《国际地球物理学杂志》(0000) **000**,000–000

arXiv:2304.00718v1 [physics.geo-ph] 3 Apr 2023

基于光滑粒子流体动力学模拟的水冰界面地震信号

RossJ. Turner [1]⋆, JaredC.Magyar [1],SueCook [2] 和 Anya M. Reading [1,3]

[1] 塔斯马亚大学自然科学学院（物理学），澳大利亚塔斯马尼亚州霍巴特市，私人信箱37号，邮编7001 [2] 澳大利亚南极计划合作项目，塔斯马尼亚大学海洋与南极研究所，澳大利亚塔斯马尼亚州霍巴特 [3] 澳大利亚南极科学卓越中心，塔斯马尼亚大学，澳大利亚霍巴特

2023年4月4日

摘要

近年来，冰盖、冰架和冰川相关地震学（即冰震学）发展迅速。随着人们日益关注格陵兰和南极洲大型冰盖变化所带来的影响，仪器技术的进步和国际野外计划也扩大了被动地震数据集的获取范围；这些数据集记录了冰川过程产生的地震扰动。部分过程（如基底滑动和冰裂隙扩展）的机制与板块构造变形中的对应机制相似，但许多冰川相关地震信号由融水产生。因此，我们需要更好地了解冰川上流动水的地震响应，因为这种水流既可能以连续过程发生，也可能表现为瞬态事件。我们提出一种解析框架，可基于新的或已有的光滑粒子流体动力学（SPH）模拟，对流动水与冰界面处的地震信号进行建模。该框架旨在理解瞬态流水事件的地震体波响应，并生成水冰碰撞模拟数据集，用于预测体波在冰川任意位置的模拟地震仪处引起的运动。生成的合成加速度时间序列不受水动力学模拟分辨率影响，并考虑了传播介质引起的频率相关弱频散和衰减。我们通过水流的典型极端情形展示该框架的能力：冰川表面融水湖堤坝溃决后，水流沿不同几何形状的水道漫过模型冰川表面。我们发现，不同的通道几何形状会产生不同的波形包络，其首个及后续振幅峰值分别对应融水洪流最初及随后撞击冰川表面水道壁的过程。该框架还捕捉到了波形特征随距离的变化，因此可以区分由过程本身造成的特征与由传播效应造成的特征。鉴于冰川环境的动态特性是当前应用的核心，我们关注的是波形属性（特征），而非精确匹配波形。计算框架具有灵活性，可模拟多种不同水流几何形态下高能碰撞产生的地震信号，包括沿简单三维路径进入并穿过冰川的水流。我们将代码作为开源资源提供给极地地球物理学界，旨在扩充可用方法工具箱，为未来可能开展的融水运动及相关冰川过程监测提供参考。

关键词： 冰川学；水文学；南极洲；计算地震学；波传播。

1 引言

1.1 冰震学

冰震学运用地震学技术，研究冰川覆盖地区及其区域和冰川过程。

⋆ turner.rj@icloud.com

与固体地球的地震学研究类似，这一分支学科将地震波用作推断隐伏结构的手段，并借此深入了解产生地震信号的变形机制（广义而言）（Podolskiy 和 Walter，2016年；Aster 和 Winberry，2017年）。源自冰川及其近邻环境的地震源极为多样（Walter 等人，2015年），从黏滑事件（例如 Pratt 等人，2014年；Guerin 等人，2021年）到冰裂隙形成及其扩展（例如 Roeoesli 等人，2014 年）。

许多此类事件类型在固体地球中都有对应现象，包括逆冲构造机制以及断层的萌生和扩展。因此，我们可以借鉴地震学的成熟方法，了解这些冰川相关过程中的地震信号生成（例如 Stein 和 Wysession，2003年）。鉴于全球变化对极地的影响（Fox-Kemper 等人，2021年），理解那些在构造过程中没有对应现象的地震信号也十分重要，例如与大型冰盖边缘水体运动有关的信号。

本文旨在增进对流动水如何产生地震体波信号，以及此类信号的特征与变化性的理解，重点关注冰川环境中的瞬态（间歇性、短持续时间）事件。

1.2 流动水产生的地震信号

冰川和非冰川环境中与水体运动相关的地震信号，其震源形式多种多样，可分为连续（持续时间长）的过程和瞬态（间歇性、持续时间短）的事件。震源还可进一步分为仅由水的作用引起的、由泥沙负载引起的，以及由导管几何形状引起的。

关于仅由水的作用引起的、持续时间长且实际上连续的过程，其产生地震信号的机制包括河流中的湍流（Gimbert 等人，2014年）（由此估算的湍流信号可以去除，从而能够利用地震数据估算河流泥沙床载的变化）。此外，也有研究探讨风暴和洪水事件对河流地震特征的影响（例如 Hsu 等人，2011年；Schmandt 等人，2013年），以表征由此产生的地震记录的频率和振幅。

瞬态过程会产生脉冲信号，并扩散成复杂但持续时间相对较短的事件。本研究提出的计算框架聚焦于此类事件产生的体波，不过我们设想，未来研究将拓展框架的范围，纳入表面波，因为预计其振幅会相当显著（Walter 等人，2015年）。冰川和冰架会因冰隙扩展而产生持续时间较短的事件，这种扩展可能由水力作用驱动（Hudson 等人，2020年）。未来有必要区分由瞬态水体运动引起的事件和由开裂引起的事件。

连续过程会产生类震颤信号，其中可能包括与泥沙输运相关的信号产生机制（例如 Tsai 等人，2012年）。其他信号产生机制则与通道几何形状引发共振效应的方式有关，例如冰川竖井的情形（例如 Roeoesli 等人，2014年、2016年（b））。多种机制之间可能存在的相互作用也值得关注，例如黏滑机制与融水的存在（Roeoesli 等人，2016年（a））。

鉴于移动冰川环境具有动态性，我们并不期望水体运动事件的波形完全匹配（正如为理解大型构造事件可能会进行的那样），而是希望利用本研究中的建模框架，了解特征波形属性（特征）的多样性。利用波形属性表征事件类型，有助于开展数据驱动分析和半自动化工作流（例如，Provost等，2017年；Turner 等人，2021年）。

1.3 水动力学模拟

计算流体动力学是将流体动力学基本定律应用于 N维网格或一组离散粒子的过程。这些水动力学模拟应用于多个学科领域，并涉及不同类型的流体，包括航空工程（空气）、天体物理学（等离子体）以及航海与环境工程（水）。建模流体的类型决定了适用的数值格式：相对论天体物理等离子体适合使用带有激波捕捉方法的数值网格进行建模，而液体则可能使用离散粒子进行模拟时更为准确（例如，Monaghan，2005年；Valizadeh和Monaghan，2015年）。

无论模拟类型如何，流体动力学的首要定律都是描述质量、动量和能量守恒或连续性的定律。牛顿流体的整体运动由纳维-斯托克斯方程描述；对于无黏流体，则可用更简单的欧拉方程。这些二阶偏微分方程描述流体属性（如速度、密度和压力）随时间和空间变化的行为。还必须给出流体的状态方程，以说明流体属性如何响应其他量的扰动；例如，理想气体定律描述压力、密度和温度的变化关系。通常，在运行流体动力学模拟前，需要进行以下预处理步骤：(1) 将流体划分为网格单元（构成网格），或将其表示为初始时均匀间隔分布的离散粒子；(2) 定义流体运动方程和状态方程；(3) 定义流体的初始条件和边界条件。模拟通过逐步推进时间，并在每个时间步求解各网格单元或粒子处的守恒方程来进行。此过程以迭代方式重复，通常采用自适应步长 dt，直至达到所需的结束时间。作为基础的偏微分方程取决于相邻网格单元/粒子的流体属性，因此，随着空间分辨率提高，模拟的计算开销也会随之增加。

上述概述同样适用于网格和基于粒子的流体动力学模拟。不过，由于粒子的离散性及其位置不断变化，基于粒子的模拟中的流体方程需要加入平滑核。具体而言，流体在矢量位置 $\boldsymbol{r}$ 处的某个标量属性 f 的值由插值积分给出（例如，Gomez-Gesteira 等人，2010）

$$f(\boldsymbol{r},t) = \int_{\mathcal{R}} f(\boldsymbol{r}',t)\, W(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|,\epsilon)\, d^3\boldsymbol{r}', \tag{1}$$

其中，$d^3\boldsymbol{r}$ 表示体积分的微分，而 $W(..., \epsilon)$ 是平滑长度为 ϵ 的适当归一化核函数。该函数的标准选择是一种形状近似高斯、并在 2-3σ 处截断的分布。该插值积分通过对粒子的离散位置 $\boldsymbol{r}'$ 求黎曼和来近似计算，每个粒子都具有已知的标量属性值 $f(\boldsymbol{r}',t)$。核函数选为可微函数，从而可以解析地计算 f 的梯度和 $\boldsymbol{f} \equiv$ 的散度（f_1, f_2, f_3）（例如，Gomez-Gesteira 等人，2010 年的方程 16 和 17）。因此，可以将描述流体运动的守恒方程转换为针对粒子而非连续网格单元的形式。

工业应用中的流体流动建模，尤其是使用光滑粒子模拟时，通常会针对具体应用场景（如风洞、海浪）使用专用软件。相比之下，开源代码通常更简单，但更容易适配不同场景。在本研究中，

我们使用开源*PySPH* 框架（Ramachandran 等人，2019年），该框架以*Python* 实现（为与*ObsPy*项目保持一致而选择；该项目广泛用于处理观测地震学数据），以管理本研究中光滑粒子流体动力学（SPH）模拟的粒子、平滑核和数值积分。*PySPH* 框架采用二阶预测校正积分器推进时间步长，根据连续性方程（质量守恒）和运动方程（动量守恒）中的时间导数更新密度、速度和位置；每个粒子的位置则根据由动量方程得出的速度进行更新。同时，每个时间步长的压力均根据状态方程，利用更新后的密度值计算得出。

1.4 冰川冰的性质

为建立水冰界面处水发生高能碰撞所引发地震波传播的模型，我们现在回顾冰川冰的性质，包括弹性模量、色散关系和衰减（更详细的介绍见附录A）。

冰川冰的物理性质已在晶格尺度和宏观尺度上得到研究。六方晶体结构中的五种原子间势 c_{ij}，是利用人工冰振动单晶的衍射图样加以约束的（例如，Jona 和 Scherrer，1952年；Nye，1957年；Neumeier，2018年）。研究人员还采用了其他方法，包括测量单晶冰的共振频率和声速，通常处于MHz-GHz频率范围内（例如，Bass 等人，1957年；Proctor，1966年；Dantl，1969年）。与此同时，Bogorodskiy（1964年）首次测量了从俄罗斯拉多加湖采集的天然 冰的全部 c_{ij} 值。此后，布里渊光谱被用于在广泛的温度范围内，精确约束人工冰和天然冰中的五种原子间势（例如，Gammon 等人，1983年）。对于冰川环境中通常会遇到的温度，弹性模量（E，由 c_{ij}项直接推导得出）的温度依赖性可用线性函数很好地近似表示，具体如下（Gammon 等人，1983年，其公式9）：

$$E(T) = E(T_{\mathrm{ref}})\frac{1 - aT}{1 - aT_{\mathrm{ref}}}, \tag{2}$$

其中，温度 T 和参考温度 Tref（弹性模量已知）的单位均为摄氏度，$a = 1\,418 \times ./\circ\mathrm{C}$。$10^{-3}$

对于频率低于 $\sim 10^5$ 赫兹的地震扰动等波，冰的多晶结构允许冰晶沿边界滑移（例如 McCarthy 等人，2011）；这种晶界滑移可建模为受迫简谐振子，其振幅为 $\delta l \propto F_0/\xi$，作用力为 F_0，波频率为 ξ。因此，预期应变（变形）对作用力的响应会随着频率降低而迅速增大，从而显著降低宏观晶体结构的弹性模量。Traetteberg 等（1975）通过考察块体样品在施加压缩载荷后的弛豫时间，测量了人工冰和天然冰川冰在低频（0.0001 至 10赫兹）下的杨氏弹性模量。Nakaya（1958）考察了宏观晶体结构在 100–1000 赫兹范围内的共振频率，测量了取自格陵兰 Tuto 冰隧道的天然多晶冰样品的杨氏模量。众所周知，晶粒尺寸会显著影响多晶材料的弹性行为（例如 McCarthy 等人，2011）；例如，Traetteberg 等（1975）发现，人工冰与天然形成的冰之间的杨氏模量最多相差一倍。杨氏模量 E 可用于说明纵波（P波）和横波（S波）相速度对频率和温度的依赖性，如下所示：

$$v_p(\xi, T) = \left[\frac{1 - \sigma}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}\frac{E(\xi, T)}{\varrho(T)}\right]^{1/2} \tag{3a}$$

$$v_s(\xi, T) = \left[\frac{1}{2(1 + \sigma)}\frac{E(\xi, T)}{\varrho(T)}\right]^{1/2}, \tag{3b}$$

其中，σ 为泊松比，ϱ 为冰川冰的密度。泊松比的取值参考了对S波和P波相速度的现场测量结果（例如 Kohnen和 Bentley，1973，以及其他许多研究）。

地震波传播过程中的能量损失归因于冰川冰晶界处的动摩擦和静摩擦（White，1966，即阻尼振荡）。Attewell和 Ramana（1966）发现，在一般材料中，衰减常数与频率呈线性正比，这一关系跨越了八个数量级（$0.01 < \xi < 10^6$赫兹）。更具体地说，Kohnen和Bentley（1971）利用地震折射测量研究了纵向地震波的衰减；他们在西南极洲伯德站附近，沿着彼此呈60∘角的三条测线，在80–180赫兹频带内测量了相速度和波幅衰减。然而，他们测得的100赫兹处衰减常数，比其他作者针对南极洲和格陵兰冰盖给出的数值低一半（例如 Robin，1958年；Kohnen，1969年）。通过对各种材料进行实验，已知S波和P波的衰减常数存在显著差异（例如 McDonal等人，1958年）。S波的衰减速度快得多，这是因为其相速度较低，因此单位传播距离内与冰晶粒边界的相互作用更多。因此，衰减常数 α预计会随着相速度 v 的增大而近似按反比例减小（即 $\alpha \propto 1/v$）。我们在附录A中综合了上述经验关系，以支持本研究所采用的数值。具体而言，这些关系涉及：(1) 天然形成的冰中杨氏模量对频率和温度的依赖性；(2) 南极洲和格陵兰冰盖中S波和P波的相速度；以及(3) S波和P波的衰减。

2 地震波生成与传播

我们提出了一个框架，用于模拟流体粒子与固体界面碰撞所产生的地震波场，其中入射动量矢量和反射动量矢量已知。流体粒子会在短时间内对界面施加作用力，该作用力的持续时间参考了水滴碰撞的水动力学实验（第2.1节）。碰撞过程中作用于界面的作用力幅值被建模为阻尼简谐振子，碰撞结束后界面仍会继续共振（第2.2节）。为考虑频率相关衰减以及所得经逆傅里叶变换的地震信号中的弱频散，将施加的作用力变换至频域（第2.3节）。通过考虑界面上所有流体粒子碰撞的积分，合成纵波（P波）和横波（S波）地震波形（第2.4节）。

