arXiv:2304.00711v2 [quant-ph] 5 Jun 2024

量子信道与量子态的一些绝对性质

Tapaswini Patro,[1,*] Kaushiki Mukherjee,[2,†] 和 Nirman Ganguly[1,‡] *Department of Mathematics, Birla Institute of Technology and Science-Pilani, Hyderabad Campus, Telangana, India* [2] *Department of Mathematics, Government Girls' General Degree College, Ekbalpore, Kolkata, India*（日期：2024年6月6日）

量子系统容易受到环境相互作用的影响，这可能导致潜在资源耗竭。资源的衰减可能严重到即使对整个系统施加非局域幺正作用也无法恢复。在量子信息领域，两个重要的评价指标是完全纠缠分数（FEF）和复合量子系统的条件熵。FEF 在量子隐形传态中发挥关键作用，而条件熵为负则在态合并和稠密编码中具有重要意义。量子态可能失去这些优势，并进入绝对区域，此时即使施加全局幺正变换也无法恢复这些优势。在本研究中，我们探究了某些量子信道对两个量子比特和两个量子位的作用，并发现某些量子态在这些作用下会进入绝对区域。由于全局幺正操作无法使其回到非绝对区域，我们提出了一种利用纠缠交换网络恢复这些量子态的方法，并对该方法作了明确说明。此外，我们将绝对性的概念推广至条件 R´ényi 熵，并找到了量子态具有条件 R´ényi 熵绝对非负（ACRENN）性质所需的条件。通过利用密度矩阵的布洛赫-法诺分解，我们刻画了这类量子态。随后，我们将研究推广至三方系统的边缘态，并针对上述绝对性质给出其刻画。

关键词： QuantumC hannels、完全纠缠分数、条件 Rényi 熵、纠缠交换 .

I. 引言

量子信息处理理论 [1, 2] 有望比其经典对应物带来显著优势。在此背景下，找出量子理论独有、能够带来此类优势的资源至关重要。纠缠 [3], 贝尔非定域性 [4], 可导引性 [5], 条件熵的负值 [6], 相干性[7] 都是其中的一些。对强大资源及其利用方法的研究，推动了对量子资源 [8]的普遍研究。

然而，当量子系统与环境相互作用时，这些资源可能会逐渐耗竭。与环境的相互作用通常用完全正迹保持映射来建模，这类映射通常称为量子信道 [1]。关于量子信道的研究文献十分丰富，因为量子信道也是传输量子信息和经典信息的媒介（参见 [9] 及其中的参考文献）。关于资源损失，研究者已在量子纠缠的背景下研究了纠缠破坏映射 [10] 。对于非局域性，则有非局域性破坏映射 [11, 12]。

资源衰减的程度可能因不同情形而异。在某些情况下，量子态可能在过程中进入绝对区域 。这里有必要解释绝对区域 这一术语。以纠缠为例，纠缠取决于底层复合希尔伯特空间的因子分解方式 [13]。在某些基下，量子态可能是纠缠态，而在其他基下则可能是可分态 [14]。有趣的是，某些量子态在任何基下都保持可分，因此称为绝对可分态 [15]。具体而言，若从一个双体态 ρ 出发，并发现 $U\rho U^\dagger$ 在任意幺正算符 U 作用下始终保持可分，那么 ρ 就是谱可分 [16–18] ，也就是绝对可分 [15]。由于幺正共轭保持谱不变，绝对可分性的条件由密度矩阵的谱决定，即由其特征值决定。然而，只有对于量子比特-量子比特 [16] 和量子比特-量子多能级系统 [17], ，才存在以特征值表示的、判定其是否属于绝对可分类的充要条件；对于更高维情形，这一问题仍未解决 [19]。文献 [20], 研究了绝对分离映射，这类映射可以将量子态变为绝对可分态。因此，在这些情况下，量子态在纠缠方面进入绝对区域 。关于量子关联绝对性的研究已从纠缠扩展至其他性质，包括绝对正偏转置 [21], 、绝对条件冯·诺伊曼熵非负 [22, 23] , 、绝对经典自旋态 [24],、绝对 $k-$ 非相干态 [25], 、贝尔-CHSH 非局域性 [26], 、三设置导引的不违反性

* p20190037@hyderabad.bits-pilani.ac.in
† kaushiki.wbes@gmail.com
‡ nirmanganguly@gmail.com

不等式 [27]，量子失谐 [28]以及绝对完全纠缠分数 [29]。文献 [30, 31]。

与经典熵不同，量子条件熵可以为负。负的条件冯·诺伊曼熵在态合并 [32] 和稠密编码 [33]中能带来量子优势。然而，如果一个量子态最初不具有负熵，则通过适当应用幺正门（即酉变换），可以将其转换为具有负熵的量子态。该幺正变换必须是全局的，因为局部幺正变换无法改变这类性质。然而，属于绝对区域的量子态无法通过这种方式转换，例如在任意全局幺正作用 [22, 23]下都保持条件冯·诺伊曼熵非负的量子态。完全纠缠分数（FEF）也有类似的性质。FEF $> 1/d$ 是衡量量子态是否适用于量子隐形传态 [34, 35] 和 $k-$ 份非定域性 [36]的重要指标。有趣的是，在这里也存在某些量子态，它们在全局幺正变换 [29]作用下仍处于绝对区域。

在量子信息理论中，每一种相关的态转变都可以用量子信道来建模；说量子信道无所不包 [2]并不为过。如前所述，由于环境相互作用，量子态可能会失去某些重要特性，甚至进入绝对区域。我们的研究考察了上述资源中的两种，即（a）负条件熵和（b）FEF $> 1/d$，并探究量子态在何种情况下会因环境影响而绝对地 失去这些特性。在本研究中，我们考察了两种情形：（i）在任意全局幺正操作下保持条件冯·诺伊曼熵非负的量子态（$\mathfrak{AC}$）；（ii）具有绝对完全纠缠分数的量子态（$\mathfrak{AF}$）。我们发现，先前处于非绝对区域的量子态，在某些量子信道的作用下会进入绝对区域。研究涵盖 $2 \otimes 2$维和 $d \otimes d$ 维情形。当量子态进入绝对区域后，即使施加全局幺正作用，也无法恢复相关资源。因此，我们提出了一种方案，可将量子态转变回关于 $\mathfrak{AC}$ 的非绝对区域。该方案通过纠缠交换网络 [37, 38]实现。我们还展示了该方案的具体应用。

在量子信息理论领域，量子资源已经得到多方面的分析。在此背景下，一个重要的研究方向是识别可能导致资源耗竭的环境相互作用。这种耗竭可能严重到使资源丧失其优势，甚至非局域酉作用也无法恢复这些优势。也就是说，正如前文所述，量子态进入了绝对区域。下面列出本文的研究动机：

首先，我们识别了会导致相关特性丧失的某些环境噪声。这里考察的特性是条件冯·诺伊曼熵为负，以及 FEF 高于经典基准（即 $1/d$）。负条件熵与态合并 [32], 稠密编码[33] 之间的联系，以及 FEF $> \frac{1}{d}$ 与量子隐形传态 [34], 之间的联系，早已确立。从这一角度来看，我们研究环境因素如何使一个起初具有强大效用的量子态，针对上述两种特性进入绝对区域。相关地，也可以将其视为在实施所述协议时应当避免的环境噪声。

其次，由于全局幺正作用无法从绝对区域内的量子态中创造出这种资源，我们提出了一种利用纠缠交换网络取回该资源的方法。一旦量子态进入绝对区域，它对于所关注的量子信息协议便会变得无用。因此，交换网络协议（详见第VI节）会以随机方式将量子态带回非绝对区域。非绝对区域既包含具有资源的量子态，也包含可通过应用幺正门转化为具有资源的量子态（此前这是不可能的）。我们在第VII节对此进行了明确展示。

此外，我们还考察了条件 R´ényi 熵的负性。条件 R´ényi 熵为负与贝尔非定域性 [40] 以及近期提出的量子导引 [41] 有关。上述讨论引出了一个问题：是否总能从条件 R´ényi 熵非负的量子态中制备出条件 R´ényi 熵为负的量子态？答案是“否”，因为某些量子态在任意全局幺正操作下都能保持条件熵非负。我们也在此刻画了这类量子态。

此外，在我们的工作中，我们将绝对性 的概念扩展到条件 R´enyi 熵。在量子信息的渐近区域，冯·诺依曼熵仍是一项相关的评价指标。然而，在其单次情形下，R´enyi 熵则具有重要意义。我们研究全局幺正作用对量子系统条件 R´enyi 熵的影响，并找出条件 R´enyi 熵的非负性得以保持的条件。随后，我们也利用量子态的布洛赫-法诺表示对其进行刻画。借助 R´enyi 熵的舒尔凹性（针对参数的某个特定取值），我们还确定了上述绝对性质保持不变的跃迁。由于偏迹，即舍弃一个参与方，也可以用量子信道的语言来表述，因此我们接着在绝对条件 R´enyi 2-熵的背景下，研究三方系统的约化子系统。

本文的结构如下：第II节给出了本文将使用的相关定义和符号约定。第III节研究了从非绝对区域到绝对区域的转变。对

绝对条件 R´ényi 熵非负（**ACRENN**）性质的刻画将在第IV节讨论。第V节利用 Bloch-Fano 表示刻画了属于 **ACRE2NN** （具有绝对条件 R´ényi 2-熵的量子态）的成员资格，同时还研究了三方系统的边缘态。第VI节讨论了具体的纠缠交换网络。第VII节给出了本文的一项应用。最后，我们在第VIII节给出结论。

II. 预备知识与符号约定

本节介绍本研究所需的一些预备概念和符号约定。这里，$\mathrm{H_{AB}}$表示复合系统 AB 的有限维希尔伯特空间。 $\mathfrak{B}(\mathrm{H})$ 表示作用于希尔伯特空间 H 上的有界线性算子集合。不同类别量子态的相应符号约定如下：绝对完全纠缠分数（$\mathfrak{AF}$）、绝对条件冯·诺依曼熵非负（$\mathfrak{AC}$）以及绝对条件 Rényi 熵非负（**ACRENN**）。

