arXiv:2304.00706v1 [math.PR] 3 Apr 2023

反射弱相互作用粒子系统的大偏差

PING CHEN、RONG WEI 和 TUSHENG ZHAN G

Abstract. 本文证明了一个具有反射的弱相互作用扩散系统的经验测度的大偏差原理。我们采用弱收敛方法。为了使该方法奏效，我们证明了受控反射系统的经验测度序列将收敛于相应反射麦基恩–弗拉索夫方程的弱解。

1. Introduction

设 $(\Omega\ \mathcal{F},\mathbb{P})$ 为一个概率空间， $\mathcal{D}$ 为 $\mathbb{R}^d$中的一个开域。本文旨在为弱相互作用粒子系统的经验测度建立大偏差原理，该系统由以下形式的反射随机微分方程（RSDEs）给出：对于固定的 $N\in\mathbb{N}$ 和有限区间$[0,T]$， $i\in\{1,\dots,N\}$,

$$
\begin{cases}
\mathrm{d}X^{i,N}(t)=b(t,X^{i,N}(t),\mu^N(t))\mathrm{d}t+\sigma(t,X^{i,N}(t),\mu^N(t))\mathrm{d}W^i(t)\\
\qquad\qquad -\mathrm{d}K^{i,N}(t),\\
|K^{i,N}|(t)=\displaystyle\int_0^t \mathbf{1}_{\partial\mathcal{D}}(X^{i,N}(s))\mathrm{d}|K^{i,N}|(s),\\
K^{i,N}(t)=\displaystyle\int_0^t \mathbf{n}(X^{i,N}(s))\mathrm{d}|K^{i,N}|(s),\\
X^{i,N}(0)=x^{i,N},\quad X^{i,N}(t)\in\overline{\mathcal{D}},\quad t\in[0,T]
\end{cases}
\tag{1.1}
$$

其中，$\mathbf{n}(x)$ 是 $x\in\partial\mathcal{D}$ 处的外单位法向量， $\{W^i,1\le i\le N\}$ 是相互独立的标准 d_1维维纳过程， $K^{i,\ N}$ 是一个有界变差过程，其变差为 $|K^{i,\ N}|$ 充当局部时，将过程 $X^{i,\ N}$ 约束在区域 $\overline{\mathcal{D}}$ 内。这里， $x^{i,\ N}\in\overline{\mathcal{D}}$ 以及

$$
\mu^N(t,\omega):=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\delta_{X^{i,N}(t,\omega)},\quad \omega\in\Omega,
$$

是X^1、$_N$、.....、 X^N、$_N$在时刻 $t\in[0,T]$的经验测度。关于 $\mathcal{D}$、 b 和 σ的精确条件，请参阅第2节。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：60F10，60K35；次要分类号：60B10，60H10，34K50，93E20。*Key words and phrases.* 大偏差；相互作用粒子系统；McKean–Vlasov 方程；反射随机微分方程；弱收敛；次鞅问题。

弱相互作用扩散的大偏差可以表征粒子系统收敛到 McKean–Vlasov 随机微分方程的收敛速率。关于弱相互作用扩散大偏差的开创性工作 [8] 研究了漂移项中存在相互作用的一致非退化扩散系统，并通过离散化论证和指数估计，建立了经验测度的大偏差原理。如今，关于各种模型中弱相互作用扩散的大偏差已有许多研究，包括多层次大偏差[9, 11], 、跳扩散 [16, 17],、离散时间系统 [7, 10] 、奇异相互作用 [1, 14], 以及与共同噪声的相互作用 [3]。

然而，迄今尚无关于带反射的弱相互作用扩散过程的经验测度大偏差的研究。本工作的目的正是填补这一空白。我们的工作主要受到文献 [5]的启发。我们将采用弱收敛方法，不再需要对系统进行时间或空间离散化，也不需要指数概率估计，并沿用文献 [5]中的方法思路；该文作者研究了无反射的弱相互作用扩散过程。与文献[5], 一样，我们允许驱动噪声退化，也允许漂移项和扩散系数都依赖于相互作用。

关于具有反射边界的McKean–Vlasov随机微分方程（SDE）的早期研究可追溯至文献[18], ，该文证明了逐路径适定性和混沌传播。McKean–Vlasov随机微分方程是与平均场相互作用扩散相关的一类随机微分方程，其系数依赖于解的概率分布。在近期的一项研究 [6], 中，作者研究了这样一个系统：它将保持平均位置预先指定的相互作用与边界处的反射结合起来，并证明了McKean–Vlasov随机微分方程的逐路径适定性和混沌传播。关于反射McKean–Vlasov随机微分方程的小噪声大偏差，也有一些研究，参见 [2, 21]。

采用弱收敛方法，我们将大偏差原理的证明归结为研究原始带反射系统的某些受控版本的渐近性质。我们论证的主要内容是刻画这些受控过程的弱极限。与我们的工作最接近的是[5], ，其研究了弱相互作用随机微分方程系统的大偏差性质。尽管我们都采用弱收敛方法，但由于区域边界上的反射，二者存在重大差异。特别是，由于反射， [5] 中获得拉普拉斯上界的方法不再适用于我们的模型。相反，我们充分利用了带反射边界的随机微分方程与所谓次鞅问题之间的密切关系。

本文其余部分安排如下。第2节中，我们描述框架，给出本文的主要结果，并概述该结果的证明方法。第3节中，我们讨论反射随机微分方程弱解的次鞅刻画，这将在证明中使用。最后，第4节通过证明拉普拉斯上界和下界来完成主要结果的证明。

我们以一些标准记号结束本节。

令 $\overline{\mathcal{D}}$ 为 $\mathcal{D}$的闭包。设 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P})$ 为一个满足通常条件的滤过概率空间，其中 $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$。令 $\mathcal{X} := C([0,T]; \overline{\mathcal{D}})$ 和$\mathcal{W} := C([0,T]; \mathbb{R}^{d_1})$，并配备最大范数，记为 $\|\cdot\|_\infty$。令 $|\cdot|$ 表示欧几里得范数，$\|\cdot\|$ 表示希尔伯特–施密特范数，即对于任意 $d \times d_1$ 矩阵 $\sigma = (\sigma_{ij}) \in \mathbb{R}^{d\times d_1}$，有 $\|\sigma\|^2 := \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d_1}\sigma_{ij}^2$。给定一个波兰空间 (E, d_E)，定义 $\mathcal{B}(E)$ 为 Borel σ-域，并以 $\mathcal{P}(E)$ 表示 $\mathcal{B}(E)$ 上概率测度构成的空间，该空间配备弱收敛拓扑。该空间上一个方便的度量是有界利普希茨度量，记为

$$\Pi_E(\mu,\nu) := \sup_{f\in \mathrm{Lip}_1(E)} \int_E f \mathrm{d}(\mu-\nu), \quad \mu,\nu\in\mathcal{P}(E),$$

其中 $\mathrm{Lip}_1(E) := \{f \in C(E) : \sup_{x\in E}|f(x)| \le 1, \sup_{x\neq y\in E} \frac{|f(x)-f(y)|}{d_E(x,y)} \le 1\}$。令 $C_b(E)$ 表示定义在 E 上的实值有界连续函数集合。令$C^{1,2}([0,T]\times\overline{\mathcal{D}})$ 表示实值函数集合，其元素关于时间变量连续可微一次，关于空间变量连续可微两次。对于 $f \in C^{1,2}([0,T]\times\overline{\mathcal{D}})$，$\nabla_x f$表示 f 关于空间变量 x 的梯度。类似地，我们可以定义 $C^{1,2,2}([0,T]\times\overline{\mathcal{D}}\times\mathbb{R}^{d_1})$,$C_b^{1,2,2}([0,T]\times\overline{\mathcal{D}}\times\mathbb{R}^{d_1})$, $C^{1,2,2,0}([0,T]\times\overline{\mathcal{D}}\times\mathbb{R}^{d_1})$。

2. Main result

令 $\mathcal{R}$ 表示 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_1}\times[0,T])$ 上所有正测度的集合，例如 r，满足对于所有 $t\in[0,T]$ 均有 $r(\mathbb{R}^{d_1}\times[0,t]) = t$；该集合将作为 $\mathbb{R}^{d_1}\times[0,T]$ 上所有确定性松弛控制构成的空间。我们还记

$$\mathcal{R}_1 := \Big\{ r\in\mathcal{R} : \int_{\mathbb{R}^{d_1}\times[0,T]} |y| r(\mathrm{d}y\times\mathrm{d}t) < \infty \Big\},$$

$\mathbb{R}^{d_1}\times[0,T]$ 为 $\mathcal{R}$ 上所有具有有限一阶矩的确定性松弛控制构成的空间。我们分别赋予 $\mathcal{R}$ 和 $\mathcal{R}_1$ 测度弱收敛拓扑，以及测度弱收敛并附加一阶矩收敛的拓扑；由此，$\mathcal{R}$ 和 $\mathcal{R}_1$ 成为波兰空间。若 $r\in\mathcal{R}$ 且 $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_1})$，则映射 $[0,T]\ni t\mapsto r(B\times[0,t])$ 绝对连续，因此几乎处处可微。由于 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_1})$ 是可数生成的，r 的时间导数（记为 r_t）几乎处处存在，且是从 $[0,T]$ 到 $\mathcal{P}(\mathbb{R}^{d_1})$ 的可测映射，使得 $r(\mathrm{d}y\times\mathrm{d}t) = r_t(\mathrm{d}y)\mathrm{d}t$。

设 $b\colon [0,T]\times\overline{\mathcal{D}}\times\mathcal{P}(\overline{\mathcal{D}}) \to \mathbb{R}^d$和 $\sigma\colon [0,T]\times\overline{\mathcal{D}}\times\mathcal{P}(\overline{\mathcal{D}}) \to \mathbb{R}^{d\times d_1}$是可测映射。给定一个博雷尔可测映射 $\nu\colon [0,T]\to\mathcal{P}(\overline{\mathcal{D}})$，以及一个适应的$\mathcal{R}_1$值随机变量 ρ。我们将考虑以下受控随机微分方程：

$$\begin{cases} \mathrm{d}\bar{X}(t) = b(t,\bar{X}(t),\nu(t))\mathrm{d}t + \displaystyle\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \sigma(t,\bar{X}(t),\nu(t)) y \rho_t(\mathrm{d}y)\mathrm{d}t \\ \qquad\qquad + \sigma(t,\bar{X}(t),\nu(t))\mathrm{d}W(t) - \mathrm{d}\bar{K}(t), \\ |\bar{K}|(t) = \displaystyle\int_0^t \mathbf{1}_{\partial\mathcal{D}}(\bar{X}(s))\mathrm{d}|\bar{K}|(s), \quad \bar{K}(t) = \int_0^t \mathbf{n}(\bar{X}(s))\mathrm{d}|\bar{K}|(s), \\ \nu(0) = \mathrm{Law}(\bar{X}(0)), \quad \bar{X}(t)\in\overline{\mathcal{D}}, \quad t\in[0,T], \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 W 是一个 d_1维的 $\mathcal{F}_t$适应标准维纳过程。上述方程是以下反射 McKean-Vlasov 随机微分方程的受控类比：

$$\begin{cases} \mathrm{d}X(t) = b(X(t), \mathrm{Law}(X(t)))\mathrm{d}t + \sigma(X(t), \mathrm{Law}(X(t)))\mathrm{d}W(t) - \mathrm{d}K(t), \\ |K(t)| = \int_0^t \mathbf{1}_{\partial\mathcal{D}}(X(s))\mathrm{d}|K|(s), \quad K(t) = \int_0^t \mathbf{n}(X(s))\mathrm{d}|K|(s), \\ \mathrm{Law}(X(0)) = \nu_0, \quad X(t) \in \overline{\mathcal{D}}, \quad t \in [0,T], \end{cases} \tag{2.2}$$