2.1 流体粒子与水冰界面的碰撞

流体粒子与水冰界面的碰撞，通过考虑单个水滴撞击

固体表面的物理过程来建模。这类撞击已使用高速摄像机进行了广泛研究，其物理特性以入射速度和液滴尺寸来表征（Engel，1955）。在持续时间为 τ 的水滴碰撞过程中，施加于固体界面的力 $\boldsymbol{F}(t)$ 由水锤方程描述。具体而言，时间平均力如下所示：

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{F}} &= \frac{1}{\tau}\int_{t_0}^{t_0+\tau} \boldsymbol{F}(t)dt \\ &= -\kappa\rho c_s(\boldsymbol{v}_\tau - \boldsymbol{v}_0)\delta A\,,\end{aligned} \tag{4}$$

其中，$\boldsymbol{v}_0$ 和 $\boldsymbol{v}_\tau$ 分别是时间 t_0 和 $t_0+\tau$ 的入射速度矢量和反射速度矢量，ρ 是局部流体密度，c_s 是局部声速，δA 是碰撞的横截面积。本文根据流体动力学实验的结果，对标准水锤方程作了修正，引入比例常数 κ；对于孤立的球形液滴，$\kappa \approx 0.2$ 增大至流体柱中液滴的 $\kappa = 1$（Engel，1955）。在下一节中，我们将作用力 $\boldsymbol{F}(t)$随时间变化的行为建模为阻尼谐振子。

根据冲量-动量定理（即动量矢量 $\boldsymbol{p}$对应的 $\bar{\boldsymbol{F}}\tau = \Delta\boldsymbol{p}$），可推导出碰撞持续时间，进而得到界面上时间平均作用力的表达式：

$$\bar{\boldsymbol{F}} = -\frac{\rho\delta V(\boldsymbol{v}_\tau - \boldsymbol{v}_0)}{\tau}\,. \tag{5}$$

其中，δV 是流体粒子体积。比较这两个关于界面作用力的表达式（方程 4 和 5），可得碰撞持续时间为：

$$\tau = \frac{\delta V}{\kappa c_s \delta A}\,, \tag{6}$$

因此，对于声速为 $c_s = 1400\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ 的情况（水在 0∘C 和标准大气压下），当流体粒子直径为 δl 时，碰撞持续时间介于 $\tau \approx 0.0007\delta l$ 和 $0.0036\delta l$s 之间（考虑 κ 中的合理范围）。

因此，对于直径为 $\delta l < 0.28$ m 的流体粒子，碰撞持续时间预计短于典型冰震调查的采样间隔（即 1000 赫兹时为 0.001 s；200 赫兹时为 0.005 s）；即使采用最粗糙分辨率的流体动力学模拟，也能达到这一条件。因此，模拟流体粒子碰撞产生的作用力将在一个持续时间为 $\delta t \approx 0.001$-0.005 s 的时间采样内取平均值（或分散到相邻的两个采样中）。因此，基于流体粒子碰撞冲量生成的地震信号不受模拟分辨率影响，至少在本研究所考虑的量级范围内如此（即 $\delta l = 0.01$ m；见第 3 节）。

2.2 将粒子碰撞建模为阻尼简谐振子

我们将第 n 次流体粒子碰撞期间作用于水冰界面的时变力 $\boldsymbol{F}(t)$ 建模为阻尼简谐振子。入射流体粒子施加的力会使撞击点处的冰加速，从而引发振荡并产生地震波。第 n 次流体粒子碰撞的位置由位置向量 $\boldsymbol{r}_n = (x_n,\ y_n,\ z_n)$ 定义；在本文中，我们采用笛卡尔坐标。第 n 次流体粒子碰撞对冰施加的力（对于 $t_n \le t \le t_n + \tau_n$）与其笛卡尔加速度的关系如下：

$$\boldsymbol{F}_n(\boldsymbol{r}_n, t) = -\rho_n \delta V_n \boldsymbol{a}_n(\boldsymbol{r}_n, t)\,, \tag{7}$$

其中，ρ_n 和 δV_n 分别为第 n个流体粒子的密度和体积（在SPH模拟中，每个粒子的乘积 $\rho_n\delta V_n$ 保持恒定），而 $\boldsymbol{a}_n(\boldsymbol{r}_n,\ t)$是流体粒子在第 n次碰撞期间的加速度。通过考虑：（1）动能；（2）碰撞前后水-冰界面的位移，来约束碰撞期间加速度矢量的形式。根据流体动力学模拟（第3节）输出的入射速度矢量和反射速度矢量，约束每次流体粒子碰撞中加速度矢量的幅值、方向和阻尼。

2.2.1 碰撞期间的动能

假设发生非弹性碰撞，可推导流体粒子与水冰界面相互作用期间其加速度随时间的变化关系；因此，我们假设入射动能的一部分在碰撞过程中损失。第 n 个流体粒子碰撞前后动能之比如下：

$$\frac{K_{\tau,n}}{K_{0,n}} = \frac{\|\boldsymbol{v}_{\tau,n}\|}{\|\boldsymbol{v}_{0,n}\|} = \exp\left[-2\omega_n\zeta_n(1-\zeta_n^2)^{-1/2}\tau_n\right]\,, \tag{8}$$

其中，$\boldsymbol{v}_{0,n}$ 和 $\boldsymbol{v}_{\tau,n}$ 分别是第 n 个流体粒子的入射速度向量和反射速度向量。同时，在第二个等式中，动能比用阻尼系数表示；也就是说，ω_n 和 ζ_n 分别是第 n 次流体粒子碰撞的（阻尼）角频率和阻尼比。

实际上，大多数流体粒子的初始动能中都会有一部分（可能相当大）未参与碰撞；例如，平行于水冰界面的速度分量不会转化为弹性势能。因此，我们从入射速度向量和反射速度向量中去除这一残余速度分量 $\boldsymbol{v}_{\star,n}$（即动能最小时的速度向量）（见第 3 节）。因此，公式8中的速度向量分别改写为 $\boldsymbol{v}_{0,n} - \boldsymbol{v}_{\star,n}$ 和 $\boldsymbol{v}_{\tau,n} - \boldsymbol{v}_{\star,n}$。

通过比较流体粒子与水冰界面相互作用前后动能比的上述两个表达式，可以推导出第 n 次流体粒子碰撞的阻尼比。即，

$$\zeta_n = \left(\frac{(\omega_n\tau_n)^2}{\log^2\left(\|\boldsymbol{v}_{0,n} - \boldsymbol{v}_{\star,n}\|/\|\boldsymbol{v}_{\tau,n} - \boldsymbol{v}_{\star,n}\|\right)} + 1\right)^{-1/2}\,, \tag{9}$$

其中，我们假设反射流体粒子的动能小于入射粒子的动能。现在我们已限定了振荡的衰减包络，但还必须考虑水冰界面处的位移，才能完整描述碰撞过程中流体粒子的行为。

2.2.2 碰撞过程中的位移

如上所述，第 n 次碰撞过程中流体粒子的运动可表示为角频率为 ω_n、阻尼比为 ζ_n 的阻尼简谐振荡。沿某一任意轴 q，流体粒子相对于碰撞位置的平衡位置的位移定义为 $\eta_{q,n} \equiv q - q_n$。因此，随时间变化的平衡位置偏移量可表示为：

$$\begin{aligned}\eta_{q,n}(t) = \eta_{0q,n}&\exp\left[-\omega_n\zeta_n(1-\zeta_n^2)^{-1/2}(t-t_n)\right] \\ &\times\sin\left[\omega_n(t-t_n)+\phi\right] + v_{\star q,n}(t-t_n),\end{aligned} \tag{10}$$

其中，$\eta_{0q,n}$ 是碰撞过程中流体粒子振荡的 q分量的振幅，t_n 是碰撞开始时的时间，ϕ 是任意相位常数。

n分量的残余速度矢量，$v_{\star q,n}$（即未在能量上参与碰撞的速度分量）使位移相对于平衡位置随时间线性变化。该n号流体粒子与水冰界面碰撞期间的速度同样可表示为，

$$\begin{aligned} v_{q,n}(t) = \eta_{0q,n}\omega_n \exp\left[-\omega_n\zeta_n(1-\zeta_n^2)^{-1/2}(t-t_n)\right] \\ \times\Big[-\zeta_n(1-\zeta_n^2)^{-1/2}\sin\left(\omega_n(t-t_n)+\phi\right) \\ +\cos\left(\omega_n(t-t_n)+\phi\right)\Big] + v_{\star q,n}\,. \end{aligned} \tag{11}$$

流体粒子与冰边界相互作用时会发生反射，因此，碰撞过程中，速度向量垂直于界面的分量预计会改变符号；即 $(\boldsymbol{v}_{0,n}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})(\boldsymbol{v}_{\tau,n}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}) < 0$其中，$\hat{\boldsymbol{n}}$为垂直于界面的单位向量。入射流体粒子沿界面法向的位移在时间 $t = t_n$处的初始条件为 $\eta_{\perp,n}(t_n) = 0$；由此可将任意相位常数设为 $\phi = 0$。碰撞后，在 $t = t_n + \tau_n$时，假设 $v_{\star\perp,n} = 0$（不过见下文），流体粒子的位移又为 $\eta_{\perp,n}(t_n+\tau_n) = 0$。因此，振荡的角频率为 $\omega_n = m\pi/\tau_n$，其中m为整数。为使速度向量按预期改变符号，流体粒子沿界面法向的位移在逻辑上可建模为半周期振荡；即 $m = 1$ 且 $\omega_n = \pi/\tau_n$。

平行于界面的运动同样必须建模为半周期阻尼简谐振荡；需要注意的是，在考虑动能时，假定了单一角频率和阻尼比。碰撞前后的位移分别为$\eta_{\parallel,n}(t_n) = 0$和$\eta_{\parallel,n}(t_n+\tau_n) = v_{\star\parallel,n}\tau_n$其中$v_{\star\parallel,n}$是速度向量中平行于边界、但不参与碰撞能量交换的分量，其数值可能相当大。无论如何，这些条件对阻尼简谐振荡模型中的参数施加了相同的约束。

因此，可以利用流体粒子动能的初始条件来确定振荡的位移振幅。也就是说，将公式8中的实测速度向量与公式11中的振子速度表达式进行比较，可得$\|\boldsymbol{\eta}_{0,n}\| = \|\boldsymbol{v}_{0,n} - \boldsymbol{v}_{\star,n}\|/\omega_n$。要对流体粒子的运动进行建模，还需要将位移向量分解为笛卡尔分量；不过，正如下文所述，我们只关注作用力的方向。

2.2.3 碰撞过程中的时变力

时均作用力的方向（第2.1节）是根据水锤方程和冲量—动量定理推导得出的。在此，我们假设时变力的方向与其相同，但在整个碰撞过程中其大小会发生变化；即，q轴沿$\boldsymbol{v}_{\tau,n} - \boldsymbol{v}_{0,n}$方向。碰撞过程中第$n$个流体粒子所受的相应加速度大小可根据第2.2.2节中的推导得出。也就是说，

$$\begin{aligned} a_{q,n}(t) = -\omega_n\frac{\|\boldsymbol{v}_{0,n} - \boldsymbol{v}_{\star,n}\|}{(1-\zeta_n^2)}\left(2\zeta_n(1-\zeta_n^2)^{1/2} + i(2\zeta_n^2-1)\right) \\ \times\exp\left[-\omega_n\zeta_n(1-\zeta_n^2)^{-1/2}(t-t_n)\right]\exp\left[i\omega_n(t-t_n)\right], \end{aligned} \tag{12}$$

其中包含复值相位，以供下一节的推导使用。

碰撞期间作用于冰上的时变力与此加速度成正比，适用于 $t_n \le t \le t_n + \tau_n$（见公式 7）。碰撞后，由于变形冰体内部的恢复力，水冰界面会继续振荡。然而，显然，在碰撞发生前，流体粒子不会对冰施加任何力。水冰界面因第 n 次流体粒子碰撞以及随后产生的内部恢复力而受到的时变力，在所有时刻（碰撞前、碰撞期间和碰撞后）均可表示如下

$$\boldsymbol{F}_n(\boldsymbol{r}_n, t) = -\rho_n\delta V_n a_{q,n}(t)u(t-t_n)\frac{(\boldsymbol{v}_{\tau,n} - \boldsymbol{v}_{0,n})}{\|\boldsymbol{v}_{\tau,n} - \boldsymbol{v}_{0,n}\|}\,, \tag{13}$$

其中，$u(t-t_n)$为海维赛德（单位阶跃）函数；由于撞击前作用力为零，因此需要引入该函数。此处还包含了q轴的单位向量。

2.3 合成地震波的生成

我们现在介绍一种方法，根据每个流体粒子碰撞施加于水冰界面的时变力生成合成地震波形。该形式体系考虑了从每个碰撞位置发出的地震波中随频率变化的衰减和弱频散；这一点至关重要，因为水冰碰撞产生的信号可能涵盖很宽的频率范围。本研究模拟的切割型冰川表面流预计主要产生体波，因此我们重点关注这一机制；不过，在建模（例如）冰川表面流时，也可以很容易地修改此处提出的框架，将表面波纳入考虑。

2.3.1 弱频散

在时变作用力穿过冰层传播了一段距离到达地震仪位置后，考察其所产生的振荡（需要指出的是，如果有需要，建模框架同样能够很好地捕捉近场运动和远场运动）。水冰界面处的作用力表示为多个单色波包所产生作用力的叠加。每个单色波包对应的作用力幅值，通过对方程 7 和 12 中推导出的时变作用力进行傅里叶变换得到。即，

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n(\boldsymbol{r}_n, \xi) = \rho_n\delta V_n\frac{\|\boldsymbol{v}_{0,n} - \boldsymbol{v}_{\star,n}\|}{(1-\zeta_n^2)} \\ \times\left(\frac{2\zeta_n(1-\zeta_n^2)^{1/2} + i(2\zeta_n^2-1)}{2\pi\xi/\omega_n + \zeta_n(1-\zeta_n^2)^{-1/2} - i}\right). \end{aligned} \tag{14}$$

其中，$\xi \geqslant 0$ 是给定单色波包的频率。通过考察每个此类波包在傅里叶空间中的空间演化，对其频散进行建模。频率为 ξ 的波包传播距离 $\|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_n\|$后的作用力幅值为，

$$\mathcal{F}_n(\boldsymbol{r}, \xi) = \mathcal{F}_n(\boldsymbol{r}_n, \xi)e^{-ik(\xi)\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n\|}\,, \tag{15}$$

其中，我们假设地震波朝地震仪传播；也就是说，地震波矢 $\boldsymbol{k}_n$ 与位置向量 $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_n$平行。冰中这一频率相关的地震波矢的振幅 $k(\xi)$（即波数）定义于附录 A2 的公式 A.3a 和 A.3b 中。

