arXiv:2304.00726v1 [math.AP] 3 Apr 2023

基于终端观测识别罗宾系数的收敛速率

SUBHANKAR MONDAL

ABSTRACT. 本文研究了如何根据温度分布的终端观测，识别抛物型偏微分方程中的罗宾系数（又称阻抗系数）。该问题是不适定的，即观测中的微小扰动可能导致解出现较大偏差。因此，为了获得稳定近似，我们采用蒂霍诺夫正则化。受 Engl 和 Zou（2000）工作的启发，我们提出一种弱源条件，并得到了 $O(\delta^{\frac{1}{2}})$ 的收敛率，这也是本文的主要目标，其中 δ 为观测数据的噪声水平。所得收敛率优于此前已知的一些结果。此外，所提源条件的优点在于，无需刻画建模算子的值域空间，就能获得上述收敛率；这与非线性算子的蒂霍诺夫正则化的一般收敛理论形成对比。在后者中，要通过刻画建模算子的 Fr´echet 导数之伴随算子的值域，才能得到相同阶的收敛性，而这对许多问题而言是一项颇具挑战的任务。

关键词：参数识别，罗宾系数，病态问题，正则化，源条件 2010年数学主题分类：35R25，35R30，46N10

1. 引言

设 $d \in \{2,3\}$ 和 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 是具有 Lipschitz 边界 $\partial\Omega$ 的有界区域。设 $\tau > 0$ 为固定值，并分别用 Ω_τ和 $\partial\Omega_\tau$表示集合 $\Omega \times [0,\tau]$和 $\partial\Omega \times [0,\tau]$。我们考虑偏微分方程

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in} \quad \Omega_\tau, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \gamma(x)u = g & \text{on} \quad \partial\Omega_\tau, \\ u(\cdot,0) = u_0 & \text{in} \quad \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $f \in L^2(0,\tau;\, L^2(\Omega))$ $g \in L^2(0,\tau;\, L^2(\partial\Omega))$ $\gamma \in L^\infty(\partial\Omega)$ 且 $u_0 \in L^2(\Omega)$。这里，对于巴拿赫空间 Y，我们使用记号 $L^2(0,\tau;\, Y)$ 表示所有取值于 Y 的可测函数 ϕ 在 $[0,\tau]$ 上构成的空间，且满足 $\int_0^\tau \|\phi(t)\|_Y^2 dt < \infty$。罗宾系数 γ 是表示边界 $\partial\Omega$ 上热交换的阻抗系数； ν 表示边界 $\partial\Omega$ 的外单位法向量。方程 (1.1) 的直接问题或正问题，是在已知阻抗系数 γ 以及输入数据 f、 g 和 u_0 的情况下，求满足 (1.1)（可能是在弱意义下）的 $u(x,t)$。正问题解的存在性是众所周知的。

系统 (1.1) 描述了热传导现象，其中阻抗系数表征界面上导热材料的热学性质，以及边界上的某些物理过程，例如腐蚀[2, 20]。因此，阻抗系数 γ 的取值在热成像中备受关注，例如核反应堆安全分析和航天飞机热防护 [3]。在实践中，由于区域 Ω 可能嵌入某个未知区域 [30]，无法通过直接测量确定阻抗系数 γ。因此，我们必须处理这样一个反问题：根据某些可用观测识别阻抗系数，例如，整个空间区域 [30], 上的终时刻观测、整个时间段内的部分狄利克雷边界观测 [2, 19],、整个空间边界上的时间积分观测 [14, 23], ，或整个空间边界上的终时刻或中间时刻观测 [14]。考虑到多年来为这类参数辨识问题及各种类型的观测所投入的研究工作，无法一一列举；不过，感兴趣的读者可参阅 [9, 18, 20, 21, 22, 31, 32]。

在高温热传输应用中，无法测量整个时间区间内的温度分布 $[0,\tau]$. 因此，遵循 [12, 5]（另见近期工作 [6]），本文假设已知温度分布的终端状态观测，并基于这一信息，考虑识别空间依赖阻抗系数 γ的反问题。更具体地，我们假设

$$u(x,t) = \phi(x,t) \quad \text{in } \Omega \times [\tau-\sigma, \tau], \tag{1.2}$$

已知，其中 $\sigma > 0$ 足够小，使得 $\tau - \sigma > 0$，接着我们考虑根据 ϕ 或满足以下条件的噪声近似 ϕ_δ 来识别 γ 的问题

$$\int_{\tau-\sigma}^{\tau} \|\phi - \phi_\delta\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt \le \delta^2 \tag{1.3}$$

对于某个噪声水平 $\delta > 0$.

