arXiv:2304.00712v1 [math.AG] 3 Apr 2023

有理函数的泰勒多项式

Aldo Conca、Simone Naldi、Giorgio Ottaviani 和 Bernd Sturmfels

摘要

泰勒簇由有理函数的所有固定阶泰勒多项式构成，其中变量的数量以及分子和分母的次数均固定。在单变量情形下，泰勒簇由 Hankel 矩阵上的秩约束给出。自然参数化的逆称为 Pad´e 逼近。我们研究泰勒簇的维数和定义理想。泰勒超曲面对射影几何颇有意义，因为其海森矩阵往往会消失。在三个及更多变量的情形下，存在维数小于参数数量的缺陷泰勒簇。我们用交换代数中的 Fr¨oberg 猜想来解释这一现象。

1 引言

给定两个常数项为 1 的多项式 P 和 Q，有理函数 P/Q 的泰勒级数展开的常数项为 1。将该级数截断至次数为 m的项，我们得到 P/Q的 m阶泰勒多项式。其系数是 P 和 Q的系数的多项式。例如，考虑两个一元二次多项式的五阶泰勒多项式：

$$\frac{1+p_1x+p_2x^2}{1+q_1x+q_2x^2} \;=\; \begin{array}{c} 1+(p_1-q_1)x-(p_1q_1-q_1^2-p_2+q_2)x^2+(p_1q_1^2-q_1^3-p_1q_2-p_2q_1+2q_1q_2)x^3 \\ -(p_1q_1^3-q_1^4-2p_1q_1q_2-p_2q_1^2+3q_1^2q_2+p_2q_2-q_2^2)x^4+(p_1q_1^4-q_1^5 \\ -3p_1q_1^2q_2-p_2q_1^3+4q_1^3q_2+p_1q_2^2+2p_2q_1q_2-3q_1q_2^2)x^5\;+\;\ldots \end{array} \tag{1}$$

这个有理函数有四个参数 p_1, p_2, q_1, q_2，而五次多项式有五个系数：

$$1\;+\;c_1x\;+\;c_2x^2\;+\;c_3x^3\;+\;c_4x^4\;+\;c_5x^5\;+\;\cdots\,. \tag{2}$$

因此，如果 (2) 是 (1) 的泰勒多项式，那么它的系数 c_i 必须满足一个约束。为求出这个约束，我们令 (2) 等于 (1) 的右端，并提取所有 x-单项式的系数。由此得到一个包含五个多项式方程的方程组。然后从该方程组中消去四个未知数 p_1, p_2, q_1, q_2。这一过程导出三次方程

$$\det\begin{bmatrix} c_5 & c_4 & c_3 \\ c_4 & c_3 & c_2 \\ c_3 & c_2 & c_1 \end{bmatrix} \;=\; c_1c_3c_5-c_1c_4^2-c_2^2c_5+2c_2c_3c_4-c_3^3 \;=\; 0. \tag{3}$$

这是条件二次型之比的泰勒多项式成为五次多项式的条件。

从几何角度来看，请注意，（1）定义了一个多项式映射，将坐标为（p_1、p_2、q_1、q_2）的四维空间映射到坐标为（c_1、c_2、c_3、c_4、c_5）的五维空间。其像的闭包

称为泰勒簇（参见定义 1.1）。对于（1）中的例子，泰勒簇是射影四维空间中的超曲面 $\mathbb{P}^4$，由方程（3）定义。本文研究复数域 $n \geq 1$ 变量上的这类截断有理级数的代数簇。

一般情形讨论有理函数 P/Q，其中 P 和 Q 是在$x = (x_1, \ldots, x_n)$中满足 $P(0) = Q(0) = 1$的多项式。我们假设 P的次数为 $\leq d$，而 Q的次数为 $\leq e$。我们考虑该有理函数展开至 m阶的泰勒级数:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \quad = \quad \sum_{|\gamma| \leq m} c_\gamma \, x^\gamma \qquad + \quad \text{terms of order } \geq m+1. \tag{4}$$

这里，x^γ表示单项式 $x_1^{\gamma_1} \cdots x_n^{\gamma_n}$，而 $|\gamma| = \gamma_1 + \cdots + \gamma_n$是 x^γ的总次数。

本文的主要内容是刻画所有能够得到此类逼近的多项式 $T = \sum c_\gamma x^\gamma$。(4)中的分子 P和分母 Q 的次数分别为d 和 e。我们称(4)为类型为(d, e)的 Pad´e 逼近。对解析函数进行此类逼近的研究源于 Hermite [11] 和 Pad´e [15]的工作。该主题属于数值分析，相关研究主要集中于单变量情形 [2]。计算一个 Pad´e 逼近式是一个分块托普利兹线性代数问题 [4]。Pad´e 逼近也是计算机代数中的一个经典问题；例如参见[3]。关于 $n \geq 2$ 的 Pad´e 逼近问题可以解释为计算协同关系的问题 [12]。

如果参数（即 P 和 Q 的系数）相较于近似阶数 m 较少，且 $n = 1$，那么有理函数 P/Q 可由其泰勒多项式 T 唯一确定。例如，[2, 第 1.1] 节中就提到了这一点。对我们而言，这意味着参数化 $(P, Q) \mapsto T$ 是一个单射。这对 $n = 1$ 成立，但对 $n \geq 3$ 不成立。我们将看到，映射 $(P, Q) \mapsto T$ 的纤维可以是正维的，也就是说，Pad´e 逼近的唯一性会失效。因此，本文的几何研究为多元 Pad´e 逼近理论奠定了基础。

所有学过微积分的学生都熟悉泰勒级数展开。因此，对于我们将要研究的几何对象，我们选择称其为泰勒，而非 Pad´e。

定义 1.1。 泰勒簇 $\mathcal{T}^n_{d,\ e,\ m}$ 定义为在 $\mathbb{P}^{\binom{n+m}{n}-1}$ 中，次数为 $\leq m$ 的有理函数 (4) 的次数为 $(d,\ e)$ 且具有 n 个变量时，其泰勒多项式集合的闭包。

射影空间 $\mathbb{P}^{\binom{n+m}{n}-1}$ 由次数为 $\leq m$ 的 n 个变量的多项式组成，并且将相差一个非零倍数的多项式视为相同。具有 $c_0 = 1$ 的多项式构成一个仿射开图 $\mathbb{C}^{\binom{n+m}{n}-1}$。这里我们在 $\mathbb{C}$ 上工作，但我们的理论可推广到所有域。我们的计算在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上进行。

泰勒簇 $\mathcal{T}^n_{d,\ e,\ m}$ 是不可约的，因为它是某个多项式映射的像。一个自然的首要问题是：它的维数是多少？我们先从计算参数个数开始。多项式 P有 $\binom{n+d}{n} - 1$ 个自由系数，而多项式 Q 有 $\binom{n+e}{n} - 1$ 个自由系数。由于多项式映射不会增加维数，我们得出

$$\dim\bigl(\mathcal{T}^n_{d,e,m}\bigr) \ \leq \ \min\Bigl\{ \tbinom{d+n}{n} + \tbinom{e+n}{n} - 2\,,\, \tbinom{m+n}{n} - 1 \Bigr\}. \tag{5}$$

右侧的量是泰勒簇 的预期维数$\mathcal{T}^n_{d,\ e,\ m}$。在我们的例子中（1），即情形 $n = 1$，$d = e = 2$，$m = 5$，预期维数为 4。事实上，$\mathcal{T}^1_{2,\ 2,\ 5}$ 是由（$\mathbb{P}^5$）定义的复数域3中的三次超曲面，因此其维数等于 4。

现在我们讨论本文的组织结构，并概述我们的结果。第 2 节解决了单变量情形（$n = 1$）。此时维数等于预期维数。簇 $\mathcal{T}^1_{d,\ e,\ m}$ 位于 $\mathbb{P}^m$ 中，且其维数为 $d+e$，前提是 $d+e < m$。其素理想由一个有 $m-d$ 行、$e+1$ 列的汉克尔矩阵的极大子式生成（定理 2.3）。计算该矩阵的核是帕德´逼近的关键步骤。

在第 3 节中，我们转向 $n \geq 2$。我们引入帕德´矩阵，它具有分块汉克尔结构。其最大子式理想通常不是根基理想，并且可能具有多个不可约分支。其中之一是泰勒簇 $\mathcal{T}^n_{d,\ e,\ m}$。在定理 3.4 中，我们确定了其素理想 $\mathcal{I}^n_{d,\ e,\ m}$。偏好计算的读者现在可以直接跳到例 3.7 。

我们的关键发现是，泰勒簇可能是亏格的，即不等式 （5）是严格的。最小的实例（$n = 3$, $d = e = 2$, $m = 3$）在命题 4.1中进行了详细推导。

在第 4 节中，我们聚焦于由单个多项式定义的泰勒簇，因此它们在其环境空间中的余维为一。其中一些泰勒超曲面呈现出射影几何中颇受关注的一种性质，即其海森矩阵恒等于零。

在第 5 节中，我们推导出泰勒簇 $\mathcal{T}^n_{d,\ e,\ m}$的维数一般公式。这使得我们能够完成相关计算，结果汇总于表 1，并最终提出猜想 5.5。

在第 6 节中，我们用一般形式的理想的希尔伯特函数重新表述了维数公式。这将其与 Fr¨oberg 猜想联系起来；该猜想是交换代数中一个由来已久的公开问题。在定理 6.2 和推论 6.4中，我们利用这一联系在一些特殊情况下证明了猜想 5.5 。我们感谢 Christian Krattenthaler 提出了定理 6.2 的证明，并允许我们将其收入本文。

2 单变量

我们考虑形如 $T = 1+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_mx^m$ 的单变量多项式 x。这些多项式的集合可与坐标为 $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ 的向量空间 $\mathbb{C}^m$ 等同。类似地，我们分别将 $\mathbb{C}^d$ 和 $\mathbb{C}^e$ 与由次数为 $\leq d$ 的多项式 P 和次数为 $\leq e$ 的多项式 Q 所构成的空间等同，且满足 $P(0) = Q(0) = 1$。我们感兴趣的是多项式映射

$$\psi : \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^e \to \mathbb{C}^m, \ (P, Q) \mapsto \text{ the order } m \text{ Taylor polynomial of } P/Q. \tag{6}$$

我们固定带有坐标 $(c_0 : c_1 : \cdots : c_m)$ 的射影空间 $\mathbb{P}^m$。泰勒簇$\mathcal{T}^1_{d,\ e,\ m}$ 是 $\mathbb{P}^m$ 中 ψ的像的闭包。换句话说，$\mathcal{T}^1_{d,\ e,\ m}$ 是包含所有次数为 m 的多项式 T 的最小射影簇，这些多项式的 Pad´e 型 (d, e) 逼近是精确的。我们首先排除泰勒簇充满其环境射影空间的平凡情形。