A. 绝对完全纠缠分数（$\mathfrak{AF}$）：

对于密度矩阵 $\rho_{d\otimes d} \in \mathfrak{B}(\mathrm{H_{AB}})$，完全纠缠分数（FEF）定义为：

$$F(\rho_{d\otimes d}) = \underset{U_l}{\mathrm{Max}} \langle\psi_+|(\mathbb{I}_d \otimes U_l^\dagger)\, \rho_{d\otimes d}\, (\mathbb{I}_d \otimes U_l)|\psi_+\rangle \tag{1}$$

其中，最大化是在所有局域酉算子上进行的， U_l 和 $|\psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=0}^{d-1} |ii\rangle$ 是最大纠缠态 [35]。

$\mathfrak{F}$表示 FEF 不超过 $\frac{1}{d}$ 的密度矩阵集合，即 $\mathfrak{F} = \{\rho_{d\otimes d} \in \mathfrak{B}(\mathrm{H_{AB}}) : F(\rho) \leq \frac{1}{d}\}$。若$U_{nl}$ 表示一个非局域酉算子，则绝对 FEF 量子态记为 $\mathfrak{AF} = \{\sigma_{af} \in \mathfrak{B}(\mathrm{H_{AB}}) : F(U_{nl}\sigma_{af}U_{nl}^\dagger) \leq \frac{1}{d},\ \forall\ U_{nl}\}$。属于 $\mathfrak{AF}$ 的量子态可用其特征值刻画；具体而言，当且仅当其最大特征值为 $\leq \frac{1}{d}$ [29] 时，该量子态属于 $\mathfrak{AF}$ 。

B. 绝对条件冯诺依曼熵非负量子态（$\mathfrak{AC}$）：

量子态 ρ_{AB} 的冯·诺依曼熵记为 $S(\rho_{AB}) = -\mathrm{Tr}(\rho_{AB}\log_2\rho_{AB})$，条件熵记为 $C(\rho_{AB}) = S(\rho_{AB}) - S(\rho_B)$。集合 $\mathfrak{AC}$ 表示在全局幺正作用下条件熵仍保持非负的量子态。文献 [22], 刻画了双体 $2\otimes 2$ 维度下的 $\mathfrak{AC}$，指出当且仅当 $S(\rho_{2\otimes 2}) \geq 1$ 时， $\rho_{2\otimes 2} \in \mathfrak{AC}$。该刻画被推广至 $d\otimes d$ 维度，其中当且仅当 $S(\rho_{d\otimes d}) \geq \log_2 d$ [23] 时，$\rho_{d\otimes d} \in \mathfrak{AC}$ 。

C. 主序

在概率论和信息论的许多领域中，每当需要比较不同系统的无序程度时，主序都发挥着至关重要的作用。假设有两个 d 维实向量 r 和 s。如果存在一个 d 维置换矩阵 P_j 和一个概率分布 p_j ，使得.....，我们就称 r 被 s主序，记作 $r \prec s$。

$$r = \sum_j p_j P_j s \tag{2}$$

换言之，对于 $r,\ s \in \mathbb{R}^d$，我们定义主序关系 $\prec$ ，即 s 被 r 主序支配，当且仅当 $r \prec s$ $\sum_{i=1}^d r_i = \sum_{i=1}^d s_i$ 且 $\forall k \in \{1,2,...d-1\}$ $\sum_{i=1}^k r_i^{\downarrow} \leq \sum_{i=1}^k s_i^{\downarrow}$ [42]，其中 $r_i^{\downarrow}$， $s_i^{\downarrow}$ 分别表示向量 r，s 按非递增顺序排列后的各分量。若 A 和 B 是厄米矩阵，则我们定义 $A \prec B$被 B主序支配，当 $\lambda(A) \prec \lambda(B)$ 时成立，其中 $\lambda(A)$ 是 A的特征值向量，按非递增顺序排列为 [42]。

D. Quantum 信道

量子信道是完全正迹保持映射，可传输量子信息和经典信息。每个量子信道都具有算子和表示。设 ρ 为一个量子态， ϵ 为一个量子信道。那么，量子信道 ϵ 对量子态 ρ 的作用可表示如下:

$$\epsilon(\rho) = \sum_i K_i \rho K_i^\dagger \tag{3}$$

其中， $K_i's$ 是满足性质 $\sum_i K_i^\dagger K_i = \mathbb{I}$的 Kraus算子。下文将介绍对我们研究至关重要的量子信道作用。

Global depolarizing channel

全局去极化信道是一类独特的量子信道，它将量子态转换为自身与最大混合态的凸组合。即，对于 $\rho_{d\otimes d}$，全局去极化信道的作用如下所示

$$\rho_{d\otimes d}^{'} = (1-p)\rho_{d\otimes d} + \frac{p}{d^2}\mathbb{I}_{d^2}, \tag{4}$$

其中， p 是信道参数，且满足 $0 \leq p \leq 1$。

对于两个量子比特系统，将使用的某些量子信道的描述列于表I中 ,

III. 从非绝对区域到绝对区域

本节将说明，量子信道的作用如何导致前文讨论的图示量度所涉及的量子资源耗竭。

A. 双量子比特纯态

现在考虑一个纯纠缠态 [43],

$$|\psi\rangle = \cos\theta|00\rangle + \sin\theta|11\rangle, \tag{5}$$

其中 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$。

1. Global depolarizing channel:

其作用 对量子态施加全局去极化信道后，得到以下变换后的量子态 ,

$$\rho_{2\otimes 2}^{'}(G) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(1+p+2p\cos 2\theta) & 0 & 0 & p\cos\theta\sin\theta \\ 0 & \frac{1-p}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-p}{4} & 0 \\ p\cos\theta\sin\theta & 0 & 0 & \frac{1}{4}(1+p-2p\cos 2\theta) \end{pmatrix} \tag{6}$$

其中， $p \in (0, 1)$ 且 $\theta \in (0, -\frac{\pi}{2})$。

$\rho_{2\otimes 2}^{'}(G)$ 的特征值为 $\frac{1-p}{4}$、 $\frac{1-p}{4}$、 $\frac{1-p}{4}$ 和 $\frac{1+3p}{4}$，且与 θ 无关。对于 $0 \leq p \leq 0.747614$ 和 $0 \leq p \leq 0.3333$ 的取值，所得量子态 $\rho_{2\otimes 2}^{'}(G)$ 分别属于 $\mathfrak{AC}$ 和 $\mathfrak{AF}$。对于下文给出的振幅阻尼信道和相位阻尼信道，我们采用了双重相互作用，即在两个子系统上都应用该信道。

量子信道	Kraus算子
1.相位翻转信道	$K_0 = \sqrt{1-p}\mathbb{I}_2$ $K_1 = \sqrt{1-p}\sigma_z$
2.比特翻转信道	$K_0 = \sqrt{1-p}\mathbb{I}_2$ $K_1 = \sqrt{1-p}\sigma_x$
3.相位阻尼信道	$K_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{pmatrix}$ $K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{p} \end{pmatrix}$
4.振幅阻尼信道	$K_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{pmatrix}$ $K_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
5.退极化信道	$K_0 = \sqrt{1-p}\mathbb{I}_2$ $K_1 = \sqrt{\frac{p}{3}}\sigma_x$ $K_2 = \sqrt{\frac{p}{3}}\sigma_y$ $K_3 = \sqrt{\frac{p}{3}}\sigma_z$

表 I：不同量子信道的描述。量子信道 Φ 对系统 ω 的作用为 $\Phi(\omega) = \sum_i K_i \omega K_i^\dagger$.

2. Amplitude Damping Channel

振幅阻尼通道作用下的变换后量子态为,

$$\rho'_{2\otimes 2}(Amp) = \begin{pmatrix} \cos^2\theta + p_1 p_2 \sin^2\theta & 0 & 0 & \sqrt{1-p_1}\sqrt{1-p_2}\cos\theta\sin\theta \\ 0 & -p_1(-1+p_2)\sin^2\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p_2(-1+p_1)\sin^2\theta & 0 \\ \sqrt{1-p_1}\sqrt{1-p_2}\cos\theta\sin\theta & 0 & 0 & (-1+p_1)(-1+p_2)\sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{7}$$

其中， $\theta \in (0, -\frac{\pi}{2})$ 和 p_1、 p_2 是信道参数。

对于 $p_1 = p_2 = p$和$\theta = -\frac{\pi}{4}$， 量子态 $\rho'_{2\otimes 2}(Amp)$ 的特征值为 $\frac{1}{2}(1 + p^2 - p + \sqrt{1 + 2p^2 - 2p})$、$\frac{1}{2}(1 + p^2 - p - \sqrt{1 + 2p^2 - 2p})$、$\frac{1}{2}(p - p^2)$ 和 $\frac{1}{2}(p - p^2)$。所得量子态 $\rho'_{2\otimes 2}(Amp)$ 在 $0.267284 \leq p \leq 0.732716$ 的取值范围内属于 $\mathfrak{AC}$。值得注意的是，它从不属于 $\mathfrak{AF}$。

3. Phase Damping Channel

相位阻尼信道作用下变换后的量子态表示为:

$$\rho'_{2\otimes2}(Ph) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2\theta & -(-1+p)\cos\theta\sin\theta & 0 \\ 0 & -(-1+p)\cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

其中, $\theta \in (0, -\frac{\pi}{2})$, p 是信道参数。

量子态 $\rho'_{2\otimes2}(Ph)$的特征值为 0、0、$\frac{1}{4}(2-\sqrt{2}\sqrt{2-2p+p^2+\overline{2p\cos 4\theta - p^2\cos 4\theta}}$, 以及 $\frac{1}{4}(2+\sqrt{2}\sqrt{2-2p+p^2+2p\text{余弦}\ 4\theta - p^2\text{余弦}\ 4\theta})$. 所得量子态 $\rho'_{2\otimes2}(Ph)$不属于 $\mathfrak{AC}$, 因为所得量子态的冯·诺依曼熵小于 1（$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ 和 $0 \le p \le 1$取相应值时）。因此, 该量子态永远不会属于$\mathfrak{AC}$。