可以看出，我们的反问题是非线性的。此外，正如下一节所示，该反问题也是不适定的，也就是说，观测数据中的微小扰动可能导致相应解出现很大偏差。因此，为了获得稳定近似，必须采用某种正则化方案。我们采用标准的 Tikhonov 正则化来获得 γ 的近似解。众所周知，除非对待识别的未知量假设某些先验条件，即所谓的源条件（参见 [10, 24]），否则通过正则化获得的稳定近似的收敛速度可能任意慢 [26] 。对于希尔伯特空间中的非线性算子，Tikhonov 正则化理论中的源条件通常涉及相关非线性算子的 Fr´échet 导数的伴随算子 [10]。更确切地说，若 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 是希尔伯特空间， $F\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ 是一个可 Fr´échet 微分的（非线性）算子，则考虑求解一个不适定算子方程的问题

$$F(x) = y$$

也就是说， y 中的微小扰动可能导致算子方程的解出现较大偏差。设 y为精确数据， $x^\dagger$ 为根据 $y^{\text{obs}} \in \mathcal{Y}$所包含的信息待识别的唯一解（即 $F(x^\dagger) = y$），其中观测数据满足 $\|y - y^{\text{obs}}\|_{\mathcal{Y}} \leq \delta.$ 。稳定近似是以下泛函的极小化子

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \|F(x) - y^{\text{obs}}\|_{\mathcal{Y}}^2 + \alpha \|x - x^*\|_{\mathcal{X}}^2,$$

对于给定的 $\alpha > 0$（即正则化参数）， x^* 是 $x^\dagger$ 的初始猜测，其中包含一些先验光滑性假设。设 F'表示 F的 Fr´échet 导数。此外，我们假设 F的 Fr´échet 导数是利普希茨连续的，利普希茨常数为 C_{Lip}。那么已知（参见 [10, 11, 25]），如果

$$x^\dagger - x^* = F'(x^\dagger)^* \varphi$$

对于满足小量条件的某个 φ

$$C_{\text{Lip}} \|\varphi\| \leq 1 \tag{1.4}$$

那么，只要正则化参数 α 选为$\alpha \sim \delta$，正则化解的收敛速率就是 $O(\delta^{\frac{1}{2}})$。许多问题中，这些值域空间极难刻画；而在另一些问题中，这些值域空间则是具有较高光滑性的某些索伯列夫空间，例如参见 [15]。除了这些困难之外，验证小量条件 (1.4) 也是一项挑战。为克服这些挑战，Engl 和 Zou 在 [12] 中针对热传导中的参数辨识问题提出了一种新型源条件，该条件简单且可验证（至少在对 f、 g 和 u_0作出一些合理正则性假设时），既不需要小量条件，也不要求未知量具有很高的光滑性。受 [12] 中的工作以及 [6], 近期工作的启发，我们考虑类似的弱源条件并得到收敛速率，这也是本文的主要目标。此外，我们明确证明了在一定正则性假设下，该源条件是可验证的（见定理 4.4）。

现在，我们将讨论本文所考虑的观测（1.2）相较于近期一些采用不同于（1.2）的观测的研究所具有的优点与不足。

在 [23] 中，作者考虑了一个与（1.1）类似的系统，并利用形式为以下表达式的非局部测量，重建与 $f = 0$、 $u_0 = 0$ 相关的 γ（x）：

$$\int_0^\tau w(t) u(x,t)\, dt = h(x) \quad \text{on } \partial\Omega, \tag{1.5}$$

其中， $w.$ 为某个权函数。由于控制方程是齐次热方程，作者利用热方程的基本解，在反问题分析中采用其边界观测（1.5）来重建 γ。事实上，重建 γ 的反问题被转化为求解一组不适定非线性积分方程的问题：首先需要求出由基本解产生的某个势函数 q（x， t）（见 [23, 第4]页），然后再求出阻抗系数。此外，为了稳定地重建，作者采用了半Tikhonov正则化方案，其惩罚项包含势函数 q（一个辅助未知量）；与此相对，我们采用传统的Tikhonov正则化泛函，其惩罚项由待识别的实际未知量 γ构成。虽然观测（1.5）似乎更符合实际（因为它仅涉及空间边界上的测量），但他们的分析需要 $f = 0$ 和 $u_0 = 0$，而本文并不需要这些条件。此外， [23] 中的研究没有给出误差估计。