引理 2.1。假设 $d+e \geq m$。那么 $\mathcal{T}^1_{d,\ e,\ m} = \mathbb{P}^m$。

证明。 我们假设 $d+e = m$ 并断言映射 ψ 在（6）中是支配的。这涵盖了 $d+e \geq m$ 的情形，因为 d 和 e 是次数的上界。注意，乘积$QT = (1 + \sum_{i=1}^{e} q_i x^i) \cdot (\sum_{i=0}^{m} c_i x^i)$ 是一个次数为 $\leq d$ 模 x^{m+1} 的多项式，当且仅当

$$\begin{bmatrix} c_{m-1} & c_{m-2} & \cdots & c_d \\ c_{m-2} & c_{m-3} & \cdots & c_{d-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_d & c_{d-1} & \cdots & c_{d-e+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_e \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} c_m \\ c_{m-1} \\ \vdots \\ c_{d+1} \end{bmatrix}, \tag{7}$$

其中 $c_i = 0$ 若 $i < 0$。令 $\mathcal{U} \subset \mathbb{P}^m$ 为所有满足以下条件的多项式构成的非空扎里斯基开集：左侧矩阵（ T7）非奇异。每个 $T \in \mathcal{U}$ 都有唯一的精确 Pad´e 近似 P/Q，其类型为（d， e）。这表明 $\mathcal{U} \subseteq \psi$（$\mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^e$），如所声称的。 □

从现在起，我们假设 $d+e < m$。由引理 2.1 的<Proof>证明</Proof>可推出，当 $T \in \mathcal{T}^1_{d,\ e,\ m}$ 为一般位置时，Pad´e 逼近是唯一的。(6) 中的映射 ψ 双有理地映到其像上。特别地，泰勒簇 $\mathcal{T}^1_{d,\ e,\ m}$ 具有预期维数 $d+e$。

固定单项式集合 $M_{d+1,\ m} = \{x^{d+1}, \ldots, x^m\}$。用多项式 $T = 1 + c_1 x + \cdots + c_m x^m$ 相乘定义了一个从 $\mathbb{C}[x]_{\le e}$ 到 $\mathbb{C}[x]_{\le e+m}$ 的线性映射。将此映射与投影到多项式环 $\mathbb{C}[x]$ 中 $M_{d+1,\ m}$ 的线性张成空间上的投影复合，得到

$$\begin{array}{rccccc} \varphi_T: & \mathbb{C}[x]_{\le e} & \to & \mathbb{C}[x]_{\le e+m} & \to & \mathbb{C}\{M_{d+1,m}\}, \\ & Q & \mapsto & QT & \mapsto & QT \text{ restricted to } M_{d+1,m}. \end{array} \tag{8}$$

我们固定定义域和像的单项式基。对于定义域，我们按次数递增排列该单项式基；对于像，则按次数递减排列。按照这一约定，表示线性映射 φ_T 的 $(m-d) \times (e+1)$ 矩阵等于

$$P_T = \begin{bmatrix} c_m & c_{m-1} & \cdots & c_{m-e} \\ c_{m-1} & c_{m-2} & \cdots & c_{m-e-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{d+2} & c_{d+1} & \cdots & c_{d-e+2} \\ c_{d+1} & c_d & \cdots & c_{d-e+1} \end{bmatrix}. \tag{9}$$

这里 $d-e+1$ 允许为负数，并且当 $i < 0$时，我们令 $c_i = 0$。根据我们的假设， P_T的行数 $m-d$ 大于或等于 P_T的列数 $e+1$。

例 2.2（$d = 0$， $e = m-1$）。这个极端情形是多项式倒数的簇，展开到比其次数高一阶。这里矩阵 P_T 是方阵，且最后一行和最后一列只有两个非零项。例如，对于 $m = 4$，我们有

$$P_T = \begin{bmatrix} c_4 & c_3 & c_2 & c_1 \\ c_3 & c_2 & c_1 & c_0 \\ c_2 & c_1 & c_0 & 0 \\ c_1 & c_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

这个 $m \times m$ 矩阵的行列式是不可约的。我们的下一个结果将对此进行推广。 ■

现在我们转向多项式环 $\mathbb{C}[c] = \mathbb{C}[c_0, c_1, \ldots, c_m]$中的一些交换代数。对于多项式矩阵 X 和 $s \in \mathbb{N}$，我们将由 X的所有$s \times s$ 子式生成的理想记为 $I_s(X)$，并且当 r 表示 X的秩时，令 $I_{\max}(X) = I_r(X)$。

定理 2.3。由 $I_{e+1}(P_T)$ 生成的 $(e+1) \times (e+1)$ 矩阵中的子式（9）在 $\mathbb{C}[c]$中是素理想。它定义了一个维数为 $d+e$ 的不可约射影簇，其中 $\mathbb{P}^m$。

证明。 根据 Eisenbud 的定义，一般汉克尔矩阵是 1-一般矩阵 [7, 8]。事实上，在 [7,定理 1], 中，Eisenbud 证明了一个优美的结果：任意规格的 1-一般矩阵的最大子式理想 $a \times b$（其中 $a \geq b$）是预期余维数的素理想$a - b + 1$，并且对于余维为 $\leq b - 2$的任意线性截面，同样的结论也成立。

如果 $e \leq d + 1$，那么 P_T 是一般 Hankel 矩阵，我们的结论便立即成立。现在假设 $e > d + 1$。$(m - d) \times (e + 1)$ 矩阵 P_T 可由一般 Hankel 矩阵通过将该矩阵中至多 $e - 1$ 个变量设为 0 得到。因此，上述结果适用，由此可知 $I_{e+1}(P_T)$ 是余维为 $m - d - e$ 的素理想。Eisenbud 关于 1-一般矩阵的结果在一般 Hankel 矩阵的特殊坐标截面上的这一具体应用，在 [6, 命题 2.4] 中有更明确的表述。 □

推论 2.4. 泰勒簇 $\mathcal{T}^1_{d,e,m} \subset \mathbb{P}^m$ 是维数为 $\min\{d + e, m\}$ 的不可约簇。如果 $d + e < m$，那么 $\mathcal{T}^1_{d,e,m} = \{T \in \mathbb{P}^m : \operatorname{rank}(P_T) \leq e\}$，其素理想等于 $I_{e+1}(P_T)$。

证明。 簇 $\mathcal{T}^1_{d,\,e,\,m}$ 是不可约的，因为它是多项式映射的像的闭包。如果 $d + e \geq m$，那么 $\mathcal{T}^1_{d,\,e,\,m} = \mathbb{P}^m$ 根据引理 2.1，结论得证。因此我们假设 $d + e < m$。

定理 2.3 告诉我们，$V(I_{e+1}(P_T))$ 是不可约的。我们断言它等于 $\mathcal{T}^1_{d,\,e,\,m}$。如果$T \in \psi(\mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^e)$，那么存在 $Q \in \mathbb{C}[x]_{\leq e}$，使得 $Q(0) = 1$，并且 QT 中次数从 $d+1$ 到 m 的各项均为零。用矩阵表示法，$P_T(1, q_1, \ldots, q_e)^t = 0^t$。因此，$P_T$ 的 $(e+1)\times(e+1)$ 子式均为零。所以，$V(I_{e+1}(P_T))$ 包含 $\psi(\mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^e)$，其闭包为 $\mathcal{T}^1_{d,\,e,\,m}$。

反过来，我们将证明 $\mathcal{T}^1_{d,e,m}$ 包含 $V(I_{e+1}(P_T))$ 的一个开子集。令$\mathcal{C} \subset V(I_{e+1}(P_T))$为所有满足以下条件的 T 构成的闭集：P_T的最后 e 列线性相关。于是，$\mathcal{V} = V(I_{e+1}(P_T))\backslash\mathcal{C}$是 $V(I_{e+1}(P_T))$中的非空开集。若 $T \in \mathcal{V}$，则 P_T的核中有一个首坐标为 1 的向量。因此 $T \in \psi(\mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^e)$，且$\mathcal{V} \subset \mathcal{T}^1_{d,e,m}$。我们得出结论，$V(I_{e+1}(P_T)) = \mathcal{T}^1_{d,e,m}$，从而 $I(\mathcal{T}^1_{d,e,m}) = \sqrt{I_{e+1}}(P_T) = I_{e+1}(P_T)$。 □

例 2.5（$e = d + 1$）。分子的次数比分母的次数小 1。这里，泰勒簇$\mathcal{T}^1_{d,\,d+1,\,m}$ 是有理正规曲线的割线簇，并且

$$P_T = \begin{bmatrix} c_m & c_{m-1} & \cdots & c_{m-d-1} \\ c_{m-1} & c_{m-2} & \cdots & c_{m-d-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{d+1} & c_d & \cdots & c_0 \end{bmatrix}$$

是二元形式 $f = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} c_i X^i Y^{m-i}$ 的 $(m - d - 1, d + 1)$ 次数催化矩阵。用符号表示为，$\mathcal{T}^1_{d,d+1,m} = \sigma_{d+1}(v_{1,m}(\mathbb{P}^1)) = \{T : \text{秩}(P_T) \leq d + 1\}$。该簇由 f 次数为 m 的二元形式组成，这些形式是 X 和 Y 中线性形式的 $d + 1$ m 次幂之和。

当 $m = 2d+2$ 时，我们得到一个超曲面。例如，对于 $m = 4, d = 1$，超曲面 $\mathcal{T}^1_{1\,2\,4} \subset \mathbb{P}^4$ 3×3 $f = c_0Y^4 + 4c_1XY^3 + 6c_2X^2Y^2 + 4c_3X^3Y + c_4X^4$ 由汉克尔矩阵定义。它由四次齐次多项式组成，这些多项式至多是两个线性形式的四次幂之和。 ■

最后，我们总结一下 $n = 1$ 的泰勒簇可能出现的四种情况：

- 若 $e + d \geq m$，则 $\mathcal{T}^1_{d,\,e,\,m}$ 等于 $\mathbb{P}^m$。

- 若 $e+d<m$ 且 $e=d+1$，则 $\mathcal{T}^1_{d,\ d+1,\ m}=\sigma_{d+1}(v_{1,\ m}(\mathbb{P}^1))\subset\mathbb{P}^m$ 是次数为 m 的有理正规曲线的第 $(d+1)$ 个割线簇。
- 若 $e+d<m$ 且 $e<d+1$，则我们的泰勒簇是一个以 $\mathbb{P}^{d-e}$ 为顶点的锥，即

$$\mathcal{T}^1_{d,e,m}\ =\ \mathcal{T}^1_{e-1,e,D}\star\mathbb{P}^{d-e}\ =\ \sigma_e(v_{1,D}(\mathbb{P}^1))\star\mathbb{P}^{d-e}\ \subset\ \mathbb{P}^m$$