$\rho'_{2\otimes2}(Ph)$的最大特征值为$\frac{1}{4}(2+\sqrt{2}\sqrt{2-2p+p^2+\overline{2p\cos 4\theta - p^2\cos 4\theta}}$, 对于 $\theta = \frac{\pi}{4}$和$p = 1$, 该值小于$\frac{1}{2}$。因此, 对于 $\theta = \frac{\pi}{4}$和 $p = 1$, 它将属于 $\mathfrak{AF}$。

B. 两个量子比特中的混合态

以下两参数混合态族曾在 [44] 关于隐藏非局域性的研究中被考察,

$$\rho_{2\otimes2}(\lambda,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{1-\lambda}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda\sin^2\theta & \frac{\lambda}{2}\sin 2\theta & 0 \\ 0 & \frac{\lambda}{2}\sin 2\theta & \lambda\cos^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\lambda}{2} \end{pmatrix} \tag{9}$$

其中, $\lambda \in (0,\ 1)$ 和 $\theta \in (0, -\frac{\pi}{2})$。

对于初始选择 $\lambda = 0.9$ 和 $\theta = \frac{\pi}{4}$, 该量子态既不属于 $\mathfrak{AF}$, 也不属于 $\mathfrak{AC}$。现在可以观察到, 对于某些信道参数取值, 变换后的量子态会进入绝对区域。这里需要指出, 我们再次采用了双重相互作用。

表II下 文展示了观测结果, 其中 R_1 和 R_2 分别表示 $\mathfrak{AC}$ 和 $\mathfrak{A}$的取值范围 $\mathfrak{F}$.

量子信道	态参数	R_1	R_2
比特翻转	$\lambda = 0.9$	$0.0890506 \le p \le 0.910949$	$0.378732 \le p \le 0.621268$
相位翻转	$\lambda = 0.9$	$0.0545493 \le p \le 0.945451$	$0.333333 \le p \le 0.666667$
去极化	$\lambda = 0.9$	–	$0.271286 \le p \le 1$
相位阻尼	$\lambda = 0.9$	$0.206295 \le p \le 1$	$0.888889 \le p \le 1$

表 II: 展示向绝对区域转变的表格

C. 两个量子位中的全局去极化信道

现在我们考虑两个量子位中的各向同性态,

$$X_{d\otimes d}(iso) = \beta|\psi^+\rangle\langle\psi^+| + \frac{1-\beta}{d^2}\mathbb{I}_{d^2}, \tag{10}$$

其中$|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}}\sum_{i=0}^{d-1}|ii\rangle$ 满足 $-\frac{1}{d^2-1} \le \beta \le 1$。量子态 $X_{d\otimes d}(iso)$ 在 $-\frac{1}{d^2-1} \le \beta \le \frac{1}{d+1}$ 时为可分态, 在 $\frac{1}{d+1} < \beta \le 1$ 时为纠缠态。所有纠缠的各向同性态均可用于量子隐形传态; 对于参数 β 的整个可分范围, 各向同性态属于 $\mathfrak{AF}$ [29]。

全局去极化信道作用于各向同性态后, 得到的新变换态为

$$\begin{aligned} X'_{d\otimes d}(iso) =& (1-\lambda)X_{d\otimes d}(iso) + \frac{\lambda}{d^2}\mathbb{I}_{d^2} \\ =& ((1-\lambda)\beta)|\psi^+\rangle\langle\psi^+| + (1-((1-\lambda)\beta))\frac{\mathbb{I}_{d^2}}{d^2} \end{aligned} \tag{11}$$

其中, λ 是一个信道参数, 且满足 $0 \le \lambda \le 1$。

新的量子态 $X'_{d\otimes d}(iso)$也是各向同性态，其新参数为$(1-\lambda)\beta$。因此，如果$(1-\lambda)\beta \leq \frac{1}{1+d}$，则 $X'_{d\otimes d}(iso) \in \mathfrak{AF}$。现在我们转而关注 $\mathfrak{AC}$。 $X'_{d\otimes d}(iso)$的特征值如下： $\frac{1+\beta}{(d^2-1)(1-\lambda)\ d^2}$ 和 $\frac{1+\beta}{(\lambda-1)\ d^2}$，其重数为$(d^2-1)$。我们知道，对于 $X'_{d\otimes d}(iso)$ $\in \mathfrak{AC}$，其冯·诺依曼熵应为 $\geq \log_2 d$。量子态 $X'_{d\otimes d}(iso)$的冯·诺依曼熵为：

$$-\frac{(1+\beta(\lambda-1))(d^2-1)\log_2[\frac{1+\beta(\lambda-1)}{d^2}]+(1-\beta(\lambda-1)(d^2-1))\log_2[\frac{1-\beta(\lambda-1)(d^2-1)}{d^2}]}{d^2}$$

现在固定参数 $\beta = 0.8$，然后计算 λ 的范围，使得量子态 $X'_{d\otimes d}(iso)$ 属于 $\mathfrak{AC}$。表 III 如下所示，列出了 λ 属于 $\mathfrak{AC}$时 的不同范围。

维度	态参数	信道参数
$d=2$	$\beta=0.8$	$0.0654827 \leq \lambda \leq 1$
$d=3$	$\beta=0.8$	$0.108858 \leq \lambda \leq 1$
$d=4$	$\beta=0.8$	$0.136226 \leq \lambda \leq 1$
$d=5$	$\beta=0.8$	$0.15533 \leq \lambda \leq 1$

表 III：展示 $\mathfrak{AC}$ 在 $\beta = 0.8$ 时取值范围的表格

一般情况下，很难精确求出任意维度量子态的冯·诺依曼熵。文献 [45] 提出了一种优雅的方法，通过密度矩阵不同次幂的迹来估算冯·诺依曼熵。具体而言，冯·诺依曼熵被表示为一个无穷级数，如下所示 [45]，

$$S(\rho)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{g(k)}{k}=(1-R_2)+\frac{1}{2}(1-2R_2+R_3)+\frac{1}{3}(1-3R_2+3R_3-R_4)+\frac{1}{4}(1-4R_2+4R_3-4R_4+R_5)+\ldots \tag{12}$$

其中 $g(k)=\sum_{m=0}^{k}\frac{(-1)^m}{m!(k-m)!}\mathrm{Tr}(\rho^{m+1})$，且 $R_n=\mathrm{Tr}(\rho^n)$，其中 $n\geq 1$。我们取该级数的前十项来估算冯·诺依曼熵，如下所示，

$$S(\rho)=(1-R_2)+\frac{1}{2}(1-2R_2+R_3)+\ldots+\frac{1}{10}(1-10R_2+10R_3-10R_4+10R_5-10R_6+10R_7-10R_8+10R_9-10R_{10}+R_{11}) \tag{13}$$

现在，我们估算变换后的量子态的冯·诺依曼熵 $X'_{d\otimes d}(iso)$（使用公式13 ）。下表（表 IV）列出了 λ 和 β 的取值范围（对于 $d=3,\ 4,\ 5,\ 6$），在这些范围内，变换后的量子态属于 $\mathfrak{AC}$。

维度	态参数	信道参数
$d=3$	$-0.125 \leq \beta \leq 1$	$0.765349 \leq \lambda \leq 1$
$d=4$	$-0.0666667 \leq \beta \leq 1$	$0.7806 \leq \lambda \leq 1$
$d=5$	$-0.0416667 \leq \beta \leq 1$	$0.831004 \leq \lambda \leq 1$
$d=6$	$-0.0285714 \leq \beta \leq 1$	$0.907309 \leq \lambda \leq 1$

表 IV：展示与变换后的各向同性态相关的 $\mathfrak{AC}$ 取值范围的表格。

对于 $d=2$、3、4.....10,—给定 $-\frac{1}{d^2-1} \leq \beta \leq 1$ 和 $\leq \lambda \leq 1$，存在一组参数 β 和 λ，使得近似冯·诺依曼熵大于 $\log_2 d$（见图 1）。

IV. 条件 R´Rényi 熵与全局幺正变换

本节介绍幺正算符。R´en 在作用于一个.....时条件 R´enyi 熵非负的一类量子态

熵定义如下： ρ [46]，

$$S_\alpha(\rho)=\frac{1}{1-\alpha}\log_2(\mathrm{Tr}\rho^\alpha), \tag{14}$$

其中 $\alpha=(0,\ 1)\cup(1,\ \infty)$。量子态 ρ_{AB} 的条件 R´ényi 熵定义为 $S_\alpha(A|B)=S_\alpha(\rho_{AB})$ S_α ρ_B ´ _ ()。我们指出，条件 Rényi 熵非负的量子态构成一类量子态。我们将这类量子态记为 **CRENN**，其中 **CRENN** $=\{\rho_{cr}:\ S_\alpha(\rho_{cr})_{AB}-S_\alpha(\rho_{cr})_B\geq 0\}$。

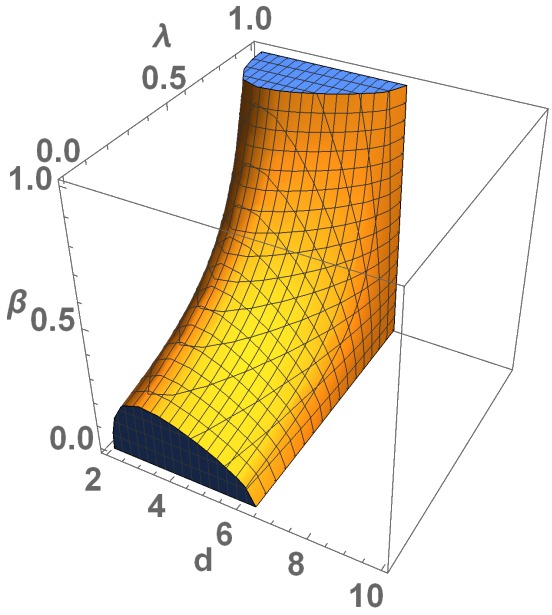


图1：阴影区域表示使冯·诺依曼熵为 $\geq \log_2 d$时参数 β 和 λ 及维度 d 的取值范围

现在，绝对条件 R´ényi 熵定义为这样一类量子态的集合：在任意全局幺正操作下，其条件 R´ényi 熵始终非负。我们将绝对条件 Rényi 熵记为 **ACRENN**，其中

$$\mathbf{ACRENN} = \left\{\rho_{cr} : S_\alpha(U\rho_{cr}U^\dagger)_{AB} - S_\alpha(U\rho_{cr}U^\dagger)_B \geq 0\right\}$$