地震仪位置处的作用力，目前仅

考虑弱频散，然后对该函数进行傅里叶逆变换即可得到。也就是说，

$$\begin{aligned} F_n(\boldsymbol{r},t) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \mathcal{F}_n(\boldsymbol{r},\xi)e^{i2\pi\xi(t-t_n)}d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \mathcal{F}_n(\boldsymbol{r}_n,\xi)e^{i(2\pi\xi(t-t_n)-k(\xi)\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n\|)}d\xi\,, \end{aligned} \tag{16}$$

对于一般的频散关系，无法以解析方式求解逆傅里叶变换，但对于线性函数则可以进行计算，具体如下所述。我们在某个展开点 $\xi = \xi_c$ 处对频率相关波数进行泰勒级数展开，以获得解析上可处理的解。即：

$$k(\xi) \approx k(\xi_c) + (\xi-\xi_c)\frac{\partial k(\xi_c)}{\partial \xi}\,, \tag{17}$$

其中，波矢的偏导数定义于附录 A2 的方程 A.4a 和 A.4b 中。然而，所选的展开点将极大地影响逆傅里叶变换的准确性。因此，我们考察方程 14 中作用力幅值随频率变化的大小，以确定合适的展开点。即：

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}_n(\boldsymbol{r}_n,\xi)\| = \rho_n \delta V_n \frac{\|\boldsymbol{v}_{0,n}-\boldsymbol{v}_{\star,n}\|}{(1-\zeta_n^2)} \\ \times\left(1+\left[2\pi\xi/\omega_n+\zeta_n(1-\zeta_n^2)^{-1/2}\right]^2\right)^{-1/2}\,. \end{aligned} \tag{18}$$

该函数在受限域 $\xi \geqslant 0$上于 $\xi = 0$处达到全局最大值，其值为 $\rho_n\delta V_n(1-\zeta_n^2)^{-1}/^2\|\boldsymbol{v}_{0,\ n}-\boldsymbol{v}_{\star,n}\|$，并且随着频率增加而近似按 $1/\xi$ 递减。因此，将展开点 ξ_c 取作地震仪频率响应函数的下限，以确保最高幅值单色波包具有最高准确性；在本研究中，我们假设 $\xi_c = 0.01$ 赫兹。对于最高分别为 0.1、1 和 10 赫兹的频率，近似波数的准确度分别在 6%、15% 和 24% 以内；更高频率对应的作用力幅值仍同样可以忽略不计。

因此，可以将第 n 个流体粒子产生的地震波包所诱发的力表示为时间和位置的函数，如下所示：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_n(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{F}_n\left(\boldsymbol{r}_n, t-\frac{\partial k(\xi_c)}{\partial\xi}\frac{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n\|}{2\pi}\right) \\ \times\exp\left[-i\left(k(\xi_c)-\frac{\partial k(\xi_c)}{\partial\xi}\xi_c\right)\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n\|\right]\,, \end{aligned} \tag{19}$$

其中，等式右侧的第一项为 $\boldsymbol{F}_n(...)$，如公式 13 所示，并根据碰撞位置到相关位置的传播时间，在相关的（较早）时间进行计算。

2.3.2 衰减

合成地震波在传播至地震仪位置的过程中会通过两种机制损失能量：（1）振荡的颗粒状冰晶之间的静摩擦和动摩擦造成的衰减（见附录 A3）；（2）向水冰界面冰侧的立体角内发生几何扩散。

首先，频率相关衰减矢量 $\boldsymbol{\alpha}_n(\xi)$ 与位置向量平行；与波数一样，必须对其进行线性化，才能得到逆傅里叶变换的解析可处理解。也就是说，衰减矢量振幅的泰勒级数展开为：

$$\alpha(\xi) \approx \alpha(\xi_c) + (\xi-\xi_c)\frac{\partial\alpha(\xi_c)}{\partial\xi}\,, \tag{20}$$

其中，展开点处的衰减矢量振幅 $\alpha(\xi_c)$ 定义于附录 A3 的方程 A.6a 和 A.6b 中，偏导数定义于方程 A.7a 和 A.7b 中。

其次，波的平方反比定律发散所造成的能量损失只会引入一个 $\delta A_n/(2\pi\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n\|^2)$ 因子；其中，δA_n 是水冰界面处第 n 次流体粒子碰撞的横截面积，$2\pi\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n\|^2$ 是地震波能量在距碰撞位置任意距离处穿过的表面积。

考虑到这两种波衰减形式，以及前文所述的弱频散，我们再次推导出地震仪处一系列单色波包的作用力幅值。也就是说，频率为 ξ 的波包的作用力幅值为：

$$\mathcal{F}_n(\boldsymbol{r},\xi) = \mathcal{F}_n(\boldsymbol{r}_n,\xi)e^{-\{\alpha(\xi)+ik(\xi)\}\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n\|}\frac{\delta A_n}{2\pi\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n\|^2}\,, \tag{21}$$

其中，F$n(\boldsymbol{r}_n,\ \xi)$ 的定义仍见公式 14。

因此，考虑弱频散和衰减后，由第 n 次流体粒子碰撞产生的地震波包所引起的力，可表示为时间和位置的函数，如下所示：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_n(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{F}_n\left(\boldsymbol{r}_n, t-\frac{\partial k(\xi_c)}{\partial\xi}\frac{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n\|}{2\pi}+i\frac{\partial\alpha(\xi_c)}{\partial\xi}\frac{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n\|}{2\pi}\right) \\ \times\exp\left[-\left(\alpha(\xi_c)-\frac{\partial\alpha(\xi_c)}{\partial\xi}\xi_c\right)\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n\|\right] \\ \times\exp\left[-i\left(k(\xi_c)-\frac{\partial k(\xi_c)}{\partial\xi}\xi_c\right)\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n\|\right]\frac{\delta A_n}{2\pi\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n\|^2}\,. \end{aligned} \tag{22}$$

在本文余下部分中，我们只考虑所得作用力的实值分量。

2.3.3 地震仪处的加速度

地震仪通常记录与地面运动的速度或加速度（对于 MEMS型仪器）成正比的电压，该电压随时间变化。我们根据被推动的冰的质量将作用力转换为加速度；随后，在本文中，我们通过加速度时间序列计算速度。如前所述（第2.1节），作用力（因此加速度）不受所假定的碰撞持续时间和模拟空间分辨率的影响。

第 n 次流体粒子碰撞在地震仪位置产生的冰的加速度为：

$$\boldsymbol{a}_n(\boldsymbol{r},t) = -\frac{1}{\varrho\delta V}\boldsymbol{F}_n(\boldsymbol{r},t)\,, \tag{23}$$

其中，$\varrho = 916\,\mathrm{kgm}^{-3}$ 是冰的密度（温度为 $T = 0$◦C、压力为-¯mospheric 时），δV 是流体粒子的平均（或初始）体积。

2.4 合成地震波集合

如上一节所述，流体粒子在水冰界面上发生碰撞，会在碰撞位置产生振荡。撞击能量主要以纵向地震波的形式从扰动处向外穿过冰传播，但由于冰中的剪切应力，部分能量会产生横波；横波能量集中在垂直于入射角的方向。因此，当水具有特定入射角时，传递到水冰界面的能量预计不会向各个方向均匀地穿过冰传播

此外，纵向地震波和横向地震波在冰中的传播速度不同，衰减速率也各不相同。

因此，为了正确考虑地震波在材料中的传播，必须将 n号流体粒子碰撞所导致的冰中每个微小体积的加速度分解为平行于和垂直于波传播方向的分量。纵波（P波）由平行于传播方向的振荡分量产生，$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n$，其定义为从撞击点 $\boldsymbol{r}_n$ 到地震仪 $\boldsymbol{r}$的方向。地震仪处产生的加速度为：

$$\boldsymbol{a}_{p,n}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\boldsymbol{a}_n(\boldsymbol{r},t,\alpha_p,k_p)\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n)}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n\|^2}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n)\,, \tag{24}$$

其中，式23中推导出的加速度表达式分别针对波的纵向分量的频率相关波数幅值 $k_p(\xi)$和衰减常数$\alpha_P(\xi)$进行计算，具体定义见附录A2和A3。

与此同时，横波（S波）由垂直于传播方向的振荡产生；也就是说，由振荡中不平行于波传播方向的分量产生。在 $\boldsymbol{r}$ 处引起的加速度为：

$$\boldsymbol{a}_{s,n}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{a}_n(\boldsymbol{r},t,\alpha_s,k_s)-\frac{\boldsymbol{a}_n(\boldsymbol{r},t,\alpha_s,k_s)\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n)}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n\|^2}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n)\,, \tag{25}$$

其中，这里我们采用波的横向分量的频率相关波数 $k_s(\xi)$ 和衰减常数 $\alpha_s(\xi)$ 的幅值。

因此，第 n 个流体粒子碰撞在地震仪位置产生的总加速度为，

$$\boldsymbol{a}_{ps,n}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\boldsymbol{a}_{p,n}(\boldsymbol{r},t)+\Lambda\,\boldsymbol{a}_{s,n}(\boldsymbol{r},t)}{1+\Lambda}\,, \tag{26}$$

其中，Λ^2 是分配给横向地震波和纵向地震波的能量之比；在本研究中，我们始终取值 $\Lambda^2=0.25$（即 $\Lambda=+0.5$）。沿水冰界面在不同位置 $\boldsymbol{r}_n$ 发生多次流体粒子碰撞所产生的地震信号，通过对每次碰撞的贡献求和得到。也就是说，

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r},t)=\sum_n \boldsymbol{a}_{ps,n}(\boldsymbol{r},t)\,. \tag{27}$$

对该函数以 200 赫兹的频率采样（这是冰川地震学观测部署中的典型采样频率），即可生成由水粒子碰撞集合产生的三分量地震记录。随后，按照相同的方法获得合成位移和速度时间序列测量值，以便与通常观测到的地震波形进行比较（参见第5.2节）。

3 光滑粒子流体动力学模拟

3.1 水与冰的流体动力学

本研究中的水动力学模拟涉及两类粒子：(1) 水中的流体粒子；(2) 与流体接触的固体冰。我们不显式模拟空气粒子，而是将流体表面的压力设为参考大气压 p_0。冰和水所采用的流体动力学模型（包括二者之间的相互作用）将在下文详细说明。

3.1.1 水粒子守恒方程

本研究采用光滑粒子流体动力学（SPH）模拟来模拟水的整体运动，相关方法已在第 1.3 节介绍。正如前文所述，我们使用开源 *PySPH* 框架（Ramachandran 等人，2019年），该框架能够高效地管理粒子、平滑核和数值积分。在这段代码中，水的流体动力学由三个守恒方程描述，分别是连续性方程、动量方程和状态方程。

连续性方程将密度变化率与流体粒子速度的散度联系起来（例如，Monaghan，1992，2005）：

$$\frac{d\rho(\boldsymbol{r})}{dt}=-\rho(\boldsymbol{r})\left[\nabla\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\right]\,, \tag{28}$$

其中，位置为 $\boldsymbol{r}$ 的粒子的离散散度算子定义见 Gomez-Gesteira 等人（2010）的方程 17（例如）。

同时，动量方程将粒子加速度表示为压力梯度、流体黏度和外力的函数：

$$\frac{d\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})}{dt}=\frac{1}{\rho(\boldsymbol{r})}\left[-\nabla p(\boldsymbol{r})+\nabla\cdot\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{r})\right]+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r})\,, \tag{29}$$

其中，位置为 $\boldsymbol{r}$ 的粒子的离散梯度算子定义见 Gomez-Gesteira 等人（2010）的公式 16（例如）；$\boldsymbol{\pi}$（$\boldsymbol{r}$）为偏应力张量（柯西应力张量中的黏度项），$\boldsymbol{g}$（$\boldsymbol{r}$）$=-9.81\hat{\boldsymbol{z}}\ \mathrm{m\ s^{-2}}$ 为单位向量 $\hat{\boldsymbol{z}}$ 沿竖直方向时外力产生的加速度。偏应力张量的散度通过人工黏度近似，其中包含用于模拟剪切黏度和体积黏度的线性速度项，以及用于考虑高马赫数激波的二次项（例如 Monaghan（1992）的公式 4.1 和 4.2）；按照 Ramachandran 等人（2019）的做法，我们将两个人工黏度参数分别设为 $\alpha=0.25$ 和 $\beta=0$。

最后，状态方程描述了粒子密度发生绝热变化时，压力相对于其初始值（$p_0\approx 0$ 流体表面处）的扰动（例如，Cole，1948年；Batchelor，2000年；Monaghan，2005年）。也就是说，

$$p(\boldsymbol{r})=\frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma}\left[\left(\frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\rho_0}\right)^{\gamma}-1\right]\,, \tag{30}$$

其中，ρ_0 为参考密度，c_0 为系统中预期的最大声速，$\gamma=7$ 为水通常假定的绝热指数。在本研究中，我们将水的密度设为$\rho_0=1000\,\mathrm{kg\ m^{-3}}$，声速设为 $c_0=32.85\ \mathrm{m\ s^{-1}}$；为提高计算效率，SPH模拟中的参考声速通常设为预期外力所产生的最大速度的十倍，以便准确捕捉流体的整体运动（Monaghan，1992年）。如方程6所需，给定粒子的声速根据参考声速和密度计算为 $c_s(\boldsymbol{r})=c_0[\rho(\boldsymbol{r})/\rho_0]^{(\gamma-1)/2}$。

3.1.2 冰颗粒边界条件

我们将冰建模为固定在原处的刚性不透水固体，并在整个模拟过程中保持不动；也就是说，我们不考虑冰的任何弹性响应，也不考虑 Roeoesli 等（2016b）所述的共振耦合。在 *PySPH* 框架中，冰因此由固定位置的

粒子表示，这些粒子通过动量方程对邻近流体粒子的加速度产生影响。流体粒子靠近固定位置的冰粒子时，其密度会增加，进而导致压力升高，从而对流体粒子产生排斥力。冰粒子产生的排斥力可确保水冰界面处满足不可穿透边界条件，即 $\boldsymbol{v}\cdot\hat{\boldsymbol{n}} = 0$；其中$\hat{\boldsymbol{n}}$ 是垂直于界面表面的单位向量。光滑粒子模拟需要大量边界粒子才能有效满足这一不可穿透条件，因此除分辨率最高的模拟外，边界粒子的数量通常远多于流体粒子（例如，见表 1）。

3.2 流体粒子与水冰界面碰撞 s

SPH模拟以固定的时间间隔计算每个流体（及边界）粒子的属性，t。这些属性包括位置向量的笛卡尔分量，x、y 和 z；速度向量的笛卡尔分量，v_x、v_y 和 v_z；粒子质量，m；密度，ρ；以及压力，p。粒子体积，δV，和横截面积，δA，则由质量和密度推导得出。为确保详细捕捉每次粒子碰撞的运动学过程，这些属性以较高的时间分辨率输出，即 $\delta t = 0.001$ s。我们发现，当时间分辨率比采样率低数倍时，合成地震信号会收敛到共同的波形（即，200 赫兹采样需要 $\delta t \lesssim 0.001$ s 的时间分辨率）。

