通用编织量子门

David Lovitz*

2023年4月4日

摘要

杨-巴克斯特方程及其各种形式在许多领域都有应用，包括统计力学、纽结理论和量子信息。编织杨-巴克斯特方程的酉解作为拓扑量子计算机的量子门尤其受到关注。我们展示了一种简单的构造方法，可在任意维数下得到既酉又能实现通用量子计算的解。我们还对某些广义杨–巴克斯特方程的一族解进行了完整分类，并证明该方程的某些情形只有恒等算子的标量倍数解。

关键词—杨-巴克斯特方程、量子计算、辫群、拓扑学

arXiv:2304.00710v1 [quant-ph] 3 Apr 2023

1 杨-巴克斯特方程与量子门

拓扑量子计算机是一种理论上的机器，它通过操控物质的拓扑相来执行计算。物质的拓扑相已通过实验以分数量子霍尔效应的形式得到观测 [3]。具体而言，当电子暴露于磁场时会产生一种称为任意子的准粒子；研究人员已观测到这些准粒子在交换时会发生非平凡的相位变化。相位变化仅取决于被交换的粒子数量，而与所经过的具体路径无关 [16]。因此，由 n 个有序任意子组成的量子系统，其相位变化对应于拓扑学中的 n 股辫群，记作 B_n。接下来将简要介绍这个群，由此可自然地从该群的表示论中导出杨-巴克斯特方程。杨-巴克斯特方程是一个矩阵方程；当其解为酉时，对应于拓扑量子计算机中的量子门 [14]。

1.1 辫群

辫群 B_n 最早由 E. Artin 于 1925 [2]引入。群 B_n 可以表示为 n条竖直绳辫相互上下交错，同时每条竖直绳辫都必须满足水平线检验。也就是说，每条绳辫都必须严格地从上到下延伸，不能出现任何局部极大值或极小值。如果两组辫子在固定端点的条件下环境同痕，则认为它们等价。某些环境同痕会产生关系子。两个辫子的乘法定义为将它们上下叠放并粘合在一起，如图 1.1.1 所示。

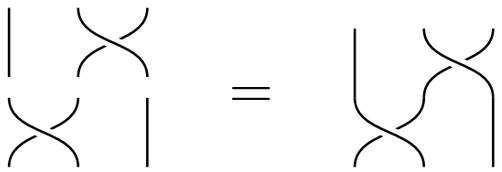


图 1.1.1：两个 3 股辫子的乘法。

辫群的一组生成元为 $\{I, \sigma_1, \dots \sigma_{n-1}\}$，其中 σ_i 是这样一条辫子：第 i 股从第 $i+1$股上方交叉并向右穿过；而 I 是没有交叉的辫子。辫群中有两个关系，我们称之为辫关系。第一条关系规定，只要两个生成元相隔至少两股，它们就可交换：$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$ 只要 $|i-j|>1$，这些关系有时称为远交换性。生成元还必须满足杨-巴克斯特关系：

$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$$

这一关系如图 1.1.2 所示，图中展示了两条端点固定且环境同痕的辫子。

辫群的表示是到可逆矩阵群的群同态。若 V是域 F 上一个 n 维向量空间，则用 $V^{\otimes n}$ 表示 V与自身进行 n 次张量积。于是

*Lovitz@pdx.edu 作者谨此感谢 Steven Bleiler 博士对本文提出的宝贵意见。

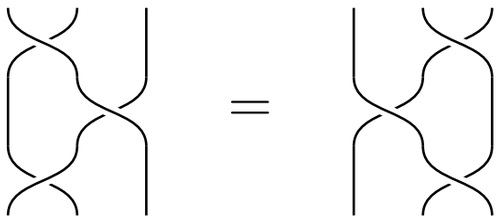


图 1.1.2：右侧的辫子是通过对左侧辫子的线进行环境同胚变形得到的。

自然可以考虑将 B_n 表示到 $V^{\otimes n}$中的表示。一种定义这种辫群表示的方法是映射：

$$\sigma_i \to I^{\otimes i-1} \otimes R \otimes I^{\otimes n-i-1} \tag{1}$$

其中 R： $V \otimes V \to V \otimes V$是定义在 V与自身的张量积上的可逆线性映射。我们还用 $\otimes$ 表示两个线性映射之间的 aB 约定克罗内克积。也就是说， $A \otimes B$的 ij 块由（$a_{ij}B$）给出，而 $A^{\otimes k}$ 表示矩阵 A 与自身进行 k 次克罗内克积。只要满足所有辫关系，这就定义了辫群的一个表示。

1.2 编织杨-巴克斯特方程

定义 1.2.1. 设 V是 C 上一个 d维向量空间。设 I是向量空间 V上的 $d \times d$ 单位矩阵，且 R： $V \otimes V \to V \otimes V$ 是一个可逆线性变换。当矩阵 R 满足编织杨-巴克斯特方程（双代数杨-巴克斯特方程）时，有：

$$(R \otimes I)(I \otimes R)(R \otimes I) = (I \otimes R)(R \otimes I)(I \otimes R) \tag{2}$$

这就是编织杨-巴克斯特方程，任何满足该方程的矩阵有时也称为 R矩阵。方程 1 所定义的表示中的矩阵 R 必须满足此处或参考文献 [13] 和 [4]中定义的编织杨-巴克斯特方程的矩阵形式。

1.3 广义杨–巴克斯特方程

定义 1.3.1。设 d、 m和 l 为自然数。设 V为 C 上维数为 d的向量空间，且R： $V^{\otimes m} \to V^{\otimes m}$ 为可逆矩阵。用 I_V 表示 V 上的恒等算子。当且仅当下式成立时，矩阵 R 是 (*d*, *m*, *l*)- 广义杨 - 巴克斯特方程的一个解：

$$(R \otimes I_V^{\otimes l})(I_V^{\otimes l} \otimes R)(R \otimes I_V^{\otimes l}) = (I_V^{\otimes l} \otimes R)(R \otimes I_V^{\otimes l})(I_V^{\otimes l} \otimes R) \tag{3}$$

这提供了另一种表示辫群的方式。该方式由 Rowell、Zhang、Wu 和 Ge 在[19] 中引入，通过所谓的广义杨-巴克斯特方程（gYBE）实现。当 $m = 2$ 和 $l = 1$ 时，这一表达式等价于双代数杨-巴克斯特方程。任何双代数杨-巴克斯特方程的解都会导出一个辫群表示；而广义杨-巴克斯特方程的解只有在同时满足远距离交换关系时才会导出辫群表示，当 $l > m/2$ [6]时即可保证这一点。在这种情况下，该表示由以下同态给出：

$$\sigma_i \to I_{d^l}^{\otimes i-1} \otimes R \otimes I_{d^l}^{\otimes n-i-1} \tag{4}$$

其中 I_{d^l} 是 $d^l \times d^l$ 单位矩阵。寻找满足双代数杨-巴克斯特方程或广义杨-巴克斯特方程的矩阵是一项艰巨的任务，即使在低维情况下，目前也只知道少数几个例子。完整分类仅针对 (2,2,1)-广义杨-巴克斯特方程（等价于二维双代数杨-巴克斯特方程）在 [11] 中的情形，以及 [9]中的酉解完成。酉解尤为理想，因为它们在拓扑量子计算中表现为编织量子门。