在 [30] 中，作者考虑了从整个空间区域上的终时刻观测出发，同时辨识与类似于 (1.1) 的系统相关的 $\gamma(x)$和初始温度$u_0(x)$的问题，即用于反演的数据形式为

$$u(x,\tau) = h(x) \quad \text{in } \Omega, \tag{1.6}$$

在本研究中，作者克服了他们早期工作中所考虑的 $u_0 = 0$ 限制[23]。由于反问题具有病态性， [30] 中的作者通过一种正则化方案，对 γ获得了稳定近似；该方案涉及对反演输入数据 h进行磨光，并通过对 h要求更高正则性来实现，即 $h \in W^{3,\,p}(\Omega)$，其中 $p > 2.$ 满足一定条件。由于 h 是反演输入数据，从应用角度看，假设它具有如此高的正则性

并不太现实。此外，对于 h 的含噪观测 h^δ ，作者在对 γ和 u_0 施加某种源条件的情况下，获得了 H¨older 收敛率 $O(\delta^\nu)$, 其中$\nu \le \frac{1}{5}$满足一定条件（见 [30, 第603]页）。这种源条件在应用中可能并不可行，因为它假设未知量 γ 和 u_0 具有足够的正则性，使得 $h \in W^{3,\,p}(\Omega)$。与此不同，正如前文所述，本文将使用 Tikhonov 正则化为 γ 获得稳定近似；我们对反演输入数据 ϕ的正则性假设（见 (1.2)）仅为$\phi \in L^2(\Omega \times [\tau-\sigma,\tau])$。此外，在一个可验证的源条件下，该条件仅要求 $\gamma \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$，我们得到更好的收敛率，即 $O(\delta^{\frac{1}{2}})$。因此还需再次指出，尽管观测 (1.6) 表面上似乎比 (1.2) 更现实，但就源条件和正则性假设而言，我们的工作比 [30]更现实，且收敛率更好。

本文的组织结构如下：在第 2 节中，我们汇总与正问题解的存在性和唯一性相关的已有结果，准确表述本文研究的反问题，并分析该反问题的存在性、唯一性和病态性。在第 3 节中，我们对正则化近似进行收敛性分析，提出源条件并证明收敛率结果，这是本文的主要结果。在第 4 节中，我们讨论源条件及其相容性和正则性，并通过一个简单的构造说明该条件确实可以验证。

2. The Inverse Problem

本节回顾后续将用到的与偏微分方程 (1.1) 相关的所有定义和结果，并进一步更准确地表述反问题，讨论其唯一性和病态性。在本文中，每当遇到定义在边界 $\partial\Omega$ 上的函数时，均应将其理解为迹 [1, 13]。

定义 2.1.（弱解）若元素 $u \in L^2(0,\tau;\, H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,\tau;\, L^2(\Omega))$ 满足

$$\begin{cases} \int_0^\tau \int_\Omega [-u\frac{\partial\eta}{\partial t} + \nabla u\cdot\nabla\eta]\,dx\,dt + \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \gamma u\eta\,dx\,dt \\ \quad = \int_0^\tau \int_\Omega f\eta\,dx\,dt + \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} g\eta\,dx\,dt + \int_\Omega u_0\eta(\cdot,0)\,dx \end{cases}$$

对于所有满足 $\eta(\cdot,\tau) = 0.$的 $\eta \in H^1(0,\tau;\, H^1(\Omega))$ ◊

现在陈述一个关于正问题存在性与唯一性的结果。设

$$\mathcal{A} = \{\gamma \in L^\infty(\partial\Omega) : 0 < \underline{\gamma} \le \gamma \le \overline{\gamma}\}$$

为可容许参数集合，其中常数 $\underline{\gamma}$ 和 $\overline{\gamma}$ 满足相应条件。

定理 2.2.（参见 [29]）设 $\gamma \in \mathcal{A}$, $f \in L^2(0,\tau;\, L^2(\Omega))$, $g \in L^2(0,\tau;\, L^2(\partial\Omega))$ 且 $u_0 \in L^2(\Omega)$。则存在唯一的弱解 u ，满足 (1.1) 及估计式

$$\max_{[0,\tau]} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(0,\tau;H^1(\Omega))} \le C(\|f\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))} + \|g\|_{L^2(0,\tau;L^2(\partial\Omega))} + \|u_0\|_{L^2(\Omega)}); \tag{2.1}$$