对于 $\alpha = 2$，我们将这类量子态称为**ACRE2NN**。

A. ACRENN

下文中，我们将刻画**ACRENN**。不过，在此之前，我们先介绍两个与 R´ényi 熵相关的观察结果。

观察1：

设 f 是定义如下的函数 $f:\ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$。 f 称其为施尔凹函数，若 $f(x) \leq f(y)$ 在 x 主化 y时成立。阶数为´的 R α ényi 熵对所有 α [39]均为施尔凹函数。因此，对于 $\rho \succeq \rho^{'}$，

$$S_\alpha(\rho) \leq S_\alpha(\rho^{'})$$

观察2：

对于一个 $d-$ 维系统，其 R´ényi 熵的最大值不超过 $\log_2 d$ [39]。结果如下：

定理 IV.1. *A quantum state* $\rho \in$ **ACRENN** *if and only if* $S_\alpha(\rho) \geq \log_2 d$

Proof. 量子态 $\rho \in \mathfrak{AC}$ 当且仅当 $S(\rho) \geq \log_2 d$，这是基于子系统的最大冯·诺依曼熵为 $\log_2 d$ [23] 这一事实。我们知道，子系统的 R´ényi 熵的最大值 B 为 $\log_2 d$ [39]。该定理的证明可由论文 [23] 的定理-4 得出。 □

定理 IV.2. *If* $\rho \succeq \rho^{'}$ *and* $\rho \in$ **ACRENN** *then* $\rho^{'} \in$**ACRENN**

Proof. 设 $\rho \in$ **ACRENN**。那么 $S_\alpha(\rho) \geq \log_2 d$。由 R´ényi 熵的舒尔凹性可得，

$$S_\alpha(\rho) \leq S_\alpha(\rho^{'})$$

因此，定理得证。 □

定理 IV.3。 *A quantum state* $\rho \in$ **ACRENN** *iff*

$$\mathrm{Tr}\rho^{\alpha} \begin{cases} \geq d^{1-\alpha} & \text{if } \alpha \in (0,\ 1) \\ \leq d^{1-\alpha} & \text{if } \alpha \in (1,\ \infty) \end{cases}$$

Proof. **情况一：** $\alpha \in (0,\ 1)$

由于 $\alpha \in (0, 1)$， $1-\alpha > 0$。我们知道， $\rho \in$ **ACRENN** 当且仅当 $S_{\alpha}(\rho) \geq \log_2 d$。

$$\begin{aligned} & S_{\alpha}(\rho) \geq \log_2 d \\ \Longleftrightarrow\ & \frac{1}{1-\alpha}\log_2(\mathrm{Tr}\rho^{\alpha}) \geq \log_2 d \\ \Longleftrightarrow\ & \mathrm{Tr}\rho^{\alpha} \geq d^{1-\alpha} \end{aligned}$$

情况二： $\alpha \in (1,\ \infty)$

由于 $\alpha \in (1,\ \infty)$， $1-\alpha < 0$。我们知道， $\rho \in$ **ACRENN** 当且仅当 $S_{\alpha}(\rho) \geq \log_2 d$。

$$\begin{aligned} & S_{\alpha}(\rho) \geq \log_2 d \\ \Longleftrightarrow\ & \frac{1}{1-\alpha}\log_2(\mathrm{Tr}\rho^{\alpha}) \geq \log_2 d \\ \Longleftrightarrow\ & \mathrm{Tr}\rho^{\alpha} \leq d^{1-\alpha} \end{aligned}$$

□

注意，对于 $\alpha = 2$，定理-IV.3可写为 $\mathrm{Tr}\rho^2 \leq \frac{1}{d}$，这无非是一个量子态的纯度。因此，一个量子态 $\rho \in$ **ACRE2NN** 当且仅当其纯度 $\leq \frac{1}{d}$。

B. Bloch-Fano 表示中 ACRE2NN 的刻画

本节将通过密度矩阵的布洛赫-法诺分解来刻画绝对条件 Rényi 2 熵非负（**ACRE2NN**）类。

定理 IV.4。 $\rho_{d\otimes d} \in \mathfrak{B}(\mathsf{H}_{\mathsf{AB}})$ *belongs to* **ACRE2NN** *if and only if*

$$\|T\|^2 \leq \frac{d^2(d-1) - 2d(\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2)}{4}$$

where T *is the correlation matrix and* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *are the local Bloch vectors.*

Proof. $\rho_{d\otimes d}$ 可表示如下 [47]，

$$\rho_{d\otimes d} = \frac{1}{d^2}\left(\mathbb{I}_d \otimes \mathbb{I}_d + \sum_{m=1}^{d^2-1} a_m(\sigma_m \otimes \mathbb{I}_d) + \sum_{n=1}^{d^2-1} b_n(\mathbb{I}_d \otimes \sigma_n) + \sum_{m=1}^{d^2-1}\sum_{n=1}^{d^2-1} t_{mn}(\sigma_m \otimes \sigma_n)\right) \tag{15}$$

其中， σ_m 为广义泡利矩阵，满足性质 $\mathrm{Tr}(\sigma_m\sigma_n) = 2\delta_{mn}$ 且 $\mathrm{Tr}(\sigma_m) = 0$。

$$\mathrm{Tr}\rho_{d\otimes d}^2 = \frac{1}{d^4}\left(d^2 + 2d\sum_{m=1}^{d^2-1} a_m^2 + 2d\sum_{n=1}^{d^2-1} b_n^2 + 4\sum_{m=1}^{d^2-1}\sum_{n=1}^{d^2-1} t_{mn}^2\right) \tag{16}$$

其中，式16 由 $\mathrm{Tr}(\sigma_m\sigma_n) = 2\delta_{mn}$ 且 $\mathrm{Tr}(\sigma_m) = 0$这一事实可得。该表达式可适当改写为：

$$\mathrm{Tr}\rho_{d\otimes d}^2 = \frac{1}{d^4}\left(d^2 + 2d\|\vec{a}\|^2 + 2d\|\vec{b}\|^2 + 4\|T\|^2\right) \tag{17}$$

其中， $\|T\|^2 = \mathrm{Tr}(T^{\dagger}T)$ 和 $\|\vec{a}\|$、 $\|\vec{b}\|$ 表示欧几里得范数。

如果记作 $2d\|\vec{a}\|^2 + 2d\|\vec{b}\|^2 + 4\|T\|^2 = R$，那么公式17 可以写成：

$$\mathrm{Tr}\rho_{d\otimes d}^2 = \frac{d^2 + R}{d^4} \tag{18}$$

由定理 IV.1可知，当且仅当一个量子态的 R´ényi 熵大于 $\log_2 d$时，它才属于 **ACRENN**。因此，

$$\begin{aligned} & S_2(\rho_{d\otimes d}) = -\log_2(\mathrm{Tr}\rho^2_{\mathrm{d}\otimes\mathrm{d}}) \\ \Longleftrightarrow\ & S_2(\rho_{d\otimes d}) = -\log_2\left(\frac{d^2+R}{d^4}\right) \geq \log_2 d \\ \Longleftrightarrow\ & \log_2\left(\frac{d^4}{d^2+R}\right) \geq \log_2 d \\ \Longleftrightarrow\ & R \leq d^3 - d^2 \\ \Longleftrightarrow\ & \|T\|^2 \leq \frac{d^2(d-1) - 2d(\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2)}{4} \end{aligned} \tag{19}$$

□

Weyl 态是 $d\otimes d$ 维空间中布洛赫向量为零的一般量子态的特殊情形 $a_m = b_n = 0\ \forall\ m,\ n$。

推论 IV.4.1。 *For a $d\otimes d$ Weyl state, a state* $\in$ **ACRE2NN** *if and only if*

$$\|T\|^2 \leq \frac{d^2(d-1)}{4}$$

V. 三体系统中边缘态绝对性质的刻画

偏迹是一种重要的量子操作，尤其适用于研究复合系统的边缘态。本节将在其属于 **ACRE2NN** 的背景下，研究三量子比特系统的约化子系统。

A. 布洛赫-法诺表示的刻画

设 $\rho_{d\otimes d\otimes d} \in \mathfrak{B}(\mathrm{H_A}\otimes\mathrm{H_B}\otimes\mathrm{H_C})$ 是一个三部量子态，可表示如下 [48]

$$\begin{aligned} \rho_{d\otimes d\otimes d} =& \frac{1}{d^3}\mathbb{I}_d\otimes\mathbb{I}_d\otimes\mathbb{I}_d + \frac{1}{2d^2}\left(\sum t_i^1\sigma_i\otimes\mathbb{I}_d\otimes\mathbb{I}_d + \sum t_j^2\mathbb{I}_d\otimes\sigma_j\otimes\mathbb{I}_d + \sum t_k^3\mathbb{I}_d\otimes\mathbb{I}_d\otimes\sigma_k\right) + \\ & \frac{1}{4d}\left(\sum t_{ij}^{12}\sigma_i\otimes\sigma_j\otimes\mathbb{I}_d + \sum t_{ik}^{13}\sigma_i\otimes\mathbb{I}_d\otimes\sigma_k + \sum t_{jk}^{23}\mathbb{I}_d\otimes\sigma_j\otimes\sigma_k\right) + \frac{1}{8}\sum t_{ijk}^{123}\sigma_i\otimes\sigma_j\otimes\sigma_k \end{aligned} \tag{20}$$