定理 1.3.1. 所有 (d, m, l)-广义杨-巴克斯特方程的可逆解均具有 λI_{d^m} 的形式，其中 $l \geq m$。

证明. 固定 (d, m, l)，其中 $l \geq m$，注意这使得 R成为一个 $d^m \times d^m$ 矩阵，而 I_V是 $d \times d$ 恒等算子 . 于是我们可以写成：

$$\begin{aligned}
(R \otimes I_d^{\otimes l})(I_d^{\otimes l} \otimes R)(R \otimes I_d^{\otimes l}) &= (I_d^{\otimes l} \otimes R)(R \otimes I_d^{\otimes l})(I_d^{\otimes l} \otimes R) \\
(R \otimes I_d^{\otimes l})(I_d^{\otimes m} \otimes I_d^{\otimes l-m} \otimes R)(R \otimes I_d^{\otimes l}) &= (I_d^{\otimes m} \otimes I_d^{\otimes l-m} \otimes R)(R \otimes I_d^{\otimes l})(I_d^{\otimes l} \otimes R) \\
(R \otimes I_d^{\otimes l})(I_d^{\otimes m} R \otimes (I_d^{\otimes l-m} \otimes R) I_d^{\otimes l}) &= (I_d^{\otimes m} R \otimes (I_d^{\otimes l-m} \otimes R) I_d^{\otimes l})(I_d^{\otimes l} \otimes R) \\
(R \otimes I_d^{\otimes l})(R \otimes I_d^{\otimes l-m} \otimes R) &= (R \otimes I_d^{\otimes l-m} \otimes R)(I_d^{\otimes l} \otimes R) \\
(R^2 \otimes I_d^{\otimes l}(I_d^{\otimes l-m} \otimes R)) &= ((R \otimes I_d^{\otimes l-m}) I_d^{\otimes l} \otimes R^2) \\
(R^2 \otimes I_d^{\otimes l-m} \otimes R) &= (R \otimes I_d^{\otimes l-m} \otimes R^2) \\
(R^{-1} \otimes I_d^{\otimes l})(R^2 \otimes I_d^{\otimes l-m} \otimes R) &= (R^{-1} \otimes I_d^{\otimes l})(R \otimes I_d^{\otimes l-m} \otimes R^2) \\
(R \otimes I_d^{\otimes l-m} \otimes R) &= (I_d^{\otimes m} \otimes I_d^{\otimes l-m} \otimes R^2) \\
(R \otimes I_d^{\otimes l-m} \otimes R)(I_d^{\otimes l} \otimes R^{-1}) &= (I_d^{\otimes m} \otimes I_d^{\otimes l-m} \otimes R^2)(I_d^{\otimes l} \otimes R^{-1}) \\
(R \otimes I_d^{\otimes l-m} \otimes I_d^{\otimes m}) &= (I_d^{\otimes m} \otimes I_d^{\otimes l-m} \otimes R) \\
(R \otimes I_d^{\otimes l}) &= (I_d^{\otimes l} \otimes R)
\end{aligned}$$

由此可知，当$l \geq m$时， R必须是恒等算子 I_{d^m}的标量倍数，才能满足（d， m， l）-广义杨-巴克斯特方程。 □

1.4 代数杨-巴克斯特方程

定义 1.4.1。令 P 为交换算子，它在狄拉克符号 [8]中将量子位互换，记作P： $|ij\rangle \to |ji\rangle$ ；令 I为 $d \times d$ 单位矩阵。当 R是一个 $d^2 \times d^2$ 时，定义

$$R_{12} = (R \otimes I) \tag{5}$$
$$R_{13} = (I \otimes P)(R \otimes I)(I \otimes P) \tag{6}$$
$$R_{23} = (I \otimes R) \tag{7}$$

代数杨-巴克斯特方程（aYBE）定义如下：

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12} \tag{8}$$

代数杨-巴克斯特方程和双代数杨-巴克斯特方程密切相关：若 R 满足代数杨-巴克斯特方程，则 RP 满足双代数杨-巴克斯特方程，反之亦然。代数杨-巴克斯特方程的矩阵形式可写成一组多项式方程（见 [11] 或 [9] 或附录）：

$$R^{k_1k_2}_{j_1j_2} R^{l_1k_3}_{k_1j_3} R^{l_2l_3}_{k_2k_3} = R^{k_2k_3}_{j_2j_3} R^{k_1l_3}_{j_1k_3} R^{l_1l_2}_{k_1k_2} \tag{9}$$

其中，每个方程由 $(j_1, j_2, j_3, l_1, l_2, l_3)$ 编号，各指标的取值范围为 1 到 d；按照微分几何中使用的爱因斯坦求和约定 [10], ，重复出现的指标需要求和。在本例中，带有 k 的指标（k_p 对应 $p = 1$、2、3）需要求和。由于代数杨-巴克斯特方程在各种指标变换下保持不变，不同参考文献中的指标写法略有差异，相关变换列于[11]。我们将采用以下约定：

$$R(e_i \otimes e_i) = \sum R^{ab}_{ij} e_a \otimes e_b \tag{10}$$

例如，当 $d = 3$ 矩阵 R 呈现如下形式：

$$\begin{pmatrix}
R^{11}_{11} & R^{11}_{12} & R^{11}_{13} & R^{11}_{21} & R^{11}_{22} & R^{11}_{23} & R^{11}_{31} & R^{11}_{32} & R^{11}_{33} \\
R^{12}_{11} & R^{12}_{12} & R^{12}_{13} & R^{12}_{21} & R^{12}_{22} & R^{12}_{23} & R^{12}_{31} & R^{12}_{32} & R^{12}_{33} \\
R^{13}_{11} & R^{13}_{12} & R^{13}_{13} & R^{13}_{21} & R^{13}_{22} & R^{13}_{23} & R^{13}_{31} & R^{13}_{32} & R^{13}_{33} \\
R^{21}_{11} & R^{21}_{12} & R^{21}_{13} & R^{21}_{21} & R^{21}_{22} & R^{21}_{23} & R^{21}_{31} & R^{21}_{32} & R^{21}_{33} \\
R^{22}_{11} & R^{22}_{12} & R^{22}_{13} & R^{22}_{21} & R^{22}_{22} & R^{22}_{23} & R^{22}_{31} & R^{22}_{32} & R^{22}_{33} \\
R^{23}_{11} & R^{23}_{12} & R^{23}_{13} & R^{23}_{21} & R^{23}_{22} & R^{23}_{23} & R^{23}_{31} & R^{23}_{32} & R^{23}_{33} \\
R^{31}_{11} & R^{31}_{12} & R^{31}_{13} & R^{31}_{21} & R^{31}_{22} & R^{31}_{23} & R^{31}_{31} & R^{31}_{32} & R^{31}_{33} \\
R^{32}_{11} & R^{32}_{12} & R^{32}_{13} & R^{32}_{21} & R^{32}_{22} & R^{32}_{23} & R^{32}_{31} & R^{32}_{32} & R^{32}_{33} \\
R^{33}_{11} & R^{33}_{12} & R^{33}_{13} & R^{33}_{21} & R^{33}_{22} & R^{33}_{23} & R^{33}_{31} & R^{33}_{32} & R^{33}_{33}
\end{pmatrix} \tag{11}$$

1.5 杨-巴克斯特方程的对称性

广义杨-巴克斯特方程的每个解，在以下对称变换下都会产生该方程的更多解（并且，恰当选择 (d, m, l) 后，这些对称变换也会产生双代数杨-巴克斯特方程和代数杨-巴克斯特方程的更多解）。

命题 1.5.1. 若 R 是 (d, m, l)-广义杨-巴克斯特方程的一个解，则以下各项也都是解：

1. 对任意非零标量 λ， λR 2. R^{-1}3. 复共轭 R^*4. 转置 R^T ，因此
复伴随 $R^\dagger$5. $Q^{\otimes m} R (Q^{-1})^{\otimes m}$ ，其中 Q 是任意复非奇异 $d \times d$ 矩阵。