其中 $D=m-d+e-1$。这与上一个情形类似，只是缺少坐标 c_0、……、c_{d-e}。

- 若 $e+d<m$ 且 $e>d+1$，则泰勒簇是上述割线簇的一个线性截面。具体而言，令 $D'=m+d-e+1$，我们有 $\mathcal{T}^1_{d,e,m}=\sigma_e(v_{1,D'}(\mathbb{P}^1))\cap H$ 其中 $H\subset\mathbb{P}^{D'}$ 是由 $e-d-1$ 坐标为零所定义的线性空间。

由此可知，对于 $n=1$，泰勒簇是一个已得到充分理解的经典对象。在接下来的章节中，我们将看到，对于 $n\geq 2$，情况则有所不同，也更有趣。

3 Pad´e 矩阵

泰勒簇 $\mathcal{T}^n_{d,\ e,\ m}\subset\mathbb{P}^{\binom{n+m}{n}-1}$ 由（4）中的参数化定义。第2节为 $n=1$ 提供了一种隐式表示。接下来，我们将其推广到 $n\geq 2$。令 $\mathbb{C}[x]$ 表示以 n 个变量 $x=(x_1,\ldots,x_n)$ 为变量的多项式环。固定整数 d、e、$m\geq 0$。记 $\mathbb{C}[x]_{\leq e}$ 为次数不超过 e 的多项式构成的 $\binom{n+e}{n}$ 维空间，并令 $M_{d+1,\ m}$ 表示 $\mathbb{C}[x]_{\leq m}$ 中不属于 $\mathbb{C}[x]_{\leq d}$ 的单项式集合。我们有 $|M_{d+1,\ m}|=\binom{n+m}{n}-\binom{n+d}{n}$。

考虑一个 $\mathbb{C}[x]_{\leq m}$ 中的多项式 $T=\sum_{|\gamma|\leq m}c_\gamma x^\gamma$，满足 $T(0)=c_0=1$。令 φ_T 表示由与（8）中相同公式定义的 $\mathbb{C}$-线性映射。不过，该公式现在针对一个以 n 个变量 $x=(x_1,\ldots,x_n)$ 为变量的多项式环 $\mathbb{C}[x]$。Pad´e 矩阵 P_T 表示相对于单项式基的 φ_T。P_T 的行由 $M_{d+1,\ m}$ 索引，按总次数递减排列；P_T 的列由 $M_{0,\ e}$ 索引，按总次数递增排列。P_T 在行 $x^\alpha\in M_{d+1,\ m}$ 和列 $x^\beta\in M_{0,\ e}$ 处的元素在 $\beta\leq\alpha$ 时等于 $c_{\alpha-\beta}$，否则为0。Pad´e矩阵的格式为 $\left(\binom{m+n}{n}-\binom{d+n}{n}\right)\times\binom{e+n}{n}$，并具有分块汉克尔结构。该结构类似于（9），但现在各个块的大小不同。

例3.1 $(n=2,d=e=2,m=5)$。与（1）中一样，我们来考虑两个二次型在两个变量下的五阶泰勒多项式 T，但现在是在两个变量中。帕德´矩阵的结构如下

$$P_T\ =\ \begin{bmatrix}C_5 & C_4' & C_3''\\ C_4 & C_3' & C_2'\\ C_3 & C_2 & C_1\end{bmatrix}. \tag{10}$$

这看起来像公式（3）中的矩阵，但 P_T 有 $15=6+5+4$ 行和 $6=1+2+3$ 列。每个索引为 i 的分块表示与 T 的 i 次齐次分量相乘，例如，T 的二次部分对应的 C_2 矩阵 4×2：$\mathbb{C}[x]_1\to\mathbb{C}[x]_3$ 以及 C_2' 矩阵 5×3：$\mathbb{C}[x]_2\to\mathbb{C}[x]_4$。列 $(C_5,C_4,C_3)^t$ 表示 $\mathbb{C}\to\mathbb{C}\{M_{2,4}\},c\mapsto cT$。■

现在我们来描述一般情况下的分块结构，因为这在后面会很重要。令 $T \in \mathbb{C}[x]_{\le m}$表示非齐次多项式 $T \in \mathbb{C}[x]_{\le m}$中次数为 i的齐次分量。对于每个次数 j，乘以 T_i 定义了一个 $\mathbb{C}$-线性映射 $\mathbb{C}[x]_j \to \mathbb{C}[x]_{i+j}$。令$C_i$ 表示相对于单项式基表示线性映射 T_i 的矩阵。从现在起，我们不再记录索引 j，但假定可以从上下文中明确看出 j。Pad´e 矩阵 P_T 由这些分块汇总而成。它的分块结构独立于 n。按照这一约定，公式（10）中的矩阵 P_T 现在具有 $C_4' \mapsto C_4$, $C_3', C_3'' \mapsto C_3$ 和 $C_2' \mapsto C_2$。

例 3.2（$d=3,\ e=4,\ m=5$）。对于三次式与四次式之比的五阶泰勒多项式，

$$P_T \quad = \quad \begin{bmatrix} C_5 & C_4 & C_3 & C_2 & C_1 \\ C_4 & C_3 & C_2 & C_1 & C_0 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

行数为 $\binom{n+4}{5}+\binom{n+3}{4}$，列数为 $1+n+\binom{n+1}{2}+\binom{n+2}{3}+\binom{n+3}{4}$。这个 Pad´e 矩阵的核中有一个特殊的列向量，示意写作

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & T_2T_0 - T_1^2 & T_2T_1 - T_3T_0 & T_3T_1 - T_2^2 \end{bmatrix}^t. \tag{12}$$

（12）中的五个元素是多项式（$T_2T_0 - T_1^2$）+（$T_2T_1 - T_3T_0$）+（$T_3T_1 - T_2^2$）的齐次分量的系数向量。请验证它属于 φ_T的核。我们的记号暗指右侧 2×3 子矩阵的克拉默法则 P_T。 ■

令 $\mathcal{I}^n_{d,e,m}$ 表示定义不可约簇 $\mathcal{T}^n_{d,e,m}$的齐次素理想。这是多项式环 $\mathbb{C}[c] = \mathbb{C}[c_\gamma : |\gamma| \le m]$中的一个理想。本节的目标是从 Pad´e 矩阵 P_T确定理想 $\mathcal{I}^n_{d,e,m}$。我们先看几个例子。

例 3.3 ($n=2, m=3$)。这里的环境空间是 $\mathbb{P}^9$，坐标为 $c_{00}, c_{01}, \ldots, c_{30}$。要考虑的前两种情况是 $(d,e) = (2,1)$ 和 $(d,e) = (1,2)$。Pad´e 矩阵为

$$P_T = \begin{bmatrix} C_3 & C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{30} & 0 & c_{20} \\ c_{21} & c_{20} & c_{11} \\ c_{12} & c_{11} & c_{02} \\ c_{03} & c_{02} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad P_T = \begin{bmatrix} C_3 & C_2 & C_1 \\ C_2 & C_1 & C_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{30} & 0 & c_{20} & 0 & 0 & c_{10} \\ c_{21} & c_{20} & c_{11} & 0 & c_{10} & c_{01} \\ c_{12} & c_{11} & c_{02} & c_{10} & c_{01} & 0 \\ c_{03} & c_{02} & 0 & c_{01} & 0 & 0 \\ c_{20} & 0 & c_{10} & 0 & 0 & c_{00} \\ c_{11} & c_{10} & c_{01} & 0 & c_{00} & 0 \\ c_{02} & c_{01} & 0 & c_{00} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

在这两种情况下，素理想 $\mathcal{I}^2_{d,e,3}$ 由 P_T 的极大子式生成，并且是余维为 2 的科恩–麦考利理想。由此可知，$\mathcal{T}^2_{2,1,3}$ 的次数为 6，其理想 $\mathcal{I}^2_{2,1,3}$ 由四个三次齐次多项式生成；而 $\mathcal{T}^2_{1,2,3}$ 的次数为 21，且 $\mathcal{I}^2_{1,2,3}$ 由七个六次多项式生成。

情形 $(d,e) = (1,1)$ 更有趣。4维泰勒簇 $\mathcal{T}^2_{1,\ 1,\ 3}$表示两个二元一次多项式之比的泰勒三次多项式。其 Pad´é 矩阵等于

$$P_T \ = \ \begin{bmatrix} C_3 & C_2 \\ C_2 & C_1 \end{bmatrix} \ = \ \begin{bmatrix} c_{30} & 0 & c_{20} \\ c_{21} & c_{20} & c_{11} \\ c_{12} & c_{11} & c_{02} \\ c_{03} & c_{02} & 0 \\ c_{20} & 0 & c_{10} \\ c_{11} & c_{10} & c_{01} \\ c_{02} & c_{01} & 0 \end{bmatrix}.$$

P_T 的极大子式理想是科恩–麦考利的，其预期余维数为 5，次数为 21。但该理想不是素理想。它是素理想 $\mathcal{I}^2_{1,\,1,\,3}$ 与一个次数为 9、根基为 $\langle c_{20}, c_{11}, c_{02}, c_{10}, c_{01}\rangle$ 的初等理想的交。因此，$\mathcal{T}^2_{1,\,1,\,3}$ 在 $\mathbb{P}^9$ 中的次数为 12。理想 $\mathcal{I}^2_{1,\,1,\,3}$ 不是科恩–麦考利的。它由 5 个二次型、16 个三次齐次多项式和 1 个四次式生成。 ■

令 $q = (q_\beta : \beta \in M_{0,e})$ 为 Q 的系数列向量。则 $S = \mathbb{C}[c, q]$ 是一个含有 $\binom{n+m}{n} + \binom{n+e}{n}$ 个未知数的多项式环。令 $J \subset S$ 为由列向量 $P_T \cdot q$ 的各项生成的理想。簇 $V(J)$ 由满足以下条件的多项式对 (T, Q) 组成：乘积 TQ 不含关于 $M_{d+1,m}$ 的单项式。理想饱和 $(J : q_0^\infty)$ 描述了满足 $Q(0) \neq 0$ 且 TQ 不含关于 $M_{d+1,m}$ 的单项式的多项式对 (T, Q) 的闭包。该簇 $V\big((J : q_0^\infty)\big)$ 在 T 坐标上的投影就是泰勒簇 $\mathcal{T}^n_{d,e,m}$。然而，实际结果更进一步：该投影给出了定义 $\mathcal{T}^n_{d,e,m}$ 的素理想。

定理 3.4。 消去理想 $(J : q_0^\infty) \cap \mathbb{C}[c]$ 与素理想 $\mathcal{I}^n_{d,e,m}$ 相同.

