示 HIGS 状态、输入和输出。为方便起见，以下省略时间变量。这里，$\dot{e}$ 是输入 e 的时间导数，假设其连续且分段可微。参数 $\omega_h\in[0,\infty)$ 和 $k_h\in(0,\infty)$ 分别是积分器频率和增益值。集合 $\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2\in\mathbb{R}^3$ 决定 HIGS 运行模式；即分别为积分器模式和增益模式。根据构造，$\mathcal{F}=\mathcal{F}_1\cup\mathcal{F}_2$表示扇区 $[0,k_h]$ 如下（参见 Deenen 等人 (2017)）

$$\mathcal{F}=\{(e,u,\dot{e})\in\mathbb{R}^3|\ eu\ge\frac{u^2}{k_h}\},$$

并且 $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$ 定义为

$\mathcal{F}_1:=\mathcal{F}\setminus\mathcal{F}_2$;

$\mathcal{F}_2:=\{(e,u,\dot{e})\in\mathbb{R}^3|u=k_he\quad\text{and}\quad\omega_he^2>k_he\dot{e}\}$.

HIGS 主要工作在积分器模式下。当系统动力学达到 $\mathcal{F}$ 的边界并趋于离开 $\mathcal{F}$时，如果仍处于积分器模式，则会切换到增益模式。

如 Shi et al. (2022) 所示，HIGS (15) 的两种模式满足不等式 (5)，且具有共同的李雅普诺夫函数

$$V(x)=\frac{1}{2k_h}x_h^2.$$

我们考虑如下形式的非线性 OSNI 质弹簧阻尼器系统作为被控对象

$$\begin{aligned}H_1:\quad&\dot{x}_1=x_2,\\&\dot{x}_2=-x_1^3-x_1-x_2+u\\&y=x_1.\end{aligned}\tag{16}$$

该系统是一个非线性 OSNI 系统，其储能函数为

$$V(x)=\frac{1}{4}x_1^4+\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2,$$

该函数满足不等式 (3)。根据定理 3，如果满足所需条件，则通过将形式为 (15) 的 HIGS $\mathcal{H}$ 以正反馈方式连接，如图 2 所示，可使形式为 (16) 的系统 H_1 渐近稳定化。

假设 I 和假设 II 均成立。对于假设 III，给定系统 H_1的任意非零输入 $\bar{u}$，假设 HIGS 输出保持恒定 $x_h=\bar{x}_h$，那么在

积分器模式下，我们有 $e = 0$。这意味着$x_1 \equiv e \equiv 0$。因此，$x_2 = \dot{x}_1 \equiv 0$ 和 $\dot{x}_2 = 0$。由此，$\bar{u} = x_1^3 + x_1 = 0$。在这种情况下，系统必定处于增益模式。我们有 $e = \bar{e} = \frac{1}{k_h}\bar{x}_h$。这意味着$x_1 = \bar{x}_1 = \bar{e} = \frac{1}{k_h}\bar{x}_h$。同理，我们有 $x_2 \equiv 0$ 和 $\dot{x}_2 = 0$，这意味着 $\bar{u} = \bar{x}_1^3 + \bar{x}_1$。因此，我们需要证明

$$\bar{x}_1^3 + \bar{x}_1 \neq k_h \bar{x}_1.$$

通过选择 $k_h \in (0, 1]$, ，除 $\bar{x}_1 = 0$ 外，此不等式均成立。这意味着假设 III 成立。由于 $k_h \leq 1$，因此互连的储能函数为

$$W = \frac{1}{4}x_1^4 + \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2k_h}x_h^2 - x_h x_1$$

是正定的。根据定理 3，系统 H_1 与形式为 (15) 且满足 $k_h \leq 1$ 的 HIGS 互连是渐近稳定的。

通过选择 $k_h = 0.8$ 和 $\omega_h = 20$，并令系统 H_1 具有初始位移 $x_1 = 5$，通过仿真得到系统 H_1 与 HIGS $\mathcal{H}$ 构成的闭环互连的状态轨迹，如图 4 所示。