这些对称性在双代数杨-巴克斯特方程和代数杨-巴克斯特方程的情形下广为人知，并见于 [13] 和 [11] ，这些结果同样适用于广义杨–巴克斯特方程，相关证明见附录。

2 通用量子门

回想一下，如 [5] 所述，一个作用于 n 个量子位的酉矩阵，若与 $V \to V$ 中的所有局部酉变换（单量子位门）共同生成 $U(d^n)$的稠密子群，则它对量子计算具有通用性。若生成的是整个群 $U(d^n)$，则该酉矩阵具有精确通用性。Brylinski 在 [5] 中证明，双量子位门 U 具有通用性，当且仅当它是纠缠门。也就是说，存在一个量子态 $|ij\rangle \in V \otimes V$，使得 $U|ij\rangle$ 无法表示为两个量子比特的张量积。例如，由$|ij\rangle \to |i$、$i \oplus j\rangle$ 定义的 CNOT 门具有精确通用性，因为它将量子态 $|00\rangle + |10\rangle$ 变为 $|00\rangle + |11\rangle$ [5]。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

纠缠条件还揭示了拓扑纠缠与量子纠缠之间的联系。任意一个 R 矩阵都会产生一个纽结与链环不变量 [20], ; 如果 R 不具有纠缠性，它就无法用于区分两个纽结 [1]。尽管几乎所有酉门都具有通用性 [7], , 但要找到既具有通用性又满足杨-巴克斯特方程的矩阵，是一项复杂的任务。Kauffman 和 Lomonaco 在 [14] 中证明，以下杨-巴克斯特方程的酉解作为双量子比特门也具有精确通用性。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

CNOT 门可以推广为受控递增门 $C^n_{X,\ d}$，其定义在 [12] 中采用递归方式给出。下面回顾其定义。设 n 为参与运算的量子位数。令 X_d 表示 $d \times d$ 递增门（INC）：

$$X_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

CNOT（有时也称 CINC，即受控递增门）定义如下：在 [12] 中令 $C^1_{X,\ d} = X_d$，然后递归构造

$$C^n_{X,d} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C^{n-1}_{X,d} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I \end{pmatrix} \tag{14}$$

注意，右下角的单位矩阵块重复出现 $n-2$ 次。对 n 进行归纳可知，对于所有 n，$C^n_{X,\ d}$ 都是实酉矩阵。

证明。当 $n = 1$ 时，有 $C^1_{X,\ d} = X_d$ 和 $X_d X_d^T = I$。现在假设 $C^n_{X,\ d}$ 在某个 $n > 1$范围内是酉的。

$$\begin{aligned} C^n_{X,d}(C^n_{X,d})^\dagger &= \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C^{n-1}_{X,d} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (C^{n-1}_{X,d})^\dagger & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C^{n-1}_{X,d}(C^{n-1}_{X,d})^\dagger & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

CNOT 门在这个族中对应于 $C^2_{X,\ d}$。由于 CNOT 门 $C^2_{X,\ d}$ 与所有单量子位门构成一个精确通用门集，因此，证明某个矩阵具有精确通用性的一种方法，是证明可以利用该矩阵以及局部酉矩阵的克罗内克积 [5] 表示 CNOT。这种方法还有一个优点：它能立即提供一种方式，将任何以 CNOT 和局部门表示的算法改写为其他形式。

2.1 一个通用的杨-巴克斯特算符

辫群的酉表示可作为拓扑量子计算机中的量子门 [14]。因此，我们希望找到既是 bYBE 或 gYBE 的酉解，又能实现通用量子计算的解。求解任何一种杨-巴克斯特方程变体通常都十分困难，因为这需要求解一个大型多元多项式方程组。具体而言，当向量空间 V 的维数为 d时，bYBE 涉及求解一个包含 d^6 个三次方程、涉及 d^4 个变量的方程组。本文的一项主要贡献如下：我们发现了一个此前未曾报道过的、适用于所有维数的 bYBE 通用酉解。为构造该解，首先回顾记作 F_d 、且满足 $\omega = e^{i2\pi/d}$的离散量子傅里叶变换：

$$F_d = \frac{1}{\sqrt{d}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{d-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(d-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{d-1} & \omega^{2(d-1)} & \dots & \omega^{(d-1)(d-1)} \end{bmatrix} \tag{15}$$

为构造 bYBE 的解，我们定义如下 aYBE 的酉解：

$$R_d = (I \otimes F_d) C^2_{X,d} (I \otimes F_d^\dagger) \tag{16}$$

在定理 2.1.1 中，我们证明该解属于代数杨-巴克斯特方程的一类更大的对角酉解族；其中任意一个解都可以通过与交换算子 P复合，转换为双代数杨-巴克斯特方程的一个解。

定理 2.1.1. 所有 $d^2 \times d^2$ 对角矩阵都是维数为 d 时代数杨-巴克斯特方程的解，特别是 ar R_d 是代数杨-巴克斯特方程的一个精确普适酉解的例子。

证明。首先注意到，由于 R_d 是酉矩阵的乘积，因此它是酉的。为了将 $C^2_{X,\ d}$ 表示为 of R_d 以及局部线性变换的克罗内克积，我们可以按如下方式用 $(I \otimes F_d)$ 对 R_d 进行共轭：

$$C^2_{X,d} = (I \otimes F_d^\dagger) R_d (I \otimes F_d)$$

为了证明 R_d 是代数杨-巴克斯特方程的一个解，我们可以使用分块矩阵乘法来简化 R_d 的形式：

$$\begin{aligned}
R_d &= (I \otimes F_d) C^2_{X,d} (I \otimes F_d^\dagger) \\
&= \begin{pmatrix} F_d & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & F_d & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & F_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X_d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_d^\dagger & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_d^\dagger & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & F_d^\dagger & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & F_d^\dagger \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_d X_d F_d^\dagger & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

由于傅里叶变换可以对角化 X_d，结果表明该矩阵是对角矩阵。 X_d的特征多项式为 $\lambda^d - 1$，因此 X_d 的特征值是 d个单位根：$e^{\frac{k2\pi i}{d}}$，其中 $k = 1 \dots d$。显然可以验证，相应的特征向量由 F_d的各列给出。

为了证明这满足代数杨-巴克斯特方程，我们将证明一个更强的结论：任意对角矩阵都是代数杨-巴克斯特方程的解。按照第 1.4 节所述的索引约定，可逆对角矩阵的对角线上元素均非零： $R^{ab}_{ab} \neq 0$ ，其他位置的元素均为零。现在考虑由 $(j_1, j_2, j_3, l_1, l_2, l_3)$ 索引的其中一个方程。方程 9 左侧求和中的所有项都为零，除非每个变量都来自 R的对角线，也就是说，除非 $k_1 = j_1, l_1 = k_1, l_2 = k_2, k_2 = j_2, k_3 = j_3, l_3 = k_3$。同理，右侧求和中的各项都为零，除非 $k_2 = j_2, k_1 = j_1, l_1 = k_1, l_2 = k_2, j_3 = k_3, k_3 = l_3, k_2 = l_2$。只考虑求和中的非零项可知，只要 R 是对角矩阵，代数杨-巴克斯特方程就成立：

$$R^{j_1 l_2}_{j_1 l_2} R^{j_1 j_3}_{j_1 j_3} R^{j_2 j_3}_{j_2 j_3} = R^{j_2 j_3}_{j_2 j_3} R^{j_1 j_3}_{j_1 j_3} R^{j_1 l_2}_{j_1 l_2}$$

□

因此， $R_d P$是双代数杨-巴克斯特方程的酉解。根据上述对称性，$(Q \otimes Q) R_d (Q \otimes Q)^{-1}$ 在 Q 是复 $d \times d$ 酉矩阵时，也是杨-巴克斯特方程的通用酉解。这提供了一种生成许多非平凡杨-巴克斯特方程酉解的方法；这些解同时也是通用量子门，并能给出 CNOT 门的显式分解。例如，当 $d = 3$时，若 $Q = F_3^3$，我们得到以下双代数杨-巴克斯特方程的酉解：