证明。我们已经知道，$(J : q_0^\infty) \cap \mathbb{C}[c]$ 作为集合定义了 $\mathcal{T}^n_{d,\,e,\,m}$。由于素理想的消去理想仍是素理想，只需证明 $(J : q_0^\infty)$ 是素理想。由于 $(J : q_0^\infty)$ 是局部化 JS_{q_0} 到 S 的收缩，我们不妨证明 JS_{q_0} 是 S_{q_0} 中的素理想。J 的生成元对应于 Pad´e 矩阵 P_T 的各行，因此它们由 $\alpha \in M_{d+1,\,m}$ 索引。更确切地说，对每个 $\alpha \in M_{d+1,\,m}$，我们都有一个 J 的生成元，其形式为

$$q_0 c_\alpha + \sum q_\beta c_\gamma \qquad \text{where the sum is over } \{(\beta,\gamma) \in M_{1,e} \times M_{0,m} \,:\, \beta + \gamma = \alpha\}. \tag{13}$$

在商环 S_{q_0}/JS_{q_0} 中，我们可以利用 (13) 将 c_α 写成 c_γ 的 $\mathbb{C}[q]$-线性组合，其中 $|\gamma| < |\alpha|$。因此，S_{q_0}/JS_{q_0} 同构于多项式环 $\mathbb{C}[c_\alpha : \alpha \in M_{0,\,d}][q]$ 在 q_0 处的局部化。由于该局部化是一个整环，我们 conclude JS_{q_0} 是一个素理想。 □

在我们的情形中，可以通过计算非齐次理想来进行饱和，方法如下。令 q' 为将 q 的第一坐标 q_0 设为 1 后得到的向量。

推论 3.5。泰勒簇 $\mathcal{T}^n_{d,\,e,\,m}$ 的素理想可按如下方式得到：

$$\mathcal{I}^n_{d,e,m} \;=\; \big\langle P_T \cdot q' \big\rangle \;\cap\; \mathbb{C}[c]. \tag{14}$$

证明。这两个理想只涉及 c-变量，并且关于这些变量是齐次的。因此，我们必须证明齐次多项式 $f(c)$ 属于 $\mathcal{I}^n_{d,e,m}$，当且仅当 $f(c)$ 属于 (14) 式右侧。记 $q' = [1, q'']^t$。设 $f(c)$ 属于 $\mathcal{I}^n_{d,e,m}$。根据定理 3.4，存在 $m \in \mathbb{N}$ 和一个多项式向量 $g(c, q)$，使得 $f(c) q_0^m = g(c, q) P_T(c) q$。在此恒等式中令 $q = 1$，可知 $f(c) = g(c, 1, q'') P_T(c) q'$ 属于 $\langle P_T \cdot q' \rangle \cap \mathbb{C}[c]$。

反过来，设 $f(c)$ 属于 $\langle P_T \cdot q' \rangle \cap \mathbb{C}[c]$。存在一个行向量 $h(c, q')$，使得 $f(c) = h(c, q') P_T(c) q'$。我们将 q' 中的每个变量除以 q_0，得到 $f(c) = h(c, q'/q_0) P_T(c) (q'/q_0)$。通过通分，我们得到恒等式 $f(c) q_0^\nu = g(c, q) P_T(c) q$，其中某个 $\nu \in \mathbb{N}$ 满足条件，且 g 是 h 的齐次化。根据定理 3.4，这表明 $f(c)$ 属于 $\mathcal{I}^n_{d,e,m}$。 □

定理 3.4 和推论 3.5 向我们展示了如何在计算机代数系统中得到 $\mathcal{I}^n_{d,\,e,\,m}$。结合例 3.3，我们猜测可以通过饱和由 P_T 的最大非零子式生成的理想 $I_{\max}(P_T)$，得到 $\mathcal{I}^n_{d,\,e,\,m}$。目前这还只是一个猜想。为了准确陈述它，设 $\hat{P}_T$ 是从 P_T 中删除最左列后得到的矩阵。相应的线性映射 $\hat{\varphi}_T$ 是 φ_T 在子空间 $\{Q \in \mathbb{C}[x]_{\le e} \text{ 上的限制：} \; Q(0) = 0\}$。

猜想 3.6。　　簇$\mathcal{T}^n_{d,\ e,\ m}$ 在多项式环 $\mathbb{C}[c]$ 中的素理想满足

$$\mathcal{I}^n_{d,e,m} \ = \ \big(I_{\max}(P_T) \ : \ I_{\max}(\hat{P}_T)^\infty \big). \tag{15}$$

这是 Pad´e 矩阵 P_T的最大非零子式所生成的理想，再用约化 Pad´e 矩阵 P_T的最大非零子式所生成的理想 ˆ 饱和。另见定理 5.1。

我们以一个例子结束本节，它展示了（15），并为接下来的内容作铺垫。

例 3.7（$n = 2,\ d = 1,\ e = 2,\ m = 4$）。我们考虑两个变量$x$ 和 y 的有理函数，它们表示为一个线性多项式与一个二次多项式之比:

$$\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \ = \ \frac{p_{00} + p_{10}x + p_{01}y}{q_{00} + q_{10}x + q_{01}y + q_{20}x^2 + q_{11}xy + q_{02}y^2}\,.$$

我们的目标是刻画 由这类有理函数产生的四次泰勒多项式 :

$$\begin{array}{rcl} T(x,y) & = & c_{00} \ + \ c_{10}x + c_{01}y \ + \ c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2 + c_{30}x^3 + c_{21}x^2y + c_{12}xy^2 \\ . & & \qquad + c_{03}y^3 \ + \ c_{40}x^4 + c_{31}x^3y + c_{22}x^2y^2 + c_{13}xy^3 + c_{04}y^4. \end{array}$$

从 (P, Q) 到 T 的过程定义了一个映射 $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^5 \dashrightarrow \mathbb{P}^{14}$，它双有理地映到其像，即 $\mathbb{P}^{14}$ 中的 7 维泰勒簇 $\mathcal{T}^2_{1,2,4}$。我们关注它的理想 $\mathcal{I}^2_{1,2,4}$。这个问题的 Pad´e 矩阵的格式为 12×6。它等于

$$P_T \ = \ \begin{bmatrix} C_4 & C_3 & C_2 \\ C_3 & C_2 & C_1 \\ C_2 & C_1 & C_0 \end{bmatrix} \ = \ \begin{bmatrix} c_{40} & c_{31} & c_{22} & c_{13} & c_{04} & c_{30} & c_{21} & c_{12} & c_{03} & c_{20} & c_{11} & c_{02} \\ c_{30} & c_{21} & c_{12} & c_{03} & 0 & c_{20} & c_{11} & c_{02} & 0 & c_{10} & c_{01} & 0 \\ 0 & c_{30} & c_{21} & c_{12} & c_{03} & 0 & c_{20} & c_{11} & c_{02} & 0 & c_{10} & c_{01} \\ c_{20} & c_{11} & c_{02} & 0 & 0 & c_{10} & c_{01} & 0 & 0 & c_{00} & 0 & 0 \\ 0 & c_{20} & c_{11} & c_{02} & 0 & 0 & c_{10} & c_{01} & 0 & 0 & c_{00} & 0 \\ 0 & 0 & c_{20} & c_{11} & c_{02} & 0 & 0 & c_{10} & c_{01} & 0 & 0 & c_{00} \end{bmatrix}^t.$$

这个矩阵有 924 个极大子式，其中 896 个线性无关。因此，行列式理想 $I_{\max}(P_T)$ 由关于 15 个未知数 c_{ij} 的 896 个六次多项式生成。这个理想有三个关联素理想。其中一个是所需的 7 维素理想 $\mathcal{I}^2_{1,2,4}$。

另外两个是非约化的多余分支。第一个的维数为 8，大于 $\dim(\mathcal{T}^2_{1,2,4}) = 7$。它是由 $\langle c_{00}, c_{10}, c_{01}, c_{20}, c_{11}, c_{02} \rangle$ 定义的线性子空间 $\mathbb{P}^8$。这是由 P_T 的最后三列中的 3×3 子式产生的。另一个多余分支来自 Veronese 曲面 $\mathcal{T}^2_{0,1,3} \subset \mathbb{P}^9$，它由 $1/(q_{00} + q_{10}x + q_{01}y)$ 的三次泰勒多项式给出。它是曲面 $\mathcal{T}^2_{0,1,3}$ 与二元四次型 $c_{40}x^4 + c_{31}x^3y + c_{22}x^2y^2 + c_{13}xy^3 + c_{04}y^4$ 的 $\mathbb{P}^4$ 的联接。这个联接是一个维数为 7、次数为 9 的簇。

我们可以利用推论 3.5 计算理想 $\mathcal{I}^2_{1,2,4}$，但这是一项颇具挑战性的计算。我们发现，$\mathcal{I}^2_{1,2,4}$ 至少有 1392 个极小生成元，即 7 个三次齐次多项式，以及次数分别为 6、7、8 的 365、754、266 个多项式。我们不知道 $\mathcal{I}^2_{1,2,4}$ 是否还需要其他生成元。数值计算表明，泰勒簇 $\mathcal{T}^2_{1,2,4}$ 的次数为 326。■

4 超曲面

我们在此研究作为环境射影空间中超曲面的泰勒簇。我们先考察一对亏格的泰勒簇，也就是说不等式（5）严格成立，从而为我们在第 5节研究泰勒簇的维度奠定基础。随后，我们转向第 4节的主题，即泰勒超曲面的海森矩阵。我们证明，其中许多海森矩阵恒等于零，由此为代数几何中一系列由来已久的思想作出贡献；这一思想脉络可追溯至 19世纪的 Gordan 和 Noether。

我们先讨论亏格的情形。这里的“预期”是指等式成立于（5）。

命题4.1. 对于 $n = 3$，存在一个泰勒簇，即$\mathcal{T}^3_{2,\,2,\,3}$，预期为超曲面，但其余维为二；此外，还存在一个泰勒簇，即$\mathcal{T}^3_{8,\,5,\,9}$，预期将充满其环境射影空间，但结果却是一个超曲面。