其中， W 是一个 d_1维的、关于$\mathcal{F}_t$适应的标准维纳过程。

回顾由（1.1）给出的系统：对于固定的 $N \in \mathbb{N}$和有限区间 $[0,T]$, $i \in \{1,\dots,N\}$,

$$\begin{cases} \mathrm{d}X^{i,N}(t) = b(t, X^{i,N}(t), \mu^N(t))\mathrm{d}t + \sigma(t, X^{i,N}(t), \mu^N(t))\mathrm{d}W^i(t) \\ \qquad\qquad - \mathrm{d}K^{i,N}(t), \\ |K^{i,N}|(t) = \int_0^t \mathbf{1}_{\partial\mathcal{D}}(X^{i,N}(s))\mathrm{d}|K^{i,N}|(s), \\ K^{i,N}(t) = \int_0^t \mathbf{n}(X^{i,N}(s))\mathrm{d}|K^{i,N}|(s), \\ X^{i,N}(0) = x^{i,N}, \quad X^{i,N}(t) \in \overline{\mathcal{D}}, \quad t \in [0,T]. \end{cases}$$

定义

$$\mu^N(\cdot,\omega) := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{X^{i,N}(\cdot,\omega)}, \quad \omega \in \Omega$$

作为（$X^{1,\ N},\dots,X^{N,\ N}$）在路径空间 $\mathcal{X}$:= $C([0,T];\overline{\mathcal{D}})$上的经验测度。对于任意 $t \in [0,T]$、 μ^N和 $\mu^N(t)$，它们之间的关系如下

$$\mu^N(t) = \mu^N \circ \pi_t^{-1},$$

其中 π_t ： $\mathcal{X} \to \overline{\mathcal{D}}$ 是时刻 t的投影映射。已知，在系数满足温和条件时，经验测度 μ^N 收敛于反射型麦基恩-弗拉索夫随机微分方程（2.2）的解的概率分布。

令 $\mathcal{Z}$:= $\mathcal{X} \times \mathcal{R}_1 \times \mathcal{W}$。对于任意 $z \in \mathcal{Z}$，我们将其写作 (ϕ, r, w)，并约定 $\phi \in \mathcal{X}$、 $r \in \mathcal{R}_1$和 $w \in \mathcal{W}$。如果三元组 (X, ρ, W) 定义在某个滤过概率空间 $(\Omega\ \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)\ \mathbb{P})$ 上，并且对于某个可测的 ν: $[0,T] \to \mathcal{P}(\overline{\mathcal{D}})$ 满足方程 (2.1)，那么 (X, ρ, W) 在 $\mathbb{P}$ 下的分布属于 $\mathcal{P}(\mathcal{Z})$，称为方程 (2.1) 的弱解。对于任意 $\Theta \in \mathcal{P}(\mathcal{Z})$, 定义 ν_Θ: $[0,T] \to \mathcal{P}(\overline{\mathcal{D}})$ 如下：

$$\nu_\Theta(t)(B) := \Theta\big(\{(\phi,\rho,w) \in \mathcal{Z} : \phi(t) \in B\}\big), \quad B \in \mathcal{B}(\overline{\mathcal{D}}), \quad t \in [0,T], \tag{2.3}$$

在 Θ 下， Z 在时刻 t的第一分量的分布。注意，如果 Θ是方程（2.1）在 ν_Θ（t） $= \nu$（t） $\forall t \in [0,T]$的弱解，那么 Θ是一个

受控随机微分方程组的弱解

$$
(2.4)\qquad \begin{cases} \mathrm{d}\bar{X}(t) = b(t,\bar{X}(t),\nu_\Theta(t))\mathrm{d}t + \displaystyle\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \sigma(t,\bar{X}(t),\nu_\Theta(t))y\rho_t(\mathrm{d}y))\mathrm{d}t \\ \qquad\qquad + \sigma(t,\bar{X}(t),\nu_\Theta(t)))\mathrm{d}W(t) - \mathrm{d}\bar{K}(t), \\ |\bar{K}|(t) = \displaystyle\int_0^t \mathbf{1}_{\partial\mathcal{D}}(\bar{X}(s))\mathrm{d}|\bar{K}|(s), \quad \bar{K}(t) = \int_0^t \mathbf{n}(\bar{X}(s))\mathrm{d}|\bar{K}|(s), \\ \nu_\Theta(t) = \mathrm{Law}(\bar{X}(t)), \quad \bar{X}(t) \in \overline{\mathcal{D}}, \quad t \in [0,T]. \end{cases}
$$

对于概率测度 $\Theta \in \mathcal{P}(\mathcal{Z})$，令 $\Theta_{\mathcal{X}}$、 $\Theta_{\mathcal{R}}$ 和 $\Theta_{\mathcal{W}}$ 分别表示第一、第二和第三个边缘测度。令 $\mathcal{P}_\infty$ 为所有满足下述条件的概率测度 $\Theta \in \mathcal{P}(\mathcal{Z})$ 的集合：

(i)
$$
\int_{\mathcal{R}_1}\int_{\mathbb{R}^{d_1}\times[0,T]} |y|^2 r(\mathrm{d}y\times\mathrm{d}t)\Theta_{\mathcal{R}}(\mathrm{d}r) < \infty.
$$

(ii) Θ 是方程（2.4）的弱解。

(iii) $\nu_\Theta(0) = \nu_0$，其中 $\nu_0 \in \mathcal{P}(\overline{\mathcal{D}})$ 是初始分布。

定义映射 $\bar{v}\colon \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}^0 := \overline{\mathcal{D}} \times \mathcal{R}_1 \times \mathcal{W}$ 为 $\bar{v}(\phi, r, w) = (\phi(0)\ r, w)$.

定义 2.1 (弱唯一性)。 若对任意 2.4式的解， Θ 和 $\tilde{\Theta} \in \mathcal{P}_\infty$ 满足 $\Theta \circ \bar{v}^{-1} = \tilde{\Theta} \circ \bar{v}^{-1}$，则称该方程的解是弱唯一的，并且有$\Theta = \Theta$。

现在我们将陈述精确的假设和主要结果。

定义 2.2（速率函数 [12, 13]）。函数 $I\colon \mathcal{P}(\mathcal{X}) \to [0,\infty]$ 称为 $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ 上的速率函数，若对任意 $C < \infty$，水平集 $\{\theta \in \mathcal{P}(\mathcal{X})\colon I(\theta) \le C\}$ 是紧的。

定义 2.3（大偏差原理[12, 13]）。设 I 是$\mathcal{P}(\mathcal{X})$ 上的速率函数。若序列 $\{\mu^N, N \in \mathbb{N}\}$ 在$\mathcal{P}(\mathcal{X})$ 上满足大偏差原理，且速率函数为 I，则对所有 $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ 中的博雷尔子集 Γ，

$$
-\inf_{\theta\in\Gamma^o} I(\theta) \le \liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N}\log\mathbb{P}\{\mu^N \in \Gamma\} \le \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N}\log\mathbb{P}\{\mu^N \in \Gamma\} \le -\inf_{\theta\in\overline{\Gamma}} I(\theta),
$$

其中， Γ^o 是 Γ的内部。

定义 2.4（拉普拉斯原理[13]）。设 I 是定义在 $\mathcal{P}(\mathcal{X})$上的速率函数。若对于所有有界连续函数 F，均有： $\mathcal{P}(\mathcal{X}) \to \mathbb{R}$，则称序列 $\{\mu^N, N \in \mathbb{N}\}$ 在 $\mathcal{P}(\mathcal{X})$上满足速率函数为 I 的拉普拉斯原理。

$$
\lim_{N\to\infty} -\frac{1}{N}\log\mathbb{E}\big\{\exp[-N\cdot F(\mu^N)]\big\} = \inf_{\theta\in\mathcal{P}(\mathcal{X})}\{F(\theta)+I(\theta)\}.
$$

众所周知，在上述设定下，拉普拉斯原理成立，当且仅当 $\{\mu^N, N \in \mathbb{N}\}$ 满足速率函数为 I的大偏差原理（见 [13,第 1.2] 节）。

关于区域、系数b、 σ以及初始条件族$\{x^{i,N}\} \subset \overline{\mathcal{D}}$，作出以下假设：

假设 2.1. (A1) $\mathcal{D}$ 是 $\mathbb{R}^d$中的有界、凸、光滑区域。

(A2) 存在 $\nu_0 \in \mathcal{P}(\overline{\mathcal{D}})$，使得对于所有可 ν_0积的 $f: \overline{\mathcal{D}} \to \mathbb{R}$,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x^{i,N}) = \int_{\overline{\mathcal{D}}} f(x)\mathrm{d}\nu_0(x).$$

(A3) 设 $b:[0,T]\times\overline{\mathcal{D}}\times\mathcal{P}(\overline{\mathcal{D}}) \to \mathbb{R}^d$和 $\sigma: [0,T]\times\overline{\mathcal{D}}\times\mathcal{P}(\overline{\mathcal{D}}) \to \mathbb{R}^{d\times d_1}$均为可测函数，且存在常数 L 和 $K \in (0,\infty)$，使得对每个$t \in [0,T], x, y \in \overline{\mathcal{D}}$和 $\mu,\nu \in \mathcal{P}(\overline{\mathcal{D}})$,

$$|b(t,x,\mu)| + \|\sigma(t,x,\mu)\| \le L$$

and

$$|b(t,x,\mu) - b(t,y,\nu)| + \|\sigma(t,x,\mu) - \sigma(t,y,\nu)\| \le K(|x-y| + \Pi_{\overline{\mathcal{D}}}(\mu,\nu)).$$

(A4) 方程(2.4)的解具有弱唯一性。

注 2.5. (R1) 在假设 2.1(A3) 下，由标准论证可知，对每个 N，方程 (1.1) 有唯一解。此外，根据 [2], 中的定理 3.2，方程 (2.2) 有唯一解。

(R2) 若扩散系数仅依赖于状态变量，如 $\sigma(t,x,\mu) = \sigma(t,x)$，或仅依赖于分布，如$\sigma(t,x,\mu) = \sigma(t,\mu)$（参见 [3, 引理 3.1]），则假设 (A4) 成立。

(R3) 由于区域 $\mathcal{D}$ 是凸集，对于任意的 $y \in \mathcal{D}$ 和 $x \in \partial\mathcal{D}$,

$$\langle \mathbf{n}(x), y - x\rangle \le 0.$$

主要结果陈述如下。

定理 2.6。 假设 *2.1* 成立。则相互作用反射系统 $\{\mu^N, N \in \mathbb{N}\}$ 的解的经验测度族 (1.1) 满足拉普拉斯原理，其速率函数为

$$I(\theta) = \inf_{\Theta\in\mathcal{P}_\infty:\Theta_{\mathcal{X}}=\theta} \frac{1}{2}\int_{\mathcal{R}_1}\int_{\mathbb{R}^{d_1}\times[0,T]} |y|^2 r(\mathrm{d}y\times\mathrm{d}t)\Theta_{\mathcal{R}}(\mathrm{d}r)$$