$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 1-i\sqrt{3} & 1+i\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 2 & -1+i\sqrt{3} & -1-i\sqrt{3} \\ 2 & -1+i\sqrt{3} & -1-i\sqrt{3} & 4 & 1-i\sqrt{3} & 1+i\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1+i\sqrt{3} & -1-i\sqrt{3} & 4 & 1-i\sqrt{3} & 1+i\sqrt{3} \\ 1+i\sqrt{3} & 4 & 1-i\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & -1-i\sqrt{3} & 2 & -1+i\sqrt{3} \\ -1-i\sqrt{3} & 2 & -1+i\sqrt{3} & 1+i\sqrt{3} & 4 & 1-i\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-i\sqrt{3} & 2 & -1+i\sqrt{3} & 1+i\sqrt{3} & 4 & 1-i\sqrt{3} \\ 1-i\sqrt{3} & 1+i\sqrt{3} & 4 & 0 & 0 & 0 & -1+i\sqrt{3} & -1-i\sqrt{3} & 2 \\ -1+i\sqrt{3} & -1-i\sqrt{3} & 2 & 1-i\sqrt{3} & 1+i\sqrt{3} & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1+i\sqrt{3} & -1-i\sqrt{3} & 2 & 1-i\sqrt{3} & 1+i\sqrt{3} & 4 \end{pmatrix}$$

由于任意对角矩阵都是代数杨-巴克斯特方程的解，因此可以用类似的方法生成其他双代数杨-巴克斯特方程的通用酉解。任意对角矩阵具有通用性的条件见 [5]。虽然我们已经看到任意对角矩阵都是代数杨-巴克斯特方程的解，但双代数杨-巴克斯特方程只有一族对角解。

定理 2.1.2. 编织杨-巴克斯特方程的可逆对角解只有恒等算子的标量倍数。

证明. 设 $R = diag(r_1, \ldots, r_{d^2})$ 是一个可逆对角矩阵。由于 $(R\otimes I)$ 和 $(I\otimes R)$ 都是对角矩阵且彼此可交换，编织杨-巴克斯特方程的左侧变为 $(R\otimes I)(I\otimes R)(R\otimes I) = (R^2\otimes I)(I\otimes R)$，而右侧可写为 $(I\otimes R)(R\otimes I)(I\otimes R) = (R\otimes I)(I\otimes R^2)$。于是双代数杨-巴克斯特方程变为：

$$(I\otimes R^2)(R\otimes I) = (I\otimes R)(R^2\otimes I)$$
$$(I\otimes R) = (R\otimes I)$$

考察 $(I\otimes R) - (R\otimes I)$ 对角线上的各项，可得方程：$r_2 - r_1 = 0, r_3 - r_1 = 0, \ldots, r_{d^2} - r_1 = 0$。因此，唯一可逆的解是当 $r_1 = r_2 = \cdots = r_{d^2}$ □

3 X形解的广义杨-巴克斯特方程

低维情况下，广义杨-巴克斯特方程的置换解可以通过穷举计算得到。由置换矩阵解可以构造单项式解：将其中的 1 替换为变量，并求出使新矩阵成为解的条件。(2, 3, 1) 和 (2, 3, 2) 型单项式解已在 [17] 中得到完整分类。与双代数杨-巴克斯特方程不同，(2, 3, 1) 和 (2, 3, 2) 型广义杨-巴克斯特方程没有带有 d 自由参数的单项式解。除 [17], 中的单项式解外，目前已知的非编织杨-巴克斯特方程 (d, m, l)-广义杨-巴克斯特方程解，在命题 1.5.1 所述对称性下仅有少数几种。其中一个著名的解是 [19] 中出现的 (2, 3, 2) 型广义杨-巴克斯特方程的 X 形解：

$$R_X = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

在找到该解之后， [6], [18], [15]中又发现了少数其他解。 R_X 的非零元素所在位置相同的所有酉解这一问题在 [6]中提出。这个问题展示了另一种更通用的求解方法：选取一种试探形式，或对矩阵形式作出初步猜测；在某些情况下，这样可以充分简化多项式方程组，使其能够被完全求解。X 形解具有普适性，因为它能够纠缠量子态 $|0\rangle$。

3.1 (2,3,2)-广义杨-巴克斯特方程 X 形解

下面将介绍用于求得 (2,3,2)-广义杨-巴克斯特方程的所有 4 个不同族 X 形解的步骤。

$$X = \begin{pmatrix} r_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_{18} \\ 0 & r_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & r_{27} & 0 \\ 0 & 0 & r_{33} & 0 & 0 & r_{36} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_{44} & r_{45} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_{54} & r_{55} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{63} & 0 & 0 & r_{66} & 0 & 0 \\ 0 & r_{72} & 0 & 0 & 0 & 0 & r_{77} & 0 \\ r_{81} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_{88} \end{pmatrix} \tag{17}$$

上述一般的 (2,3,2) X形试探解会生成由广义杨-巴克斯特方程确定的方程组，其中包含 16 个变量和 116 个多项式方程。变量 r_{22} 出现在最多的方程中；由于假设所有变量均非零，可利用整体缩放对称性将其缩放为 1。缩放后，方程组中包含以下方程：

$$-r_{36}r_{63}(r_{55} - 1) = 0$$
$$r_{36}r_{63}(r_{44} - r_{77}) = 0$$

因此， $r_{55} = 1$ 和 $r_{77} = r_{44}$。进行这些代换后，还剩下 108 个方程。此时，这个方程组已经足够小，可以使用计算机代数系统计算格罗布纳基。我们使用 Mathematica 按字典序单项式序计算格罗布纳基，然后使用 Reduce 函数求出该方程组的所有解。最初，该过程得到 7 个解，列于下方，其中 α、β、γ、δ为复自由参数：

$$X_1=\begin{pmatrix}\delta&0&0&0&0&0&0&\frac{\alpha\beta^2}{\delta^2}\\0&1&0&0&0&0&\beta&0\\0&0&\delta&0&0&\alpha&0&0\\0&0&0&1&\frac{\delta^2}{\beta}&0&0&0\\0&0&0&\beta&1&0&0&0\\0&0&\frac{1}{\alpha}&0&0&\delta&0&0\\0&\frac{\delta^2}{\beta}&0&0&0&0&1&0\\\frac{\delta^2}{\alpha\beta^2}&0&0&0&0&0&0&\delta\end{pmatrix}$$

$$X_2=\begin{pmatrix}-i&0&0&0&0&0&0&i\alpha\beta^2\\0&1&0&0&0&0&\beta&0\\0&0&1&0&0&\alpha&0&0\\0&0&0&-i&\frac{i}{\beta}&0&0&0\\0&0&0&\beta&1&0&0&0\\0&0&\frac{i}{\alpha}&0&0&-i&0&0\\0&\frac{i}{\beta}&0&0&0&0&-i&0\\\frac{1}{\alpha\beta^2}&0&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$X_3=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&\alpha\beta^2\\0&1&0&0&0&0&-\beta&0\\0&0&1&0&0&\alpha&0&0\\0&0&0&1&-\frac{1}{\beta}&0&0&0\\0&0&0&\beta&1&0&0&0\\0&0&-\frac{1}{\alpha}&0&0&1&0&0\\0&\frac{1}{\beta}&0&0&0&0&1&0\\-\frac{1}{\alpha\beta^2}&0&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$X_4=\begin{pmatrix}2-\delta&0&0&0&0&0&0&\frac{\alpha\beta^2}{\delta^2-2\delta+2}\\0&1&0&0&0&0&\beta&0\\0&0&2-\delta&0&0&\alpha&0&0\\0&0&0&1&\frac{\delta^2-2\delta+2}{\beta}&0&0&0\\0&0&0&\beta&1&0&0&0\\0&0&\frac{1}{\alpha}&0&0&\delta&0&0\\0&\frac{\delta^2-2\delta+2}{\beta}&0&0&0&0&1&0\\\frac{\delta^2-2\delta+2}{\alpha\beta^2}&0&0&0&0&0&0&\delta\end{pmatrix}$$