其中 C 是一个仅依赖于 $\underline{\gamma}$、Ω 和 τ. 的常数

在继续讨论之前，我们先精确地陈述所考虑的反问题。

(IP) 根据观测 $\phi \in L^2(\tau-\sigma,\tau;\, L^2(\Omega))$ 识别 $\gamma \in \mathcal{A}$，使得 (1.1) 的唯一弱解 u 满足 (1.2)。

现在我们讨论反问题 (IP) 的解的存在性与唯一性。设 $g \in L^2(\tau-\sigma,\tau;\, L^\infty(\partial\Omega))$、$\phi \in L^2(\tau-\sigma,\tau;\, H^1(\Omega))$ 满足 ϕ, $\frac{\partial\phi}{\partial\nu} \in L^2(\tau-\sigma,\tau;\, L^\infty(\partial\Omega))$，并且

$$\int_{\tau-\sigma}^{\tau} \phi\,dt \ne 0 \quad \text{a.e. on } \partial\Omega.$$

于是，由 (1.1) 中的罗宾边界条件并利用 (1.2)，可得

$$\gamma = \frac{\int_{\tau-\sigma}^{\tau} g\,dt - \int_{\tau-\sigma}^{\tau} \frac{\partial\phi}{\partial\nu}\,dt}{\int_{\tau-\sigma}^{\tau} \phi\,dt}. \tag{2.2}$$

因此，根据满足 (1.2) 的精确观测 ϕ 识别 γ 的反问题有唯一解 $\gamma \in L^\infty(\partial\Omega)$，其表达式由 (2.2) 给出。

接下来，我们注意到反问题（IP）是非线性的，因为温度分布 $u(x,t)$ 取决于阻抗系数 γ。此外，该问题在如下意义下是不适定的：观测数据 ϕ 在 (1.2) 中的微小扰动，可能导致反问题相应解的显著偏差。这是因为 γ的表达式 (2.2) 中包含观测 ϕ的导数。因此，为了获得 γ 的某些稳定近似，必须采用某种正则化方法。下一节中，我们将采用 Tikhonov 正则化来获得稳定近似。

3. Convergence rates with weak source condition

设 $u(\gamma)$ 表示固定 $\gamma \in \mathcal{A}$ 时 (1.1) 的唯一弱解。对于 $\delta > 0$，设 ϕ_δ 为满足 (1.3) 的精确数据 ϕ 所对应的含噪数据。如上一节所述，反问题是不适定的，因此我们将采用蒂霍诺夫正则化来获得稳定近似。下文中，我们用 $\gamma^\dagger \in L^2(\partial\Omega)$ 表示待识别的、与相应精确数据 ϕ. 对应的精确阻抗系数。对于固定的 $\alpha > 0$，考虑如下输出最小二乘Tikhonov泛函

$$J(\gamma) := \int_{\tau-\sigma}^{\tau}\int_\Omega |u(\gamma)-\phi_\delta|^2\,dx\,dt + \alpha\|\gamma-\gamma^*\|^2_{L^2(\partial\Omega)}, \tag{3.1}$$

其中，$\gamma^* \in L^2(\partial\Omega)$ 是 $\gamma^\dagger$ 的初始猜测，其中包含了关于 $\gamma^\dagger$. 的某种先验光滑性假设。用 γ_δ^α 表示优化问题的一个极小化子。

$$\min_{\gamma\in\mathcal{A}} J(\gamma). \tag{3.2}$$

这些极小化子就是 Tikhonov正则化解。注意，初始猜测 γ^* 可能不属于可容许集 $\mathcal{A}$。接下来的两个结果讨论此类极小化子的存在性与稳定性，从而确保这些极小化子确实是正则化解。值得注意的是，关于存在性与稳定性证明的论证至今已在文献中相当成熟（参见 [12]）；但由于本文的背景有所不同，为了使论文内容自足，我们也给出证明。