其中 $t_i^1 = \mathrm{Tr}(\rho\sigma_i\otimes\mathbb{I}_d\otimes\mathbb{I}_d)$、$t_j^2 = \mathrm{Tr}(\rho\mathbb{I}_d\otimes\sigma_j\otimes\mathbb{I}_d)$、$t_k^3 = \mathrm{Tr}(\rho\mathbb{I}_d\otimes\mathbb{I}_d\otimes\sigma_k)$、$t_{ij}^{12} = \mathrm{Tr}(\rho\sigma_i\otimes\sigma_j\otimes\mathbb{I}_d)$、$t_{ik}^{13} = \mathrm{Tr}(\rho\sigma_i\otimes\mathbb{I}_d\otimes\sigma_k)$、$t_{jk}^{23} = \mathrm{Tr}(\rho\mathbb{I}_d\otimes\sigma_j\otimes\sigma_k)$、$t_{ijk}^{123} = \mathrm{Tr}(\rho\sigma_i\otimes\sigma_j\otimes\sigma_k)$ 满足性质 $\mathrm{Tr}(\sigma_i) = 0$、$\mathrm{Tr}(\sigma_i\sigma_j) = 2\delta_{ij}$。这里，$T_x$、$T_{xy}$、$T_{123}$ 分别是元素为 t_i^x、t_{ij}^{xy} 和 t_{ijk}^{123} 的向量，并满足条件 $1\leq x<y<z\leq 3$。

去掉第一个量子比特后，约化态为：

$$\rho_{BC} = \frac{1}{d^2}\mathbb{I}_d\otimes\mathbb{I}_d + \frac{1}{2d}\left(\sum t_j^2(\sigma_j\otimes\mathbb{I}_d) + \sum t_k^3(\mathbb{I}_d\otimes\sigma_k)\right) + \frac{1}{4}\sum t_{jk}^{23}(\sigma_j\otimes\sigma_k) \tag{21}$$

Now,

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\rho_{BC}^2 &= \frac{1}{d^2} + \frac{1}{2d}\left(\sum\sum t_j^2 t_j^2 + \sum\sum t_k^3 t_k^3\right) + \frac{1}{4}\sum\sum t_{jk}^{23}t_{jk}^{23} \\ &= \frac{1}{d^2} + \frac{1}{2d}\left(\|T_2\|^2 + \|T_3\|^2\right) + \frac{1}{4}\|T_{23}\|^2 \end{aligned} \tag{22}$$

其中 $\sum t_j^2 t_j^2 = \|T_2\|^2$, $\sum t_k^3 t_k^3 = \|T_3\|^2$，$\sum t_{jk}^{23}t_{jk}^{23} = \|T_{23}\|^2$ 且式22 由以下事实可得：$\mathrm{Tr}(\sigma_i) = 0$，$\mathrm{Tr}(\sigma_i\sigma_j) = 2\delta_{ij}$。

我们知道，当且仅当 $S_2(\rho_{BC}) \geq \log_2 d$ 时，一个量子态属于 **ACRE2NN** 。

现在，假设 $m_1 = \|T_2\|^2 + \|T_3\|^2$。那么，式22 可以写为

$$\mathrm{Tr}\rho_{BC}^2 = \frac{1}{d^2} + \frac{1}{2d}m_1 + \frac{1}{4}\|T_{23}\|^2 \tag{23}$$

$$
\begin{aligned}
&S_2(\rho_{BC}) = -\log_2(\mathrm{Tr}\rho_{\mathrm{BC}}^2) \\
&\quad\Longleftrightarrow S_2(\rho_{AB}) = -\log_2\left(\frac{1}{d^2}+\frac{1}{2d}m_1+\frac{1}{4}\|T_{23}\|^2\right) \geq \log_2 d \\
&\quad\Longleftrightarrow -\log_2\left(\frac{4+2dm_1+d^2\|T_{23}\|^2}{4d^2}\right) \geq \log_2 d \\
&\quad\Longleftrightarrow \log_2\left(\frac{4d^2}{4+2dm_1+d^2\|T_{23}\|^2}\right) \geq \log_2 d \\
&\quad\Longleftrightarrow 2m_1+d\|T_{23}\|^2 \leq \frac{4}{d}(d-1) \\
&\quad\Longleftrightarrow \|T_{23}\|^2 \leq \frac{4(d-1)-2m_1d}{d^2}
\end{aligned} \tag{24}
$$

同样，移除第二个量子比特后，约化态如下：

$$
\rho_{AC} = \frac{1}{d^2}\mathbb{I}_d\otimes\mathbb{I}_d + \frac{1}{2d}\left(\sum t_i^1(\sigma_i\otimes\mathbb{I}_d)+\sum t_k^3(\mathbb{I}_d\otimes\sigma_k)\right)+\frac{1}{4}\sum t_{ik}^{13}(\sigma_i\otimes\sigma_k) \tag{25}
$$

ACRE2NN 的条件为

$$
\|T_{13}\|^2 \leq \frac{4(d-1)-2m_2d}{d^2} \tag{26}
$$

其中 $\|T_{13}\|^2=\sum t_{ik}^{13}t_{ik}^{13}$和 $m_2=\|T_1\|^2+\|T_3\|^2$。

同样，移除第三个量子比特后，约化态如下：

$$
\rho_{AB} = \frac{1}{d^2}\mathbb{I}_d\otimes\mathbb{I}_d + \frac{1}{2d}\left(\sum t_i^1(\sigma_i\otimes\mathbb{I}_d)+\sum t_j^2(\mathbb{I}_d\otimes\sigma_k)\right)+\frac{1}{4}\sum t_{ij}^{12}(\sigma_i\otimes\sigma_j) \tag{27}
$$

ACRE2NN 的条件为 **ACRE2NN**

$$
\|T_{12}\|^2 \leq \frac{4(d-1)-2m_3d}{d^2} \tag{28}
$$

其中 $\|T_{12}\|^2=\sum t_{ij}^{12}t_{ij}^{12}$和 $m_3=\|T_1\|^2+\|T_2\|^2$。

B. 三个量子比特中的纯态

在本节中，我们研究三量子比特纯态的约化子系统，并探讨它们是否属于 **ACRE2NN**。

在 [44], 一个纯三体态表示为：

$$
|\psi_3\rangle = x_0|000\rangle + x_1e^{\imath\theta}|100\rangle + x_2|101\rangle + x_3|110\rangle + x_4|111\rangle \tag{29}
$$

其中 $x_i\geq 0$， $0\leq\theta\leq\pi$ 和 $\sum_{i=0}^4 x_i^2=1$。
去除第一个量子比特后，约化态为：

$$
\begin{pmatrix}
x_0^2+x_1^2 & e^{\imath\theta}x_1x_2 & e^{\imath\theta}x_1x_3 & e^{\imath\theta}x_1x_4 \\
e^{-\imath\theta}x_1x_2 & x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\
e^{-\imath\theta}x_1x_3 & x_2x_3 & x_3^2 & x_3x_4 \\
e^{-\imath\theta}x_1x_4 & x_2x_4 & x_3x_4 & x_4^2
\end{pmatrix} \tag{30}
$$

约化态的特征值（式（ 30 $0,0,\frac{1}{2},1\pm\sqrt{S_1}$, S_1 $1+4\ x_2^2+x_3^2-x_4^2+x_1^2x_4^2+x_3^2\ -1+x_1^2+$）） 为（） ，其中由（ （） （））
$2x_4^2\ +x_2^2\ -1+x_1^2+2x_3^2+2x_4^2$
给出。

去除第二个量子比特后，约化态为：

$$
\begin{pmatrix}
x_0^2 & 0 & e^{-\imath\theta}x_0x_1 & x_0x_2 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
e^{\imath\theta}x_0x_1 & 0 & x_1^2+x_3^2 & e^{\imath\theta}x_1x_2+x_3x_4 \\
x_0x_2 & 0 & e^{-\imath\theta}x_1x_2+x_3x_4 & x_2^2+x_4^2
\end{pmatrix} \tag{31}
$$

特征值为 0，0，$\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{S_2})$，其中$S_2$ 由 $1-4(x_0^2x_3^2+x_2^2x_3^2-2\cos(\theta)x_1x_2x_3x_4+x_0^2x_4^2+x_1^2x_4^2)$ 给出。移除第三个量子比特后，约化态为：

$$
\begin{pmatrix}
x_0^2 & 0 & e^{-\imath\theta}x_0x_1 & x_0x_3 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
e^{\imath\theta}x_0x_1 & 0 & x_1^2+x_2^2 & e^{\imath\theta}x_1x_3+x_2x_4 \\
x_0x_3 & 0 & e^{-\imath\theta}x_1x_3+x_2x_4 & x_3^2+x_4^2
\end{pmatrix} \tag{32}
$$

特征值为 0，0，$\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{S_3})$，其中 S_3 由 $1 - 4(x_0^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 - 2\cos(\theta)x_1x_2x_3x_4 + x_0^2x_4^2 + x_1^2x_4^2)$ 纯态（式29）关于第一个、第二个和第三个量子比特的约化态由式30、式31 和公式32 分别。由定理 IV.3 可知，对于属于 **ACRE2NN**，$\mathrm{Tr}\rho^2 \leq \frac{1}{2}$。

对第一个量子比特进行迹运算后的约化态（30），$\mathrm{Tr}\rho^2 = x_0^4 + 2x_0^2x_1^2 + (1 - x_0^2)^2$。约化态 $\in$ **ACRE2NN**，如果

$$x_0^4 + 2x_0^2x_1^2 + (1 - x_0^2)^2 \leq \frac{1}{2} \tag{33}$$

对第二个量子比特进行迹运算后的约化态（31）$\rho^2 = x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 + 2x_0^2(x_1^2 + x_2^2) + 2x_1^2(x_2^2 + x_3^2) + 2x_2^2(x_3^2 + x_4^2) + 4x_1x_2x_3x_4\cos(\theta)$，$\mathrm{Tr}\rho^2 \leq \frac{1}{2}$。约化态 **ACRENN**，如果

$$x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 + 2x_0^2(x_1^2 + x_2^2) + 2x_1^2(x_2^2 + x_3^2) + 2x_2^2(x_3^2 + x_4^2) + 4x_1x_2x_3x_4\cos(\theta) \leq \frac{1}{2} \tag{34}$$