$$X_5=\begin{pmatrix}i&0&0&0&0&0&0&-i\alpha\beta^2\\0&1&0&0&0&0&\beta&0\\0&0&1&0&0&\alpha&0&0\\0&0&0&i&-\frac{i}{\beta}&0&0&0\\0&0&0&\beta&1&0&0&0\\0&0&-\frac{i}{\alpha}&0&0&i&0&0\\0&-\frac{i}{\beta}&0&0&0&0&i&0\\\frac{1}{\alpha\beta^2}&0&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$X_6=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&\alpha\beta^2\\0&1&0&0&0&0&\beta&0\\0&0&1&0&0&\alpha&0&0\\0&0&0&1&\frac{1}{\beta}&0&0&0\\0&0&0&\beta&1&0&0&0\\0&0&\frac{1}{\alpha}&0&0&1&0&0\\0&\frac{1}{\beta}&0&0&0&0&1&0\\\frac{1}{a\beta^2}&0&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$X_7=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&\frac{\alpha\beta^2}{\gamma}\\0&1&0&0&0&0&\beta&0\\0&0&\gamma&0&0&\alpha&0&0\\0&0&0&\gamma&\frac{\gamma}{\beta}&0&0&0\\0&0&0&\beta&1&0&0&0\\0&0&\frac{\gamma}{\alpha}&0&0&1&0&0\\0&\frac{\gamma}{\beta}&0&0&0&0&\gamma&0\\\frac{\gamma^2}{\alpha\beta^2}&0&0&0&0&0&0&\gamma\end{pmatrix}$$

对于任意参数取值，矩阵 X_6 和 X_7 都不可逆。利用命题 1.5.1 中的对称性后，矩阵 X_2 和 X_5属于同一族。具体而言，将 α 替换为 $i\alpha$ 并将 β 替换为 $i\beta$，即可得到 $X_5 = 2 * X_2^{-1}$。现在，我们确定是否存在一组参数取值和整体缩放因子 λ，使得 X_1、X_2、X_3、X_4 为酉矩阵。

命题 3.1.1. 当 Re(δ) $= 0$, $\delta^2 = -|\beta|^2$, $|\alpha| = 1$, $|\lambda|^2 = \frac{1}{1+|\delta|^2}$时，$\lambda X_1$ 是酉的

证明。

$$\lambda X_1(\lambda X_1)^\dagger = \lambda\bar{\lambda}\begin{pmatrix}\frac{a\beta^2\bar{\alpha}\bar{\beta}^2}{\delta^2\bar{\delta}^2}+\delta\bar{\delta}&0&0&0&0&0&0&\frac{\alpha\beta^2\bar{\delta}}{\delta^2}+\frac{\delta\bar{\delta}^2}{\bar{\alpha}\bar{\beta}^2}\\0&\beta\bar{\beta}+1&0&0&0&0&\frac{\bar{\delta}^2}{\bar{\beta}}+\beta&0\\0&0&\alpha\bar{\alpha}+\delta\bar{\delta}&0&0&\frac{\delta}{\bar{\alpha}}+\alpha\bar{\delta}&0&0\\0&0&0&\frac{\delta^2\bar{\delta}^2}{\beta\bar{\beta}}+1&\bar{\beta}+\frac{\delta^2}{\beta}&0&0&0\\0&0&0&\frac{\delta^2}{\bar{\beta}}+\beta&\beta\bar{\beta}+1&0&0&0\\0&0&\delta\bar{\alpha}+\frac{\bar{\delta}}{a}&0&0&\frac{1}{\alpha\bar{\alpha}}+\delta\bar{\delta}&0&0\\0&\bar{\beta}+\frac{\delta^2}{\beta}&0&0&0&0&\frac{\delta^2\bar{\delta}^2}{\beta\bar{\beta}}+1&0\\\frac{\delta^2\bar{\delta}}{\alpha\beta^2}+\frac{\delta\bar{\alpha}\bar{\beta}^2}{\bar{\delta}^2}&0&0&0&0&0&0&\frac{\delta^2\bar{\delta}^2}{\alpha\beta^2\bar{\alpha}\bar{\beta}^2}+\delta\bar{\delta}\end{pmatrix}$$

由于要求 $\bar{\beta}+\frac{\delta^2}{\beta}=0$和 $\frac{\delta}{\bar{\alpha}}+\alpha\bar{\delta}=0$，因此必须有 $\delta^2=-\beta\bar{\beta}=-|\beta|^2$和 $\alpha\bar{\alpha}=\frac{-\delta}{\delta}$。所以 Re($\delta$) $=0$ 且 $\alpha\bar{\alpha}=1$，在这种情况下，所有非对角元素都将为零:

$$\begin{aligned}\frac{\delta^2\bar{\delta}}{\alpha\beta^2}+\frac{\delta\bar{\alpha}\bar{\beta}^2}{\bar{\delta}^2}&=\delta^2\bar{\delta}+\frac{\delta\alpha\bar{\alpha}(\beta\bar{\beta})^2}{\bar{\delta}^2}=\delta^2\bar{\delta}+\frac{\delta\alpha\bar{\alpha}(-\delta^2)^2}{\bar{\delta}^2}\\&=\delta^2\bar{\delta}^3+\alpha\bar{\alpha}\delta^5=\bar{\delta}^3+\alpha\bar{\alpha}\delta^3=\bar{\delta}^3+\frac{-\delta}{\bar{\delta}}\delta^3=(-\delta)^4-\delta^4=0\end{aligned}$$

类似的计算表明，所有对角元素都等于 $1+|\delta|^2$，因此 λX_1 将会是 e
当 $|\lambda|^2=\frac{1}{1+|\delta|^2}$时为酉的。 □

命题 3.1.2. λX_2 在 $|\alpha|=1$、$|\beta|=1$和 $|\lambda|^2=\frac{1}{2}$ 时是酉的

证明。

$$\lambda X_2(\lambda X_2)^\dagger = \lambda\bar{\lambda}\begin{pmatrix} \alpha\beta^2\bar{\alpha}\bar{\beta}^2+1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i\alpha\beta^2-\frac{i}{\bar{\alpha}\bar{\beta}^2} \\ 0 & \beta\bar{\beta}+1 & 0 & 0 & 0 & 0 & i\beta-\frac{i}{\bar{\beta}} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\bar{\alpha}+1 & 0 & 0 & i\alpha-\frac{i}{\bar{\alpha}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\beta\bar{\beta}}+1 & \frac{i}{\beta}-i\bar{\beta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\beta-\frac{i}{\bar{\beta}} & \beta\bar{\beta}+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{i}{\alpha}-i\bar{\alpha} & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha\bar{\alpha}}+1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{i}{\beta}-i\bar{\beta} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\beta\bar{\beta}}+1 & 0 \\ \frac{i}{\alpha\beta^2}-i\bar{\alpha}\bar{\beta}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha\beta^2\bar{\alpha}\bar{\beta}^2}+1 \end{pmatrix}$$