其中 $\theta \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$，并且按照约定，$\inf\emptyset := \infty$。

为了说明证明步骤，我们需要考虑反射随机微分方程（1.1）的受控系统。对于 $N \in \mathbb{N}$，令 $\mathcal{H}_N$ 为所有（$\mathcal{F}_t$）-渐进可测函数h 的空间：$[0,T]\times\Omega \to \mathbb{R}^{N\times d_1}$ 满足

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |h(t)|^2\mathrm{d}t\right] < \infty,$$

其中，h写作 $h = (h_1,\ldots,h_N)$，而 h_i是其中第 i个元素，其维数为 d_1。

给定 $h \in \mathcal{H}_N$，我们考虑以下反射随机微分方程（RSDEs）受控系统

$$
\begin{cases}
\mathrm{d}\bar{X}^{i,N}(t) = b(t, \bar{X}^{i,N}(t), \bar{\mu}^N(t))\mathrm{d}t + \sigma(t, \bar{X}^{i,N}(t), \bar{\mu}^N(t))h_i(t)\mathrm{d}t \\
\qquad\qquad + \sigma(t, \bar{X}^{i,N}(t), \bar{\mu}^N(t))\mathrm{d}W^i(t) - \mathrm{d}\bar{K}^{i,N}(t), \\
|\bar{K}^{i,N}|(t) = \displaystyle\int_0^t \mathbf{1}_{\partial\mathcal{D}}(\bar{X}^{i,N}(s))\mathrm{d}|\bar{K}^{i,N}|(s), \\
\bar{K}^{i,N}(t) = \displaystyle\int_0^t \mathbf{n}(\bar{X}^{i,N}(s))\mathrm{d}|\bar{K}^{i,N}|(s), \\
\bar{X}^{i,N}(0) = x^{i,N}, \quad \bar{X}^{i,N}(t) \in \overline{\mathcal{D}}, \quad t \in [0,T],
\end{cases} \tag{2.5}
$$

其中 $\bar{\mu}^N(t)$ 是由 $(\bar{X}^{1,N}(t)\ldots, \bar{X}^{N,N}(t))$ 定义的经验测度

$$
\bar{\mu}^N(t,\omega) := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{\bar{X}^{i,N}(t,\omega)}, \quad \omega \in \Omega.
$$

我们也用 $\bar{\mu}^N$ 表示 $\bar{\mu}^N(t)$ 的过程版本。

定理 2.6 的证明基于以下变分表示，该表示由[4], 中的定理 3.6 给出；也就是说，对任意 $F \in C_b(\mathcal{P}(\mathcal{X}))$

$$
-\frac{1}{N}\log\mathbb{E}\left\{\exp[-N\cdot F(\mu^N)]\right\} = \inf_{h^N\in\mathcal{H}_N}\left\{\frac{1}{2}\mathbb{E}\big[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\int_0^T |h_i^N|^2\mathrm{d}t\big] + \mathbb{E}\left[F(\bar{\mu}^N)\right]\right\},
$$

其中 $\bar{\mu}^N$ 是方程 (2.5) 的解的经验测度，其中 $h^N \in \mathcal{H}_N$。

根据 [5, 节 3] ,中的论证，可以通过以下两个步骤建立拉普拉斯原理（从而也建立大偏差原理）。

步骤 1：我们通过证明对于任意满足 $h^N \in \mathcal{H}_N$ 的序列 $\{h^N, N\in\mathbb{N}\}$，建立拉普拉斯原理上界，

$$
\begin{aligned}
&\liminf_{N\mapsto\infty}\left\{\frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\int_0^T |h_i^N|^2\mathrm{d}t\Big] + \mathbb{E}\big[F(\bar{\mu}^N)\big]\right\} \\
&\geq \inf_{\Theta\in\mathcal{P}_\infty}\left\{\frac{1}{2}\int_{\mathcal{R}_1}\int_{\mathbb{R}^{d_1}\times[0,T]} |y|^2 r(\mathrm{d}y\times\mathrm{d}t)\Theta_{\mathcal{R}_1}(\mathrm{d}r) + F(\Theta_{\mathcal{X}})\right\}.
\end{aligned} \tag{2.6}
$$

这将在第4.1节完成。

步骤 2：我们将在第 4.2 节验证拉普拉斯原理的下界，方法是证明对于任意 $\Theta\in\mathcal{P}_\infty$，都存在一个序列 $\{h^N, N\in\mathbb{N}\}$，满足 $h^N\in\mathcal{H}_N$，使得

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{N\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\mathbb{E}\big[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\int_0^T |h_i^N|^2\mathrm{d}t\big] + \mathbb{E}[F(\bar{\mu}^N)]\right\} \\
&\leq \frac{1}{2}\int_{\mathcal{R}_1}\int_{\mathbb{R}^{d_1}\times[0,T]} |y|^2 r(\mathrm{d}y\times\mathrm{d}t)\Theta_{\mathcal{R}_1}(\mathrm{d}r) + F(\Theta_{\mathcal{X}}).
\end{aligned} \tag{2.7}
$$

3. Sub-martingale Problem

作为主要结果证明的准备，本节将引入一些次鞅问题，并说明它们与反射随机微分方程的弱解之间的关系（2.4）。

首先，我们引入 [19] 中所述的次鞅问题的定义。设 $\bar{b}\colon [0,T]\times\overline{\mathcal{D}}\to\mathbb{R}^d$ 为有界可测函数，且 $\bar{\sigma}\colon [0,T]\times\overline{\mathcal{D}}\to\mathbb{R}^{d\times d_1}$ 为有界连续函数。

设 $\tilde{X}$ 为 $\mathcal{X}$ 上的典范过程。令 $\mathcal{F}_t^0=\sigma(\tilde{X}(s)\quad s\le t)$，并定义算子

$$\mathcal{L}_t:=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}(\bar{\sigma}\bar{\sigma}^T)_{ij}(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{d}\bar{b}_i(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

定义 3.1（次鞅问题）。若概率测度 $\hat{\mathbb{P}}$ 在 $(\mathcal{X},\mathcal{B}(\mathcal{X}))$ 上满足以下条件，则称其为系数 b, $\bar{\sigma}$ 和 $\mathbf{n}(x)$ 对应的次鞅问题的解：

$$f(t,\tilde{X}(t))-f(0,\tilde{X}(0))-\int_0^t(f_s+\mathcal{L}_sf)(s,\tilde{X}(s))\mathrm{d}s$$

对于任意满足以下条件的 $f\in C^{1,2}([0,T]\times\overline{\mathcal{D}})$，它相对于典范滤过 $(\mathcal{F}_t^0)$ 是一个 $\hat{\mathbb{P}}$-下鞅

$$\langle\nabla_xf(t,x),\mathbf{n}(x)\rangle\le 0\quad\text{on}\quad[0,T]\times\partial\mathcal{D}.$$

考虑以下反射随机微分方程

$$\begin{cases}\mathrm{d}Y(t)=\bar{b}(t,Y(t))\mathrm{d}t+\bar{\sigma}(t,Y(t))\mathrm{d}W(t)-\mathrm{d}L(t),\\ |L(t)|=\displaystyle\int_0^t\mathbf{1}_{\partial\mathcal{D}}(Y(s))\mathrm{d}|L|(s),\quad L(t)=\int_0^t\mathbf{n}(Y(s))\mathrm{d}|L|(s),\\ Y(t)\in\overline{\mathcal{D}},\quad t\in[0,T],\end{cases}\tag{3.1}$$

其中，W 是一个 d_1维的 $\mathcal{F}_t$适应维纳过程。

对于任意 $f\in C^{1,2}([0,T]\times\overline{\mathcal{D}})$，我们定义概率空间 $(\mathcal{X},\mathcal{B}(\mathcal{X})\ \mathbb{P})$ 上的实值过程 $(M_f(t))_{t\in[0,T]}$ 如下：

$$M_f(t,\tilde{X}):=f(t,\tilde{X}(t))-f(0,\tilde{X}(0))-\int_0^t(f_s+\mathcal{L}_sf)(s,\tilde{X}(s))\mathrm{d}s.$$

下一个结果给出了次鞅问题与反射随机微分方程的弱解（3.1）之间的关系。

引理 3.2. 假设测度 $\hat{\ }\ \mathbb{P}\in\mathcal{P}(\mathcal{X})$，则当且仅当 $\mathbb{P}$ 满足系数为 b、$\hat{\bar{\sigma}}$ 和 $\mathbf{n}$ 的次鞅问题时，$\hat{\mathbb{P}}$ 是$\hat{\ }$方程（3.1）的弱解；等价地，对于任意满足 $\langle\nabla_xf(t,x)$、$\mathbf{n}(x)\rangle\le 0$ on$[0,T]\times\partial\mathcal{D}$的 $f\in C^{1,2}([0,T]\times\overline{\mathcal{D}})$，$M_f$ 相对于典范滤过$(\mathcal{F}_t^0)$是一个 $\mathbb{P}$-下鞅。

证明。“⇒”部分由伊藤公式显然可得。

$\hat{\ }$现在我们证明“⇐”这一部分。假设 $\mathbb{P}$ 是次鞅问题的一个解。根据 [19], 中的定理 2.4，我们知道存在唯一的连续

非递减适应函数 $L\colon [0,T]\times\mathcal{X}\mapsto[0,\infty)$，使得 $L(0)=0, L(t)=\int_0^t \mathbf{1}_{\partial\mathcal{D}}(\tilde{X}(s))\mathrm{d}L(s)$，并且对于任意 $f\in C^{1,2}([0,T]\times\overline{\mathcal{D}})$

$$\tilde{M}_f(t,\tilde{X}):=M_f(t,\tilde{X})+\int_0^t\langle\nabla_x f(s,\tilde{X}(s)),\mathbf{n}(\tilde{X}(s))\rangle\mathrm{d}L(s)$$

是一个 $\mathbb{P}$-鞅。

特别地，选取 $f^i(t,x)=x_i$，可得

$$\begin{aligned}\tilde{M}_{f^i}(t,\tilde{X}):=\tilde{X}_i(t)-\tilde{X}_i(0)-\int_0^t\bar{b}_i(s,\tilde{X}(s))\mathrm{d}s\\+\int_0^t n_i(\tilde{X}(s))\mathrm{d}L(s)\end{aligned}$$

是一个 $\mathbb{P}$-鞅。

类似地，对于每个 $i,j\in\{1,2,\dots,d\}$，令 $f^{i,j}(t,x)=x_ix_j$，可知

$$\begin{aligned}\tilde{M}_{f^{i,j}}(t,\tilde{X}):=&\tilde{X}_i(t)\tilde{X}_j(t)-\tilde{X}_i(0)\tilde{X}_j(0)-\int_0^t\bar{b}_i(s,\tilde{X}(s))\tilde{X}_j(s)\mathrm{d}s\\&-\int_0^t\bar{b}_j(s,\tilde{X}(s))\tilde{X}_i(s)\mathrm{d}s+\int_0^t\tilde{X}_i(s)n_j(\tilde{X}(s))\mathrm{d}L(s)\\&+\int_0^t\tilde{X}_j(s)n_i(\tilde{X}(s))\mathrm{d}L(s)-\int_0^t(\bar{\sigma}\bar{\sigma}^T)_{ij}(s,\tilde{X}(s))\mathrm{d}s\end{aligned}\tag{3.2}$$