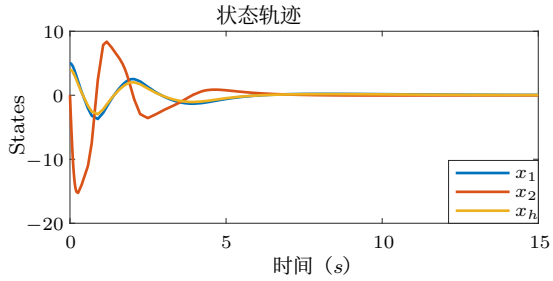

图 4. 由式 (16) 给出的系统 H_1 与由式 (15) 给出的 HIGS $\mathcal{H}$ 构成的闭环互连中状态变量的状态轨迹。

6. 结论

本文将非线性 NI 系统理论扩展至切换系统。我们给出了切换非线性 NI 系统和 OSNI 系统的定义。研究表明，两个具有外部输入和输出的切换非线性 NI 系统的闭环互连仍为切换非线性负虚系统，且该闭环互连在零输入下李雅普诺夫稳定。在某些假设条件下，研究还表明，切换非线性 NI 系统与切换非线性 OSNI 系统的闭环互连在零输入下渐近稳定。通过一个示例说明了这一稳定性结果：一个非线性质量-弹簧-阻尼器系统由一个切换非线性 NI 的 HIGS 控制器实现渐近稳定化。

致谢

作者 Kanghong Shi 感谢 Nastaran Nikooienejad 分享其此前共同撰写论文的仿真文件Shi 等人（2022），本文示例的仿真参考了该文件。

参考文献

Bhikkaji, B., Moheimani, S.R. 和 Petersen, I.R.（2011）。基于负虚方法的共置结构建模与控制。《IEEE/ASME机电一体化汇刊》，17(4)，717–727。Bhowmick, P. 和 Lanzon, A.（2019）。输出严格负虚系统及其与耗散理论的联系。载于《2019年IEEE第58届决策与控制会议》（CDC），6754–6759。IEEE。Bhowmick, P. 和 Patra, S.（2017）。关于线性时不变输出严格负虚部系统。《系统与控制快报》，100，32–42。Brockett, R.W.（1993）。运动控制系统的混合模型。载于《控制论文集》，29–53。施普林格。Brogliato, B., Lozano, R., Maschke, B. 和 Egeland, O.（2007）。耗散系统分析与控制：理论与应用。Cai, C. 和 Hagen, G.（2010）。具有负虚部频率响应的耦合稳定子系统串稳定性分析。《IEEE自动控制汇刊》，55(8)，1958–1963。Chen, W. 和 Saif, M.（2005）。一类切换控制系统的无源性及基于无源性的控制器设计。《IFAC会议论文集》，38(1)，676–681。Das, S.K., Pota, H.R. 和 Petersen, I.R.（2014a）。纳米定位器的MIMO双谐振控制器设计。《IEEE纳米技术汇刊》，14(2)，224–237。Das, S.K., Pota, H.R. 和 Petersen, I.R.（2014b）。压电管扫描器的谐振控制器设计：一种结合负虚方法与小增益的方法。《IEEE控制系统技术汇刊》，22(5)，1899–1906。Das, S.K., Pota, H.R. 和 Petersen, I.R.（2015）。用于纳米定位器阻尼和交叉耦合抑制的多变量负虚控制器设计：一种参考模型匹配方法。《IEEE/ASME机电一体化汇刊》，20(6)，3123–3134。DeCarlo, R.A., Branicky, M.S., Pettersson, S. 和 Lennartson, B.（2000）。混合系统稳定性与可稳定性的观点及研究成果。《IEEE会刊》，88(7)，1069–1082。Deenen, D.A., Heertjes, M.F., Heemels, W. 和 Nijmeijer, H.（2017）。用于提升运动控制跟踪性能的混合积分器设计。载于《2017年美国控制会议》（ACC），2863–2868。IEEE。Ghallab, A.G., Mabrok, M.A. 和 Petersen, I.R.（2018）。将负虚系统理论扩展至非线性系统。载于《2018年IEEE决策与控制会议》（CDC），2348–2353。IEEE。Goebel, R., Sanfelice, R.G. 和 Teel, A.R.（2009）。混合动力系统。《IEEE控制系统杂志》，29(2)，28–93。Halim, D. 和 Moheimani, S.R.（2001）。柔性结构的空间谐振控制：在压电层合梁上的应用。《IEEE控制系统技术汇刊》，9(1)，37–53。Heertjes, M., Irigoyen Perdiguero, N. 和 Deenen, D.（2019）。混合积分器 - 增益系统的鲁棒控制与数据驱动调谐及其在晶圆扫描器中的应用。《国际自适应控制与信号处理杂志》，33(2)，371–387。