要使非对角元素为零，我们需要 $\frac{i}{\beta}-i\bar{\beta}=0$ 和 $\frac{i}{\alpha}-i\bar{\alpha}=0$，而它们只有解$|\alpha|=|\beta|=1$。此时，对角元素都等于 2，因此只要 $|\lambda|^2=\frac{1}{2}$， λX_2 就是酉的。 □

命题 3.1.3. λX_3 在 $|\alpha|=1$、 $|\beta|=1$和 $|\lambda|^2=\frac{1}{2}$ 时是酉的

证明。

$$\lambda X_3(\lambda X_3)^\dagger = \lambda\bar{\lambda}\begin{pmatrix} \alpha\beta^2\bar{\alpha}\bar{\beta}^2+1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha\beta^2-\frac{1}{\bar{\alpha}\bar{\beta}^2} \\ 0 & \beta\bar{\beta}+1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\beta}-\beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\bar{\alpha}+1 & 0 & 0 & a-\frac{1}{\bar{a}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\beta\bar{\beta}}+1 & \bar{\beta}-\frac{1}{\beta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta-\frac{1}{\bar{\beta}} & \beta\bar{\beta}+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\alpha}-\frac{1}{\alpha} & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha\bar{\alpha}}+1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta}-\bar{\beta} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\beta\bar{\beta}}+1 & 0 \\ \bar{\alpha}\bar{\beta}^2-\frac{1}{\alpha\beta^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a\beta^2\bar{\alpha}\bar{\beta}^2}+1 \end{pmatrix}$$

要使非对角元素为零，我们需要 $\frac{1}{\beta}-\bar{\beta}=0$ 和 $\frac{1}{\alpha}-\bar{\alpha}=0$，而它们只有解$|\alpha|=|\beta|=1$。此时，对角元素都等于 2，因此只要$|\lambda|^2=\frac{1}{2}$， λX_3 就是酉的。 □

命题 3.1.4. 当 $|\alpha|^2=\frac{\delta-2}{\delta}$、 $|\beta|^2=\bar{\delta}^2-2\bar{\delta}+2$、 $|\lambda|^2=\frac{1}{1+|\beta|^2}$和 δ 是以下之一时， λX_4 是酉的： $1+i$、 $1-i$、 1、 $\frac{5}{4}+\frac{\sqrt{7}}{4}$、 $\frac{5}{4}-\frac{\sqrt{7}}{4}$。

证明. 令 $f=\delta^2-2\delta+2$，则有：

$$\lambda X_4(\lambda X_4)^\dagger = \lambda\bar{\lambda}\begin{pmatrix} \frac{\alpha\beta^2\bar{\alpha}\bar{\beta}^2}{f\bar{f}}+(\delta-2)\left(\bar{\delta}-2\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha\beta^2\bar{\delta}}{f}-\frac{(\delta-2)\bar{f}}{\bar{\alpha}\bar{\beta}^2} \\ 0 & \beta\bar{\beta}+1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\bar{f}}{\beta}+\beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\bar{\alpha}+(\delta-2)\left(\bar{\delta}-2\right) & 0 & 0 & \frac{2-\delta}{\bar{\alpha}}+\alpha\bar{\delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{f\bar{f}}{\beta\bar{\beta}}+1 & \bar{\beta}+\frac{f}{\beta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\bar{f}}{\beta}+\beta & \beta\bar{\beta}+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha\delta\bar{a}-\bar{\delta}+2}{a} & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha\bar{\alpha}}+\delta\bar{\delta} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\beta}+\frac{f}{\beta} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{f\bar{f}}{\beta\bar{\beta}}+1 & 0 \\ \frac{\delta\bar{\alpha}\bar{\beta}^2}{f}-\frac{f\bar{f}}{\alpha\beta^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{f\bar{f}}{a\beta^2\bar{\alpha}\bar{\beta}^2}+\delta\bar{\delta} \end{pmatrix}$$

由于我们需要$\frac{2-\delta}{\bar{\alpha}}+\alpha\bar{\delta}=0$，因此可以设 $\alpha\bar{\alpha}=|\alpha|^2=\frac{\delta-2}{\delta}$。我们还需要 $\frac{\bar{f}}{\beta}+\beta=0$，这将在$\beta\bar{\beta}=|\beta|^2=\bar{f}=\bar{\delta}^2-2\bar{\delta}+2$时成立。通分并代入最右上角的元素，得到：

$$\alpha\bar{\alpha}(\beta\bar{\beta})^2\bar{\delta}-(\delta-2)f\bar{f}=\frac{(\delta-2)(\bar{\delta}^2-2\bar{\delta}+2)}{\bar{\delta}}-(\delta-2)(\bar{\delta}^2-2\bar{\delta}+2)(\delta^2-2\delta+2)$$

再次通分后，可简化为：

$$(\delta-2)(\bar{\delta}^2-2\bar{\delta}+2)-\bar{\delta}(\delta-2)(\bar{\delta}^2-2\bar{\delta}+2)(\delta^2-2\delta+2)=(\delta-2)(\bar{\delta}^2-2\bar{\delta}+2)(1-\bar{\delta}(\delta^2-2\delta+2))$$

我们可以排除 $\delta=2$ 的情形，因为这会破坏 X 形状。于是有两种可能：$\bar{\delta}^2-2\bar{\delta}+2=0$，或者 $\bar{\delta}(\delta^2-2\delta+2)=1$。在第一种情形中，仅有两个解，即 $\delta=1+i$ 或 $\delta=1-i$。求解第二种情形时，我们代入 $\delta=x+iy$，其中 x 和 y 为实数：

$$\bar{\delta}(\delta^2-2\delta+2)=(x-iy)((x+iy)^2-2(x+iy)+2)=1$$

然后可将其拆分为实部和虚部：

$$x^3-2x^2+xy^2+2x-2y^2-1=0$$
$$y(x^2+y^2-2)=0$$

其解如下： $y=0$ 和 $x=1$ 或 $x^2+y^2=2$。在 $x^2+y^2=2$ 的情况下，我们需要求解：

$$x^3-2(x^2+y^2)+xy^2+2x-1=x^3-2(2)+xy^2+2x-1=0$$
$$x^2+y^2-2=0$$

只要 $x\neq 0$，我们就可以设定 $y=\pm\sqrt{\frac{5-x^3-2x}{x}}$。若 $x=0$，则必有 $y=\pm\sqrt{2}$；然而，这并不能解出第一个方程。将 $y=\pm\sqrt{\frac{5-x^3-2x}{x}}$ 代入第二个方程，得到：

$$x^2+\frac{5-x^3-2x}{x}=2$$

两边同乘 x，再从两边减去 $2x$，得到：

$$x^3+5-x^3-2x-2x=5-4x=0$$

因此，$x=\frac{5}{4}$ 且 $y=\pm\frac{\sqrt{7}}{4}$。 □

对称性证明

证明。设 R 是（d，m，l）-广义杨-巴克斯特方程的一个解，设 λ 是一个非零标量，且 Q 是一个非奇异的 $d\times d$矩阵。

1.

$$(\lambda R\otimes I_V^{\otimes l})(I_V^{\otimes l}\otimes\lambda R)(\lambda R\otimes I_V^{\otimes l})=(I_V^{\otimes l}\otimes\lambda R)(\lambda R\otimes I_V^{\otimes l})(I_V^{\otimes l}\otimes\lambda R)$$
$$\lambda^3(R\otimes I_V^{\otimes l})(I_V^{\otimes l}\otimes R)(R\otimes I_V^{\otimes l})=\lambda^3(I_V^{\otimes l}\otimes R)(R\otimes I_V^{\otimes l})(I_V^{\otimes l}\otimes R)$$
$$(R\otimes I_V^{\otimes l})(I_V^{\otimes l}\otimes R)(R\otimes I_V^{\otimes l})=(I_V^{\otimes l}\otimes R)(R\otimes I_V^{\otimes l})(I_V^{\otimes l}\otimes R)$$