定理3.1. 最小化问题 (3.2) 有解。

证明. 显然，$\mathcal{A}$ 是一个凸集。设 $\{\gamma_n\}$ 是 $\mathcal{A}$. 中的一个极小化序列。显然，$\{\gamma_n\}$ 是 $L^2(\partial\Omega)$ 中的有界序列。因此，存在一个子序列 $\{\gamma_m\}$ 和一个 $\gamma^\alpha \in L^2(\partial\Omega)$，使得 $\gamma_m \rightharpoonup \gamma^\alpha$ 在 $L^2(\partial\Omega)$ 中成立。由 $\mathcal{A}$ 的闭性与凸性可知，$\mathcal{A}$ 是弱闭的，因此，$\gamma^\alpha \in \mathcal{A}$. 。由于 $u(\gamma_m)$ 是当 $\gamma = \gamma_m$ 时方程 (1.1) 的弱解，根据估计式 (2.1)，可得 $\{u(\gamma_m)\}$ 是 $L^2(0,\tau;\ H^1(\Omega))$ 中的有界序列。因此，存在一个子序列（仍记为 $\{u(\gamma_m)\}$）以及 $u^* \in L^2(0,\tau;\ H^1(\Omega))$，使得当 $m\to\infty$. 时，$u(\gamma_m) \rightharpoonup u^*$ 在 $L^2(0,\tau;\ H^1(\Omega))$ 中成立。现在，对于任意 $\eta \in L^2(0,\tau;\ H^1(\Omega))$，写作

$$\int_0^\tau\int_{\partial\Omega} \gamma_m\,u(\gamma_m)\eta\,dx\,dt = \int_0^\tau\int_{\partial\Omega}\gamma^\alpha\,u(\gamma_m)\eta\,dx\,dt + \int_0^\tau\int_{\partial\Omega}(\gamma_m-\gamma^\alpha)\,u(\gamma_m)\eta\,dx\,dt,$$

利用 γ_m 的弱收敛性以及 $u(\gamma_m)$ 的有界性，可得

$$\int_0^\tau\int_{\partial\Omega} \gamma_m\,u(\gamma_m)\eta\,dx\,dt \to \int_0^\tau\int_{\partial\Omega}\gamma^\alpha\,u^*\eta\,dx\,dt \quad \text{as } m\to\infty.$$

因此，利用 $u(\gamma_m)$ 是 $\gamma = \gamma_m$ 对应的 (1.1) 的弱解这一事实，以及 $\{u(\gamma_m)\}$ 的弱收敛性，可得

$$\int_0^\tau\int_\Omega [-u^*\frac{\partial\eta}{\partial t} + \nabla u^*\cdot\nabla\eta]\,dx\,dt + \int_0^\tau\int_{\partial\Omega}\gamma^\alpha\,u^*\eta\,dx\,dt = \int_0^\tau\int_\Omega f\eta\,dx\,dt + \int_0^\tau\int_{\partial\Omega} g\eta\,dx\,dt + \int_\Omega u_0\eta(\cdot,0)\,dx$$

对所有满足 $\eta(\cdot,\tau) = 0.$ 的 $\eta \in H^1(0,\tau;\ H^1(\Omega))$ 均成立。由于 $u(\gamma^\alpha)$ 是 $\gamma = \gamma^\alpha$ 对应的 (1.1) 的唯一弱解，我们有$u^* = u(\gamma^\alpha)$。现在考虑恒等式

$$\begin{aligned}&\liminf_m \int_{\tau-\sigma}^\tau\int_\Omega |u(\gamma_m)-\phi_\delta|^2\,dx\,dt\\ &= \liminf_m \int_{\tau-\sigma}^\tau\int_\Omega \Big[|u(\gamma_m)-u(\gamma^\alpha)|^2 + |u(\gamma^\alpha)-\phi_\delta|^2 + 2\big(u(\gamma_m)-u(\gamma^\alpha)\big)\big(u(\gamma^\alpha)-\phi_\delta\big)\Big]\,dx\,dt.\end{aligned}$$

由于 $u(\gamma_m)$ 和 $u(\gamma^\alpha)$ 分别是 $\gamma=\gamma_m$ 和 γ^α 对应的 (1.1) 的弱解，利用估计式 (2.1)，可得

$$\lim_{m\to\infty}\int_{\tau-\sigma}^\tau\int_\Omega |u(\gamma_m)-u(\gamma^\alpha)|^2\,dx\,dt = 0.$$

因此，

$$\liminf_m \int_{\tau-\sigma}^\tau\int_\Omega |u(\gamma_m)-\phi_\delta|^2\,dx\,dt = \int_{\tau-\sigma}^\tau\int_\Omega |u(\gamma^\alpha)-\phi_\delta|^2\,dx\,dt.$$