证明. 为证明这一点，我们给出 $n = 3$的具体实例，并验证所述性质。第一个例子中的参数为 $d = e = 2$ 和 $m = 3$。泰勒簇$\mathcal{T}^3_{2,\,2,\,3}$ 的预期维数为18，且位于三次曲面的 $\mathbb{P}^{19}$ 中。它的 Pad´e 矩阵为

$$P_T \;=\; \begin{bmatrix} C_3 & C_2 & C_1 \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} c_{300} & 0 & 0 & c_{200} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{100} \\ c_{210} & 0 & c_{200} & c_{110} & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{100} & c_{010} \\ c_{201} & c_{200} & 0 & c_{101} & 0 & 0 & 0 & c_{100} & 0 & c_{001} \\ c_{120} & 0 & c_{110} & c_{020} & 0 & 0 & c_{100} & 0 & c_{010} & 0 \\ c_{111} & c_{110} & c_{101} & c_{011} & 0 & c_{100} & 0 & c_{010} & c_{001} & 0 \\ c_{102} & c_{101} & 0 & c_{002} & c_{100} & 0 & 0 & c_{001} & 0 & 0 \\ c_{030} & 0 & c_{020} & 0 & 0 & 0 & c_{010} & 0 & 0 & 0 \\ c_{021} & c_{020} & c_{011} & 0 & 0 & c_{010} & c_{001} & 0 & 0 & 0 \\ c_{012} & c_{011} & c_{002} & 0 & c_{010} & c_{001} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{003} & c_{002} & 0 & 0 & c_{001} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{16}$$

该矩阵是 10×10格式的方阵，因此我们预期其行列式定义一个超曲面。但该矩阵的秩为9，因此 $f = \det(P_T)$为零。其 P_T 核由以下向量生成

$$\begin{bmatrix} 0 & -C_1 & C_2 \end{bmatrix}^t \;=\; \begin{bmatrix} 0\,, & -c_{001}, & -c_{010}, & -c_{100}, & c_{002}, & c_{011}, & c_{020}, & c_{101}, & c_{110}, & c_{200} \end{bmatrix}^t. \tag{17}$$

定理 6.1 解释了这个核。请注意，它的第一个坐标为零。存在第一个坐标非零的核向量，会对 P_T 施加一个余维为 2 的约束。簇 $\mathcal{T}^3_{2,2,3}$ 在 $\mathbb{P}^{19}$ 中的维数为 17，次数为 35。根据定理 3.4 可以计算它的理想 $\mathcal{I}^3_{2,2,3}$，它也验证了猜想 3.6。这里 $I_{\max}(P_T)$ 是 10×10矩阵 P_T 的 9×9 子式ˆ的理想，它有 81 个极小生成元； $I_{\max}(P_T)$ 是矩阵ˆ P_T 的 8×8 子式的理想，该矩阵有 315 个极小生成元。素理想 $\mathcal{I}^3_{2,2,3}$由十个八次式生成。它不是科恩–麦考利的，但其贝蒂数列为 10, 10, 1。

接下来，我们通过展示一个出乎意料的泰勒超曲面来证明第二个断言。令 $d = 8$, $e = 5$ 和 $m = 9$。(5) 右侧的两个数都是 219，因此我们预期 $\mathcal{T}^3_{8,5,9}$ 恰好填满 $\mathbb{P}^{219}$。Pad´e 矩阵 P_T 有 55 行和 56 列，其一般秩为 55。 P_T 的核由一个向量张成，该向量的前 20 个坐标为零，最后 36 个坐标是关于 c_{ij} 的线性形式。特别是，

ˆ 55×55 矩阵 P_T 的行列式为零。在 P_T 剩余的 55 个极大子式中，前 19 个为零，其余 36 个非零。后者有一个公因子 f，它是一个次数为 54 的不可约多项式。每个这样的极大子式都等于 f 乘以一个线性形式，即核向量中对应的坐标。总之，泰勒超曲面 $\mathcal{T}^3_{8,5,9}$ 在 $\mathbb{P}^{219}$ 中的次数为 54，其定义方程为 $f = 0$。

通过交换 d 和 e，我们得到了第二个意外的超曲面。此操作即互反对的对偶性，将在命题 5.2 中说明。现在取 $d = 5$、$e = 8$ 和 $m = 9$，其中 Pad´e 矩阵有 164 行、165 列。同样，不等式（5）是严格的。我们有 $\dim(\mathcal{T}^3_{5,8,9}) = 218$，而预期维数为 $\min\{219, 219\} = 219$。 □

本节余下部分中，我们假设 n、d、e、m 是使矩阵 P_T 为方阵且非奇异的参数。简记 $f = \det(P_T)$，记 H_f 为 f 的海森矩阵，并用 $h_f = \det(H_f)$ 表示海森矩阵。即使对于 $n = 1$，这些海森矩阵也很特殊。

例 4.2（重新探讨汉克尔三次曲面）。设 $n = 1$、$d = 1$、$e = 2$ 和 $m = 4$。仿照例 2.5，泰勒簇 $\mathcal{T}^1_{1,2,4}$ 是 $\mathbb{P}^4$ 中的三次三维簇，其定义多项式为

$$f \;=\; \det \begin{bmatrix} c_4 & c_3 & c_2 \\ c_3 & c_2 & c_1 \\ c_2 & c_1 & c_0 \end{bmatrix}.$$

的海森矩阵 f 是五次多项式 $h_f = -8(c_0c_4 - 4c_1c_3 + 3c_2^2)f$。因此，海森矩阵在超曲面 $V(f) = \mathcal{T}^1_{1,2,4}$ 上消失。根据 [18, 命题7.2。3]，这表明该三次曲面的高斯曲率为零，这是微分几何中的一个显著性质。注意，$\mathcal{T}^1_{d,2,d+3}$ 与 $\mathcal{T}^1_{1,2,4}$ 具有相同的 Pad´e 矩阵，因此对所有 $d \geq 1$ 都成立，所以它的高斯曲率也为零。 ■

例4.2中的性质为许多 $n = 1$ 的泰勒簇所共有。我们猜想，对于每个 $(d, e) \geq (1, 2)$，$\mathcal{T}^1_{d,e,d+e+1}$ 的高斯曲率均为零；另见 [6, 猜想3。3]。这里可以假设 $e \geq d+1$，因为对每个 $t \geq 0$，簇 $\mathcal{T}^1_{d,d+1,2d+2}$ $(e = d+1)$ 与 $\mathcal{T}^1_{d+t,d+1,2(d+t)+2}$ 仅相差变量重命名，其 Pad´e 矩阵相同。对于 $n = 1$，当 $d = 0$ 时的情形在[5]中称为子汉克尔：根据 [5, 定理4.4(iii)]，，海森矩阵 h_f 是 c_0 的某个幂的倍数，因此 $\mathcal{T}^1_{0,e,e+1}$ 的海森矩阵仅在无穷远处消失。 [6, 定理3.1] 证明了 $\mathcal{T}^1_{d,e,d+e+1}$ 的海森矩阵并非恒等于零。

现在我们转向 $n \geq 2$ 的情形。这里的情况截然不同：泰勒超曲面的 Hessian 式可以为零，即 $h_f \equiv 0$。如定理 $m = d+1$ 所示，当 4.4 时，这一结论成立；在其他情形下也成立。Hessian 式为零的泰勒超曲面的最小例子，是一个以 Perazzo 于 1900年 发现的三次曲面为底的锥 [17]。

例4.3（$n = 2, d = 1, e = 1, m = 2$）。泰勒簇 $\mathcal{T}^2_{1,1,2}$ 是一个三次超曲面。˙的 Padé 矩阵 P_T 以及 $f = \det(P_T)$ 的海森矩阵为

$$P_T \;=\; \begin{bmatrix} c_{20} & c_{10} & 0 \\ c_{11} & c_{01} & c_{10} \\ c_{02} & 0 & c_{01} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad H_f \;=\; \begin{bmatrix} 2c_{20} & -c_{11} & 0 & -c_{10} & 2c_{01} \\ -c_{11} & 2c_{02} & 2c_{10} & -c_{01} & 0 \\ 0 & 2c_{10} & 0 & 0 & 0 \\ -c_{10} & -c_{01} & 0 & 0 & 0 \\ 2c_{01} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

我们看到， H_f 的秩为 4。因此， h_f 是零多项式。泰勒簇 $\mathcal{T}^2_{1,1,2}$是一个以 Perazzo簇[17]为底的锥。注意，$\mathcal{T}^2_{1,1,2}$ 是一个5维群作用的轨道闭包，该群由 SL(2) 和仿射群（$\mathbb{C}^2,+$）组成，其作用方式为

$$c_{02} \mapsto c_{02} + \alpha c_{01},\ c_{11} \mapsto c_{11} + \alpha c_{10} + \beta c_{01},\ c_{20} \mapsto c_{20} + \beta c_{10} \qquad \text{for } (\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2.$$

如定理4.4所示，对于一大类泰勒超曲面，这样的作用确实存在。 ■

定理4.4。设定 $n,d,e \in \mathbb{N}$，满足 $n \geq 2$。令 w为系数向量 c_γ，见于 P_T。假设 $\mathcal{T}^n_{d,\ e,\ d+1} = V(f)$，其中 $f = \det P_T$，并令 $f_\gamma = \frac{\partial f}{\partial c_\gamma}$。极映射$w \mapsto (f_\gamma :\ c_\gamma \in w)$的像在 $\mathbb{P}^{|w|-1}$中不稠密，因此超曲面 $\mathcal{T}^n_{d,\ e,\ d+1}$ 的 Hessian 式为零。

证明。令 $T = \sum_{|\gamma|\leq d+1} c_\gamma x^\gamma = T_0 + T_1 + \cdots + T_{d+1}$。Pad´e 矩阵具有如下形式

$$P_T \ = \ [C_{d+1} \quad C_d \quad C_{d-1} \ \cdots \ C_{d-e+1}],$$

其中 $C_j : \mathbb{C}[x]_{d+1-j} \to \mathbb{C}[x]_{d+1}$ 是乘以 T_j的映射。 P_T 的列由 Q中的单项式标记，并按次数递增的字典序项序排列。

对于 $j = d-e+2,\ldots,d+1$，令 $\lambda^j = (\lambda^j_\alpha)_{\alpha\in M_{d_j,d_j}}$为一个由新变量构成的向量，其分量按 n 个变量中次数为 $d_j = j-(d-e+1)$ 的单项式索引。现在将 C_j的第一列 C^1_j替换为 $C^1_j + C_{d+1-e}\,[\lambda^j\ \mathbf{0}]^T$，其中 0 是长度为 $\binom{n+e-1}{e} - \binom{n+d_j-1}{d_j}$ 的零行向量。这源于对向量 w 的如下仿射作用：

$$\begin{array}{rcll} c_\gamma & \mapsto & c_\gamma & \text{for } |\gamma| = d+1-e, \\ c_\gamma & \mapsto & c_\gamma + \displaystyle\sum_{\alpha+\beta=\gamma} \lambda^{|\gamma|}_\alpha c_\beta & \text{for } |\gamma| > d+1-e. \end{array}$$

在这个和式中，我们有 $\alpha \geq 0$ 和 $|\beta| = d-e+1$。对于每个 j， C_j 的其他列也会在此作用下发生变化。根据块 C_j的结构，这再次对应于列运算，其中 $C^i_j + C_{d+1-e}\,[\mathbf{0}_1\ \lambda^j\ \mathbf{0}_2]^T$替换 C^i_j，而 $\mathbf{0}_1$和 $\mathbf{0}_2$ 是零行向量。