也是一个$\mathbb{P}$-鞅。对 $\tilde{X}_i(t)\tilde{X}_j(t)$应用伊藤公式，并与式（3.2）比较，可推得

$$\langle\tilde{M}_{f^i},\tilde{M}_{f^j}\rangle(t)=\int_0^t\sum_{k=1}^{d_1}\bar{\sigma}_{ik}\bar{\sigma}_{kj}(s,\tilde{X}(s))\mathrm{d}s.$$

因此，根据 [15], 中的定理 II.7.1'，在 $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t),\mathbb{P})$ 的扩张上，存在一个 d_1 维的 $(\mathcal{F}_t)$-维纳过程 $W=(W(t))$，使得

$$\tilde{M}_{f^i}(t)=\sum_{i=1}^{d_1}\int_0^t\bar{\sigma}_{ik}(s,\tilde{X}(s))\mathrm{d}\tilde{W}^k(s),\quad i=1,2,\dots,d.$$

因此，(X,W,L) 是反射随机微分方程 (3.1) 的一个弱解。□

本节余下部分将证明，测度 $\Theta\in\mathcal{P}(\mathcal{Z})$ 是方程 (2.4)的弱解，当且仅当它满足一个次鞅问题。

回顾一下，$\mathcal{Z}=\mathcal{X}\times\mathcal{R}_1\times\mathcal{W}$和 ν_Θ 由 (2.3) 给出。令 (X,ρ,W) 为 $\mathcal{Z}$上的典范过程，即

$$\bar{X}(t,(\phi,r,w)):=\phi(t),\ \rho(t,(\phi,r,w)):=r_{|\mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_1}\times[0,t])},\ W(t,(\phi,r,w)):=w(t),$$

以及 $(\mathcal{G}_t)$ 在 $\mathcal{B}(\mathcal{Z})$ 中定义的典范滤过为

$$\mathcal{G}_t:=\sigma((\bar{X}(s),\rho(s),W(s)):0\le s\le t),\quad t\in[0,T].$$

设 $\Theta \in \mathcal{P}(\mathcal{Z})$。给定 $f \in C^{1,\ 2\,2\,0,}([0,T]\times\overline{\mathcal{D}}\times\mathbb{R}^{d_1})$，我们将概率空间 $(\mathcal{Z},\mathcal{B}(\mathcal{Z}),\Theta)$ 上的实值过程 $(M_f^{\Theta}(t))_{t\in[0,T]}$ 定义为

$$\begin{aligned} M_f^{\Theta}(t,(\phi,r,w)) \quad &:= \quad f(t,\phi(t),w(t)) - f(0,\phi(0),w(0)) - \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s,\phi(s),w(s))\mathrm{d}s \\ &\quad - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \mathcal{A}_s^{\Theta}(f)(s,\phi(s),y,w(s))r_s(\mathrm{d}y)\mathrm{d}s, \end{aligned} \tag{3.3}$$

其中，对于任意 $s\in[0,T]$, $x\in\overline{\mathcal{D}}$, $y,z\in\mathbb{R}^{d_1}$, $\mathcal{A}_s^{\Theta}$，(f) 定义为

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_s^{\Theta}(f)(s,x,y,z) :=\ & \langle b(s,x,\nu_{\Theta}(s)) + \sigma(s,x,\nu_{\Theta}(s))y, \nabla_x f(s,x,z)\rangle \\ & + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} (\sigma\sigma^T)_{ij}(s,x,\nu_{\Theta}(s))\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(s,x,z) \\ & + \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d_1} \sigma_{ij}(s,x,\nu_{\Theta}(s))\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial z_j}(s,x,z) \\ & + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d_1} \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_i}(s,x,z). \end{aligned} \tag{3.4}$$

本节的最后一个结果陈述如下。

定理 3.3. 设测度 $\Theta\in\mathcal{P}(\mathcal{Z})$ 满足 $\Theta(\{(\phi,r,w)\in\mathcal{Z}\colon w(0)=0\})=1$。那么，当且仅当对于所有 $f\in C^{1,2\,2\,0,}([0,T]\times\overline{\mathcal{D}}\times\mathbb{R}^{d_1})$，其中 $\langle\nabla_x f(t,x,z),\ \mathrm{n}(x)\rangle\le 0$ 在 $[0,T]\times\partial\mathcal{D}\times\mathbb{R}^{d_1}$ 上，Θ 是方程 (2.4) 的弱解，当且仅当 M_f^{Θ} 关于典范滤过 $(\mathcal{G}_t)$ 在 Θ 下是下鞅。

在证明定理 3.3 之前，我们陈述以下引理，其证明与 [19] 中引理 2.2 和定理 2.4 的证明类似。

引理 3.4. 假设对于任意 $f\in C^{1,\ 2\,2\,0,}([0,T]\times\overline{\mathcal{D}}\times\mathbb{R}^{d_1})$，只要满足 $\langle\nabla_x f(t,x,z),\ \mathrm{n}(x)\rangle\le 0$ 于 $[0,T]\times\partial\mathcal{D}\times\mathbb{R}^{d_1}$ 上，M_f^{Θ}就是一个 Θ-下鞅。那么，对于每个 $f\in C^{1,\ 2\,2,}_{b}([0,T]\times\overline{\mathcal{D}}\times\mathbb{R}^{d_1})$，只要满足 $\langle\nabla_x f(t,x,z),\ \mathrm{n}(x)\rangle\le 0$ 于 $[0,T]\times\partial\mathcal{D}\times\mathbb{R}^{d_1}$ 上，$M_f^{\Theta}(t)$就是一个 Θ-局部下鞅。

证明。假设 $f\in C^{1,\ 2\,2,}_{b}([0,T]\times\overline{\mathcal{D}}\times\mathbb{R}^{d_1})$ 满足 $\langle\nabla_x f(t,x,z),\ \mathrm{n}(x)\rangle\le 0$ 于 $[0,T]\times\partial\mathcal{D}\times\mathbb{R}^{d_1}$上。对于每个 $n\ge 1$，选取 $\eta_n\in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^{d_1})$，使得 $0\le\eta_n\le 1$,$\eta_n=1$ 在 $\{z\in\mathbb{R}^{d_1}$ 上成立：$|z|\le n\}$，且 η_n 的所有二阶及以下导数在 n上均一致有界。令

$$f_n = \eta_n\cdot f.$$

于是 $f_n\in C^{1,\ 2\,2\,0,}([0,T]\times\overline{\mathcal{D}}\times\mathbb{R}^{d_1})$ 和 $\langle\nabla_x f_n(t,x,z),\mathrm{n}(x)\rangle\le 0$ 在 $[0,T]\times\partial\mathcal{D}\times\mathbb{R}^{d_1}$ 上成立。因此，$M_{f_n}^{\Theta}(t)$ 是一个 Θ- 下鞅。对于每个 $M\in\mathbb{N}$，定义一个停时

$$\tau_M((\phi,r,w)) := \inf\{t\in[0,T] : \int_{\mathbb{R}^{d_1}\times[0,t]} |y| r(\mathrm{d}y\times\mathrm{d}s) \ge M\}.$$

那么 $M_{f_n}^{\Theta}(t\wedge\tau_M)$ 是一个 Θ-下鞅。显然，$M_{f_n}^{\Theta}(t\wedge\tau_M)\to M_f^{\Theta}(t\wedge\tau_M)$ 有界，因此 $M_f^{\Theta}(t\wedge\tau_M)$ 是一个 Θ- 下鞅。由此可得，$M_f^{\Theta}(t)$ 是一个 Θ- 局部下鞅。□

引理 3.5. 存在一个连续、非递减的适应函数 $\xi:[0,T]\times\mathcal{Z}\mapsto[0,\infty)$，使得 $\xi(0)=0$，

$$\xi(t)=\int_0^t \mathbf{1}_{\partial D}(\phi(s))\mathrm{d}\xi(s),$$

且对所有 $f\in C^{1,2,2}_b([0,T]\times\overline{\mathcal{D}}\times\mathbb{R}^{d_1})$，

$$M_f^{\Theta}+\int_0^t\langle\nabla_x f(s,\phi(s),w(s)),\mathbf{n}(\phi(s))\rangle\mathrm{d}\xi(s)$$

是一个 Θ-局部鞅。

该引理的证明只是对[19]中定理 2.4 证明的一个小幅修改。细节从略。

现在我们回到定理3.3的证明。

证明。“⇒”部分由伊藤公式显然可得。

现在我们证明“⇐”部分。由引理 3.5，我们知道存在一个连续、非递减的适应函数 $\xi:[0,T]\times\mathcal{Z}\mapsto[0,\infty)$，使得$\xi(0)=0$, $\xi(t)=\int_0^t\mathbf{1}_{\overline{\mathcal{D}}}(\phi(s))\mathrm{d}\xi(s)$，并且对所有 $f\in C^{1,2,2}_b([0,T]\times\overline{\mathcal{D}}\times\mathbb{R}^{d_1})$，

$$\tilde{M}_f^{\Theta}(t,(\phi,r,w)):=M_f^{\Theta}(t,(\phi,r,w))+\int_0^t\langle\nabla_x f(s,\phi(s),w(s)),\mathbf{n}(\phi(s))\rangle\mathrm{d}\xi(s)$$

是一个 Θ-局部鞅。

特别地，对每个 $i\in\{1,2,\dots,d\}$，选取 $f^i(t,x,z)=x_i$，即可得到

$$\begin{aligned}\tilde{M}_{f^i}^{\Theta}(t,(\phi,r,w)):=\phi_i(t)-\phi_i(0)&-\int_0^t b_i(s,\phi(s),\nu_{\Theta}(s))\mathrm{d}s\\&-\int_0^t\int_{\mathbb{R}^{d_1}}\sum_{k=1}^{d_1}\sigma_{ik}(s,\phi(s),\nu_{\Theta}(s))y_k r_s(\mathrm{d}y)\mathrm{d}s\\&+\int_0^t n_i(\phi(s))\mathrm{d}\xi(s)\end{aligned}$$

是一个 Θ-局部鞅。

对于每个 $i,j\in\{1,2,\dots,d\}$，选取 $f^{i,j}(t,x,z)=x_ix_j$，我们得到

$$\begin{aligned}\tilde{M}^{\Theta}_{f^{i,j}}(t,(\phi,r,w)) &:= \phi_i(t)\phi_j(t)-\phi_i(0)\phi_j(0)\\ &-\int_0^t b_i(s,\phi(s),\nu_\Theta(s))\phi_j(s)\mathrm{d}s-\int_0^t b_j(s,\phi(s),\nu_\Theta(s))\phi_i(s)\mathrm{d}s\\ &-\int_0^t\int_{\mathbb{R}^{d_1}}\sum_{k=1}^{d_1}\sigma_{ik}(s,\phi(s),\nu_\Theta(s))y_k\phi_j(s)r_s(\mathrm{d}y)\mathrm{d}s\\ &-\int_0^t\int_{\mathbb{R}^{d_1}}\sum_{k=1}^{d_1}\sigma_{jk}(s,\phi(s),\nu_\Theta(s))y_k\phi_i(s)r_s(\mathrm{d}y)\mathrm{d}s\\ &-\int_0^t\sum_{k=1}^{d_1}\sigma_{ik}\sigma_{kj}(s,\phi(s),\nu_\Theta(s))\mathrm{d}s+\int_0^t\phi_i(s)n_j(\phi(s))\mathrm{d}\xi(s)\\ &+\int_0^t\phi_j(s)n_i(\phi(s))\mathrm{d}\xi(s)\end{aligned}\tag{3.5}$$