对第三个量子比特进行迹运算后的约化态（32）$\rho^2 = x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 + 2x_0^2(x_1^2 + x_3^2) + 2x_1^2(x_2^2 + x_3^2) + 2x_2^2(x_3^2 + x_4^2) + 4x_1x_2x_3x_4\cos(\theta)$，$\mathrm{Tr}\rho^2 \leq \frac{1}{2}$。约化态 **ACRENN**，如果

$$x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 + 2x_0^2(x_1^2 + x_3^2) + 2x_1^2(x_2^2 + x_3^2) + 2x_2^2(x_3^2 + x_4^2) + 4x_1x_2x_3x_4\cos(\theta) \leq \frac{1}{2} \tag{35}$$

C. 三个量子比特的混合态示例

考虑由 GHZ态 [49] 和 W态 [50] 构成的三个量子比特混合态，

$$\begin{aligned} \varrho_{2\otimes2\otimes2} &= p|\phi_1\rangle\langle\phi_1| + (1-p)|\phi_2\rangle\langle\phi_2|, \text{ where,} \\ |\phi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle) \\ |\phi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle) \end{aligned} \tag{36}$$

消去三个量子比特中的任意一个后，得到的约化态为：

$$\begin{pmatrix} \frac{2+p}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-p}{3} & \frac{1-p}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1-p}{3} & \frac{1-p}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{p}{2} \end{pmatrix} \tag{37}$$

约化矩阵的特征值为 0，$\frac{1}{2}(1-p)$，$\frac{p}{2}$，$\frac{2+p}{6}$. 因此，约化态 $\in$ **ACRE2NN** 适用于 $p \in [0.07, 1]$。

VI. 交换网络协议

本节中，我们提出一种方案，可将已进入绝对区域的量子态转变为非绝对区域中的量子态。

此处用于获取资源的协议，主要依赖于纠缠交换网络；该网络通过适当的测量，使两个从未相互作用过的粒子对发生纠缠 [37, 38]。协议分为两个阶段：准备阶段和测量阶段。

准备阶段：设有三个参与方 Alice、Bob 和 Charlie，以及两个源 S_1 和 S_2（见图 2）。设两个源 S_1 和 S_2 分别生成一个纠缠态：ρ_{AB} 和 ρ_{BC}。纠缠态 ρ_{AB} 由 Alice 和 Bob 共享，而 ρ_{BC} 由 Bob 和 Charlie 共享。因此，Bob 从两个源 S_1 和 S_2各接收一个粒子。随后，Bob 对从 S_1 和 S_2. 接收到的粒子所构成的联合态进行完整的贝尔基测量。测量完成后，他将结果广播给 Alice 和 Charlie。假设当两个粒子的联合态分别沿 $|\phi^+\rangle\langle\phi^+|$、$|\phi^-\rangle\langle\phi^-|$、$|\psi^+\rangle\langle\psi^+|$ 和 $|\psi^-\rangle\langle\psi^-|$ 投影时，他发送比特串 (00)、(01)、(10)、(11)。根据 Bob 的结果（i、j），Alice 和 Charlie 此时共享四个条件态 $\rho^{(ij)}$.中的一个。

测量阶段： 在此阶段，Alice 和 Charlie 对 $\rho^{(ij)}$ 执行适当的全局幺正操作，然后分别对各自的子系统进行局部投影测量。随后检验所得关联，以判断这些条件态 ($\rho^{(ij)}$) $\in \mathfrak{AC}$ 是否满足要求。

纯纠缠态首先经过噪声信道处理。所得量子态属于 $\mathfrak{AC}$. 随后在协议中使用该量子态的两个副本。如果四个条件态中至少有一个 $\rho^{(ij)}$ 不属于 $\mathfrak{AC}$，则称该协议以概率方式成功恢复了纯纠缠态的非经典特征。协议的流程如图 2所示。

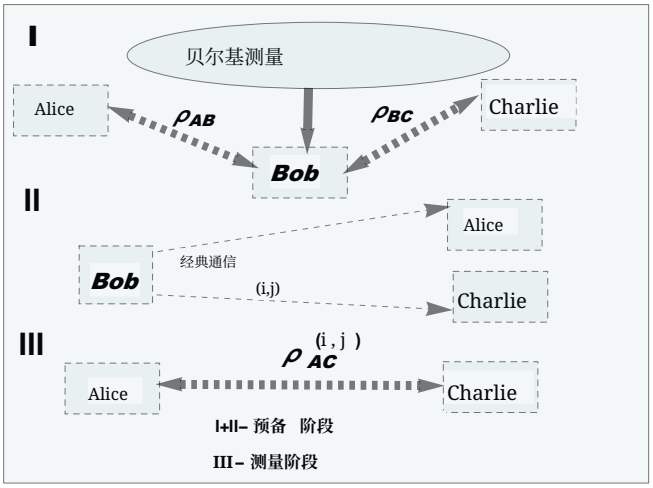
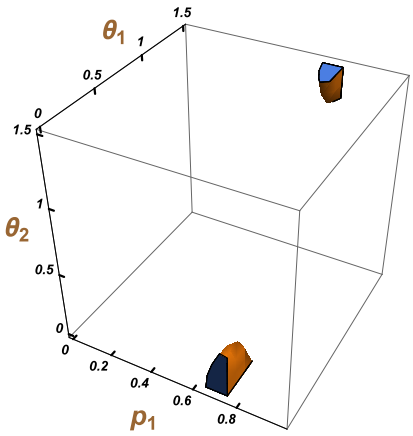


图 2：交换网络

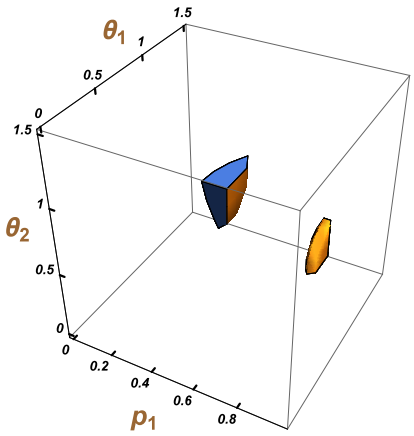
A. 维尔纳态

双量子比特纯纠缠态（Eq.5）经过全局去极化信道后得到的量子态由 Eq.6 给出。协议中使用了两个参数分别为（θ_1, p_1）和（θ_2, p_2）的 $\rho'_{2\otimes 2}(G)$ 态。在制备阶段结束时，可能生成四种条件态。 $\rho^{(00)}$ 和 $\rho^{(01)}$ 各自的熵相同。对于 $p_2 = 0.705882$，存在一段参数范围， $0 \leq p_1 \leq 1$ 和 $\theta_1, \theta_2 \in (0, \frac{\pi}{2})$，在此范围内，交换网络中使用的两个副本各自的熵均大于 1，而 $\rho^{(00)}$ 或 $\rho^{(01)}$ 的熵为 ≤ 1 （见图3a）。

每个 $\rho^{(10)}$ 和 $\rho^{(11)}$ 的熵相同。对于 $p_2 = 0.705882$，存在一段参数范围 $0 \leq p_1 \leq 1$和θ_1， $\theta_2 \in (0, \frac{\pi}{2})$，在此范围内，交换网络中使用的两个副本各自的熵都大于 1，而 $\rho^{(10)}$ 或 $\rho^{(11)}$ 的熵为 ≤ 1 （见图3b）。



(a) 阴影区域表示阻尼参数 p_1 和态参数 θ_1， θ_2 的取值范围，在此范围内可通过概率方式恢复非经典特征。



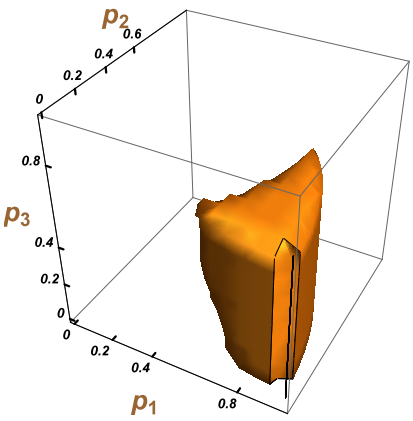
(b) 阴影区域表示阻尼参数的取值范围，在此范围内， $\rho^{(00)}$ 和 $\rho^{(01)}$ 的熵小于 1，而初始量子态的熵大于 1。

图 3：全局退极化态（式6）的绝对与非绝对区域

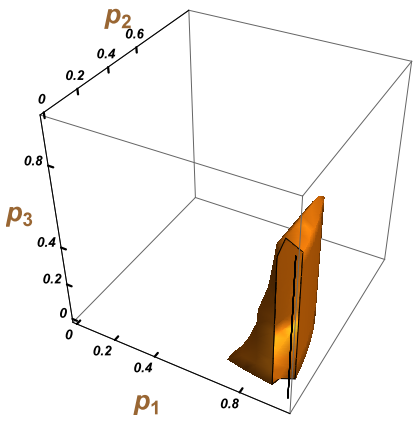
B. 振幅阻尼态

我们对纯态方程5中的每个量子比特都施加振幅阻尼通道。新量子态 $\rho'_{2\otimes 2}(Amp)$由方程7给出。我们固定 $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$。这里，我们使用了 2 个参数分别为（p_1,– p_2）和（p_3， p_4）的 ρ'_{Amp} 量子态副本。因此，可能出现四种条件态。每个 $\rho^{(00)}$ 和 $\rho^{(01)}$ 的熵相同。存在一段阻尼参数范围，在此范围内，协议中使用的两个副本各自的熵都大于 1，而 $\rho^{(00)}$ 和 $\rho^{(01)}$ 的熵为 ≤ 1（见图4a）。这里， $p_4 = 0.714286$ 及其他参数的取值范围均为 0 到 1。

每个 $\rho^{(10)}$ 和 $\rho^{(11)}$ 的熵相同。存在一段阻尼参数范围，使得协议中使用的两个副本各自的熵都大于 1，而 $\rho^{(10)}$ 和 $\rho^{(11)}$ 的熵 ≤ 1（见图4b）。这里， $p_4 = 0.714286$ 及其他参数的取值均在 0 到 1 之间。