令 $f' \in \mathbb{C}[x,\lambda]$ 为经过这些初等变换后得到的矩阵的行列式。我们有 $f' = f$。对 λ^j求导，其中 $j = d-e+2$，.....，$d+1$，可得 $f = \det(P_T)$ 的偏导数 f_γ 满足以下线性方程：

$$0 \ = \ \frac{\partial f}{\partial \lambda^j_\alpha} \ = \ \frac{\partial f'}{\partial \lambda^j_\alpha} \ = \ \sum_{c_\beta \in C_{d-e+1}} c_\beta \cdot f_{\alpha+\beta} \qquad \text{for } d-e+2 \leq j \leq d+1 \text{ and } \alpha \in M_{d_j,d_j}. \quad (18)$$

对于 $d-e+2 \leq j \leq d+1$，我们定义汉克尔矩阵 M_j 如下：其第 (α,β) 个元素 M_j为 $f_{\alpha+\beta}$，其中 $c_\beta \in C_{d-e+1}$且 α满足 $|\alpha+\beta| = j$。接下来，令 $M = [M_{d+1}\, M_d \cdots M_{d-e+2}]^T$为将所有矩阵 M_j堆叠得到的块Hankel矩阵。由 (18) 可知， M 的右核非零，因此各列线性相关。注意到 M 恰有

$$\sum_{j=d-e+2}^{d+1} \binom{n+d_j-1}{d_j} \ = \ \sum_{j=d-e+2}^{d+1} \binom{n+j-d+e-2}{j-d+e-1} \ = \ \sum_{j=0}^{e-1} \binom{n+j}{n-1} \ = \ \binom{n+e}{n} - 1$$

行数和 $\binom{n+d-e+1-1}{d-e+1} = \binom{n+d-e}{n-1}$ 列。由于 $\mathcal{T}^n_{d,\ e,\ d+1}$ 是一个超曲面，(5) 意味着

$$\dim \mathcal{T}^n_{d,e,d+1} \ = \ \binom{d+1+n}{n} - 2 \ \leq \ \binom{d+n}{n} + \binom{e+n}{n} - 2.$$

由此我们得到 $\binom{e+n}{n} \geq \binom{d+1+n}{n} - \binom{d+n}{n} = \binom{d+n}{n-1}$。特别地，我们发现 $e \geq 1$，因此 $\binom{e+n}{n} - 1 \geq \binom{d+n}{n-1} - 1 > \binom{d-e+n}{n-1} - 1$. 我们推得，块Hankel矩阵 M 的行数大于或等于 M 的列数。

由于 M 存在非零右核，其极大子式必定为零。因此，极映射 $w \mapsto (f_\gamma \colon \gamma \in w)$ 的像包含于簇 $V(I_{\max}(M)) \subset \mathbb{P}^{|w|-1}$ 中。由于海森矩阵 H_f 是极映射的雅可比矩阵，其行列式 h_f 恒等于零。

□

例 4.5 ($n = 2, d = 4, e = 2, m = 5$)。此例涉及四次式除以二次式这一类型的二元有理函数的五次泰勒多项式。泰勒簇 $\mathcal{T}^2_{4,2,5}$是 $\mathbb{P}^{20}$ 中的六次超曲面，由 Pad´e 矩阵的行列式 f 定义

$$P_T \ = \ \begin{bmatrix} C_5 & C_4 & C_3 \end{bmatrix} \ = \ \begin{bmatrix} c_{50} & c_{40} & 0 & c_{30} & 0 & 0 \\ c_{41} & c_{31} & c_{40} & c_{21} & c_{30} & 0 \\ c_{32} & c_{22} & c_{31} & c_{12} & c_{21} & c_{30} \\ c_{23} & c_{13} & c_{22} & c_{03} & c_{12} & c_{21} \\ c_{14} & c_{04} & c_{13} & 0 & c_{03} & c_{12} \\ c_{05} & 0 & c_{04} & 0 & 0 & c_{03} \end{bmatrix} \tag{19}$$

21 个未知数中只有 15 个 c_{ij} 出现在 P_T中。约化后的 15×15 海森矩阵 H_f 的一般余秩为二，因此 $h_f \equiv 0$。为了说明定理 4.4的证明，我们写出

$$f \ = \ \det(P_T) \ = \ f' \ = \ \det \begin{bmatrix} C_5 + C_3 \begin{bmatrix} \lambda^5_{20} \\ \lambda^5_{11} \\ \lambda^5_{02} \end{bmatrix} & C_4 + C_3 \begin{bmatrix} \lambda^4_{10} & 0 \\ \lambda^4_{01} & \lambda^4_{10} \\ 0 & \lambda^4_{01} \end{bmatrix} & C_3 \end{bmatrix}.$$

对 $\lambda^5 = (\lambda^5_{20}, \lambda^5_{11}, \lambda^5_{02})$ 和 $\lambda^4 = (\lambda^4_{10}, \lambda^4_{01})$ 求偏导数后，我们从 (18) 推得，下列块Hankel矩阵的极大子式必须为零:

$$M \ := \ \begin{bmatrix} M_5 \\ \hline M_4 \end{bmatrix} \ = \ \left[\begin{array}{cccc} f_{50} & f_{41} & f_{32} & f_{23} \\ f_{41} & f_{32} & f_{23} & f_{14} \\ f_{32} & f_{23} & f_{14} & f_{05} \\ \hline f_{40} & f_{31} & f_{22} & f_{13} \\ f_{31} & f_{22} & f_{13} & f_{04} \end{array}\right]. \tag{20}$$

注意， $\mathbb{P}^{14}$中 $V(I_{\max}(M))$ 的余维等于 H_f 的一般余秩。 ■

我们认为，对于定理 4.4所涵盖的情形，最后一个陈述始终成立。确切地说，我们猜想 H_f 的一般余秩等于 $\binom{n+e}{n} - \binom{n+d-e}{n-1}$。这是块Hankel矩阵 M的最大子式理想的预期余维数。

在命题5.2 中，我们将陈述一个关于交换 d 和 e时泰勒簇的一般对偶性结论。这种对偶性似乎与 Hessian式为零相容。

例4.6 ($n=2,\ d=2,\ e=4,\ m=5$)。对例 4.5 应用对偶性后，我们将研究二次型除以四次齐次多项式所得的五次泰勒多项式。泰勒簇 $\mathcal{T}^{2}_{2,\,4,\,5}$ 是 $\mathbb{P}^{20}$ 中一个次数为 15 的超曲面。它由 15×15 Pad´e 矩阵 P_T 的行列式定义。五次多项式的全部 21 个系数 c_{ij} 都出现在 P_T 中，因此海森矩阵 H_f 是一个 21×21 矩阵。该海森矩阵的一般秩为 19，因此其行列式 h_f 二阶消失。 ■

关于 Hessian 式为零的超曲面的研究由来已久。Hesse 曾猜想所有这类超曲面都是锥，但 Gordan 和 Noether 找到了一个反例。Perazzo [17] 在三次齐次多项式的情形下取得了重大进展。直到今天，这一课题仍令几何学家着迷。我们请读者参阅获奖专著第7章[18], 、近期文章 [10], 以及这些资料中的参考文献。对泰勒多项式的研究自然引领我们发现了本文所报告的新实例。不过，我们认为定理 4.4 不过是尚待探索的冰山一角。

5 维数

泰勒簇 $\mathcal{T}^{n}_{d,\,e,\,m}$ 是由（4）给出的有理映射的像的闭包，即

$$\psi\ :\ \mathbb{P}^{\binom{d+n}{n}-1}\times\mathbb{P}^{\binom{e+n}{n}-1}\ \dashrightarrow\ \mathbb{P}^{\binom{n+m}{n}-1},\ (P,Q)\mapsto T. \tag{21}$$

式（21）中的三个空间分别参数化次数为 d、e、m 的 $\mathbb{C}[x]=\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ 中的多项式。我们将给出 $\mathcal{T}^{n}_{d}$、e、n 的维数公式。为此，我们重新考察由式（8）定义的乘法映射 $\hat{}\varphi_T$，它从 $\{Q\in\mathbb{C}[x]_{\le e}:Q(0)=0\}$ 到 $\mathbb{C}\{M_{d+1,m}\}$。表示 $\mathbb{C}$-线性映射 $\hat{}\varphi_T$ 的矩阵 $\hat{}$ 是简化的 Pad´e 矩阵 P_T，它由 P_T 删除第一列得到。因此，$\hat{}\,P_T$ 有 $\binom{m+n}{n}-\binom{d+n}{n}$ 行和 $\binom{e+n}{n}-1$ 列。

定理 5.1。泰勒簇 $\mathcal{T}^{n}_{d,\,e,\,m}$ 的维数等于 $\binom{d+n}{n}-1$ 加上约化的 Pad´e 矩阵 $\hat{}\,P_T$ 在一般点 $\mathcal{T}^{n}_{d,\,e,\,m}$ 处的秩，前提是这个和小于 $\binom{n+m}{n}$。

证明。$\mathcal{T}^{n}_{d,\,e,\,m}$ 的维数是 $\binom{d+n}{n}+\binom{e+n}{n}-2$ 减去映射 ψ 的一般纤维的维数。由于 $\hat{}\,P_T$ 有 $\binom{e+n}{n}-1$ 列，定理 5.1 等价于如下断言：$\hat{}$ 这个纤维的维数等于一般点 $\mathcal{T}^{n}_{d,\,e,\,m}$ 处 kernel(P_T) 的维数。

固定 (21) 的定义域中的一般点 (P,Q)，并令 $T=\psi(P,Q)$。我们在满足 $P(0)=Q(0)=1$ 的仿射图中进行讨论。令 (P',Q') 为纤维 $\psi^{-1}(T)$ 中任意一点。由于 $P'(0)=Q'(0)=1$，$Q-Q'$ 的常数项为零，且乘积 $T(Q-Q')=P-P'$ 不含关于 $M_{d+1,m}$ 的单项式。因此，$Q-Q'$ 属于 $\hat{}\varphi_T$ 的核，所以 Q' 是仿射空间 $Q+\text{kernel}(\hat{}\varphi_T)$ 中的一点。反过来，对于 $Q+\text{kernel}(\hat{}\varphi_T)$ 中任意的 Q'，存在唯一的 P'，使得 $(P',Q')\in(\psi^{n}_{d,e,n})^{-1}(T)$。具体而言，定义 P' 为 $Q'T$ 的 m 阶截断。由此可知，ψ 在 T 上的纤维与 kernel($\hat{}\varphi_T$) 双有理同构。 □