2.

$$(R^{-1}\otimes I_V^{\otimes l})(I_V^{\otimes l}\otimes R^{-1})(R^{-1}\otimes I_V^{\otimes l})=(I_V^{\otimes l}\otimes R^{-1})(R^{-1}\otimes I_V^{\otimes l})(I_V^{\otimes l}\otimes R^{-1})$$
$$(R\otimes I_V^{\otimes l})^{-1}(I_V^{\otimes l}\otimes R)^{-1}(R\otimes I_V^{\otimes l})^{-1}=(I_V^{\otimes l}\otimes R)^{-1}(R\otimes I_V^{\otimes l})^{-1}(I_V^{\otimes l}\otimes R)^{-1}$$
$$((R\otimes I_V^{\otimes l})(I_V^{\otimes l}\otimes R)(R\otimes I_V^{\otimes l}))^{-1}=((I_V^{\otimes l}\otimes R)(R\otimes I_V^{\otimes l})(I_V^{\otimes l}\otimes R))^{-1}$$
$$(R\otimes I_V^{\otimes l})(I_V^{\otimes l}\otimes R)(R\otimes I_V^{\otimes l})=(I_V^{\otimes l}\otimes R)(R\otimes I_V^{\otimes l})(I_V^{\otimes l}\otimes R)$$

3. 与 2 相同，只是将 R^{-1} 替换为 R^*

4. 与第 2 项相同，只是将 R^{-1} 替换为 R^T

5. 为减少使用括号，记 $\boldsymbol{Q}=Q^{-1}$，并考虑广义杨-巴克斯特方程的左侧：

$$(Q^{\otimes m}R\boldsymbol{Q}^{\otimes m}\otimes I_V^{\otimes l})(I_V^{\otimes l}\otimes Q^{\otimes m}R\boldsymbol{Q}^{\otimes m})(Q^{\otimes m}R\boldsymbol{Q}^{\otimes m}\otimes I_V^{\otimes l}) \tag{18}$$
$$=(Q^{\otimes m}R\otimes I_V^{\otimes l})(\boldsymbol{Q}^{\otimes m}\otimes I_V^{\otimes l})(I_V^{\otimes l}\otimes Q^{\otimes m})(I_V^{\otimes l}\otimes R\boldsymbol{Q}^{\otimes m})(Q^{\otimes m}R\boldsymbol{Q}^{\otimes m}\otimes I_V^{\otimes l}) \tag{19}$$
$$\tag{20}$$

为进一步简化，我们考察项 $(\boldsymbol{Q}^{\otimes m}\otimes I_V^{\otimes l})(I_V^{\otimes l}\otimes Q^{\otimes m})$，此时需要考虑两种情况。第一种情况下，$m>l$；第二种情况下，$m\leq l$。在第一种情况下，我们可以写成：

$$(\boldsymbol{Q}^{\otimes m}\otimes I_V^{\otimes l})(I_V^{\otimes l}\otimes Q^{\otimes m})=(\boldsymbol{Q}^{\otimes l}\otimes I_V^{\otimes m-l}\otimes Q^{\otimes l})$$

在第二种情况下，我们可以写成：

$$(\boldsymbol{Q}^{\otimes m}\otimes I_V^{\otimes l})(I_V^{\otimes l}\otimes Q^{\otimes m})=(\boldsymbol{Q}^{\otimes m}\otimes I_V^{\otimes l-m}\otimes Q^{\otimes m})$$

将第一种情况代入上面的方程 18，得到：

$$\begin{aligned}
&(Q^{\otimes m}R\otimes I_V^{\otimes l})(\boldsymbol{Q}^{\otimes l}\otimes I_V^{\otimes m-l}\otimes Q^{\otimes l})(I_V^{\otimes l}\otimes R\boldsymbol{Q}^{\otimes m})(Q^{\otimes m}R\boldsymbol{Q}^{\otimes m}\otimes I_V^{\otimes l})\\
=&(Q^{\otimes m}R\otimes I_V^{\otimes l})(\boldsymbol{Q}^{\otimes l}\otimes(I_V^{\otimes m-l}\otimes Q^{\otimes l})R\boldsymbol{Q}^{\otimes m})(Q^{\otimes m}\otimes I_V^{\otimes l})(R\boldsymbol{Q}^{\otimes m}\otimes I_V^{\otimes l})\\
=&(Q^{\otimes m}R\otimes I_V^{\otimes l})(I_V^{\otimes l}\otimes(I_V^{\otimes m-l}\otimes Q^{\otimes l})R\boldsymbol{Q}^{\otimes m}(Q^{\otimes m-l}\otimes I_V^{\otimes l}))(R\boldsymbol{Q}^{\otimes m}\otimes I_V^{\otimes l})\\
=&(Q^{\otimes m}R\otimes I_V^{\otimes l})(I_V^{\otimes l}\otimes(I_V^{\otimes m-l}\otimes Q^{\otimes l})R(I_V^{\otimes m-l}\otimes\boldsymbol{Q}^{\otimes l}))(R\boldsymbol{Q}^{\otimes m}\otimes I_V^{\otimes l})\\
=&(Q^{\otimes m}R\otimes I_V^{\otimes l})(I_V^{\otimes l}\otimes I_V^{\otimes m-l}\otimes Q^{\otimes l})(I_V^{\otimes l}\otimes R)(I_V^{\otimes l}\otimes I_V^{\otimes m-l}\otimes\boldsymbol{Q}^{\otimes l})(R\boldsymbol{Q}^{\otimes m}\otimes I_V^{\otimes l})\\
=&(Q^{\otimes m}R\otimes I_V^{\otimes l})(I_V^{\otimes m}\otimes Q^{\otimes l})(I_V^{\otimes l}\otimes R)(I_V^{\otimes m}\otimes\boldsymbol{Q}^{\otimes l})(R\boldsymbol{Q}^{\otimes m}\otimes I_V^{\otimes l})\\
=&(Q^{\otimes m}R\otimes Q^{\otimes l})(I_V^{\otimes l}\otimes R)(R\boldsymbol{Q}^{\otimes m}\otimes\boldsymbol{Q}^{\otimes l})\\
=&(Q^{\otimes m}\otimes Q^{\otimes l})(R\otimes I_V^{\otimes l})(I_V^{\otimes l}\otimes R)(R\otimes I_V^{\otimes l})(\boldsymbol{Q}^{\otimes m}\otimes\boldsymbol{Q}^{\otimes l})\\
=&Q^{\otimes m+l}(R\otimes I_V^{\otimes l})(I_V^{\otimes l}\otimes R)(R\otimes I_V^{\otimes l})\boldsymbol{Q}^{\otimes m+l}
\end{aligned}$$

通过类似的论证，广义杨-巴克斯特方程的右边可以简化为：

$$Q^{\otimes m+l}(I_V^{\otimes l}\otimes R)(R\otimes I_V^{\otimes l})(I_V^{\otimes l}\otimes R)\boldsymbol{Q}^{\otimes m+l}$$