在本研究中，我们利用这些属性以及已知的水冰界面位置，识别与边界发生碰撞的流体粒子。如果流体粒子经过距边界粒子不超过平滑长度 ϵ 的位置（即流体粒子的核函数包含该边界粒子），它就会与水冰界面相互作用；本研究中，我们假设 $\epsilon = h\delta l$ 适用于分辨率 δl 和核尺度$h \approx 2.6$†。然而，平衡流体粒子间距为 $\delta l = \epsilon/2.6$，因此，距边界更近的至少一个其他流体粒子可能会部分遮蔽低能相互作用。此外，边界上的某些平衡流体粒子位置可能大致位于距突出边缘或顶点一个平滑长度处（例如$\epsilon \approx \sqrt{6}\delta l$‡）；由于这些粒子会在其平衡位置附近发生小振幅振荡，它们可能频繁越过距边界的某个临界距离。实际操作中，为避免纳入可能数以百万计的极低能碰撞，我们要求流体粒子朝边界方向越过平滑长度至少移动0.2ϵ 的距离。因此，这一假设会排除（或大幅减少）静压力对作用于边界的力的贡献。然而，这与本研究中地震波的产生无关，因此，对所选数值（0.2ϵ）作适度调整不会影响合成波形。

我们追踪流体粒子处于距边界一个平滑长度 ϵ范围内、因而与潜在碰撞位置的边界粒子相互作用时所经过的路径。入射速度,$\boldsymbol{v}_{0,n}$，根据第 n 个流体粒子进入距边界一个平滑长度范围之前和之后的模拟输出进行插值。同样，反射速度矢量 $\boldsymbol{v}_{\tau,n}$，根据紧邻第 n个流体粒子离开距任意边界粒子一个平滑长度范围之前和之后的模拟输出进行插值。粒子接近边界、距离小于上述两个位置时，会将动能转化为弹性势能；在其轨迹的驻点处，动能达到最小值。然而，由于粒子速度较高（最高可达 $|v| = 5$ m s^{-1}），相对于模拟输出的时间分辨率（$\delta t = 0.001$ s）而言，我们无法直接测量该驻点的位置；也就是说，与 0.026 m 的平滑长度相比，粒子位置的采样间隔可能只有 0.005 m（分辨率详见第 3.3 节）。因此，我们假设粒子在距边界一个平滑长度范围内的轨迹中点可代表驻点。碰撞时间 t_n 根据最接近该中点路径长度的两个模拟输出推导，而残余速度矢量 $\boldsymbol{v}_{\star,n}$（见第 2.2 节）则通过对这两个输出中的速度笛卡尔分量进行插值估算。

由于核函数具有有限宽度，SPH模拟会阻止流体粒子直接撞击水冰界面，因此给定粒子轨迹上的驻点不会位于边界上。因此，我们假设界面上距离第 n 个粒子轨迹驻点最近的位置就是实际碰撞位置，$\boldsymbol{r}_n$。为此，我们通过拟合邻近边界粒子位置构成的平面，数值近似预期碰撞位置区域内表面的单位法向量。这样便可将碰撞位置估算到模拟分辨率所允许的精度。还需要确定界面的朝向（由单位法向量描述），以确保合成地震波只在冰中传播，而不会反向传播至水中。现在，我们可以利用与水冰界面发生碰撞的流体粒子，以及从模拟输出中得到的相互作用属性，基于解析模型生成合成地震波。

3.3 水冰模拟几何

我们模拟水沿着冰中数米深处、几何形状各异的狭窄通道流动，旨在捕捉不同冰川表面流所产生地震信号的一般特征，并为由此产生的信号提供示例案例。这些模型基于经过充分研究的溃坝问题：水槽一端的一团水在重力作用下坍塌，并撞击水槽另一端的墙壁。

水沿通道的正 x 方向流动，通道厚度恒定（0.2 m），建模域内布置了冰粒子，以便为每种几何形状设定 xy 平面内不同的路径。四种通道几何形状（图 1）分别为：(i) 两个 45◦ 弯道，先向左再向右；(ii) 两个 90◦ 弯道；(iii) 一条平缓的 45◦ S形曲线，使用双曲正切函数描述；以及 (iv) 一条急转的 90◦ S形曲线，使用两段圆弧描述。坐标系原点位于两个弯道的中心。四次模拟中流体粒子和冰粒子的数量汇总于表 1。每个流体粒子的初始体积为 $\delta V = 1$ cm^3，对应的空间分辨率为 $\delta l = 0.01$ m；这是在计算效率与保证空间分辨率足够高之间的权衡，以确保碰撞持续时间（根据冲量推导；见第2.1节）短于采样率。

† 我们将平滑长度表示为核函数的最大范围，而不是 1σ 层级。

‡ 假设边界边缘和顶点均与网格对齐，则平衡网格位置到边界的可能最近距离包括 (1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, 2, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{8}$ 和 3) $\times\ \delta l$。

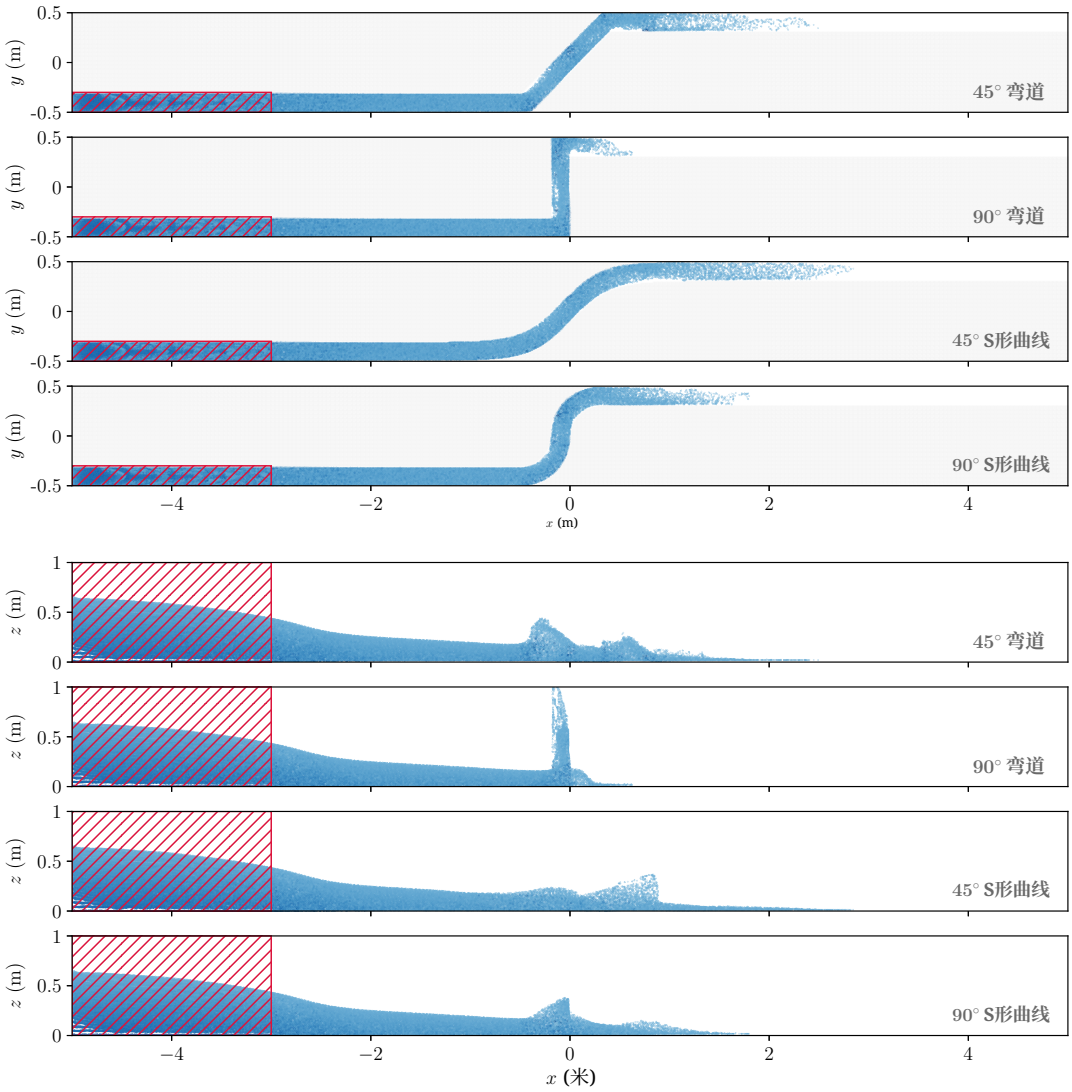

图1。 上： 从 xy平面观察的四种通道几何形状（沿 z方向积分）。在 t = 1.5秒时，水柱（位于0.2米通道内）以蓝色显示，冰以浅灰色显示；没有水的通道部分以白色显示。水柱在 t = 0处的初始位置由红色阴影矩形表示。下： 从 xz平面观察的四种通道几何形状（沿 y方向积分）；为清晰起见，未显示冰。建模域（相当于实验室实验中的“水槽”）长度为 Δx = 10 米（边缘位于 x = ±5 米处），厚度为 Δy = 1 米（边缘位于 y = ±0.5米处），高度为 Δz = 2 米（边缘位于 z = 0 和 z = 2 米处）。水体的初始长度为 δx = 2 米（从 x = −5 米至 x = −3 米），厚度为δy = 1 米，高度为 δz = 1 米（从 z = 0 米至 z = 1 米）。

表 1. 四种冰川表面渠道几何形状的光滑粒子模拟中冰粒子和流体（水）粒子的数量。

几何形状	流体粒子	冰粒子	粒子总数
45° 弯道	380 000	12 937 176	13 171 176
90° 弯道	380 000	12 803 526	13 183 526
45° S形曲线	380 000	13 065 126	13 445 126
90° S形曲线	380 000	13 044 576	13 424 576

4 结果

我们将用于生成和传播合成地震波的解析方法（第2节）应用于四次 SPH模拟（第3节）的输出，这四次模拟对应不同的通道几何形状（图1）。我们定性考察这些合成地震信号的特征，以评估我们的方法并进一步了解所生成的波形。具体而言，我们研究了在距各通道 ∼1 千米半径范围内地表检测到的地震波场（第4.1节）、单个地震仪位置处的合成时间序列和谱密度（第4.2节），以及横波和纵波的相对强度随通道中心周围角度的变化（第4.4节）。

4.1 冰面处的地震波场

我们在距通道底部 2 m 高的冰面上采集信号，沿笛卡尔网格以 10 m 间隔取样（x 和 y 方向），采样范围延伸至距通道 ∼1 千米的半径（即 x = ±1 千米和 y = ±1 千米）。我们生成合成加速度

波形，展示这些位置处信号随时间变化的情况，并呈现信号的垂直分量（图2）。

45◦ 弯道通道中的首次水-冰碰撞发生在第一个弯道处（位于 $x \approx -0.3$ 和 $y \approx -0.4$ m 处；见图1），时间为 $t \approx 0.7$ s。图2（上排）展示了随后三个时刻冰面上的地震波场。这次首次碰撞产生的地震波（即 $t = 1$s 时看到的地震波）以半圆形向外辐射，朝向 $(x, y) = (1, -1)$ 千米，范围受限于从 $\phi = -135◦$ 到 $+45◦$ 的方位角（即界面的冰侧）。纵波振幅在方位角为 $\phi \approx -45◦$的方向上最大；然而，由于假设的横波与纵波波幅比高达 $\Lambda = 0.5$，离轴方向的总波幅仅略低。两个弯道中的第一个弯道在界面处发生的初次碰撞持续时间很短，因此形成了宽约 300 m 的窄波包；在后续时刻，这会形成一段明显的高垂直加速度弧带。通道第二个弯道处于 $t \approx 1$s 发生的第二次水-冰碰撞（位于 $x \approx 0.5$ 和 $y \approx 0.5$ m 处）会产生另一段半圆形地震波弧带；地震波沿正 y轴辐射，范围受限于从 $\phi = 0$ 到 $+180◦$的方位角。两次碰撞产生的反射流受到湍流影响，随后到达的较小幅度信号使 $t = 1.4$ s 时出现幅度较低的特征。

其他通道几何形状中，碰撞产生的地震波场模式在定性上与45◦弯道通道相同，但其时间、强度和方向差异很大（图2，下方三行）。半圆弧对应于界面冰侧发生高能粒子碰撞的位置所对应的方位角。波幅峰值（初次碰撞或二次碰撞产生的波幅）大致位于这些半圆弧的中心；本节稍后将详细探讨纵波（P波）和横波（S波）的角度依赖性。

4.2 合成时间序列

我们讨论位于 $(x, y, z) = (10, 5, 2)$ m 处的地震仪所预测的合成波形；即位于通道两个弯道中心下游10 m处，在垂直于流动方向的水平方向上偏移5 m，并高出通道底部2 m。该位置距初次碰撞位置11.36 m，方位角为 $\phi = 26.6◦$（从正 x-方向朝正 y-轴方向），倾角为 $\theta = 11.3◦$（从正 x-方向朝正 z-轴方向）。选择这一离轴位置，是为了确保纵波（P波）和横波（S波）的分量与地震仪处的分量 (x, y, z) 不对齐。

45◦ 弯道沟道几何形态下生成的合成三分量加速度波形数据如图3所示（左上；纵波和横波分量已分离）。地震波的初至出现在 $t \approx 0.7$ 秒，这是水与沟道中两个弯道的第一个弯道发生碰撞所致（初次碰撞）。流体粒子在第一个弯道处偏转，但并未损失显著能量（因为入射角较浅），因此仅检测到较弱的信号。然而，在坍塌水柱的压力作用下，流动继续快速加速并朝第二个弯道推进。因此，该沟道几何形态下最强的地震信号与第二个弯道处的碰撞（二次碰撞）有关，峰值出现在 $t \approx 1.1$ 秒。纵波（P波）的峰值振幅指向方位角 $\phi \approx 85◦$（见第4.4节），因此在所选地震仪处检测到的加速度振幅仅为（相对）中等位置（$\phi = 26.6◦$；即距峰值 $\approx 60◦$），主要出现在 x 分量中。相比之下，横波（S波）的峰值振幅指向与P波峰值振幅垂直的一组方位角和倾角；也就是说，对于地震仪的倾角，方位角为 $\phi \approx 25◦$ 和155◦，其中前者与地震仪位置非常接近。因此，通过地震仪 y 和 z 分量中的S波初至，可以（相对）清晰地检测到二次碰撞。

90◦ 弯道沟道几何形态的合成加速度波形数据呈现出截然不同的特征（图3，第2行左侧），这是由于一次碰撞和二次碰撞的强度不同。流体粒子在第一个弯道处垂直于水冰界面发生碰撞，在剧烈的相互作用中损失了大部分能量。然而，这些流体粒子因此具有较低的反射速度，往往会“屏蔽”界面，使其免受后续高能粒子碰撞的影响（也就是说，反射粒子无法避开新近入射的粒子）。随后，由于反射速度较低且流动具有湍流特性，二次碰撞也相对较弱（图1）。对于这种沟道几何形态，地震仪的 x 分量能够清晰检测到（一次）P波到时；P波峰值波幅的方位角为 $\phi \approx -10◦$，地震仪处可检测到相当大的加速度振幅（即与峰值相差 $\approx 35◦$）。S波峰值波幅同样靠近地震仪位置，因此，二次碰撞产生的S波到时也很强。