还有一个有用的事实，即泰勒簇的倒数对偶性。

命题 5.2。泰勒簇 $\mathcal{T}^{n}_{d,\,e,\,m}$ 与 $\mathcal{T}^{n}_{e,\,d,\,m}$ 双有理同构。特别地，它们在共同环境空间 $\mathbb{P}(\binom{n+m}{n})-1$ 中具有相同的维数。

证明。通过取倒数并截断至 m 阶，我们得到一个有理映射 $\mathbb{P}^{\binom{n+m}{n}-1} \dashrightarrow \mathbb{P}^{\binom{n+m}{n}-1}$，$T \mapsto 1/T$。该映射在由 $T(0) = 1$ 给出的仿射图上是一个态射。显然，这个倒数映射 $T \mapsto 1/T$ 是一个对合，因此是双有理的。此外，该对合将 $\mathcal{T}^n_{d,\,e,\,m}$ 映到 $\mathcal{T}^n_{e,\,d,\,m}$，因为它将 P/Q 映到 Q/P。证明完毕。 □

ˆ定理 5.1 告诉我们，$\mathcal{T}^n_{d,\,e,\,m}$ 是亏格的，当且仅当约化的帕德´矩阵 P_T 的秩低于预期，而命题 5.2 则表明，交换 d 和 e时，缺陷泰勒簇会成对出现。命题 4.1 证明中出现的具体簇例证了这两个结果。接下来，我们将确定并解释若干缺陷泰勒簇族。这将引出交换代数中的一个著名问题，即弗勒贝格猜想。我们首先列出小维数缺陷情形的汇总表。

n	d,e,m	维度
3	2,2,3	17,18,19
3	3,4,5	52,53,55
3	4,3,5	52,53,55
3	4,6,7	116,117,119
3	6,4,7	116,117,119
3	5,8,9	218,219,219
3	8,5,9	218,219,219
4	2,2,3	27,28,34
4	3,3,4	63,68,69
4	3,4,5	102,103,125
4	4,3,5	102,103,125

n	d,e,m	维度
4	4,4,5	122,138,125
4	4,5,6	189,194,209
4	5,4,6	189,194,209
4	4,6,7	277,278,329
4	5,6,7	318,334,329
4	6,4,7	277,278,329
4	6,5,7	318,334,329
4	5,7,8	449,454,494
4	6,6,8	417,418,494
4	7,5,8	449,454,494
5	2,2,3	39,40,55
5	3,3,4	104,110,125

n	d,e,m	维度
5	3,4,5	179,180,251
5	4,3,5	179,180,251
5	4,4,5	228,250,251
5	4,5,6	370,376,461
5	5,4,6	370,376,461
5	5,5,6	441,502,461
5	4,6,7	585,586,791
5	5,6,7	690,712,791
5	6,4,7	585,586,791
5	6,5,7	690,712,791
5	6,6,7	780,922,791

表1：缺陷泰勒簇：第三列列出了 $\mathcal{T}^n_{d,\,e,\,n}$ 的维数和参数个数，后接环境射影空间的维数 $\binom{n+m}{n} - 1$。

命题 **5.3.** 表*1* 列出了所有满足 $n \le 5$ 且 $m \le 12 - n$的缺陷泰勒簇。

证明。 对于 $34 = 7 + 14 + 13$，表 $n = 3$、4、5 所示的亏格泰勒簇1是通过穷举计算得到的。每种情况下，维数均通过参数化的雅可比矩阵（21）的秩计算，并根据定理5.1进行了验证。特别是，我们通过实验发现，当 $n = 2$时，不存在亏格泰勒簇。 □

表1表明，随着维数增大，缺陷性仍会持续：如果$\mathcal{T}^n_{d,\,e,\,m}$ 是亏格的，那么$\mathcal{T}^{n+1}_{d\,e\,m,\,,}$ 也是如此。我们还发现了五种泰勒簇，其参数个数超过了环境维数。最小的例子位于中间方框的第一行。

例5.4 ($n = d = e = 4, m = 5$)。Pad´e 矩阵 $P_T = \begin{bmatrix} C_5 & C_4 & C_3 & C_2 & C_1 \end{bmatrix}$ 有 56 行 70 列。其秩为 54，因此缺陷为 16。从预期维数 138 中减去 16，得到 $\dim(\mathcal{T}^4_{4,4,5}) = 122$。这与定理 5.1 中的结果 $\binom{8}{4} - 1 + 53$相同。因此，在四次四维簇空间 $\mathbb{P}^{125}$ 中，我们的泰勒簇 $\mathcal{T}^4_{4,4,5}$ 的余维为 3。■

基于 基于我们的计算实验，我们现在提出一个一般性猜想 e.

猜想 5.5。关于泰勒簇的缺陷性，有如下结论 :
（1）对于 $n=2$，所有泰勒簇 $\mathcal{T}^{2}_{d,\ e,\ m}$ 均非亏格。（2）对于 $n=3$，只有七个亏格泰勒簇，即表 1 中列出的那些。（3）固定 后，只有有限多个三元组（，，）满足，$_{e,\ m}$ 是亏格的。

6 弗罗贝尼乌斯猜想

现在我们转向前面提到的与交换代数的关系。这将为猜想 5.5 提供支持。我们考察 $m=d+1$ 的情形，该情形也出现在方程（17）中。

定理6.1. 考虑由 e 个次数为 d、 $d-1$、.....、 $d-e+1$的一般形式在 n 个变量中生成的理想。其希尔伯特函数在次数 $d+1$ 处的值等于$\mathcal{T}^{n}_{d,\ e,\ d+1}$的余维。

证明。我们所 说的理想由 T的齐次分量生成:

$$I := \langle T_d\,,\, T_{d-1}\,,\, T_{d-2},\, \ldots,\, T_{d-e+1}\rangle \ \subset\ \mathbb{C}[x] \ =\ \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n].$$

我们断言， $\binom{n+m}{n}-1-\dim(\mathcal{T}^{n}_{d,\ e,\ d+1})$ 等于希尔伯特函数的值 $\dim_{\mathbb{C}}\big(\mathbb{C}[x]_{d+1}/I_{d+1}\big)$。在 $m=d+1$的情形下，Pad´e 矩阵仅由一行分块组成，也就是说它等于

$$\hat{P}_T \ =\ \begin{bmatrix} C_d & C_{d-1} & \cdots & C_{d-e+3} & C_{d-e+2} & C_{d-e+1}\end{bmatrix}.$$

ˆ P_T的各项是一般形式 T_d、 T_{d-1}、.....、 T_{d-e+1}的系数。我们断言，该一般 P_T 的秩等于 P_T 在 $\mathcal{T}^{n}_{d,\ e,\ m}$的一般点处的秩。这是因为多项式 $(T_eT_{d-e+1}+T_d+T_{d-1}+\cdots+T_2+T_1+1)\ \ (1-T_e)$ 在次数 $d+1$上没有项，这意味着左因子定义了$\mathcal{T}^{n}_{d,\ e,\ d+1}$中的一个点，即使对于一般的 T也是如此。

结合该断言与定理 5.1，我们得出，对于一般的 T， $\mathcal{T}^{n}_{d,\ e,\ d+1}$ 的维数等于$\binom{d+n}{n}-1+\operatorname{rank}(\hat{}P_T)$。现在，ˆ P_T的像中的任意向量都对应于一个属于理想 I的ˆ齐次多项式 T_{d+1}。用符号表示，$\operatorname{rank}(P_T)\ =\ \dim_{\mathbb{C}}(I_{d+1})$。因此，泰勒簇 $\mathcal{T}^{n}_{d,\ e,\ d+1}$ 在其环境空间 $\mathbb{P}(\binom{n+d+1}{n})^{-1}$ 中的余维等于

$$\binom{n+d+1}{n}-1-\binom{d+n}{n}+1-\operatorname{rank}(\hat{P}_T)\ =\ \binom{d+n}{n-1}-\operatorname{rank}(\hat{P}_T)\ =\ \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[x]_{d+1})-\dim_{\mathbb{C}}(I_{d+1}).$$

右侧是该断言中希尔伯特函数的值 n. □

一般形式所生成理想的希尔伯特函数，是交换代数中的一个重要研究脉络，其研究始于 Fr¨oberg 的文章 [9]。在我们的情形中，希尔伯特级数被认为是

$$\left[\frac{\prod_{i=1}^{e}(1-t^{d+1-i})}{(1-t)^n}\right]_{>0}. \tag{22}$$

算子 $[\dots]_{>0}$ 作用于幂级数$\sum_{i\geq 0} a_i t^i$ 后得到$\sum_{i\geq 0} b_i t^i$，其中 $b_i = a_i$ 当 $a_j > 0$对所有 $j \leq i$ 且 $b_i = 0$ 时；否则则为。我们关注的是 t^{d+1} 式（22）中的系数。*Fr¨*oberg 猜想指出，该系数等于定理6.1中的希尔伯特函数值。

该猜想已在若干特殊情形下得到证明。关于 $n = 2$，这是 Fr¨oberg[9, 第3节，第 129]页。Valla 给出的一个更简单的证明 [19] 以一般初始理想为基础。关于$n = 3$，Anick 已证明了[1]。Pardue [16] 证明了该猜想可由 Moreno-Socias猜想推出；后者涉及一般多项式的逆字典序一般初始理想。关于最新进展和许多参考文献，我们请读者参阅 Nenashev [13] 和 Nicklasson [14] 近期发表的论文。这些已知结果可以用来推导猜想5.5的特殊情形。

定理6.2。 *Fr¨*oberg 猜想蕴含猜想*5.5* 的第（3）部分，当 $m = d + 1$时。

本文将给出的证明基于 Christian Krattenthaler 的建议。我们衷心感谢他允许我们在本文中纳入他出色的组合论论证。

证明。固定 $n \geq 2$。对于任意 $1 \leq e \leq d$，我们将 $W(d,e) = \binom{d+n}{n-1} - \binom{e+n}{n} + 1$ 和$F(d,e) = (1-t)^{-n}\prod_{i=1}^{e}(1-t^{d+1-i})$ 简记为。在 Fr¨oberg 猜想成立的前提下，由定理 6.1，泰勒簇 $\mathcal{T}^n_{d,e,d+1}$ 的余维为

$$\alpha(d,e) \;:=\; \text{coeff. of } t^{d+1} \text{ in } [F(d,e)]_{>0}.$$

另一方面，$\mathcal{T}^n_{d,e,d+1}$ 的预期余维数等于

$$\beta(d,e) \;:=\; \max(0, W(d,e)).$$

特别地，对于 d 和 e 的所有取值，以下不等式成立：

$$\beta(d,e) \;\leq\; \alpha(d,e). \tag{23}$$

我们声称 $\alpha(d,e) = \beta(d,e)$ 成立，且只有有限多个异常对 (d,e)。回想一下，n 是固定的。现在我们来证明这一断言。论证分为五步：