$\tilde{M}^{\Theta}_{f^{i,j}}$也是一个 Θ-局部鞅。对 $X_i(t)X_j(t)$应用 Itˆo 公式，并与 (3.5) 比较，我们推得

$$\langle\tilde{M}^{\Theta}_{f^i},\tilde{M}^{\Theta}_{f^j}\rangle(t)=\int_0^t\sum_{k=1}^{d_1}\sigma_{ik}\sigma_{kj}(s,\phi(s),\nu_\Theta(s))\mathrm{d}s.\tag{3.6}$$

对于每个 $i\in\{1,2,\dots,d_1\}$，选择 $g^i\in C^{1,2}_{2\,0,}([0,T]\times\overline{\mathcal{D}}\times\mathbb{R}^{d_1})$，使得$g^i(t,x,z)=z_i$在$[0,T]\times\overline{\mathcal{D}}\times\{z\in\mathbb{R}^{d_1}\colon\ |z|\le n\}$并且对于每个 $n\in\mathbb{N}$，定义停时 $\tau_n=\inf\{t\in[0,T]\colon\ |w(t)|>n\}$，从而得到

$$\tilde{M}^{\Theta}_{g^i}(t\wedge\tau_n,(\phi,r,w)):=w_i(t\wedge\tau_n)-w_i(0)$$

是一个 Θ-鞅。因此，$\{\tilde{M}^{\Theta}_{g^i}(t)\ t\ge0\}$是一个 Θ-局部鞅。

类似地，对于每个 $i,j\in\{1,2,\dots,d_1\}$，选择 $g^{i,j}(t,x,z)\in C^{1,2}_{2\,0,}([0,T]\times\overline{\mathcal{D}}\times\mathbb{R}^{d_1})$，使得 $g^{i,j}(t,x,z)=z_iz_j$在 $[0,T]\times\overline{\mathcal{D}}\times\{z\in\mathbb{R}^{d_1}\colon\ |z|\le n\}$，我们有

$$\tilde{M}^{\Theta}_{g^{i,j}}(t,(\phi,r,w)):=w_i(t)w_j(t)-w_i(0)w_j(0)-\frac{1}{2}\delta_{ij}t\tag{3.7}$$

是一个 Θ-局部鞅。对 $W_i(t)W_j(t)$ 应用伊藤公式，并与 (3.7) 比较，我们推得

$$\langle\tilde{M}^{\Theta}_{g^i},\tilde{M}^{\Theta}_{g^j}\rangle(t)=\langle W_i,W_j\rangle(t)=\delta_{ij}t.\tag{3.8}$$

因此，$W(t)$ 是 $(\mathcal{G}_t)$-维纳过程，定义于 $(\mathcal{Z},\mathcal{B}(\mathcal{Z}),(\mathcal{G}_t)\ \Theta)$ 上。

对每个 $i\in\{1,2,\dots,d\}$、$j\in\{1,2,\dots,d_1\}$，通过选取 h^i、$^j(t$、x、$z)\in C^1$、2 2 0、$([0,T]\times\overline{\mathcal{D}}\times\mathbb{R}^{d_1})$，使得 h^i、$^j(t$、x、$z)=x_iz_j$在 $[0,T]\times\overline{\mathcal{D}}\times\{z\in\mathbb{R}^{d_1}$上：$|z|\le n\}$，并采用与 (3.8) 类似的论证，我们得到

$$\langle\tilde{M}^{\Theta}_{f^i},\tilde{M}^{\Theta}_{g^j}\rangle(t)=\int_0^t\sigma_{ij}(s,\phi(s),\nu_\Theta(s))\mathrm{d}s.\tag{3.9}$$

然后，根据（3.6）、（3.8）和（3.9），并采用 [15]，中定理 II.7.1' 的证明中的论证，我们得到

$$M_{f^i}^{\Theta}(t,(\phi,r,w))=\sum_{k=1}^{d_1}\int_0^t \sigma_{ik}(s,\phi(s),\nu_{\Theta}(s))\mathrm{d}W_k(s), i=1,2,\ldots,d.$$

因此，典范过程 $(X,\ \rho,\ W)$ 是方程 (2.4) 的解。

□

4. Laplace Principle

本节将证明拉普拉斯原理的上界和下界。我们首先给出一个辅助引理，该引理将在拉普拉斯原理的证明中使用。回顾受控反射随机微分方程 (2.5)、经验测度 $\bar{\mu}^N$ 和路径空间 $\mathcal{X}:=C([0,T];\ \overline{\mathcal{D}})$。

引理 4.1。假设条件 *2.1* 成立。设 $\{h^N, N\in\mathbb{N}\}$ 是 $\mathcal{H}_N$ 中的一列元素，且满足

$$\sup_{N\in\mathbb{N}}\mathbb{E}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\int_0^T |h_i^N(t)|^2\mathrm{d}t\right]<\infty. \tag{4.1}$$

那么，$\mathcal{P}(\mathcal{X})$ 值随机变量 $\bar{\mu}^N$ 的分布族是紧的。

证明。对于正数 α 和 M，我们定义映射 G_α 如下：

$$\mathcal{X}\ni f\mapsto G_\alpha(f):=\sup_{0\le s<t\le T}\frac{|f(t)-f(s)|}{|t-s|^\alpha}$$

并令

$$H_M:=\Big\{\mu\in\mathcal{P}(\mathcal{X}):\mu(G_\alpha(f))\le M\Big\}.$$

我们声称，H_M 在 $\mathcal{P}(\mathcal{X})$中是紧的（相对紧的）。事实上，对于每个$\tilde{M}\in(0,+\infty)$，由于区域 $\mathcal{D}$ 有界，根据阿尔泽拉–阿斯科利定理，我们看到集合 $B_{\tilde{M}}:=\{f\in\mathcal{X},G_\alpha(f)\le\tilde{M}\}$ 在 $\mathcal{X}$中相对紧。另一方面，由切比雪夫不等式可得

$$\begin{aligned}\sup_{\mu\in H_M}\mu(B_{\tilde{M}}^c)&=\sup_{\mu\in H_M}\mu\big(\{f\in\mathcal{X},G_\alpha(f)>\tilde{M}\}\big)\\&\le\sup_{\mu\in H_M}\frac{\mu(G_\alpha(f))}{\tilde{M}}\\&\le\frac{M}{\tilde{M}}.\end{aligned}$$

于是，对于任意 $\varepsilon>0$，存在一个依赖于 ε 的常数 M，使得

$$\sup_{\mu\in H_M}\mu(B_{\tilde{M}}^c)\le\varepsilon.$$

这表明 H_M 在 $\mathcal{P}(\mathcal{X})$中相对紧。另一方面，我们有

$$\sup_{N\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(\bar{\mu}^N\in H_M^c)=\sup_{N\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(\bar{\mu}^N(G_\alpha(f))>M)\le\frac{\sup_{N\in\mathbb{N}}\mathbb{E}[\bar{\mu}^N(G_\alpha(f))]}{M}. \tag{4.2}$$

接下来，我们证明 $\mathbb{E}[\bar{\mu}^N(G_\alpha(f))]$ 关于 N有一致界。由受控反射随机微分方程（2.5），对任意 $0 \le s \le t \le T$，我们有

$$\begin{aligned}\bar{X}^{i,N}(t) - \bar{X}^{i,N}(s) &= \int_s^t b(r, \bar{X}^{i,N}(r), \bar{\mu}^N(r))\mathrm{d}r \\ &\quad + \int_s^t \sigma(r, \bar{X}^{i,N}(r), \bar{\mu}^N(r))h_i^N(r)\mathrm{d}r \\ &\quad + \int_s^t \sigma(r, \bar{X}^{i,N}(r), \bar{\mu}^N(r))\mathrm{d}W^i(r) \\ &\quad - \int_s^t \mathbf{n}(\bar{X}^{i,N}(r))\mathrm{d}|\bar{K}^{i,N}|(r).\end{aligned} \tag{4.3}$$

对（4.3）应用伊藤公式，我们得到

$$\begin{aligned}&|\bar{X}^{i,N}(t) - \bar{X}^{i,N}(s)|^2 \\ =\ & 2\int_s^t \langle \bar{X}^{i,N}(r) - \bar{X}^{i,N}(s), b(r, \bar{X}^{i,N}(r), \bar{\mu}^N(r))\rangle \mathrm{d}r \\ &+2\int_s^t \langle \bar{X}^{i,N}(r) - \bar{X}^{i,N}(s), \sigma(r, \bar{X}^{i,N}(r), \bar{\mu}^N(r))h_i^N(r)\rangle \mathrm{d}r \\ &+2\int_s^t \langle \bar{X}^{i,N}(r) - \bar{X}^{i,N}(s), \sigma(r, \bar{X}^{i,N}(r), \bar{\mu}^N(r))\mathrm{d}W^i(r)\rangle \\ &+\int_s^t \|\sigma(r, \bar{X}^{i,N}(r), \bar{\mu}^N(r))\|^2 \mathrm{d}r \\ &+2\int_s^t \langle \bar{X}^{i,N}(s) - \bar{X}^{i,N}(r), \mathbf{n}(\bar{X}^{i,N}(r))\rangle \mathrm{d}|\bar{K}^{i,N}|(r) \\ =:\ & I_1^{s,t} + I_2^{s,t} + I_3^{s,t} + I_4^{s,t} + I_5^{s,t}.\end{aligned}$$

现在，根据 G_α 的定义可知

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[G_\alpha^2(\bar{X}^{i,N}(\cdot))] &= \mathbb{E}\Big[\sup_{0\le s<t\le T} \frac{|\bar{X}^{i,N}(t) - \bar{X}^{i,N}(s)|^2}{|t-s|^{2\alpha}}\Big] \\ &\le \sum_{i=1}^5 \mathbb{E}\Big[\sup_{0\le s<t\le T} \frac{I_i^{s,t}}{|t-s|^{2\alpha}}\Big].\end{aligned}$$

˜ ˜注意，存在一个正常数 L，使得 $\mathcal{D} \subset B(0, L)$。

因此，结合假设 2.1(A3)，我们得到

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le s<t\le T} \frac{I_1^{s,t}}{|t-s|^{2\alpha}}\Big] \le 4L\tilde{L}\mathbb{E}[\sup_{0\le s<t\le T} |t-s|^{1-2\alpha}], \tag{4.4}$$

and

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le s<t\le T} \frac{I_4^{s,t}}{|t-s|^{2\alpha}}\Big] \le L^2\mathbb{E}[\sup_{0\le s<t\le T} |t-s|^{1-2\alpha}]. \tag{4.5}$$