通过 $Q^{\otimes m}$ 共轭，我们得到广义杨-巴克斯特方程。当 $m\leq l$ 时，我们也可以通过代入方程 18 来处理第二种情况：

$$\begin{aligned}
&(Q^{\otimes m}R\otimes I_V^{\otimes l})(\boldsymbol{Q}^{\otimes m}\otimes I_V^{\otimes l-m}\otimes Q^{\otimes m})(I_V^{\otimes l}\otimes R\boldsymbol{Q}^{\otimes m})(Q^{\otimes m}R\boldsymbol{Q}^{\otimes m}\otimes I_V^{\otimes l})\\
=&(Q^{\otimes m}R\otimes I_V^{\otimes l})(\boldsymbol{Q}^{\otimes m}\otimes I_V^{\otimes l-m}\otimes Q^{\otimes m}R\boldsymbol{Q}^{\otimes m})(Q^{\otimes m}\otimes I_V^{\otimes l})(R\boldsymbol{Q}^{\otimes m}\otimes I_V^{\otimes l})\\
=&(Q^{\otimes m}R\otimes I_V^{\otimes l})(I_V^{\otimes m}\otimes I_V^{\otimes l-m}\otimes Q^{\otimes m}R\boldsymbol{Q}^{\otimes m})(R\boldsymbol{Q}^{\otimes m}\otimes I_V^{\otimes l})\\
=&(Q^{\otimes m}R\otimes I_V^{\otimes l})(I_V^{\otimes m}\otimes I_V^{\otimes l-m}\otimes Q^{\otimes m})(I_V^{\otimes m}\otimes I_V^{\otimes l-m}R)(I_V^{\otimes m}\otimes I_V^{\otimes l-m}\otimes \boldsymbol{Q}^{\otimes m})(R\boldsymbol{Q}^{\otimes m}\otimes I_V^{\otimes l})\\
=&(Q^{\otimes m}R\otimes I_V^{\otimes l-m}\otimes Q^{\otimes m})(I_V^{\otimes l}\otimes R)(R\boldsymbol{Q}^{\otimes m}\otimes I_V^{\otimes l-m}\otimes \boldsymbol{Q}^{\otimes m})\\
=&(Q^{\otimes m}\otimes I_V^{\otimes l-m}\otimes Q^{\otimes m})(R\otimes I_V^{\otimes l})(I_V^{\otimes l}\otimes R)(R\otimes I_V^{\otimes l})(\boldsymbol{Q}^{\otimes m}\otimes I_V^{\otimes l-m}\otimes \boldsymbol{Q}^{\otimes m})
\end{aligned}$$

广义杨-巴克斯特方程的右侧也可以类似地变形为：

$$(Q^{\otimes m}\otimes I_V^{\otimes l-m}\otimes Q^{\otimes m})(I_V^{\otimes l}\otimes R)(R\otimes I_V^{\otimes l})(I_V^{\otimes l}\otimes R)(\boldsymbol{Q}^{\otimes m}\otimes I_V^{\otimes l-m}\otimes \boldsymbol{Q}^{\otimes m})$$

因此，如果 R 是广义杨-巴克斯特方程的一个解，那么 $Q^{\otimes m}R\boldsymbol{Q}^{\otimes m}$ 也是。

□

B 代数杨-巴克斯特方程的等价形式

这里我们展示如何从方程 8 得到方程 9 中代数杨-巴克斯特方程的形式。在方程中，$8\ R_{ab}$ 作用于因子 a 和 b，而不影响第三个因子。例如，R_{13} 作用于第一和第三个因子，而不影响中间因子：

$$R_{13}(e_i\otimes e_j\otimes e_k)=\sum_{ab}R_{ik}^{ab}(e_a\otimes e_j\otimes e_b)$$

方程 8 的左侧在 $(e_{j_1}\otimes e_{j_2}\otimes e_{j_3})$ 上的作用如下：

$$\begin{aligned}
R_{12}R_{13}R_{23}(e_{j_1}\otimes e_{j_2}\otimes e_{j_3})&=R_{12}R_{13}\sum_{k_2,k_3}R_{j_2j_3}^{k_2k_3}(e_{j_1}\otimes e_{k_2}\otimes e_{k_3})\\
&=R_{12}\sum_{k_2,k_3,k_1,l_3}R_{j_2j_3}^{k_2k_3}R_{j_1k_3}^{k_1l_3}(e_{k_1}\otimes e_{k_2}\otimes e_{l_3})\\
&=\sum_{k_2,k_3,k_1,l_3,l_1,l_2}R_{j_2j_3}^{k_2k_3}R_{j_1k_3}^{k_1l_3}R_{k_1k_2}^{l_1l_2}(e_{l_1}\otimes e_{l_2}\otimes e_{l_3})
\end{aligned}$$

方程 8 右侧的作用同样可以写为：

$$\begin{aligned}
R_{23}R_{13}R_{12}(e_{j_1}\otimes e_{j_2}\otimes e_{j_3})&=R_{23}R_{13}\sum_{k_1,k_2}R_{j_1j_2}^{k_1k_2}(e_{k_1}\otimes e_{k_2}\otimes e_{j_3})\\
&=R_{23}\sum_{k_1,k_2,l_1,k_3}R_{j_2j_2}^{k_1k_2}R_{k_1j_3}^{l_1k_3}(e_{l_1}\otimes e_{k_2}\otimes e_{k_3})\\
&=\sum_{k_1,k_2,l_1,k_3,l_2,l_3}R_{j_1j_2}^{k_1k_2}R_{k_1j_3}^{l_1k_3}R_{k_2k_3}^{l_2l_3}(e_{l_1}\otimes e_{l_2}\otimes e_{l_3})
\end{aligned}$$

因此，方程 8 等价于方程 9。

参考文献

[1] Gorjan Alagic、Michael Jarret 和 Stephen P. Jordan。杨-巴克斯特算子需要量子纠缠才能区分纽结。《物理学杂志A：数学与理论》，49(7):075203，2016年1月。

[2] Emil Artin。《辫子理论》。4(1):47–72，1925年。

[3] Joseph E. Avron、Daniel Osadchy 和 Ruedi Seiler。以拓扑学视角看量子霍尔效应。56(8):38–42，2003年。

[4] J. Birman。《辫子、链环与映射类群》。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，1974年。

[5] Jean-Luc Brylinski 和 Ranee Brylinski。《通用量子门》。Chapman and Hall/CRC，博卡拉顿，2002。

[6] Rebecca S. Chen。《广义杨-巴克斯特方程与编织量子门》。21(9):1250087，2012。[7] D. Deutsch、A. Barenco 和 A. Ekert。《量子计算的普适性》。449(1937):669–677，1995。[8] P. a. M. Dirac。《量子力学的新记法》。35(3):416–418，1939。[9] H. A. Dye。《四维中的杨–巴克斯特方程酉解》。《量子信息处理》，2(1):117–152，2003年4月。[10] 阿尔伯特·爱因斯坦。《广义相对论的基础》。354(7):769–822，1916年。[11] Jarmo Hietarinta。《求解二维常量量子杨-巴克斯特方程》。34(5):1725– 1756，1993。[12] Samuel Hunt 和 Maximilien Gadouleau。《Grover 算法与多值量子逻辑》，2020年。[13] Christian Kassel。《量子群》，第155卷。Springer，纽约市，1995。[14] Louis H. Kauffman 和 Samuel J. Lomonaco。《编织算子是通用量子门》。6(1):134，2004年。[15] Alexei Kitaev 和 Zhenghan Wang。《通过带状融合范畴求解广义杨-巴克斯特方程》。第191–197页，2012年。[16] J. Nakamura、S. Liang、G. C. Gardner 和 M. J. Manfra。《任意子编织统计的直接观测》。16(9):931–936，2020年。[17] Andrew Schmidt Nemec。《低维中的广义杨-巴克斯特方程单项式解》。学位论文，2014年。[18] Eric C. Rowell。《参数相关的高斯（z, n）广义杨-巴克斯特算子》，2014年。[19] Eric C. Rowell、Yong Zhang、Yong-Shi Wu 和 Mo-Lin Ge。《超特殊二群、广义杨-巴克斯特方程与编织量子门》，2010年。[20] V. G. Turaev。《杨-巴克斯特方程与链环不变量》。92(3):527–554，1988年。