(a) 阴影区域表示阻尼参数的取值范围，在此范围内， $\rho^{(00)}$ 和 $\rho^{(01)}$ 的熵小于 1，而两个初始量子态各自的熵大于 1。



(b) 阴影区域表示阻尼参数的取值范围，在此范围内， $\rho^{(10)}$ 和 $\rho^{(11)}$ 的熵小于 1，而两个初始量子态各自的熵大于 1。

图 4：振幅阻尼态（方程7）的绝对与非绝对区域

C. 相位阻尼态

我们对式5中的纯态的每个量子比特都施加了相位阻尼信道。新量子态为 $\rho'_{2\otimes 2}(Ph)$，由式8给出。这里，所得量子态的熵始终小于 1，因此它永远不属于 $\mathfrak{AC}$ 类。因此，无需应用交换协议。

VII. 应用

在本节中，我们给出一些具体的 实例，说明如何利用交换网络及随后的全局
幺正作用来获取资源。

我们来考虑负条件熵的情形。正如前文第VI节所述，交换协议可以使量子态回到非绝对区域。然而，非绝对区域既包含负条件熵的量子态，也包含具有正熵的量子态。对于具有正熵的量子态，我们需要再施加一个全局幺正算符，使其变为具有负条件熵的量子态。

以振幅阻尼为例进行说明。我们使用了两个不同的振幅阻尼态副本 ρ'_{Amp} 作为交换网络协议的初始量子态。这两个量子态如下所示：

$$\rho_1^{int} = 0.54|00\rangle\langle 00| + 0.212132|11\rangle\langle 00| + 0.36|01\rangle\langle 01| + 0.01|10\rangle\langle 10| + 0.212132|00\rangle\langle 11| + 0.09|11\rangle\langle 11| \tag{38}$$

$$\rho_2^{int} = 0.571429|00\rangle\langle 00| + 0.239046|11\rangle\langle 00| + 0.0285714|01\rangle\langle 01| + 0.285714|10\rangle\langle 10| + 0.239046|00\rangle\langle 11| + 0.114286|11\rangle\langle 11| \tag{39}$$

ρ_1^{int}是将贝尔态 $|\phi^+\rangle$ 的两个量子比特通过振幅阻尼信道得到的，其中阻尼参数为 p_1=0.8，而 p_2=0.1. ρ_2^{int} 是将 $|\phi^+\rangle$ 的两个量子比特通过阻尼参数为 p_3=0.2 的振幅阻尼信道， p_4=0.714286. 所得。 ρ_1^{int}和 ρ_2^{int} 的冯·诺依曼熵分别为 1。06433 和 1。12407，即 ≥ 1。

将 Bob的量子比特投影到贝尔态 ($|\psi^+\rangle$) 上得到的条件态表达式为

$$\rho_1^{final} = 0.734694|00\rangle\langle 00| + 0.146939|01\rangle\langle 01| + 0.103488|10\rangle\langle 01| + 0.103488|01\rangle\langle 10| + 0.110787|10\rangle\langle 10| + 0.00758017|11\rangle\langle 11| \tag{40}$$

现在， ρ_1^{final} 的熵为 0.99883。因此，它不属于 $\mathfrak{AC}$。但是， ρ_1^{final} 的条件熵为 0.377795，并非负值。现在我们考虑一个全局幺正算符，

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{41}$$

应 用全局幺正算符 U 后，得到修正态 $\rho_{new}^1 = U\rho_1^{final}U^\dagger$，其表达式为 ，

$$\begin{aligned}\rho_{new}^1 = {} & 0.372025|00\rangle\langle 00| + 0.364445|00\rangle\langle 11| + 0.146939|01\rangle\langle 01| + 0.103488|01\rangle\langle 10| \\ & +0.103488|10\rangle\langle 01| + 0.110787|10\rangle\langle 10| + 0.364445|11\rangle\langle 00| + 0.372025|11\rangle\langle 11|,\end{aligned} \tag{42}$$

条件冯·诺依曼熵为 -0.000227186。同样地，当 Bob的量子比特投影到贝尔态（$|\phi^+\rangle$）时，得到的条件态表达式为

$$\rho_2^{final} = 0.806723|00\rangle\langle 00| + 0.0994299|11\rangle\langle 00| + 0.110924|01\rangle\langle 01| + 0.0616247|10\rangle\langle 10| + 0.0994299|00\rangle\langle 11| + 0.0207283|11\rangle\langle 11| \tag{43}$$

熵 ρ_2^{final} 为 0。893069。因此，它不属于 $\mathfrak{AC}$。但是， ρ_2^{final} 的条件熵为 0。331117，该值为正。对 U （式41）应用全局幺正算符后，得到修正态 $\rho_{new}^2 = U\rho_2^{final}U^\dagger$，其形式如下：

$$\rho_{new}^2 = 0.314296|00\rangle\langle 00| + 0.392997|00\rangle\langle 11| + 0.110924|01\rangle\langle 01| + 0.0616247|10\rangle\langle 10| + 0.392997|11\rangle\langle 00| + 0.513156|11\rangle\langle 11|, \tag{44}$$

该量子态的条件冯·诺伊曼熵为 -0.0620408。因此，我们发现，借助交换网络协议和合适的全局幺正算符，我们得到了一个条件冯·诺伊曼熵为负的量子态。

再来考虑 ρ_2^{int}，以及将 $|\phi^+\rangle$ 中的两个量子比特通过由 p_1=0.8、和 $p_2\in[0.05, 0.6]$. 指定的两个振幅阻尼信道后得到的另一个振幅阻尼态。将这一初始量子态记为 ρ_1^{int}. 。两个初始量子态 ρ_1^{int}和 ρ_2^{int}均属于 $\mathfrak{AC}$。现在，将这些量子态用于我们的交换协议。有趣的是，对于中间方的四种可能输出中的任意一种，端点方之间共享的条件态在 $\mathfrak{AC}$ 时都不属于 $p_2\in[0.05, 0.1)$ （见图5）。



(a) (b)

图 5：冯·诺依曼熵 *(V)* 随噪声参数 p_2 的变化曲线，分别绘于两个子图中。对于 p_1=0.8、 p_3=0.2、p_4=0.714286，图中绘出了初始量子态 ρ_1^{int}、 ρ_2^{int} 的冯·诺依曼熵，以及中间方得到输出 (i、 j) 时获得的最终条件态 $\rho_{fin}^{(ij)}$ 的冯·诺依曼熵。 V_1^{int}、 V_2^{int} 分别表示 ρ_1^{int}、 ρ_2^{int} 的冯·诺依曼熵。 $V_{00/01}^{fin}$、 $V_{10/11}^{fin}$ 分别表示 $\rho_{fin}^{(00)/(01)}$ 和 $\rho_{fin}^{(10)/(11)}$ 的冯·诺依曼熵。子图 *a* 显示，在噪声参数 p_2 的整个取值范围内，两个条件态 $\rho_{fin}^{(00)/(01)}$ 不属于 $\mathfrak{AC}$，而 ρ_1^{int}、 ρ_2^{int} 中有一个属于 $\mathfrak{AC}$。更有意思的是，子图 *b* 显示，存在一段 p_2 的取值范围，在此范围内，即使两个初始量子态都属于 $\mathfrak{AC}$，四种可能的条件态也无一属于 $\mathfrak{AC}$。这进一步表明，我们的协议能够有效地恢复以负条件熵形式呈现的非经典性。

VIII. 结论

量子信息处理协议在现实世界中的每一项应用都涉及环境相互作用。在本研究中，我们探究了环境相互作用对两个评价指标——FEF 和负条件熵——的影响，旨在考察从非绝对区域到绝对区域的转变；这里的“绝对性”是在全局幺正作用的语境下使用的。我们观察到，在某些量子信道的作用下，量子态会进入这样一个区域：即使施加全局幺正作用，也无法恢复其性质。为此，我们提出了一种基于纠缠交换网络协议、能够以概率方式恢复这些性质的方案，并详细介绍了该方案的一项应用。我们还刻画了一类量子态：其条件 R´enyi 熵在全局幺正操作下始终非负。进而，我们根据上述绝对性质刻画了三量子比特系统的边缘态。

我们的研究也为未来的工作方向提供了一些启示。在 [51, 52], 中，作者提出了一种基于估算部分转置密度矩阵的矩来检测多体混合态中双体纠缠的方法。本文的主要目的是探讨在全局幺正操作下量子态的两个概念：FEF 和条件熵。具体而言，我们旨在分析这类量子性概念因环境相互作用而进入绝对区域的情形，以及在某些情况下如何通过纠缠交换协议重新恢复这类量子性。在此背景下，我们不着重讨论通过局域随机测量和经典后处理来估算这些量子态性质的策略，并将其视为未来研究的一个潜在方向。在 [53, 54] 中，作者提出了一种系统方法，只需进行少量局域测量，即可基于图态检测多体纠缠结构。将类似策略用于把我们在第 VI 节中的结果从三体情形推广到多体情形，将具有重要意义。这样的推广可视为未来研究的一个有趣方向。

FEF 和条件熵为量子信息处理协议提供了重要的基准。对它们的研究具有相关性且十分重要，尤其是在环境影响导致密度矩阵发生变换的情况下。我们相信，我们的工作有助于未来开展此类研究。

致谢 Tapaswini Patro 谨此感谢 DST-Inspire（印度）奖学金的支持，奖学金编号为 DST/INSPIRE Fellowship/2019/IF190357。Nirman Ganguly 感谢其获得的 SERB（印度）MATRICS 计划项目资助，文件编号为 MTR/2022/000101。