三个地震仪分量所接收到的加速度相对幅值（对于任一种通道几何形状）也为评估我们的方法提供了一种途径。地震仪位于 $(x, y, z) = (10, 5, 2)$ m，因此，考虑到震源位于原点（这对所有水-冰碰撞而言近似成立），沿地震仪 x 分量方向的P波加速度将是 y分量检测到的两倍，是地震仪 z 分量检测到的五倍。这一预期的定性结果与我们的模型预测一致（例如图3左侧第二行）。与此同时，S波加速度应主要由至少一个垂直于传播方向的地震仪分量检测到；在本例中，S波在y和 z分量上的信号最强，而 x分量上的信号仅有少量贡献。

其他通道几何形状的合成三分量信号显示在最下面两个面板中（图3），其撞击时间和其他特征同样符合光滑粒子流体动力学模拟的几何形状。在 $t \approx 0.7$ s 处，仍可检测到水柱与各通道中第一个弯道的碰撞，不过对于平缓的 45◦ S形曲线，其振幅非常低。45◦ S形曲线通道中的初次碰撞对应着非常小的入射角，因此粒子碰撞期间的能量损失极小。由此，流动加速并朝第二个弯道前进，同时以略大的角度撞击第二个弯道（这是由于从第一个弯道反射时的反射角所致），从而产生振幅更高的信号。相比之下，90◦ S形曲线几何形状在第一个弯道处的能量损失相对较大，因此会产生（相对）较强的地震信号；这是因为水冰界面的若干部分以最高约 45 度的入射角面对来流（例如在 $x \approx -0.1$ 和 $y \approx -0.3$ m 处）。然而，与标准的 90◦ 弯道通道不同，碰撞后流动仍保持一定的层流特征，因此能够继续加速并朝第二个弯道前进，从而在地震波形中形成一个次级峰值。

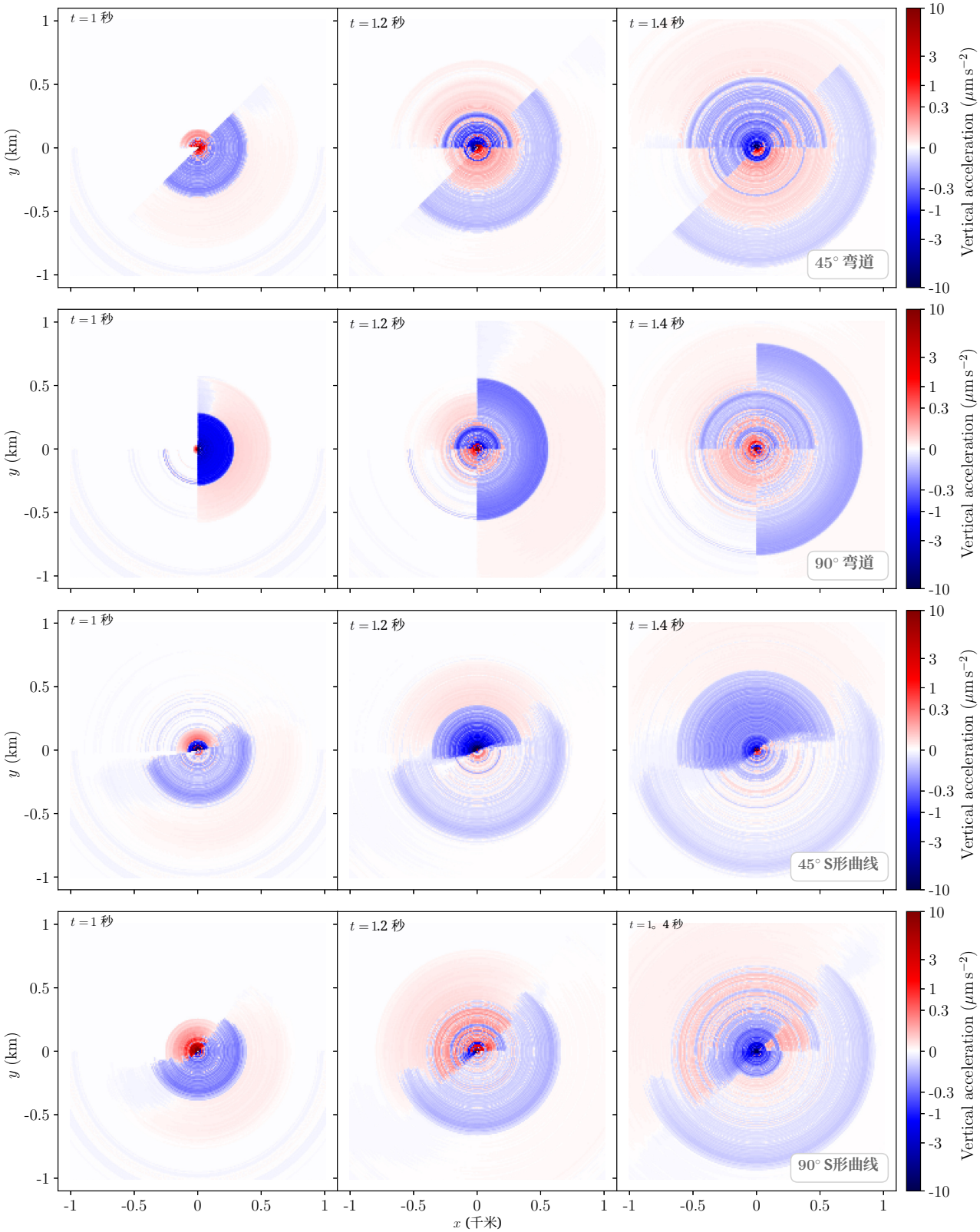

图2。 在给定通道上方 2 米处的平坦表面（xy平面）各网格位置模拟的地震波场，其中流动沿 x正方向进行。图中显示加速度的 z分量（垂直分量）：红色表示正加速度，蓝色表示负加速度，白色表示无信号的位置。色标按 $\operatorname{sgn} a\sqrt{|a|}$进行拉伸，以便观察距离碰撞较远处的数值（相当于辐射模式几何形状的 $1/r$缩减）。图中展示了第一个弯道发生碰撞（$t \approx 0$。75 秒）后三个时刻的地震波场快照：$t = 1$、$t = 1$。2 和 $t = 1$。4 秒。顶行：45° 弯道第二行：90° 弯道，第三行：45° S形曲线，以及底行：90° S形曲线。

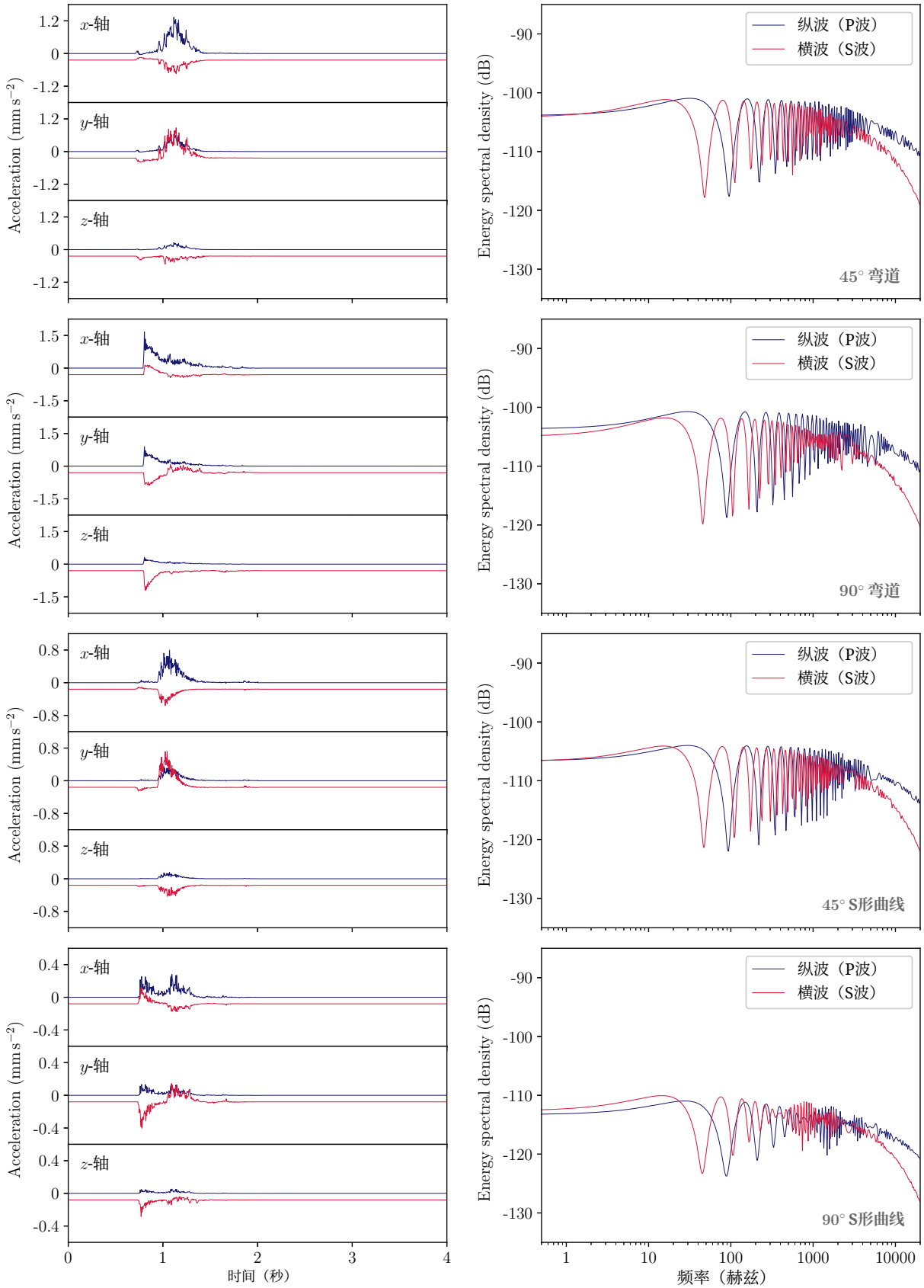

图3. 左列： 位于 (x, y, z) = (10, 5, 2) m 处的地震仪所记录的合成地震波加速度振幅随时间的变化， $t = 0$ 为模拟开始时刻。图中显示了信号的 x、y 和 z 分量，分别对应纵波（P波，蓝色）和横波（S波，红色）；为便于观察，后者偏移了峰值振幅的 −20%。流体动力学模拟仅运行至 $t = 2$ s，但为与后续图保持一致，我们展示了更长的时间序列。右列： 同一碰撞中信号全部三个笛卡尔分量的能量谱密度。通道几何形状为：顶行： 45° 弯道，第二行： 90° 弯道，第三行： 45° S形曲线，以及底行： 90° S形曲线。

4.3 谱密度

现在我们考察水冰界面上流体粒子碰撞产生的地震信号的谱特性。能量谱密度和功率谱密度均不具有对所假设碰撞持续时间的不变性。相比之下，加速度平方谱密度对碰撞持续时间和模拟分辨率均不变，但与能量谱密度和功率谱密度相差一个近似恒定的因子。因此，我们基于地震仪位置处时变力的傅里叶变换 $\mathrm{F}n(\boldsymbol{r},\ \xi)$（见公式 21），推导加速度平方谱密度的表达式。即，

$$S(\boldsymbol{r},\xi)=\frac{1}{(\varrho\delta V)^2}|\mathcal{F}_n(\boldsymbol{r},\xi)|^2\,, \tag{31}$$

由于作用力的纵向分量和横向分量具有不同的弱频散特性和衰减关系，因此需要分别考虑。本文采用分贝刻度表示加速度平方谱密度，参考谱密度为 $1\ (\mathrm{m\ s^{-1}})^2$ 赫兹$^{-1}$，以便同时表示能量谱密度和功率谱密度；因此，下文将这一量称为能量谱密度。

位于 $(x,\ y,\ z)=(10,\ 5,\ 2)$ m 处的地震仪检测到的地震波形能量谱密度，显示在图3中对应四种通道几何形状的右侧面板中。对于每种通道几何形状，地震波传递至地震仪的总能量相当，不过，来自 90◦ S形曲线的能量显著较低。这与这种通道几何形状下传至地震仪的加速度幅值整体较低相符。

纵波（P波）携带的能量与横波（S波）相当或更多，这符合假定的横波与纵波振幅比 $\Lambda=0$◦5。然而，P波和S波携带的能量占比强烈依赖于频率：在 $\xi<100\,\mathrm{Hz}$ 的频率下，两者携带的能量相差不到两倍；但超过 $\xi>10\,\mathrm{kHz}$ 后，S波携带的能量仅占波总能量的十分之一。这是由非弹性冰高度依赖频率的能量损失（即衰减）造成的（第 1.4 节）；随着与碰撞位置的距离增加，这种损失会更加显著。我们将在第 5 节讨论能量谱密度的这类变化，以及由此导致的波包形状变化。

4.4 地震波场的方向依赖性

通过为每种冰川表面水道几何形状生成合成信号，研究地震波诱发加速度的方向依赖性；地震仪位置分布在围绕每种冰川表面水道几何形状、半径为10 m的球面上。我们计算方位角从 $\phi=-180$◦ 到180◦（即从正 x-轴朝正 y-轴方向）以及倾角从 $\theta=-90$◦ 到90◦（即从正x-轴朝正 z-轴方向）时的纵波（P波）和横波（S波）加速度时间平均值；方位角和倾角方向的网格间距均设为5度。加速度时间平均值根据三分量加速度时间序列的幅值计算，时间范围为从 $t\approx0.7$s的初至开始、持续一秒（假定所有角度均采用这一时刻作为初至时间）。

图4（上）显示了45◦ 弯道通道中水流产生的地震波加速度时间平均幅值随地震仪位置的变化。与初次碰撞和二次碰撞相关的P波加速度出现两个局部最大值，分别位于$(\phi,\theta)=(-15$◦$,-50$◦$)$和$(0,85$◦$)$，振幅分别为$0.03\ \mathrm{mm\ s^{-2}}$和$0.13\ \mathrm{mm\ s^{-2}}$。因此，与能量更大的二次碰撞相关的半平面具有最高的总加速度，不过随着距P波峰值越来越远，加速度幅值逐渐降低，因为越来越多的地震波能量由较弱的横波携带。由于产生机制彼此正交，S波的振幅峰值形成圆环，距两个P波峰值的角距离均为90◦；初次碰撞和二次碰撞产生的圆环在约$(70$◦$,50$◦$)$处重合成一条水平带，因此对两次碰撞取平均后，该区域的S波加速度较高（$0.06\ \mathrm{mm\ s^{-2}}$）。