(1) 若 $\beta(d,e) = 0$，则 $\beta(d,e+1) = 0$。 (2) 若 $\alpha(d,e) = 0$，则 $\alpha(d,e+1) = 0$。 (3) 若 $\beta(d,e) = \alpha(d,e) = 0$，则对于所有 $e_1 \geq e$，$\beta(d,e_1) = \alpha(d,e_1) = 0$。 (4) 若 $e < (d/2) + 1$，则 $\beta(d,e) = \alpha(d,e)$。 (5) 存在 d_0，使得对于每个 $d \geq d_0$ 和每个 $e \leq d$，$\alpha(d,e) = \beta(d,e)$。

断言（1）显然成立，因为 $W(d,e)$ 关于 e 是递减函数。对于（2），根据假设，存在一个 $c \leq d+1$，使得 $F(d,e)$ 中 t^c 的系数为 ≤ 0。令 c 为具有该性质的最小整数。于是，$F(d,e) = u_0 + u_1 t + \cdots + u_c t^c + \dots$，其中 $u_c \leq 0$ 和 $u_i > 0$ 对于 $i = 0$、1、.....、$c-1$ 成立。由于 $F(d,e+1) = F(d,e)(1-t^{d+1-(e+1)})$，$F(d,e+1)$ 中 t^c 的系数为：若 $d - e > c$，则为 u_c；若 $d+1-(e+1) \leq c$ 且 $k = c-d+e$，则为 $u_c - u_k$。这两种情况下，该值都为 ≤ 0，因此 $\alpha(d,e+1) = 0$。现在，（3）由（1）和（2）立即得出。

To p证明（4）时，我们首先注意到，假设 $e < (d/2) + 1$ 意味着

$$\prod_{i=1}^{e}(1 - t^{d+1-i}) \;=\; 1 - \sum_{i=1}^{e} t^{d+1-i} + \ldots \text{ terms of degree } > d+1$$

因此，在次数不超过 $d+1$ 的范围内，我们的级数 $F(d,e)$ 与该级数一致

$$\left(\sum_{k\geq 0}\binom{n-1+k}{n-1}t^k\right)\left(1 - \sum_{i=1}^{e} t^{d+1-i}\right).$$

由此可知， $F(d,e)$ 中 t^{d+1} 的系数等于

$$\binom{n+d}{n-1} - \sum_{i=1}^{e}\binom{n-1+i}{n-1} \;=\; \binom{n+d}{n-1} - \binom{n+e}{n} + 1 \;=\; W(d,e). \tag{24}$$

若 $W(d,e) \leq 0$，则 $\beta(d,e)$ 和 $\alpha(d,e)$ 均为零。若 $W(d,e) > 0$，则 $\beta(d,e) = W(d,e)$。因此，由 (23) 可得 $\alpha(d,e) \geq \beta(d,e) > 0$。根据 (24)，我们也有 $\alpha(d,e) = W(d,e)$。至此，断言 (4) 得证。

现在我们证明断言 (5)。由 (3) 和 (4) 可知，存在正整数 $e_1 < (d/2) + 1$，使得 $W(d,e_1) \leq 0$，这意味着对所有 e， $\beta(d,e) = \alpha(d,e)$。因此，只需证明存在一个 d_0，使得对于某个$e_1 < (d/2)+1$，对所有 $d \geq d_0$，均有 $W(d,e_1) \leq 0$。对于偶数 $d = 2p$，令 $e_1 = p$。这一选择保证了，由于次数的关系，

$$W(2p,p) \;=\; \binom{2p+n}{n-1} - \binom{p+n}{n} + 1 \tag{25}$$

作为 p 的函数最终为负。对于 $d = 2p-1$ 为奇数的情形，取 $e_1 = p$，并注意到

$$W(2p-1,p) \;=\; \binom{2p-1+n}{n-1} - \binom{p+n}{n} + 1 \tag{26}$$

最终为 负的，断言 (5) 随之成立。这就完成了定理 6. 的证明 2. □

注 6.3. 上述步骤 (5) 中的常数 d_0 取决于 n。对于任意给定的 n，可以通过考察多项式 (25) 和 (26) 的根来显式计算。例如，对于 $n = 4$，我们得到 $d_0 = 144$。已知 d_0 并假设弗勒贝格猜想成立，我们可以迅速找出所有满足以下条件的数对 (d,e)：$\mathcal{T}^n_{d,e,d+1}$ 是亏格的。具体而言，对于所有满足 $e \leq d < d_0$ 的 (d,e)，我们检验 $\alpha(d,e) \neq \beta(d,e)$。对于 $n = 4$，恰有 57 个缺陷对 (d,e)：

(2, 2), (3, 3), (4, 3), (4, 4), (5, 4), (6, 4), (6, 5), (7, 5), (8, 5), (8, 6), (9, 6), (10, 6), (10, 7), (11, 7), (11, 8), (12, 7), (12, 8), (13, 8), (13, 9), (14, 8), (14, 9), (15, 9), (15, 10), (16, 9), (16, 10), (17, 10), (17, 11), (18, 10), (18, 11), (19, 11), (20, 11), (20, 12), (21, 12), (22, 12), (22, 13), (23, 13), (24, 13), (24, 14), (25, 14), (26, 14), (26, 15), (27, 15), (28, 15), (28, 16), (29, 16), (30, 16), (30, 17), (31, 17), (32, 17), (33, 18), (34, 18), (35, 19), (36, 19), (37, 20), (38, 20), (40, 21), (42, 22).

注意，这 57 对中的前八对列于表 1。对于 $n = 5$，计算表明共有 431 个这样的异常对，其中最大的一对是（d， e）$=(132,\ 67)$。

推论 **6.4.** 假设 $m = d + 1$。那么猜想 5.5 的（1）和（2）部分成立 e.

证明。 我们知道，Fr¨oberg 的猜想对 $n = 2$ 和 $n = 3$均成立。于是我们可以按照定理 6.3 和注 6.3中的方法继续。我们得到 $d_0 = 6$ 当 $n = 2$时，以及 $d_0 = 17$ 当 $n = 3$时。列出所有满足条件的配对 (d, e)，其中 $e \le d < d_0$ 满足 $\alpha(d, e) \neq \beta(d, e)$，即可证明该结论。 □

总之，上述讨论将 $m = d + 1$的泰勒簇研究与 Fr¨oberg 关于 $\mathbb{C}[x]$中一般形式的理想的长期猜想联系起来。未来的研究将把这一结果推广到任意参数 n, d, e, m，并以模取代理想。这些模源自第 2 节中的 Hankel 矩阵，但现在其元素是 T_i 次数为 i、定义在 $\mathbb{C}[x] = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ 上的齐次多项式。具体而言，汉克尔矩阵 定义如下：

$$H_T := \begin{bmatrix} T_m & T_{m-1} & \cdots & T_{m-e} \\ T_{m-1} & T_{m-2} & \cdots & T_{m-e-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{d+2} & T_{d+1} & \cdots & T_{d-e+2} \\ T_{d+1} & T_d & \cdots & T_{d-e+1} \end{bmatrix}. \tag{27}$$

该Hankel 模是由以下所有列生成的分次模： H_T 除第一列外。泰勒簇可通过如下约束来刻画：第一列属于 Hankel 模。这表明，定理6.1 可从理想推广到模。Hankel 模及其相关向量丛的研究将是后续文章的主题。

参考文献

[1] D. Anick：嵌入维数为三的薄代数，《代数杂志》100 (1986) 235–259。[2] G. Baker 和 P. Graves-Morris：《Pad ´é 逼近》，《数学及其应用百科全书》第59卷，剑桥大学出版社，1996年。[3] B. Beckermann 和 G. Labahn：矩阵型 Pad ´é 逼近的快速计算的统一方法，《SIAM 矩阵分析与应用杂志》15 (1994) 804–823。[4] R. Brent、F. Gustavson 和 D. Yun：Toeplitz 方程组的快速求解及 Pad ´é 逼近的计算，《算法杂志》1 (1980) 259–295。[5] C. Ciliberto、F. Russo 和 A. Simis：Homaloidal 超曲面与 Hessian 行列式为零的超曲面，《数学进展》218 (2008) 1759–1805。[6] R. Cunha、M. Mostafazadehfard、Z. Ramos 和 A. Simis：一般 Hankel 矩阵的坐标截面，《代数杂志》611 (2022) 285–319。[7] D. Eisenbud：论行列式理想的韧性，《交换代数与组合学》（京都，1985），29–38，《纯粹数学进展研究》，11，北荷兰出版社，1987年。[8] D. Eisenbud：行列式簇的线性截面，《美国数学杂志》110 (1988) 541–575。[9] R. Fr¨öberg：分次代数希尔伯特级数的一个不等式，《斯堪的纳维亚数学杂志》56 (1985) 117–144。[10] R. Gondim、F. Russo 和 G. Staglian`o：通过对偶 Cayley 技巧研究 Hessian 行列式为零的超曲面，《纯粹与应用代数杂志》224 (2020) 1215–1240。[11] C. Hermite：论代数连分数的推广，《纯粹与应用数学年刊》（1867–1897）21 (1893) 289–308。

[12] S. Naldi 和 V. Neiger：一种用于有限维情形下计算 syzygy 的 Gr ¨obner 基的分治算法，《第45届国际符号与代数计算研讨会论文集》，第380–387页，2020年。[13] G. Nenashev：关于同次数形式的 Fr ¨oberg 猜想的注记，《巴黎科学院数学报告》355 (2017) 272–276。[14] L. Nicklasson：关于一般形式生成的理想的希尔伯特级数，《代数通讯》45 (2017) 3390–3395。[15] H. Pad´e：论代数连分数的推广，《纯粹与应用数学杂志》10 (1894) 291–329。[16] K. Pardue：一般多项式序列，《代数杂志》324 (2010) 579–590。[17] U. Perazzo：论其海森矩阵恒等为零的三次簇，《Battaglini数学杂志》38 (1900) 337–354。[18] F. Russo：论若干特殊射影簇的几何，《意大利数学联盟讲义》第18卷，Springer，查姆，2016年。[19] G. Valla：关于分次代数希尔伯特函数的问题与结果，《交换代数六讲》（贝拉特拉，1996），《数学进展》，166，Birkh¨auser，巴塞尔，1998年。

作者地址：

Aldo Conca，热那亚大学，conca@dima.unige.it
Simone Naldi，利摩日大学，simone.naldi@unilim.fr
Giorgio Ottaviani，佛罗伦萨大学，giorgio.ottaviani@unifi.it
Bernd Sturmfels，莱比锡马克斯·普朗克数学研究所和加州大学伯克利分校 bernd@mis.mpg.de