声明

所有作者对本文的贡献相同。

数据可用性声明： 由于本研究未生成或分析任何数据集，因此本文不适用数据共享。

利益冲突： 作者声明不存在任何利益冲突。所有合著者均已阅览并同意稿件内容，且无任何需报告的财务利益。

[1] Nielsen, M.A. 和 Chuang, I.L.，*Quantum Computation and Quantum Information*，剑桥大学出版社（2000年）。[2] Wilde,M.M，*Quantum Information Theory*，剑桥大学出版社（2017年）。[3] Horodecki, R.、Horodecki, P.、Horodecki, M. 和 Horodecki, K.，*Quantum entanglement* **81**, ，《现代物理评论》，（）。[4] Brunner, N.、Cavalcanti, D.、Pironio, S.、Scarani, V. 和 Wehner, S.，*Bell nonlocality*，《现代物理评论》，86，419（2014年）。[5] Uola, R.、Costa, A.C.、Nguyen, H.C. 和 G¨uhne, O.，*Quantum steering*，《现代物理评论》，92，015001（2020年）。[6] Vempati, M.、Ganguly, N.、Chakrabarty, I. 和 Pati, A.K.，*Witnessing negative conditional entropy*，《物理评论A》，104，012417（2021年）。[7] Streltsov, A.、Adesso, G. 和 Plenio, M.B.，*Colloquium: Quantum coherence as a resource*，《现代物理评论》，89，041003（2017年）。[8] Chitambar, E. 和 Gour, G.，*Quantum resource theories*，《现代物理评论》，91，025001（2019年）。[9] Gyongyosi, L.、Imre, S. 和 Nguyen, H.V.，*A survey on quantum channel capacities*，《IEEE通信调查与教程》，20，1149（2018年）。

[10] Shor, P.W., *Additivity of the classical capacity of entanglement-breaking quantum channels*, Journal of Mathematical Physics, 43, 4334 (2002年). [11] Pal, R. and Ghosh, S., *Non-locality breaking qubit channels: the case for CHSH inequality*, Journal of Physics A: Mathe- matical and Theoretical, 48, 155302 (2015年). [12] Guha, T., Bhattacharya, B., Das, D., Bhattacharya, S.S., Mukherjee, A., Roy, A., Mukherjee, K., Ganguly, N. and Majumdar, A.S., *Environmental effects on nonlocal correlations*, Quanta, 8, 57 (2019年). [13] Holmes,R. B. *Geometric Functional Analysis and its Applications*, Springer, 纽约, (1975年). [14] Zyczkowski,K., Horodecki,P., Sanpera, A. and Lewenstein, M. ,

Volume of the set of separable states **58**, , Phys. Rev. A, ( ). 883 1998

[15] Kus,M. and Zyczkowski,K., *Geometry of entangled states*, Phys. Rev. A, 63, 032307 (2001年). [16] Verstraete, F., Audenaert, K. and De Moor, B.,

Maximally entangled mixed states of two qubits **64**, , 012316, 2001

《物理评论A》, . [17] Johnston, N., *Separability from spectrum for qubit-qudit states*, 《物理评论A》, 88, 062330 (2013年). [18] Hildebrand, R., *Positive partial transpose from spectra*, 《物理评论A》, 76, 052325 (2007年). [19] Knill,E., *Separability from spectrum*, http://qig.itp.uni-hannover.de/qiproblems/15 (2003年). [20] Filippov, S.N., Magadov, K.Y. and Jivulescu, M.A., *Absolutely separating quantum maps and channels*, 《新物理学杂志》, 19, 083010 (2017年). [21] Hildebrand, R., 谱中的正偏转置, 《物理评论A》, 76, 052325 (2007年). [22] Patro, S., Chakrabarty, I. and Ganguly, N.,

Non-negativity of conditional von Neumann entropy and global unitary operations **96**, 062102 2017 , 《物理评论A》, ( ). [23] Vempati, M., Shah, S., Ganguly, N. and Chakrabarty, I., *A-unital Operations and Quantum Conditional Entropy*, Quantum, 6, 641 (2022年). [24] Bohnet-Waldraff, F., Giraud, O. and Braun, D., *Absolutely classical spin states*, 《物理评论A》, 95, 012318 (2017年). [25] Johnston, N., Moein, S., Pereira, R. and Plosker, S.,

Absolutely k-incoherent quantum states and spectral inequalities for the factor width of a matrix **106**, 052417 2022 , 《物理评论A》, ( ). [26] Verstraete, F. and Wolf, M. M., *Entanglement versus Bell Violations and Their Behavior under Local Filtering Operations*, Physical Review Letters, 89, 170401 (2002年); Ganguly, N., *etal.*:

Bell-CHSH Violation Under Global Unitary Operations: Necessary and Sufficient conditions, Interna- tional Journal of Quantum Information, 16, 1850040 (2018年). [27] Bhattacharya, S.S., Mukherjee, A., Roy, A., Paul, B., Mukherjee, K., Chakrabarty, I., Jebaratnam, C. and Ganguly, N.,*Absolute non-violation of a three-setting steering inequality by two-qubit states*, 《量子信息处理》, 17, 3 (2018年). [28] Ollivier,H. and Zurek,W.H. *Quantum discord: a measure of the quantumness of correlations*, Phys. Rev. Lett., 88, 017901 (2001年). [29] Patro, T., Mukherjee, K, Siddiqui, M.A, Chakrabarty, I., and Ganguly, N., *Absolute fully entangled fraction from spectrum*, Eur. Phys. J. D, 76, 127 (2022年). [30] Ganguly, N., Chatterjee, J. and Majumdar, A.S.,

Witness of mixed separable states useful for entanglement creation, 《物理评论A》, 89, 052304 (2014年). [31] Halder, S., Mal, S. and Sen, A., *via noisy environments.* *Characterizing the boundary of the set of absolutely separable states and their generation* **103**, 052431 2021 , 《物理评论A》, ( ). [32] Horodecki, M., Oppenheim, J. and Winter, A., *Partial quantum information*,《自然》, 436, 673 (2005年). [33] Bruß, D., D' Ariano, G.M., Lewenstein, M., Macchiavello, C., Sen, A. and Sen, U.,

Distributed quantum dense coding **93**, 210501 2004 ,Physical review letters, ( ). [34] Bennett, C.H., Brassard, G., Cr

Teleporting an unknown quantum epeau, C., Jozsa, *state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels* **70**,1895 1993 R., Peres, A. and Wootters, W.K., ,Physical review letters, ( ). [35] Horodecki, M., Horodecki, P. and Horodecki, R., *General teleportation channel, singlet fraction, and quasidistillation*, 《物理评论A》, 60,1888 (1999年). [36] Cavalcanti,D., Acin,A.,Brunner,N. and Vertesi,T., *All quantum states useful for teleportation are nonlocal resources*, Phys- ical Review A 87 , 042104 (2013年). [37] Zukowski,M., Zeilinger,A., Horne,M.A., and Ekert, A.K., *Event-ready-detectors Bell experiment via entanglement swapping*, Phys. Rev. Lett, 71, 4287 (1993年). [38] Mukherjee, K. *et.al.* , *Generation of Nonlocality*, https://arxiv.org/abs/1702.07782v1. [39] Van Dam, W. and Hayden, *Renyi-entropic bounds on quantum communication*, https://doi.org/10.48550/arXiv.quant- ph/0204093. [40] Horodecki, R., Horodecki, P. and Horodecki, M., *Quantum α-entropy inequalities: independent condition for local realism?*, 《物理快报A辑》 210, 377(1996 年).[41] Kumar,Komal and Ganguly,Nirman,

Quantum conditional entropies and steerability of states with maximally mixed marginals **107**, 032206 2023 , 《物理评论A》 ( ). [42] Nielsen, M.A., *An introduction to majorization and its applications to quantum mechanics*, 讲义 , 物理系 , 昆士兰大学 , 澳大利亚 (2002 年). [43] Ekert, A. and Knight, P.L.,

Entangled quantum systems and the Schmidt decomposition **63**, , 《美国物理学杂志》, ( ). [44] Acin, A., Andrianov, A., Costa, L., Jane, E., Latorre,J.I and Tarrrach, R.,

Generalized Schmidt Decomposition and Classification of Three-Quantum-Bit States **85** , 1560 2000 , Physical Review Letters, ( ).

[45] D'Hoker, E.、Dong, X. 和 Wu, C.H., *An alternative method for extracting the von Neumann entropy from Rényi entropies*, 《Journal of High Energy Physics》, 2021, 1（2021）。[46] M
¨
On quantum Rényi entropies: A new generaliza- uller-Lennert, M.、*tion and some properties* **54**, 122203 2013
Dupuis, F.、Szehr, O.、Fehr, S. 和 Tomamichel, M., 《Journal of Mathematical Physics》（）。[47] Friis, N.、Bulusu, S. 和 Bertlmann, R.A., *Geometry of two-qubit states with negative conditional entropy*, 《Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical》, 50, 125301（2017）。[48] Li, M.、Wang, Z.、Wang, J.、Shen, S. 和 Fei, S.M., *The norms of Bloch vectors and classification of four-qudits quantum states* **125**, 20006 2019 , 《Europhysics Letters》（）。[49] Greenberger, D. M.、Horne, M. A. 和 Zeilinger, 载于《贝尔定理、量子理论与宇宙观》, M. Kafatos 编（Kluwer Academic, 多德雷赫特, 1989 107 *Preparation of a four-atom Greenberger-*）, 第 页; *Horne-Zeilinger state* **53**, 4591 1996
Gerry, C.C., 《《物理评论A》》（）。[50] Dur, W.、Vidal, G. 和 Cirac, J.I., *Three qubits can be entangled in two inequivalent ways*, 《《物理评论A》》, 62, 062314（2000）。[51] Elben, A. 等, *Mixed-state entanglement from local randomized measurements*, 《Physical Review Letters》, 125, 200501（2020）。[52] Zhou, Y.、Zeng, P. 和 Liu, Z., *Single-copies estimation of entanglement negativity*, 《Physical Review Letters》, 125, 200502（2020）。[53] Zhou, Y.、Xiao, B.、Li, M.D.、Zhao, Q.、Yuan, Z.S.、Ma, X. 和 Pan, J.W., *A scheme to create and verify scalable entanglement in optical lattice* **8**, 99, 2022 , 《npj Quantum Information》（）。[54] Zhou, Y.、Zhao, Q.、Yuan, X. 和 Ma, X., *Detecting multipartite entanglement structure with minimal resources*, 《npj Quantum Information》, 5, 83（2019）。