其他三种通道几何形状中碰撞产生的时间平均加速度的角度依赖性见图4下方的三个面板。90◦ 弯道水道的模式在定性上与45◦ 弯道相同，不过，此时初次碰撞产生的P波峰值（$0.10\ \mathrm{mm\ s^{-2}}$）强于二次碰撞产生的峰值（$0.06\ \mathrm{mm\ s^{-2}}$）。两个峰值的位置均向“左侧”偏移至$(\phi,\theta)=(-10$◦$,\ -20$◦$)$和$(0,105$◦$)$，二者间隔略小于45◦ 弯道几何形状中的间隔。因此，从约 $\theta=0$ 到90◦形成一条垂直带，其中总加速度最高（图4上方的白色垂直条带）。与此同时，两种S形弯道水道中P波峰值的位置及相对振幅总体上与45◦ 弯道几何形状中的情况一致。值得注意的是，90◦ S形弯道水道的地震波场与90◦ 弯道几何形状的情况截然不同。90◦ S形弯道水道中的层流，使得时间平均加速度（位于第二个弯道处）几乎是湍流更强的90◦ 弯道水道（位于第一个弯道处）的两倍。

5 讨论

5.1 局限性

本文提出的用于追踪流体粒子碰撞的冲量捕捉法，可能难以表征某些类型的流动，因为该方法要求粒子在边界的某个临界长度尺度范围内穿过一段名义距离（见第 3.2 节）；这一假设通过滤除能量较低、振幅远小于 δl 的粒子振荡（围绕其平衡位置），大幅提高了算法的计算效率。因此，在考察能量较低的流体运动（如静水中的压力波），或粒子以极小角度碰撞、或平行于冰面运动（湍流中可能出现这种情况）时，这项技术的实用性较低。此外，在某些高能流动中（例如 90◦ 弯道通道），反射速度较低的流体粒子可能会“屏蔽”界面，使其免受后续高能粒子碰撞的影响；也就是说，这些屏蔽粒子会因碰撞而振荡，并以压力波的形式将能量传递给边界。在一定程度上，可以通过引入大量间距很小的临界长度尺度（例如，范围从 $2\delta l$ 到 $3\delta l$）来处理此类情况，从而无论粒子的平衡位置如何，都能同样有效地捕捉小振幅振荡，并因此不再需要低能量滤波器来防止粒子网格上的碰撞被不均匀地选取。

这样便能够捕捉粒子之间极低能量的相互作用，包括静压力所导致的相互作用，但代价是在地震波计算中增加数百万次碰撞（而本研究中约为一万次）。这些低能粒子运动和压力波动也可以通过修改 SPH代码，使其直接输出相关数据来捕捉。

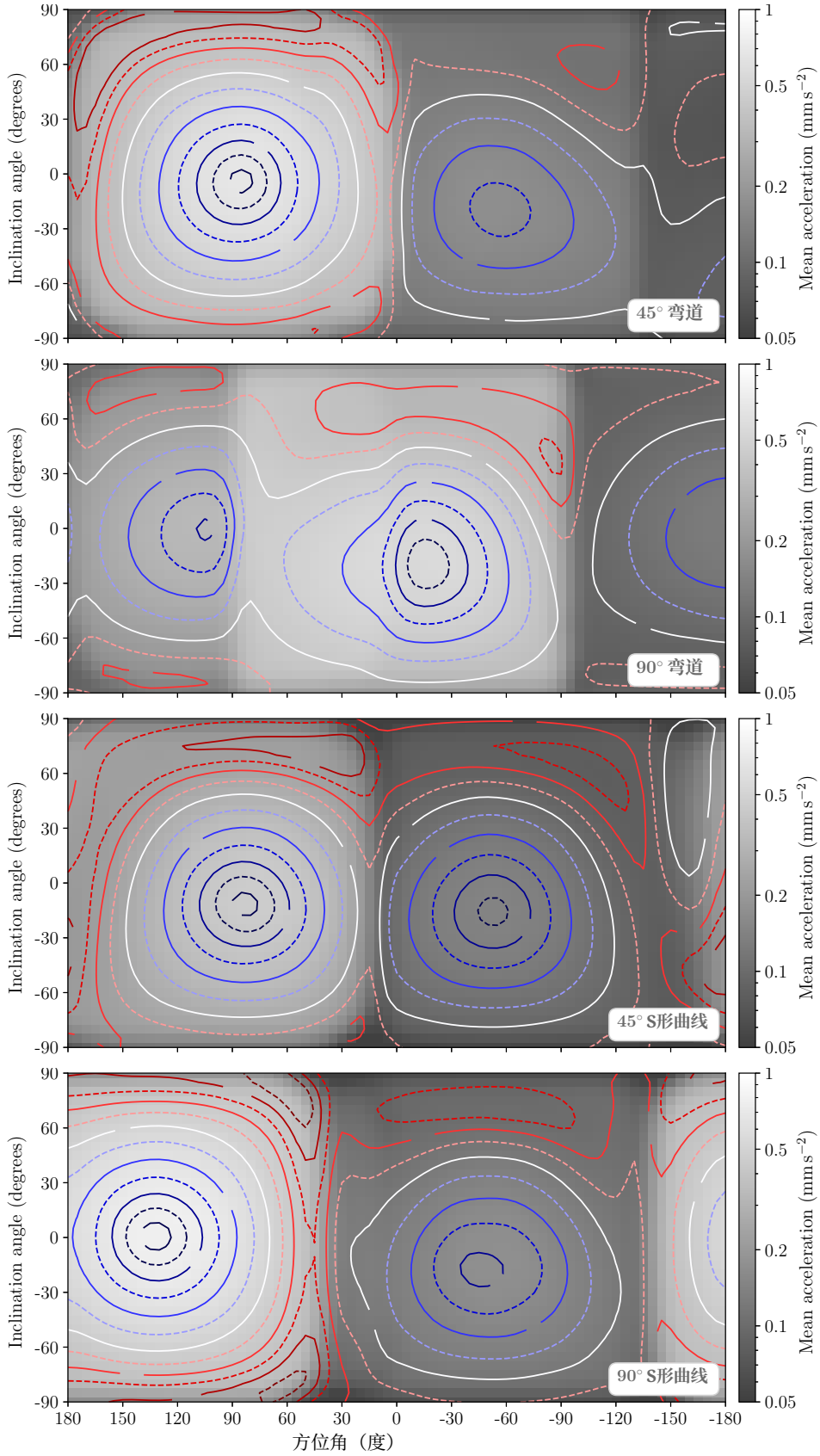

图4. 在两个弯道中心外10米处检测到的地震波加速度时间平均幅值随方位角（从正 x轴到正 y轴的方向，ϕ）和倾角（从正 x轴到正 z轴的方向，θ）的变化。阴影表示在地震仪处测得的信号 x、 y 和 z 分量的加速度平方和开方后的平均（时间平均）幅值。等值线表示纵波（P波）平均加速度与横波（S波）平均加速度之比，每条等值线均标注了相应的倍数（以2为一个因子）。通道几何形状如下：顶行： 45° 弯道，第二行： 90° 弯道，第三行： 45° S形曲线，以及底行： 90° S形曲线。

随时间变化的流体施加于每个边界粒子上的力。对于由高能碰撞主导的流体流动（例如本研究所探讨的情况），增加模拟数据点的数量（即约1300万个冰粒子的时间序列）会使计算时间显著长于本研究采用的冲量捕捉法。

我们注意到，采用这一建模框架生成的地震信号可能会受到所选边界实现方式的影响，例如选择自由滑移边界（如本研究所采用的方式）或无滑移边界。尽管这类选择对整体流动的影响可能有限（见Valizadeh和Monaghan，2015年），但流固界面处粒子的行为对这些选择可能更为敏感。SPH参数的选择是否会因计算方案而引入伪影（而非真实水体特性所预期产生的伪影），仍有待未来研究。

5.2 位移和速度时间序列

第2.2节和第2.3节所述的方法会生成加速度时间序列，而位移和速度时间序列可能更便于与观测到的短周期或宽频带地震记录进行比较。我们提醒，不要简单地对加速度时间序列进行数值积分（例如使用观测地震学库进行积分），因为时间平均是在一个长于信号周期的时间窗口内进行的。因此，我们建议采用以下方法。

位移和速度时间序列的振幅高度取决于假定的碰撞持续时间 τ（第2.1节）。也就是说，将第n次流体粒子碰撞（公式10）期间的位移在持续时间为 $\delta t \gg \tau_n$ 的时间采样内取时间平均，可得：

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{\eta}}_n(t) &= \frac{1}{\delta t}\int_t^{t+\delta t} \boldsymbol{\eta}_n(t^*)dt^* \\ &= \frac{1}{\delta t}\int_{t_n}^{t_n+\tau_n} \boldsymbol{\eta}_n(t^*)dt^* \\ &\approx \frac{\pi\tau_n}{2\delta t}\|\boldsymbol{\eta}_{0,n}\|,\end{aligned} \tag{32}$$

其中，第二行（公式32）为便于论证，假设碰撞完全发生在单个时间采样内；最后一个近似等式给出忽略阻尼时碰撞期间的平均位移。然而，$\|\boldsymbol{\eta}_{0,\ n}\| = \tau_n\|\boldsymbol{v}_{0,\ n} - \boldsymbol{v}_{\bigstar,\ n}\|/\pi$，因此位移的时间平均为：

$$\bar{\boldsymbol{\eta}}_n(t) \approx \frac{\tau_n^2}{2\delta t}\|\boldsymbol{v}_{0,n} - \boldsymbol{v}_{\star,n}\|. \tag{33}$$

因此，位移时间序列与碰撞持续时间的平方成正比。同样，我们可以证明，速度时间序列与碰撞持续时间成线性关系。然而，常数因子的作用是，尽管位移和速度的大小未知，其波形的其他特征仍能准确呈现。

展示了为45。弯道冰川表面水道几何形态生成的合成三分量位移和速度波形数据的特征（图5）。这些速度时间序列与典型的实测宽频带地震记录相当。

5.3 波形特征

5.3.1 随沟道几何形态变化的特征

如前所述（第4.2节），沟道几何形态会显著影响时间序列的外观。与S形弯曲河道（图3）相比，沟道中的急弯会产生峰值更尖锐的加速度包络形状；而沟道各连续区段之间的角度不同，则会使45。弯道和S形弯曲河道两种情形下的第二个峰值都更高。因此，这个例子展示了分析来自距冰面水道较近、略微嵌入冰川表面的地震仪位置处的信号时，应考虑的各种波形属性。曲流在冰面溪流中很常见，形成急弯和小型跌水潭也有其合理性（Knighton，1981；Karlstrom 等，2013年；St Germain 和 Moorman，2016年）。

5.3.2 随距离变化的特征

地震体波的特征会因衰减和弱频散而随距离变化。对于弯道角度为 45。的冰川表面水道，非弹性冰中因高频谱成分衰减而导致的能量损失随距离增加（第4.2节）；图6展示了在距水道距离逐渐增加的三个地震仪位置处所观测到的这一变化。纵波（P波）的加速度振幅在此距离范围内降低了三倍（图6，左上），而横波（S波）的振幅则降低了一个数量级（图6，左下）。这些地震波的能量谱密度见图6（右列）；对于冰川表面水道中的两种波型，能量谱密度函数的高频截止频率都随距离增加而逐渐降低。然而，即使在最低频率处，S波能量也额外降低了约一半，这解释了加速度振幅为何下降更多。随着距离进一步增加，观测到的地震波形特征还会因频散而发生变化（图 7），不过在实际情况下，地震信号传播较远时，冰中的结构或其他介质可能会改变波形。无论如何，我们的模型结果表明，对于震源周围角位置处以S波信号为主的地震仪而言，仅仅相距2千米，波形特征就可能发生显著变化。

5.3.3 正在进行的工作

本文提出了一个两部分建模框架，将 SPH 模拟与地震波传播相结合，并应用于一组简单的通道几何形状，以代表狭窄的冰川表面流。该方法有望应用于正在进行的研究，以考察更多冰川表面流几何形状产生的信号，以及冰内和冰下水道流动产生的信号。随着几何形状及其相关流动变得更加复杂，该框架的灵活性将发挥优势，使引发地震扰动的流体运动能够根据具体情况进行调整。如前所述，共振和沉积物输运过程在某些情况下也很重要，可通过改进 SPH 模拟或利用先前对这些机制的研究成果，将它们纳入我们的建模之中。如果需要了解更细微的信号产生过程，例如流体中的压力波动会产生影响时，则可以

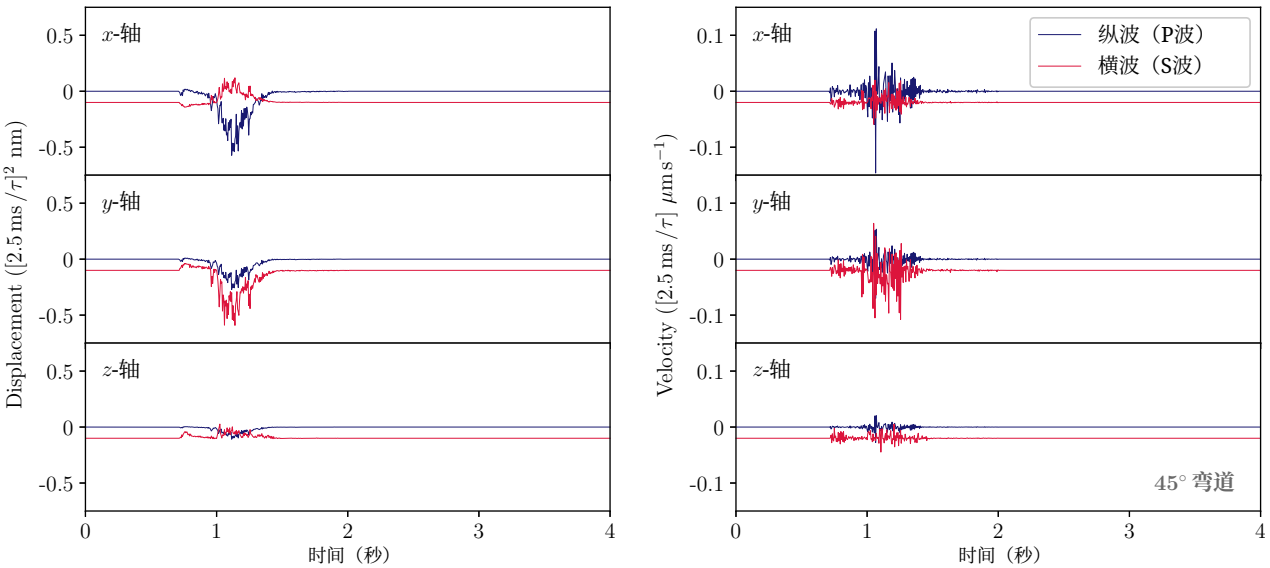

图5. 左：在设于（x，y，z）=（10，5，2）m处的地震仪上测得的、由水流经过 45° 弯道几何形状通道产生的合成地震波位移。蓝色表示波的纵波（P波）分量，红色表示横波（S波）分量；为便于观察，两者错开 −0。1nm。右：相同沟道几何形态和地震仪位置处的速度。为便于观察，横波错开 −0。02 μms^{-1}。位移和速度均随假设的碰撞持续时间缩放（加速度则不同）；因此，这两个量的单位均表示为碰撞持续时间 τ的函数。