由 H¨older 不等式可得

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le s<t\le T} \frac{I_2^{s,t}}{|t-s|^{2\alpha}}\Big] \tag{4.6}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq 2\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leq s<t\leq T}\frac{\int_s^t|\bar{X}^{i,N}(r)-\bar{X}^{i,N}(s)|\cdot|\sigma(r,\bar{X}^{i,N}(r),\bar{\mu}^N(r))h_i^N(r)|\mathrm{d}r}{|t-s|^{2\alpha}}\Big]\\
&\leq 4\tilde{L}\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leq s<t\leq T}\frac{(\int_s^t\|\sigma(r,\bar{X}^{i,N}(r),\bar{\mu}^N(r))\|^2\mathrm{d}r)^{\frac{1}{2}}\cdot(\int_s^t|h_i^N(r)|^2\mathrm{d}r)^{\frac{1}{2}}}{|t-s|^{2\alpha}}\Big]\\
&\leq 4L\tilde{L}\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leq s<t\leq T}|t-s|^{\frac{1}{2}-2\alpha}\cdot(\int_s^t|h_i^N(r)|^2\mathrm{d}r)^{\frac{1}{2}}\Big].
\end{aligned}
$$

由于区域 $\mathcal{D}$ 是凸的，我们有 $I^{s,t}_5\leq 0$ 因此

$$
\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leq s<t\leq T}\frac{I_5^{s,t}}{|t-s|^{2\alpha}}\Big]\leq 0. \tag{4.7}
$$

Set

$$
Z^i(t):=\int_0^t\langle\bar{X}^{i,N}(r),\sigma(r,\bar{X}^{i,N}(r),\bar{\mu}^N(r))\mathrm{d}W^i(r)\rangle,
$$

and

$$
Y^i(t):=\int_0^t\sigma(r,\bar{X}^{i,N}(r),\bar{\mu}^N(r))\mathrm{d}W^i(r)
$$

于是，我们有

$$
I_3^{s,t}=2(Z^i(t)-Z^i(s))-2\langle\bar{X}^{i,N}(s),Y^i(t)-Y^i(s)\rangle. \tag{4.8}
$$

现在我们来估计 $|Z^i(t)-Z^i(s)|$。根据 Burkholder–Davis–Gundy 不等式，对每个 $p>2$ 和 $0\leq s\leq t\leq T$,

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}[|Z^i(t)-Z^i(s)|^{2p}]\\
=\;&\mathbb{E}\Big[\Big|\int_s^t\langle\bar{X}^{i,N}(r),\sigma(r,\bar{X}^{i,N}(r),\bar{\mu}^N(r))\mathrm{d}W^i(r)\rangle\Big|^{2p}\Big]\\
\leq\;&C\tilde{L}^{2p}L^{2p}|t-s|^p,
\end{aligned}
$$

其中 C 是依赖于 d_1 和 p 的正常数。应用 Garsia-Rodemich-Rumsey 引理（参见 [20] 中的推论 1.2），存在一个随机变量A_i，使得以概率 1，对所有 $0\leq s\leq t\leq T$,

$$
|Z^i(t,\omega)-Z^i(s,\omega)|\leq A_i(\omega)|t-s|^{\frac{p-2}{2p}},
$$

其中 $\mathbb{E}[A_i^{2p}]\leq C\tilde{L}^{2p}L^{2p}$. 通过类似的论证，也存在一个随机变量 B_i，使得以概率 1，对所有 $0\leq s\leq t\leq T$,

$$
|Y^i(t,\omega)-Y^i(s,\omega)|\leq B_i(\omega)|t-s|^{\frac{p-2}{2p}},
$$

其中 $\mathbb{E}[B_i^{2p}]\leq CL^{2p}$. 由（4.8）可知

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leq s<t\leq T}\frac{I_3^{s,t}}{|t-s|^{2\alpha}}\Big]&\leq C\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leq s<t\leq T}\frac{|Z^i(t)-Z^i(s)|+|Y^i(t)-Y^i(s)|}{|t-s|^{2\alpha}}\Big]\\
&\leq C\mathbb{E}[(A_i+B_i)\sup_{0\leq s<t\leq T}|t-s|^{\frac{p-2}{2p}-2\alpha}].
\end{aligned} \tag{4.9}
$$

令 $p=4$ 且 $\alpha=\frac{1}{8}$。由（4.4）–（4.9）可知

$$\mathbb{E}[G^2_{\frac{1}{8}}(\bar{X}^{i,N}(\cdot))] \le \Big\{(4L\tilde{L}+L^2)T^{\frac{3}{4}}+C\mathbb{E}[A_i+B_i]+4L\tilde{L}T^{\frac{1}{4}}\mathbb{E}[(\int_0^T|h_i^N(r)|^2\mathrm{d}r)^{\frac{1}{2}}]\Big\}$$
$$\le C\big(1+\mathbb{E}[\int_0^T|h_i^N(r)|^2\mathrm{d}r]\big),$$

对于某个与 N 无关的正常数 C。

因此，利用条件（4.1），对每个 $N\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\bar{\mu}^N(G_{\frac{1}{8}}(\cdot))] &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\mathbb{E}[G_{\frac{1}{8}}(\bar{X}^{i,N}(\cdot))]\\ &\le \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N(1+\mathbb{E}[G^2_{\frac{1}{8}}(\bar{X}^{i.N}(\cdot))])\\ &\le \tilde{C},\end{aligned}$$

˜其中 C 与 N无关。结合（4.2），可知对任意$\varepsilon>0$，存在一个依赖于 ε 的正常数 M，使得

$$\sup_{N\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(\bar{\mu}^N\in H_M^c)\le\varepsilon.$$

这意味着 $\{\bar{\mu}^N, N\in\mathbb{N}\}$ 的分布族在 $\mathcal{P}\big(\mathcal{P}(\mathcal{X})\big)$ 中是紧的。 □

4.1. 拉普拉斯上界。 本小节中，我们将在 步骤 1中证明拉普拉斯上界（2.6），也就是说，我们将证明对任意满足 $h^N\in\mathcal{H}_N$ 的序列 $\{h^N, N\in\mathbb{N}\}$,

$$\begin{aligned}&\liminf_{N\mapsto\infty}\Big\{\frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\int_0^T|h_i^N|^2\mathrm{d}t\Big]+\mathbb{E}\big[F(\bar{\mu}^N)\big]\Big\}\\ &\ge\inf_{\Theta\in\mathcal{P}_\infty}\Big\{\frac{1}{2}\int_{\mathcal{R}_1}\int_{\mathbb{R}^{d_1}\times[0,T]}|y|^2r(\mathrm{d}y\times\mathrm{d}t)\Theta_{\mathcal{R}}(\mathrm{d}r)+F(\Theta_{\mathcal{X}})\Big\}.\end{aligned}\tag{4.10}$$

对于序列 $\{h^N\in\mathcal{H}_N, N\in\mathbb{N}\}$，我们可以假设

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\int_0^T|h_i^N(t)|^2\mathrm{d}t\right]\le 4\|F\|_\infty,$$

否则不等式（4.10）显然成立。

对于每个 $N\in\mathbb{N}$，定义一个取值于 $\mathcal{P}(\mathcal{Z})$ 的随机变量

$$Q^N_\omega(A\times R\times B):=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\delta_{\bar{X}^{i,N}(\cdot,\omega)}(A)\cdot\delta_{\rho^{i,N}_\omega}(R)\cdot\delta_{W^i(\cdot,\omega)}(B)\tag{4.11}$$

对于任意 $A\times R\times B\in\mathcal{B}(\mathcal{Z})$ 和 $\omega\in\Omega$，其中 $\bar{X}^{i,\,N}$是方程（2.5）在 $h^N=(h_1^N,$ ....., $h_N^N)$ 下的解，且

$$\rho^{i,N}_\omega(B\times I):=\int_I\delta_{h_i^N(t,\omega)}(B)\mathrm{d}t,\quad B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_1}),\quad I\in\mathcal{B}([0,T]),\quad\omega\in\Omega.$$

引理 4.2. 由 $\{Q^N, N\in\mathbb{N}\}$ 构成的 $\mathcal{P}(\mathcal{Z})$ 值随机变量族是紧的。

证明。 由引理 4.1，我们知道， $\{Q^N, N \in \mathbb{N}\}$ 的第一边缘分布族是紧的。证明的其余部分与 [5], 中的引理 5.1 相同，故省略细节。 □

以下结果对于证明拉普拉斯上界至关重要。

定理 4.3。设 $\{Q^{N_j}, j \in \mathbb{N}\}$ 是 $\{Q^N, N \in \mathbb{N}\}$ 的一个弱收敛子列，其中 Q 是定义在某个概率空间 $(\tilde{\Omega}\ \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ 上、取值于 $\mathcal{P}(\mathcal{Z})$ 的随机变量，且 $Q^{N_j} \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} Q$ 依分布收敛。则对于 $\tilde{\mathbb{P}}$-几乎处处的 $\omega \in \Omega$， $Q_\omega \in \mathcal{P}_\infty$ 成立，其中 $\mathcal{P}_\infty$ 是受控反射 McKean-Vlasov 方程的弱解族（定义见第 2 节）：

$$
\begin{cases}
\mathrm{d}\bar{X}(t) = b(t, \bar{X}(t), \nu_\Theta(t))\mathrm{d}t + \displaystyle\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \sigma(t, \bar{X}(t), \nu_\Theta(t)) y \rho_t(\mathrm{d}y))\mathrm{d}t \\
\qquad\qquad + \sigma(t, \bar{X}(t), \nu_\Theta(t)))\mathrm{d}W(t) - \mathrm{d}\bar{K}(t), \\
|\bar{K}|(t) = \displaystyle\int_0^t \mathbf{1}_{\partial\mathcal{D}}(\bar{X}(s))\mathrm{d}|\bar{K}|(s), \quad \bar{K}(t) = \int_0^t \mathbf{n}(\bar{X}(s))\mathrm{d}|\bar{K}|(s), \\
\nu_\Theta(t) = Law(\bar{X}(t)), \quad \bar{X}(t) \in \overline{\mathcal{D}}, \quad t \in [0, T].
\end{cases} \tag{4.12}
$$

证明。令 $I := \{N_j, j \in \mathbb{N}\}$ 并记 $(Q^n)_{n\in I}$ 为 $(Q^{N_j})_{j\in\mathbb{N}}$，则 $Q^n \to Q$依分布收敛。注意，根据法图引理（参见 [13]中的定理 A.3.12）并由$\tilde{\ }$ $\tilde{\ }$假设 2.1(A2)，容易看出，对于 $\mathbb{P}$-几乎处处的 $\omega \in \Omega$， Q_ω 满足定义 $\mathcal{P}_\infty$中的条件 (i) 和 (iii)。为完成证明，我们需要证明$\tilde{\ }$ $\tilde{\ }$对于 $\mathbb{P}$-几乎处处的 $\omega \in \Omega$， Q_ω 是方程 (4.12) 的弱解