因此，利用 L^2-范数的弱下半连续性，并利用 $\{\gamma_n\}$ 是最小化问题 (3.2) 的极小化序列这一事实，我们得到

$$\begin{aligned}&\int_{\tau-\sigma}^\tau\int_\Omega |u(\gamma^\alpha)-\phi_\delta|^2\,dx\,dt + \alpha\|\gamma^\alpha-\gamma^*\|^2_{L^2(\partial\Omega)}\\ &\le \liminf_m\Big\{\int_{\tau-\sigma}^\tau\int_\Omega |u(\gamma_m)-\phi_\delta|^2\,dx\,dt + \alpha\|\gamma_m-\gamma^*\|^2_{L^2(\partial\Omega)}\Big\}\\ &= \min_{\gamma\in\mathcal{A}} J(\gamma).\end{aligned}$$

这表明 γ^α 是 (3.2) 的极小化子。 □

现在证明最小化问题 (3.2) 关于观测数据 ϕ_δ. 的稳定性。也就是说，我们证明 (3.2) 的极小化子确实是正则化解。

定理 3.2. 设 $\{\phi_n\}$ 是一个序列，且 ϕ_n 在 $L^2(\tau-\sigma,\tau;\ L^2(\Omega))$ 中收敛到 ϕ_δ。对于固定的 $\alpha>0$，设 γ_n^α 是以下问题的极小化子：

$$\min_{\gamma\in\mathcal{A}}\int_{\tau-\sigma}^{\tau}\int_\Omega |u(\gamma)-\phi_n|^2\,dx\,dt+\alpha\|\gamma-\gamma^*\|^2_{L^2(\partial\Omega)}. \tag{3.3}$$

那么存在一个子序列 $\{\gamma_n^\alpha\}$，它收敛到一个极小化子 γ_δ^α.

证明. 由于 γ_n^α 是 (3.3) 的极小化子，我们有

$$\int_{\tau-\sigma}^{\tau}\int_\Omega |u(\gamma_n^\alpha)-\phi_n|^2\,dx\,dt+\alpha\|\gamma_n^\alpha-\gamma^*\|^2_{L^2(\partial\Omega)}\le\int_{\tau-\sigma}^{\tau}\int_\Omega |u(\gamma)-\phi_n|^2\,dx\,dt+\alpha\|\gamma-\gamma^*\|^2_{L^2(\partial\Omega)}$$

对于任意 $\gamma\in\mathcal{A}.$。因此，$\{\gamma_n^\alpha\}$ 是 $L^2(\partial\Omega)$ 中的有界序列。因此，存在一个子序列（为简便起见仍记为 $\{\gamma_n^\alpha\}$）以及一个 $\gamma^\alpha\in L^2(\partial\Omega)$，使得当 $n\to\infty.$ 时，γ_n^α 在 $L^2(\partial\Omega)$ 中弱收敛到 γ^α。现在，由 $\mathcal{A}$ 的闭性和凸性可得 $\gamma^\alpha\in\mathcal{A}.$

由于 $u(\gamma_n^\alpha)$ 是 (1.1) 的唯一弱解，由 (2.1) 可知，$\{u(\gamma_n^\alpha)\}$ 在 $L^2(0,\tau;\ H^1(\Omega))$ 中有界。因此，存在一个子序列，仍记为 $u(\gamma_n^\alpha)$，以及一个 $u_*\in L^2(0,\tau;\ H^1(\Omega))$，使得当 $n\to\infty.$ 时，$u(\gamma_n^\alpha)$ 在 u_* 上弱收敛于 $L^2(0,\tau;\ H^1(\Omega))$

现在，对于任意 $\eta\in L^2(0,\tau;\ H^1(\Omega))$，令

$$\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}\gamma_n^\alpha\,u(\gamma_n^\alpha)\eta\,dx\,dt=\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}\gamma^\alpha\,u(\gamma_n^\alpha)\eta\,dx\,dt+\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}(\gamma_n^\alpha-\gamma^\alpha)\,u(\gamma_n^\alpha)\eta\,dx\,dt,$$

利用 γ_n^α 的弱收敛性以及 $u(\gamma_n^\alpha)$ 的有界性，可得

$$\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}\gamma_n^\alpha\,u(\gamma_n^\alpha)\eta\,dx\,dt\to\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}\gamma^\alpha\,u_*\eta\,dx\,dt\quad\text{as } n\to\infty.$$