使用该框架中的 SPH 部分来追踪水冰相互作用的细节，不过计算时间会相应增加。

该框架所支持的模拟还有一个更广泛的目标，即通过波形属性推动对冰川过程的探索。因此，该框架应能通过比较从冰川环境中部署的仪器所获取的地震记录中提取的波形属性模式，帮助人们获得洞见；提取方法例如应用于地震记录的无监督学习。

6 结论

本文介绍了一种建模框架，旨在加深对冰川环境中流动水产生的体波信号的理解。该框架分为两部分：（1）采用光滑粒子流体动力学（SPH）方法模拟水体运动，并将其约束在通道或类似结构中；（2）对流动水撞击通道侧壁所引起的粒子运动进行建模，并模拟随后发生的波传播。

该建模框架中的 SPH 部分可配置为模拟各种通道或其他几何结构中的水体运动，并有效生成可重复使用的碰撞数据集。随后，框架的第二部分会利用这些碰撞数据。这有助于提高计算效率，例如，可以据此探索冰体不同位置处波形的特征。该框架具有很强的灵活性，尤其是波传播部分可以使用其他软件包的标准输出，而不必使用本研究所采用的软件包来生成输入流体动力学模拟。

地震波建模的设计旨在生成不受流体动力学模拟的时间和空间分辨率以及假定碰撞时间尺度影响的加速度波形。我们还利用已识别碰撞的时变行为的傅里叶谱，以便考虑弱频散和衰减。本文提出的框架非常适用于高能碰撞（例如，在重力作用下流动的水），但不太适用于能量较低的相互作用（例如压力波或浅角度碰撞），因为为提高计算效率，我们会滤除这些流体粒子振荡。我们提出了对算法进行少量修改的方法，以便在未来的工作中根据需要捕捉此类流动产生的信号，不过运行时间可能会大幅增加。

我们发现，模拟体波包络或波形本身的特征（例如峰值数量、尖峰状或起伏状、高或中等峰值振幅、P 波振幅与 S 波振幅之比）取决于沟道几何形态的细节。与界面碰撞的角度尤其影响显著。模拟还捕捉到了传播效应造成的波形变化，因此，针对不同距离处地震仪位置生成的信号模拟，现在可用于正在开展的研究，与观测信号进行比较。该框架旨在增进对冰川环境中产生的地震信号特征及波形属性变化原因的理解。我们预计，这种计算能力将有助于未来在偏远冰川监测中识别相关过程及其变化。

致谢

本研究获澳大利亚研究理事会 Discovery Project DP210100834 资助，并得到澳大利亚政府南极科学合作倡议项目（SC）、ARC SRI 澳大利亚南极科学卓越中心以及塔斯马尼亚大学奖学金（JCM）的额外支持。

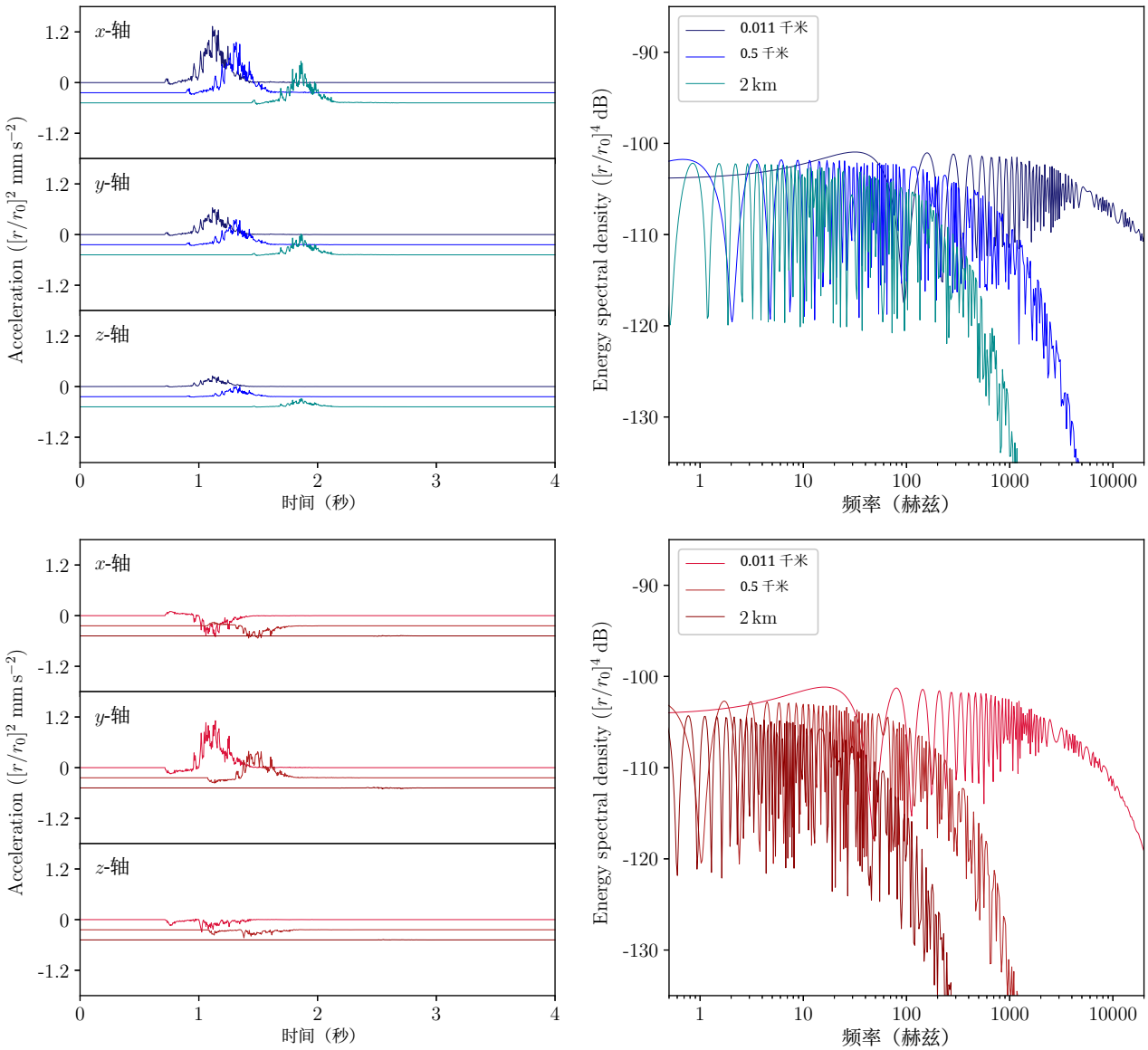

图6。 距 45° 弯道几何形状冰川表面水道不同距离处的波形特征（加速度振幅）和能量谱密度；地震仪位于（x，y，z）=（10，5，2）方向上，距水道中点参考位置分别为11.35、500和2000米，方位角为 ϕ = 26。6°，倾角为 θ = 11。3°（参见第4.2节）。为便于比较，图中加速度振幅和能量谱密度已去除$1/r^2$ 衰减项（缩放至 r_0 = 11。35米）；介质中的衰减和弱频散均已考虑。上：纵波（P波）；下：横波（S波）。

数据可用性

作者确认，支持本研究结论的数据可在本文中获取，相关代码和生成的数据产品已在 GitHub（github.com/rossjturner/seismicsph）公开。

参考文献

Aster, R. C. 和 Winberry, J. P.（2017年）。冰川地震学。《物理学进展报告》，80(12)：126801。Attewell, P. B. 和 Ramana, Y. V.（1966年）。岩石中波衰减和内摩擦随频率变化的关系。《地球物理学》，31(6)：1049–1056。Bass, R.、Rossberg, D. 和 Ziegler, G.（1957年）。冰的弹性常数。《物理学杂志》，149(2)：199–203。Batchelor, G. K.（2000年）。《流体动力学导论》。剑桥大学出版社。Bogorodskiy, V. V.（1964年）。冰晶的弹性模量。《声学杂志》，10：152–55。Cole, H. R.（1948年）。《水下爆炸》。普林斯顿大学出版社。

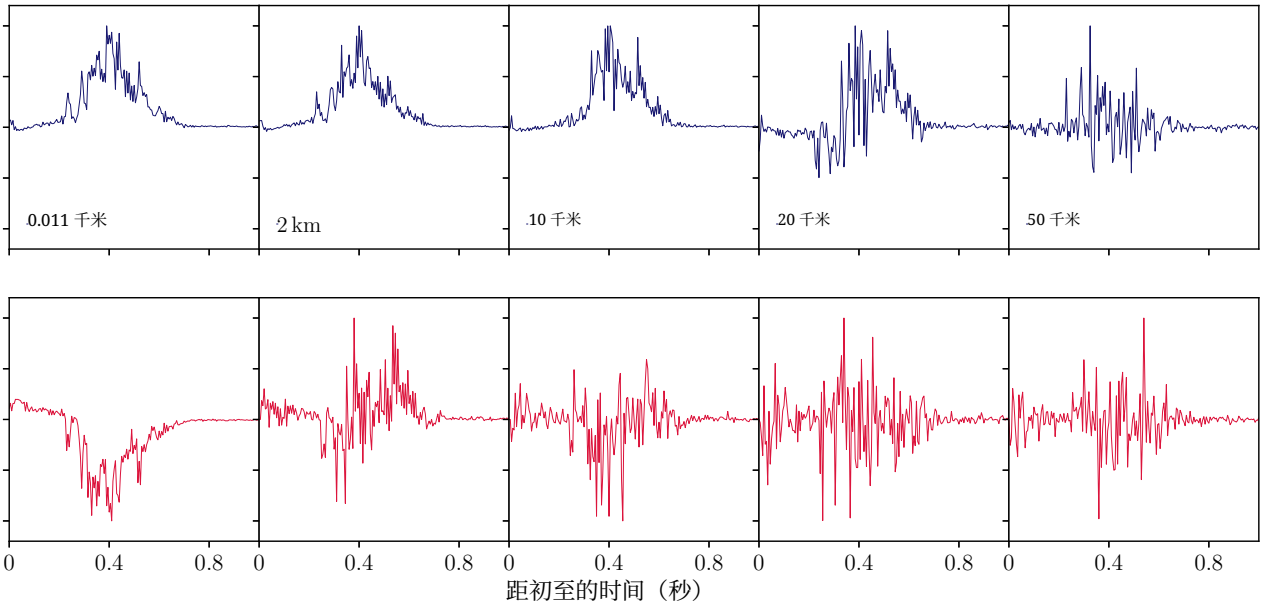

图 7. 弯道几何形状冰川表面水道中波形的弱频散；地震仪位于 $(x, y, z) = (10, 5, 2)$ 方向，距离分别为 11.35 m、2、10、20 和 50 千米。波形加速度振幅（x-分量）缩放至 1，时间轴经过平移，使初至时刻为零。上：纵波（P波）；下：横波（S波）。

Dantl, G.（1969年）。冰的弹性模量。载于 Riehl, N.、Bullemer, B. 和 Engelhart, H. 编，《style id='1'>冰物理学：国际冰物理学研讨会论文集，第223–230页。全会出版社。

Engel, O. G. (1955). 水滴与固体表面的碰撞。美国国家标准局研究杂志, 54:281. Fox-Kemper, B., Hewitt, H., Xiao, C., Aðalgeirsdóttir, G., Dri- jfhout, S., Edwards, T., Golledge, N., Hemer, M., Kopp, R., Krinner, G., Mix, A., Notz, D., Nowicki, S., Nurhati, I., Ruiz, L., Sallée, J.-B., Slangen, A., and Yu, Y. (2021年). 第9章：海洋、冰冻圈与海平面变化。载于 Masson-Delmotte, V., Zhai, P., Pirani, A., Connors, S., Péan, C., Berger, S., Caud, N., Chen, Y., Goldfarb, L., Gomis, M., Huang, M., Leitzell, K., Lonnoy, E., Matthews, J., Maycock, T., Waterfield, T., Yelekçi, O., Yu, R., and Zhou, B. 编，《style id='3'>《2021年气候变化：物理科学基础》。政府间气候变化专门委员会第六次评估报告第一工作组的贡献》，第9章，第1211–1362页。剑桥大学出版社，剑桥，英国及美国纽约。doi:10.1017/9781009157896.011. Gammon, P. H., Kiefte, H., Clouter, M. J., and Denner, W. W. (1983年). 通过布里渊光谱测定人工冰与天然冰样品的弹性常数。《冰川学杂志》, 29(103):433–460. Gimbert, F., Tsai, V. C., and Lamb, M. P. (2014年). 河流湍流产生地震噪声的物理模型。《地球物理研究杂志：地球表层》, 119(10):2209–2238. Gomez-Gesteira, M., Rogers, B. D., Dalrymple, R. A., and Crespo, A. J. C. (2010). 自由表面流经典光滑粒子流体动力学的最新进展。《水力学研究杂志》, 48(sup1):6–27. Guerin, G., Mordret, A., Rivet, D., Lipovsky, B. P., and Minchew, B. M. (2021年). 南极洲惠兰斯冰流滑移事件的摩擦起源。《地球物理研究快报》, 48(11):e2021GL092950. Hsu, L., Finnegan, N. J., and Brodsky, E. E. (2011年). 风暴事件期间河床推移质输运的地震特征。《地球物理-

《物理研究快报》, 38(13). Hudson, T. S., Brisbourne, A. M., White, R. S., Kendall, J. M., Arthern, R., and Smith, A. M. (2020年). 冰体破裂：识别水力作用引发的冰裂隙。《地球物理研究快报》, 47(21):e2020GL090597. Jona, V. F. and Scherrer, P. (1952年). 冰单晶的弹性常数。《*Helvetica Physica Acta*》, 25(1-2):33–54. Karlstrom, L., Gajjar, P., and Manga, M. (2013年). 冰面溪流中的曲流形成。《地球物理研究杂志：地球表层》, 118(3):1897–1907. Knighton, A. D. (1981). 挪威 Austre Okstindbreen 冰面溪流的河道形态和流动特征。《北极与高山研究》, 13(3):295–306. Kohnen, H. (1969 年). 冰中弹性纵波的吸收，《极地研究》。《极地研究》, 39(1):269–275. Kohnen, H. and Bentley, C. R. (1971). 伯德站的地震折射和反射测量。《美国南极期刊》, 6(4):126–127. Kohnen, H. and Bentley, C. R. (1973). 南极洲“伯德”站的地震折射和反射测量。《冰川学杂志》, 12(64):101–111. McCarthy, C., Takei, Y., and Hiraga, T. (2011年). 宽频率范围内衰减和频散的实验研究：2. 多晶材料的普适标度。《地球物理研究杂志：固体地球》, 116(B9). McDonal, F. J., Angona, F. A., Mills, R. L., Sengbush, R. L., Nostrand, R. G. V., and White, J. E. (1958年). 皮埃尔页岩中剪切波和压缩波的衰减。《地球物理学》, 23(3):421–439. Monaghan, J. J. (1992). 光滑粒子流体动力学。《天文学与天体物理学年度评论》, 30(1):543–574. Monaghan, J. J. (2005). 光滑粒子流体动力学。《物理学进展报告》, 68(8):1703–1759. Nakaya, U. (1958年). 格陵兰冰盖中雪和冰的黏弹性性质。《北海道大学理学部学报。第*2*辑，物理学》, 5(3):119–164.