根据定理 3.3，若概率测度 $\Theta \in \mathcal{P}(\mathcal{Z})$ 满足 $\Theta(\{(\phi, r, w) \in \mathcal{Z}: w(0) = 0\}) = 1$，则它是方程 (4.12) 的一个弱解，当且仅当对所有 $f \in C^{1,2\ 2\ 0}_b([0,T] \times \overline{\mathcal{D}} \times \mathbb{R}^{d_1})$，其中 $\langle \nabla_x f(t, x, z), \mathbf{n}(x)\rangle \le 0$ on $[0,T] \times \partial\mathcal{D} \times \mathbb{R}^{d_1}$, M_f^Θ（定义见 (3.3) 和 (3.4)）关于典范滤过 $(\mathcal{G}_t)$ 在 Θ 下是一个下鞅，即满足以下条件

$$
\mathbb{E}_\Theta[\Psi \cdot (M_f^\Theta(t_1) - M_f^\Theta(t_0))] \ge 0 \tag{4.13}
$$

对所有满足 $t_0 \le t_1$ 的 $t_0, t_1 \in [0,T]$，以及 $\mathcal{G}_{t_0}$-可测的 $\Psi \in C_b^+(\mathcal{Z})$。这里，$C_b^+(\mathcal{Z})$ 表示 $C_b(\mathcal{Z})$ 中非负函数构成的空间。

注意，只需证明对于任意稠密于 $[0,T]$ 的可数时间集 t_0 和 t_1，任意生成 $\mathcal{G}_{t_0}$ σ 代数的可数集 $\Psi \in C_b^+(\mathcal{Z})$，以及稠密于 $C^{1,2\ 2\ 0}_b([0,T] \times \overline{\mathcal{D}} \times \mathbb{R}^{d_1})$ 的测试函数可数集 f，当 $\langle \nabla_x f(t, x, z)\ n(x)\rangle \le 0$ 在 $[0,T] \times \partial\mathcal{D} \times \mathbb{R}^{d_1}$ 上时，(4.13) 成立即可。因此，存在一个测试参数可数集 $\mathcal{I} \subset [0,T]^2 \times C_b^+(\mathcal{Z}) \times \{f \in C_0^{1,2,2}([0,T] \times \overline{\mathcal{D}} \times \mathbb{R}^{d_1}) : \langle \nabla_x f(t, x, z), \mathbf{n}(x)\rangle \le 0$，定义在 $[0,T] \times \partial\mathcal{D} \times \mathbb{R}^{d_1}\}$ 上，使得如果 (4.13) 对所有 $(t_0, t_1, \Psi, f) \in \mathcal{I}$ 都成立，那么 Θ 就是方程 (4.12) 的弱解。

为验证 $M_f^\Theta$with $\Theta = Q_\omega, \omega \in \tilde{\ }\Omega$的下鞅性质，我们引入一个具有紧支撑的连续函数。对于每个 $B \in (0, \infty)$，令 $g_B : \mathbb{R}^{d_1} \to \mathbb{R}^{d_1}$ 为满足以下条件的具有紧支撑的连续函数：对 $|y| \le B$， $g_B(y) = y$；且对每个 $y \in \mathbb{R}^{d_1}$， $|g_B(y)| \le |y| + 1$。此外，将(3.4)右侧的y 替换为 $g_B(y)$，定义算子 $\mathcal{A}^{\Theta,\ B}_{\cdot,s}$；并将(3.3)中的 $\mathcal{A}_s^\Theta$ 替换为 $\mathcal{A}^{\Theta,\ B}_{\cdot,s}$，定义 $M^{\Theta,\ B}_{\cdot,f}$。

对于每个$(t_0,t_1,\Psi,f)\in\mathcal{I}$，定义$\Phi=\Phi_{(t_0,t_1,\Psi,f)}$如下：

$$\mathcal{P}(\mathcal{Z})\ni\Theta\mapsto\Phi(\Theta):=\left(\mathbb{E}_\Theta[\Psi\cdot(M_f^\Theta(t_1)-M_f^\Theta(t_0))]\right)^-, \tag{4.14}$$

其中，对每个 $a\in\mathbb{R}$， $a^-:=$最大值$\{-a,0\}$。类似地，对每个 $B\in(0,\ \infty)$，将Φ_B定义为用 M_f^Θ替换式（4.14) 中的 $M^{\Theta,\ B}_{\ f}$。

与引理 3.2 的证明类似，我们得到：(i) $\forall B\in(0,\infty)$, Φ_B 在$\tilde{}$ $\mathcal{P}(\mathcal{Z})$上连续，(ii) $\sup_n\mathbb{E}|\Phi(Q^n)-\Phi_B(Q^n)|\to0$，以及 (iii) $\mathbb{E}|\Phi(Q)-\Phi_B(Q)|\to0$，当 $B\to\infty$时。对固定的 $B>0$， $\Phi_B(Q^n)\to\Phi_B(Q)$ 依分布收敛。上述性质还表明， $\Phi(Q^n)\to\Phi(Q)$ 依分布收敛。根据Q^n的定义，对 $\omega\in\Omega$，我们得到

$$\begin{aligned}
&\Phi(Q^n_\omega)\\
=\ &\left(\mathbb{E}_{Q^n_\omega}\left[\Psi\cdot\left(M_f^{Q^n_\omega}(t_1)-M_f^{Q^n_\omega}(t_0)\right)\right]\right)^-\\
=\ &\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\Psi\big((\bar X^{i,n}(.,\omega),\rho^{i,n}_\omega,W^i(.,\omega))\big)\\
&\cdot\big(f(t_1,\bar X^{i,n}(t_1,\omega),W^i(t_1,\omega))-f(t_0,\bar X^{i,n}(t_0,\omega),W^i(t_0,\omega))\\
&-\int_{t_0}^{t_1}f_s(s,\bar X^{i,n}(s,\omega),W^i(s,\omega))\mathrm{d}s\\
&-\int_{t_0}^{t_1}\mathcal{A}_s^{Q^n_\omega}(f)(s,\bar X^{i,n}(s,\omega),h^n_i(s,\omega),W^i(s,\omega))\mathrm{d}s\big)\Big)^-,
\end{aligned}$$

其中 $\mathcal{A}^{Q^n_\omega}$ 定义见（3.4），其中以 $\bar\mu^n_\omega$ 替代 ν_Θ。

应用伊藤公式，对于每个 i，我们有

$$\begin{aligned}
&f\big(t_1,\bar X^{i,n}(t_1),W^i(t_1)\big)-f\big(t_0,\bar X^{i,n}(t_0),W^i(t_0)\big)\\
&\quad-\int_{t_0}^{t_1}f_s(s,\bar X^{i,n}(s),W^i(s))\mathrm{d}s\\
&\quad-\int_{t_0}^{t_1}\mathcal{A}_s^{Q^n}(f)\big(s,\bar X^{i,n}(s),h^n_i(s),W^i(s)\big)\mathrm{d}s\\
&=\int_{t_0}^{t_1}\langle\nabla_xf(s,\bar X^{i,n}(s),W^i(s)),\sigma(s,\bar X^{i,n}(s),\bar\mu^n(s))\mathrm{d}W^i(s)\rangle\\
&\quad+\int_{t_0}^{t_1}\langle\nabla_zf(s,\bar X^{i,n}(s),W^i(s)),\mathrm{d}W^i(s)\rangle\\
&\quad-\int_{t_0}^{t_1}\langle\nabla_xf(s,\bar X^{i,n}(s),W^i(s)),\mathrm{d}\bar K^{i,n}_s\rangle.
\end{aligned}$$

注意到 Ψ 是 $\mathcal{G}_{t_0}$-可测且非负的，我们有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[\Phi^2(Q^n)]\\
=\ &\mathbb{E}\left[\left(\left(\mathbb{E}_{Q^n_\omega}\left[\Psi\cdot\left(M_f^{Q^n_\omega}(t_1)-M_f^{Q^n_\omega}(t_0)\right)\right]\right)^-\right)^2\right]\\
=\ &\mathbb{E}\Bigg[\Bigg(\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\int_{t_0}^{t_1}\Psi\cdot\big(\langle\nabla_xf(s,\bar X^{i,n}(s),W^i(s)),\sigma(s,\bar X^{i,n}(s),\bar\mu^n(s))\mathrm{d}W^i(s)\rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\langle\nabla_z f(s,\bar{X}^{i,n}(s),W^i(s)),\mathrm{d}W^i(s)\rangle-\langle\nabla_x f(s,\bar{X}^{i,n}(s),W^i(s)),\mathrm{d}\bar{K}_s^{i,n}\rangle\Big)^-\Big)^2\Big]\\
\leq\quad & \mathbb{E}\Big[\Big(\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\int_{t_0}^{t_1}\Psi\cdot\big(\langle\nabla_x f(s,\bar{X}^{i,n}(s),W^i(s)),\sigma(s,\bar{X}^{i,n}(s),\bar{\mu}^n(s))\mathrm{d}W^i(s)\rangle\\
&+\langle\nabla_z f(s,\bar{X}^{i,n}(s),W^i(s)),\mathrm{d}W^i(s)\rangle\big)\Big)^-\\
&+\Big(-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\int_{t_0}^{t_1}\Psi\cdot\langle\nabla_x f(s,\bar{X}^{i,n}(s),W^i(s)),\mathrm{d}\bar{K}_s^{i,n}\rangle\Big)^-\Big)^2\Big]\\
\leq\quad & \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n\mathbb{E}\Big[\int_{t_0}^{t_1}\Big|\Psi\cdot\Big(\nabla_z f(s,\bar{X}^{i,n}(s),W^i(s))\\
&+\nabla_x f(s,\bar{X}^{i,n}(s),W^i(s))\sigma(s,\bar{X}^{i,n}(s),\bar{\mu}^n(s))\Big)\Big|^2\mathrm{d}s\Big]\\
\xrightarrow{n\to\infty}\quad & 0,
\end{aligned}
$$

其中我们用到了这一事实:

$$
-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\int_{t_0}^{t_1}\Psi\cdot\langle\nabla_x f(s,\bar{X}^{i,n}(s),W^i(s)),\mathrm{d}\bar{K}_s^{i,n}\rangle\geq 0.
$$

~由于 $\mathcal{I}$是可数的，因此对于 $\mathbb{P}$-几乎所有的 $\omega\in\Omega$，所有的（t_0，t_1，Ψ，f）$\in\mathcal{T}$，

$$
\mathbb{E}_{Q_\omega}[\Psi\cdot(M_f^{Q_\omega}(t_1)-M_f^{Q_\omega}(t_0)]\geq 0,
$$

~这意味着，对于 $\mathbb{P}$-几乎所有的 $\omega\in\Omega$，Q_ω 都是方程（4.12）的弱解，由此完成定理的证明。□

现在我们可以完成上界（2.6）的证明了。根据 Q^N的定义，（2.6）的左端可以改写为

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\int_0^T|h_i^N(t)|^2\mathrm{d}t\Big]+\mathbb{E}[F(\bar{\mu}^N)]\\
=\quad&\int_\Omega\Big[\int_{\mathcal{R}_1}\Big(\frac{1}{2}\int_{\mathcal{R}^{d_1}\times[0,T]}|y|^2 r(\mathrm{d}y\times\mathrm{d}t)\Big)Q^N_{\omega,\mathcal{R}}(\mathrm{d}r)+F(Q^N_{\omega,\mathcal{X}})\Big]\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega).
\end{aligned}
$$