Kolmanovsky, I. 和 Sun, J.（2006）。具有逐时约束和扰动输入的网络控制系统多模式切换式指令跟踪。载于《2006年第六届世界智能控制与自动化大会》，第1卷，199–204。IEEE。Lanzon, A. 和 Petersen, I.R.（2008）。负虚部频率响应系统反馈互连的稳定鲁棒性。《IEEE自动控制汇刊》，53(4)，1042–1046。Liberzon, D.（2003）。《系统与控制中的切换》。Springer Science & Business Media。Liberzon, D. 和 Morse, A.S.（1999）。切换系统稳定性与设计中的基本问题。《IEEE控制系统杂志》，19(5)，59–70。Lin, H. 和 Antsaklis, P.J.（2009）。切换线性系统的稳定性与可稳定性：近期成果综述。《IEEE自动控制汇刊》，54(2)，308–322。Mabrok, M.A., Kallapur, A.G., Petersen, I.R. 和 Lanzon, A.（2013）。负虚系统的谱条件及其在纳米定位中的应用。《IEEE/ASME机电一体化汇刊》，19(3)，895–903。Mabrok, M.A., Kallapur, A.G., Petersen, I.R. 和 Lanzon, A.（2014）。将负虚系统理论推广至包含自由体动力学的情形：具有自由体运动的高共振结构控制。《IEEE自动控制汇刊》，59(10)，2692–2707。Narendra, K.S., Driollet, O.A., Feiler, M. 和 George, K.（2003）。使用多模型、切换与调谐的自适应控制。《国际自适应控制与信号处理杂志》，17(2)，87–102。Petersen, I.R.（2016）。负虚系统理论及其应用。《控制年度评论》，42，309–318。Petersen, I.R. 和 Lanzon, A.（2010）。负虚系统的反馈控制。《IEEE控制系统杂志》，30(5)，54–72。Pota, H., Moheimani, S.R. 和 Smith, M.（2002）。智能结构的谐振控制器。《智能材料与结构》，11(1)，1。Preumont, A.（2018）。《主动结构振动控制导论》，第246卷。施普林格。Rahman, M.A., Al Mamun, A., Yao, K. 和 Das, S.K.（2015）。硬盘驱动器伺服系统中反馈谐振补偿器的设计与实现：一种结合离散时间混合无源性、负虚方法与小增益的方法。《控制、自动化与电气系统杂志》，26(4)，390–402。Shi, K., Nikooienejad, N., Petersen, I.R. 和 Moheimani, S.O.R.（2022）。基于负虚方法的混合积分器-增益系统控制。载于《2022年IEEE第61届决策与控制会议》（CDC），1968–1973。IEEE。Shi, K., Petersen, I.R. 和 Vladimirov, I.G.（2021a）。状态反馈等价于负虚系统的充要条件。arXiv预印本，arXiv:2109.11273。Shi, K., Petersen, I.R. 和 Vladimirov, I.G.（2021b）。相对阶一和相对阶二系统的负虚状态反馈等价性。载于《2021年IEEE第60届决策与控制会议》（CDC），3948–3953. IEEE。Shi, K., Petersen, I.R. 和 Vladimirov, I.G.（2023）。具有自由体运动的网络化异构非线性负虚系统的输出反馈一致性。即将在 IEEE自动控制汇刊 上发表，目前可作为在线优先文章获取，DOI:10.1109/TAC.2022.3221904。Shi, K., Vladimirov, I.G. 和 Petersen, I.R.（2021年（c））。网络化同构非线性负虚系统的鲁棒输出反馈一致性。IFAC-PapersOnLine，54(9)，239–244。Skafidas, E., Evans, R.J., Savkin, A.V. 和 Petersen, I.R.（1999年）。切换控制器系统的稳定性结果。Automatica，35(4)，553–564。Song, Z., Lanzon, A., Patra, S. 和 Petersen, I.R.（2012年）。一种不要求最小性假设的负虚引理，以及针对不确定负虚系统的鲁棒状态反馈综合。《系统与控制快报》，61(12)，1269–1276。Sun, Z.（2006年）。切换线性系统：控制与设计。Springer Science & Business Media。Wang, J., Lanzon, A. 和 Petersen, I.R.（2015年）。多个异构负虚系统的鲁棒协同控制。Automatica，61，64–72。Xiong, J., Petersen, I.R. 和 Lanzon, A.（2009年）。论无损负虚系统。载于《2009年第七届亚洲控制会议》，824–829。IEEE。Xiong, J., Petersen, I.R. 和 Lanzon, A.（2010年）。一种负虚引理及线性负虚系统互联系统的稳定性。IEEE自动控制汇刊，55(10)，2342–2347。Zhao, J. 和 Hill, D.J.（2008年（a））。切换系统的耗散性理论。IEEE自动控制汇刊，53(4)，941–953。Zhao, J. 和 Hill, D.J.（2008年（b））。切换系统的无源性与稳定性：多重储能函数法。《系统与控制快报》，57(2)，158–164。