Neumeier, J. J. (2018年). 温度范围为50 K–273 K时 H_2O I h 型冰的弹性常数、体积模量和压缩性。《物理与化学参考数据》, 47(3):033101. Nye, J. F. (1957年). 《晶体的物理性质：用张量和矩阵表示》。牛津大学出版社。 Podolskiy, E. A. and Walter, F. (2016). 冰震学。《地球物理学评论》, 54(4):708–758. Pratt, M. J., Winberry, J. P., Wiens, D. A., Anandakrishnan, S., and Alley, R. B. (2014年). 惠兰斯冰流粘滑事件受接地线控制的地震和大地测量学证据。《地球物理研究杂志：地球表层》, 119(2):333–348. Proctor, T. M. (1966年). 单晶冰中的低温声速。《美国声学学会杂志》, 39(5A):972–977. Provost, F., Hibert, C., and Malet, J.-P. (2017年). 使用随机森林监督分类器自动分类内生滑坡地震活动。《地球物理研究快报》, 44(1):113–120. Ramachandran, P., Puri, K., Bhosale, A., Adepu, D., Muta, A., Negi, P., Govind, R., Sanka, S., Pandey, P., Kaushik, C., Kumar, A., Sen, A., Kaushik, R., Patil, M., Tavker, D., Menon, D., Kurap- ati, V., Sebastian, A., Dutt, A., and Agarwal, A. (2019年). PySPH：一个基于 Python 的光滑粒子流体动力学框架。 Robin, G. d. Q. (1958年).《冰川学 *III*：地震勘测及相关研究》。挪威—英国—瑞典南极考察队，1949—52年：科学成果。挪威极地研究所。 Roeoesli, C., Helmstetter, A., Walter, F., and Kissling, E. (2016年（a）). 融水对格陵兰冰盖底部附近深部粘滑冰震的影响。《地球物理研究杂志：地球表层》, 121(2):223–240. Roeoesli, C., Walter, F., Ampuero, J.-P., and Kissling, E. (2016年（b）). 冰川竖井地震颤动。《地球物理研究杂志：固体地球》, 121(8):5838–5858. Roeoesli, C., Walter, F., Husen, S., Andrews, L. C., Lüthi, M. P., Catania, G. A., and Kissling, E. (2014年). 在格陵兰冰盖消融区检测到的持续地震颤动和冰震。《冰川学杂志》, 60(221):563–575. Schmandt, B., Aster, R. C., Scherler, D., Tsai, V. C., and Karlstrom, K. (2013年). 通过大峡谷河畔地震与次声监测检测到的多种河流过程：一次人工控制洪水。《地球物理研究快报》, 40(18):4858–4863. St Germain, S. L. and Moorman, B. J. (2016年). 脉动冰面溪流的发育。《冰川学年刊》, 57(72):31–38. Stein, S. and Wysession, M. (2003年).《地震学、地震与地球结构导论》。布莱克威尔出版社。 Traetteberg, A., Gold, L. W., and Frederking, R. (1975年). 冰的杨氏模量的应变率和温度依赖性。《*IAHR* 第三届国际冰问题研讨会论文集，国际水环境工程与研究协会（*IAHR*）》, pages 479–486. Tsai, V. C., Minchew, B., Lamb, M. P., and Ampuero, J.-P. (2012年). 河流泥沙输运产生地震噪声的物理模型。《地球物理研究快报》, 39(2). Turner, R. J., Latto, R. B., and Reading, A. M. (2021年). 用于事件检测和地震属性计算的 ObsPy 库：为自动分析准备波形。《开放研究软件杂志》, 9(1). Valizadeh, A. and Monaghan, J. J. (2015年). 弱可压缩 SPH 固壁模型研究。《计算物理学杂志》, 300:5–19. Walter, F., Roux, P., Roeoesli, C., Lecointre, A., Kilb, D., 和 Roux, P.-F.（2015年）。利用冰川地震活动测量相速度并进行格林函数反演。《国际地球物理学杂志》，201（3）：1722–1737。White, J. E.（1966年）。静摩擦作为地震衰减的震源。《地球物理学》，31（2）：333–339。

附录A：冰川冰中的地震波

冰川冰的非弹性可由以下因素解释：（1）原子尺度上六方晶体结构中的原子间势；或（2）宏观尺度上冰的颗粒性质。冰的颗粒结构源于冰形成过程中出现的成核位点，导致晶界处的晶格存在薄弱点。在这些晶界上冰晶的滑移主导了冰川冰在地震波频率下的弹性性质，因此本节将重点讨论这一现象。现有文献主要考察冰在较高频率下的响应，正如我们在第1.4节中将详细讨论的那样。

A1 冰川冰的杨氏模量

Traetteberg 等（1975）通过施加压缩载荷，确定了在 -10◦C 下人工冰和天然形成的冰的应力-应变关系。杨氏模量（由应力/应变得出）与材料中所施加应力的弛豫时间密切相关；他们测得的弛豫时间对应于 0.0001-1.5 赫兹的频率范围。与此同时，Nakaya（1958）通过测量多晶冰在 200-600 赫兹下的共振频率，测定了格陵兰 Tuto 隧道冰在一系列温度下的杨氏模量。在 MHz-GHz 频率下，弹性性质主要由冰晶内部的原子间势决定；例如，Gammon 等（1983）使用布里渊光谱（10 GHz）测量了 -16◦C 下冰川冰的杨氏模量，为 $E = 9.$ 332 GPa（相当于 $E = 9.254$ GPa（温度为 -10◦C 时）。

我们采用条件线性函数，对参考温度为 $T\mathrm{ref} = -10$◦C 时杨氏模量的频率依赖性进行建模。即，

$$E(\xi, T_{\mathrm{ref}}) = \begin{cases} 6.041 + 0.966 \log_{10}\xi \text{ GPa}, & \xi < 2120\,\text{Hz} \\ 9.254 \text{ GPa}, & \xi \geqslant 2120\,\text{Hz} \end{cases}, \quad \text{(A.1)}$$

其中，频率 ξ 以赫兹为单位；对于 $\xi < 6 \times 10^{-7}$ Hz，该表达式会得出非正弹性模量，因此不应将其大幅外推至地震波频率范围之外。拟合结果和文献测量数据见图 A1。

高频下冰的弹性性质测量所采用的杨氏模量温度依赖性建模方法，遵循 Dantl（1969年，随后由 Gammon 等人于1983年采用）的方法。不过，我们将他们提出的温度修正函数形式拟合到 Traetteberg 等人（1975）的天然形成冰测量数据上，适用温度范围为 -39.5◦C 至 -10◦C。即，

$$E(\xi, T) = E(\xi, T_{\mathrm{ref}}) \frac{1 - aT}{1 - aT_{\mathrm{ref}}}, \quad \text{(A.2)}$$

其中温度 T 以摄氏度为单位， $a = 0$。0516 /◦C（参见 $a = 1$。418×10^{-3} /◦C 的高频拟合结果）。

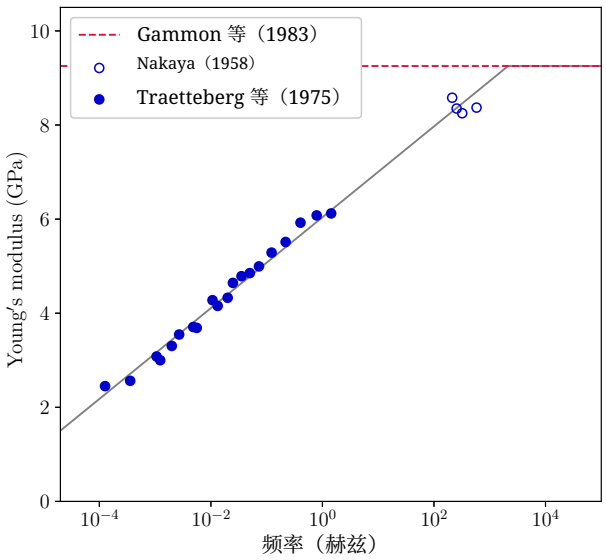

图 A1. 参考温度为 −10°C 时，冰川冰中杨氏模量的频率依赖关系。实心/空心圆表示 Nakaya（1958）和 Traet- teberg 等人（1975）的结果。Gammon 等人（1983）的布里渊光谱测量结果以红色虚线表示，为杨氏模量提供了近似上界。灰线是在所示频率范围内对这些测量结果进行分段线性函数拟合所得。

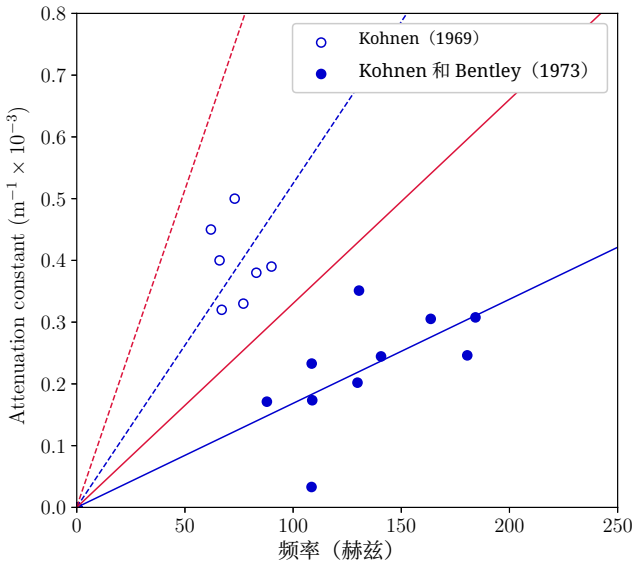

图 A2. 冰中纵波衰减常数对频率的依赖关系。实心圆表示 Kohnen 和 Bentley（1971）的结果，空心圆表示 Kohnen（1969）的早期测量结果；这些数据分别用蓝色实线和虚线拟合为线性函数。与这些作者的测量结果相对应的横波衰减常数关系以红色表示。

A2 冰川冰中地震波色散

Kohnen 和 Bentley（1973）利用西南极洲伯德站附近的地震折射测量，确定了在冰川冰中传播的横波（S波）和纵波（P波）的相速度与密度之间的关系。这些速度之比用于在地震波频率下求得泊松比（参见方程 3a 和 3b），结果为 $\sigma = 0$。33。除粒雪层顶部几米范围内的冰外，在 Kohnen 和 Bentley（1973）的分析中所考虑的各种密度下，泊松比的数值均相近。因此，我们假设该参数为常数，同时指出，我们的建模仅限于温度和波频率至少在一定程度上具有可比性的情况。

本文通过 S 波和 P 波的波数对地震波的频散进行参数化。它们与泊松比和杨氏模量的关系如下：

$$k_p(\xi, T) = 2\pi\xi \left[\frac{1.482 E(\xi, T)}{\varrho(T)} \right]^{-1/2} \tag{A.3a}$$

$$k_s(\xi, T) = 2\pi\xi \left[\frac{0.376 E(\xi, T)}{\varrho(T)} \right]^{-1/2}, \tag{A.3b}$$

其中，$\varrho(T = 0\text{°C}) = 916\,\text{kg m}^{-3}$ 是大气压下冰的密度。计算波数的导数是对公式 17 中的频散关系进行泰勒级数近似所必需的。也就是说，

$$\frac{\partial k_p(\xi, T)}{\partial \xi} = \left(2\pi - \frac{\pi\xi}{E(\xi)} \frac{\partial E(\xi)}{\partial \xi} \right) \left[\frac{1.482 E(\xi, T)}{\varrho(T)} \right]^{-1/2} \tag{A.4a}$$

$$\frac{\partial k_s(\xi, T)}{\partial \xi} = \left(2\pi - \frac{\pi\xi}{E(\xi)} \frac{\partial E(\xi)}{\partial \xi} \right) \left[\frac{0.376 E(\xi, T)}{\varrho(T)} \right]^{-1/2}, \tag{A.4b}$$

其中，频率相关弹性模量在 the reference temperature, $T_{\text{ref}} = -10\text{°C}$, is given by:

$$\frac{\partial E(\xi, T_{\text{ref}})}{\partial \xi} = \begin{cases} \frac{0.419}{\xi}\ \text{GPa s}, & \xi < 2120\,\text{Hz} \\ 0\ \text{GPa s}, & \xi \geqslant 2120\,\text{Hz} \end{cases}. \tag{A.5}$$

A3 冰川冰中地震波的衰减

研究发现，颗粒介质中的地震波衰减与波幅无关，与波频率成线性正比，并取决于冰晶边界处的静摩擦和动摩擦系数（Attewell 和 Ra- mana，1966年；White，1966年）。Kohnen 和 Bentley（1971）利用伯德站附近的地震折射测量，研究了 P 波的衰减（这是包括前一节所述研究在内的一系列出版物之一）。他们的测量结果（波段为 80–180 赫兹）显示，衰减常数与波频率之间呈线性关系，形式为 $\alpha_P(\xi) = (0.15\xi + 3) \times 10^{-5}\,\text{m}^{-1}$。然而，此前在南极和格陵兰冰盖上进行的单色测量（例如 Robin，1958年；Kohnen，1969年）发现，衰减常数约为该关系预测值的两倍。因此，我们还考虑了一种线性关系，其比例经过调整，以拟合 Kohnen（1969年）在五个站点的测量结果。图 A2 对比展示了这两种拟合。由于单一温度下的测量结果差异很大，我们不考虑温度对衰减常数的依赖性。

与此同时，S波的相速度低于P波，因此单位长度内的振荡次数更多，与每个冰晶粒边界的相互作用也更强（$\propto 1/v$），从而导致波幅衰减得更快。S波与P波的相速度之比与频率无关（参见方程 A.3a 和 A.3b）；因此，我们预计冰川冰中S波的衰减常数将比测得的P波值大 $\alpha_s/\alpha_p = 1$。99。无论如何，鉴于对于典型地震波而言，衰减常数的量级为 10^{-4}m^{-1}

频率下，对于至少 10 千米以内的距离，我们预计这一近似不会对结果造成实质性影响。图 A2 展示了S波衰减常数与频率相关的关系，并与P波测量结果进行了比较。

下文总结了本文用于计算S波和P波频率相关衰减常数的表达式。即：

$$\alpha_p(\xi) = (0.15\xi + 3) \times 10^{-5}\,\mathrm{m}^{-1} \tag{A.6a}$$

$$\alpha_s(\xi) = (0.30\xi + 5.96) \times 10^{-5}\,\mathrm{m}^{-1}\,, \tag{A.6b}$$

其在逆傅里叶变换的泰勒级数展开中所需的导数如下：

$$\frac{\partial \alpha_p(\xi)}{\partial \xi} = 0.15 \times 10^{-5}\,\mathrm{m}^{-1}\,\mathrm{s} \tag{A.7a}$$

$$\frac{\partial \alpha_s(\xi)}{\partial \xi} = 0.309 \times 10^{-5}\,\mathrm{m}^{-1}\,\mathrm{s}\,. \tag{A.7b}$$

这些关系在数学上对任何频率范围都成立，但当然应将其用于接近推导这些关系时所采用的80-180赫兹测量频率范围。

本文使用Blackwell Scientific Publications的GJI LaTEX2e类文件编写。