注意到函数 F 有界且连续，由引理4.2 和定理4.3，结合法图引理，拉普拉斯上界便可直接得到。

4.2. 拉普拉斯下界。 在本小节中，我们证明2.7中的拉普拉斯下界第 2 步。证明与 [3] 和 [5]中的证明非常相似。为完整起见，我们给出一个证明概要。

令 $\Theta\in\mathcal{P}_\infty$。我们将在满足（ $\{h^N,N\in\mathbb{N}\}$，且 $h^N\in\mathcal{H}_N$的同一随机基底上构造一个序列（2.7）：

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{N\to\infty}\Big\{\frac{1}{2}\mathbb{E}\big[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\int_0^T|h_i^N|^2\mathrm{d}t\big]+\mathbb{E}[F(\bar{\mu}^N)]\Big\}\\
\leq\quad&\frac{1}{2}\int_{\mathcal{R}_1}\int_{\mathbb{R}^{d_1}\times[0,T]}|y|^2 r(\mathrm{d}y\times\mathrm{d}t)\Theta_{\mathcal{R}}(\mathrm{d}r)+F(\Theta_{\mathcal{X}}).
\end{aligned}
$$

¯回顾第X、ρ、W节中的3，它是（$\mathcal{Z}$，$\mathcal{B}$（$\mathcal{Z}$），（$\mathcal{G}_t$）Θ）上的典范过程，以及第 $\bar{v}$ 节中的2，它是从 $\mathcal{Z}$ 到 $\mathcal{Z}^0$的映射。于是我们可以将$\Theta\circ\bar{v}^{-1}$ 分解为

$$\Theta\circ\bar{v}^{-1}:=\nu_0(\mathrm{d}\phi_0)\Theta_{\mathcal{W}}(\mathrm{d}w)\bar{\lambda}(\mathrm{d}r|\phi_0,w).$$

定义乘积空间 $(\Omega_\infty,\mathcal{F}^\infty)$ 为 $(\mathcal{R}_1\times\mathcal{W},\mathcal{B}(\mathcal{R}_1\times\mathcal{W}))$ 的可数无穷乘积，并将 (r',w') 记为 Ω_∞ 中的元素，其中 $r'=(r_1,r_2,\ldots)$ 且$w'=(w_1,w_2,\ldots)$。对每个 $i\in\mathbb{N}$，定义

$$W^{i,\infty}(t,(r',w')):=w_i(t),\quad \rho^{i,\infty}(r',w'):=r_i,$$

and

$$h_i^\infty(t,(r',w')):=\int_{\mathbb{R}^{d_1}}y\rho^{i,\infty}_{(r',w'),t}(\mathrm{d}y),\ (r',w')\in\Omega_\infty,\ t\in[0,T],$$

其中 $\rho^{i,\ \infty\ (r',\ w')\ t}$ 是 $\rho^{i,\ \infty}(r',w')$ 在时刻 t 的导数测度。此外，对每个 $N\in\mathbb{N}$，定义 $\mathbb{P}_N\in\mathcal{P}(\Omega_\infty)$ 为

$$\mathbb{P}_N(\mathrm{d}r,\mathrm{d}w):=\bigotimes_{i=1}^N\Theta_{\mathcal{W}}(\mathrm{d}w_i)\bar{\lambda}(\mathrm{d}r_i|x^{i,N},w_i)\bigotimes_{i=N+1}^\infty\Theta\circ(\rho,W)^{-1}(\mathrm{d}r_i,\mathrm{d}w_i),$$

并定义一个取值于 $\mathcal{P}(\overline{\mathcal{D}}\times\mathcal{R}_1\times\mathcal{W})$ 的随机变量为

$$\lambda^N(A\times R\times B):=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\delta_{x^{i,N}}(A)\delta_{\rho^{i,\infty}}(R)\delta_{W^{i,\infty}}(B),$$

对任意 $A\times R\times B\in\mathcal{B}(\overline{\mathcal{D}}\times\mathcal{R}_1\times\mathcal{W})$，其中 $\{x^{i,N}\}$ 为初始值。

根据构造，在 $\mathbb{P}_N$ 下，$\{W^{i,\infty},i\in\{1,\ldots,N\}\}$是相互独立的维纳过程。由假设2.1(A2)，可得

$$\mathbb{P}_N\circ(\lambda^N)^{-1}\to\delta_{\Theta\circ\bar{v}^{-1}}\tag{4.15}$$

and

$$\begin{aligned}&\limsup_{N\to\infty}\mathbb{E}_{\mathbb{P}_N}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\int_0^T|h_i^\infty(t)|^2\mathrm{d}t\right]\\ =\ &\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\int_{\mathcal{R}_1\times\mathcal{W}}\int_0^T|\int_{\mathbb{R}^{d_1}}yr_t(\mathrm{d}y)|^2\mathrm{d}t\bar{\lambda}(\mathrm{d}r|x^{i,N},w)\Theta_{\mathcal{W}}(\mathrm{d}w)\\ =\ &\mathbb{E}_\Theta\left[\int_0^T|\int_{\mathbb{R}^{d_1}}y\rho_t(\mathrm{d}y)|^2\mathrm{d}t\right]\le\mathbb{E}_\Theta\left[\int_{\mathbb{R}^{d_1}\times[0,T]}|y|^2\rho(\mathrm{d}y\times\mathrm{d}t)\right]<\infty.\end{aligned}\tag{4.16}$$

与（4.11）类似，对每个 $N\in\mathbb{N}$，定义一个取值于 $\mathcal{P}(\mathcal{Z})$ 的随机变量如下:

$$\tilde{Q}^N(A\times R\times B):=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\delta_{\tilde{X}^{i,N}}(A)\cdot\delta_{\rho^{i,\infty}}(R)\cdot\delta_{W^{i,\infty}}(B),$$

对任意 $A\times R\times B\in\mathcal{B}(\mathcal{Z})$，其中（$\tilde{X}^{1,\ N}$，…，$\tilde{X}^{N,\ N}$）是满足 $h^N=(h_1^\infty,\ldots,h_N^\infty)$ 和 $\tilde{\mu}^N(t)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\delta_{\tilde{X}^{i,\ N}(t)}$的方程组（2.5）的解，对每个 $t\in[0,T]$均成立。

由（4.16）和引理4.1，我们知道 $\{\tilde{Q}^N,N\in\mathbb{N}\}$是紧的。令 $\tilde{Q}$为 $\{\tilde{Q}^N,N\in\mathbb{N}\}$的一个极限点，它定义在某个概率空间（˜Ω ˜F，˜P）上。根据˜ ˜ ˜定理4.3及其证明，$Q_\omega\in\mathcal{P}_\infty$ 对 $\mathbb{P}$几乎所有的 $\omega\in\Omega$均成立。此外，由（4.15），我们推出对 $\tilde{\mathbb{P}}$几乎所有的 $\omega\in\tilde{\Omega}$，$\tilde{Q}_\omega\circ\bar{v}^{-1}=\Theta\circ\bar{v}^{-1}$。因此，由

~ ~ ~假设 2.1（A4），对 $\mathbb{P}$几乎所有的 $\omega \in \Omega$， $Q_\omega = \Theta$。结合（4.16）以及 F 在（2.7）中有界且连续，拉普拉斯下界便显然成立。

致谢。本文部分得到国家重点研发计划（编号：2022YFA1006001）和国家自然科学基金（编号：12131019、11971456、11721101）的资助。

References

1. G. B. Arous 和 A. Guionnet，《朗之万自旋玻璃动力学的大偏差》。概率论及相关领域，1995，102(4)：455-509。2. D. Adams、G. D. Reis、R. Ravaille、W. Salkeld 和 J. Tugaut，《含自稳定项和超线性漂移的反射麦基恩–弗拉索夫方程的大偏差与退出时间》。随机过程及其应用，2022，146：264-310。3. A. Budhiraja 和 M. Conroy，《大偏差尺度下相互作用扩散过程的经验测度与小噪声渐近》。理论概率学杂志，2022，35(1)：295-349。4. A. Budhiraja 和 P. Dupuis，《无限维布朗运动正泛函的变分表示》。概率与数理统计，2000，20(1)：39-61。5. A. Budhiraja、P. Dupuis 和 M. Fischer，《通过弱收敛方法研究弱相互作用过程的大偏差性质》。概率年刊，2012，40(1)：74-102。6. M. Coghi、W. Dreyer、P. K. Friz、P. Gajewski、C. Guhlke 和 M. Maurelli，《由反射边界引发相互作用的麦基恩–弗拉索夫随机微分方程与粒子系统》。SIAM 数学分析杂志，2022，54(2)：2251-2294。7. D. A. Dawson 和 P. D. Moral，《强拓扑下相互作用过程的大偏差》。复杂数据问题的统计建模与分析，2005，1：179-208。8. D. A. Dawson 和 J. G¨artner，《弱相互作用扩散过程偏离麦基恩–弗拉索夫极限的大偏差》。随机学：概率与随机过程国际期刊，1987，20(4)：247-308。9. D. A. Dawson 和 J. G¨artner，《多层次大偏差与相互作用扩散过程》。概率论及相关领域，1994，98(4)：423-487。10. P. D. Moral 和 A. Guionnet，《相互作用粒子系统的大偏差：在非线性滤波中的应用》。随机过程及其应用，1998，78(1)：69-95。11. B. Djehiche 和 A. Schied，《相互作用跳跃层级系统的大偏差》。理论概率学杂志，1998，11(1)：1-24。12. A. Dembo 和 O. Zeitouni，《大偏差技术及其应用》，随机建模与应用概率。施普林格出版社，柏林，2010，38。13. P. Dupuis 和 R. S. Ellis，《大偏差理论的弱收敛方法》。约翰·威利父子出版公司，1997。14. J. Hoeksema、T. Holding、M. Maurell 和 O. Tse，《奇异相互作用扩散过程的大偏差》。arXiv:2002.01295，2020。15. N. Ikeda 和 S. Watanabe，《随机微分方程与扩散过程》。北荷兰出版公司，阿姆斯特丹 · 牛津 · 纽约，1989，24。16. C. L´eonard，《带跳跃的长程相互作用粒子系统的大偏差》。IHP概率与统计年鉴，1995，31(2)：289-323。17. C. L´eonard，《关于与空间齐次玻尔兹曼型方程相关的粒子系统的大偏差》。概率论及相关领域，1995，101(1)：1-44。18. A. S. Sznitamn，《非线性反射扩散过程及其相关的混沌传播与涨落》。功能分析杂志，1984，56(3)：311-336。19. D. W. Stroock 和 S. R. S. Varadhan，《带边界条件的扩散过程》。纯粹与应用数学通讯，1971，24(2)：147-225。20. J. B. Walsh，《随机偏微分方程导论》。施普林格，柏林、海德堡，1986，265-439。21. R. Wei、S. S. Yang 和 J. L. Zhai，《非光滑时变区域上的斜反射麦基恩–弗拉索夫随机微分方程》。arXiv:2208.10702，2022。

School of Mathematical Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei, 230026, China.
Email address: chenping@mail.ustc.edu.cn

School of Mathematics and Statistics, Anhui Normal University, Wuhu 241002, China.
Email address: rongw@.ahnu.edu.cn

Department of Mathematics, University of Manchester, Oxford Road, Manchester M13 9PL, United Kingdom
Email address: tusheng.zhang@manchester.ac.uk