因此，利用 $u(\gamma_n^\alpha)$ 是弱解这一事实以及 $\{u(\gamma_n^\alpha)\}$ 的弱收敛性，可得

$$\begin{aligned}&\int_0^\tau\int_\Omega[-u_*\frac{\partial\eta}{\partial t}+\nabla u_*\cdot\nabla\eta]\,dx\,dt+\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}\gamma^\alpha\,u_*\eta\,dx\,dt\\&=\int_0^\tau\int_\Omega f\eta\,dx\,dt+\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}g\eta\,dx\,dt+\int_\Omega u_0\eta(\cdot,0)\,dx\end{aligned}$$

对所有满足 $\eta(\cdot,\tau)=0.$ 的 $\eta\in H^1(0,\tau;\ H^1(\Omega))$ 均成立。由于 $u(\gamma^\alpha)$ 是 (1.1) 的唯一弱解，我们有 $u_*=u(\gamma^\alpha)$。现在，由 L^2-范数的弱下半连续性可得

$$\|\gamma^\alpha-\gamma^*\|^2_{L^2(\partial\Omega)}\le\liminf_n\|\gamma_n^\alpha-\gamma^*\|^2_{L^2(\partial\Omega)}$$

and

$$\int_{\tau-\sigma}^{\tau}\int_\Omega|u(\gamma^\alpha)-\phi_\delta|^2\,dx\,dt\le\liminf_n\int_{\tau-\sigma}^{\tau}\int_\Omega|u(\gamma_n^\alpha)-\phi_\delta|^2\,dx\,dt.$$

由于 $\phi_n\to\phi_\delta$ 属于 $L^2(\tau-\sigma,\tau;\ L^2(\Omega))$，因此

$$\begin{aligned}&\liminf_n\int_{\tau-\sigma}^{\tau}\int_\Omega|u(\gamma_n^\alpha)-\phi_n|^2\,dx\,dt\\&=\liminf_n\int_{\tau-\sigma}^{\tau}\int_\Omega\Big[|u(\gamma_n^\alpha)-\phi_\delta|^2+|\phi_n-\phi_\delta|^2+2\big(u(\gamma_n^\alpha)-\phi_\delta\big)(\phi_\delta-\phi_n)\Big]\,dx\,dt\\&=\liminf_n\int_{\tau-\sigma}^{\tau}\int_\Omega|u(\gamma_n^\alpha)-\phi_\delta|^2\,dx\,dt\\&=\liminf_n\int_{\tau-\sigma}^{\tau}\int_\Omega\Big[|u(\gamma_n^\alpha)-u(\gamma^\alpha)|^2+|u(\gamma^\alpha)-\phi_\delta|^2+2\big(u(\gamma_n^\alpha)-u(\gamma^\alpha)\big)\big(u(\gamma^\alpha)-\phi_\delta\big)\Big]\,dx\,dt.\end{aligned}$$

由于 $u(\gamma_n^\alpha)$ 和 $u(\gamma^\alpha)$ 分别是对应于 $\gamma=\gamma_n^\alpha$ 和 γ^α的方程 (1.1) 的弱解，利用估计式 (2.1)，可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\tau-\sigma}^{\tau}\int_\Omega|u(\gamma_n^\alpha)-u(\gamma^\alpha)|^2\,dx\,dt=0.$$

因此，

$$\liminf_n\int_{\tau-\sigma}^{\tau}\int_\Omega|u(\gamma_n^\alpha)-\phi_n|^2\,dx\,dt=\int_{\tau-\sigma}^{\tau}\int_\Omega|u(\gamma^\alpha)-\phi_\delta|^2\,dx\,dt.$$

因此,

$$\begin{aligned}
&\int_{\tau-\sigma}^{\tau}\int_{\Omega}|u(\gamma^{\alpha})-\phi_{\delta}|^{2}\,dx\,dt+\alpha\|\gamma^{\alpha}-\gamma^{*}\|^{2}_{L^{2}(\partial\Omega)}\\
&\quad\leq\liminf_{n}\Big\{\int_{\tau-\sigma}^{\tau}\int_{\Omega}|u(\gamma_{n}^{\alpha})-\phi_{n}|^{2}\,dx\,dt+\alpha\|\gamma_{n}^{\alpha}-\gamma^{*}\|^{2}_{L^{2}(\partial\Omega)}\Big\}\\
&\quad\leq\limsup_{n}\Big\{\int_{\tau-\sigma}^{\tau}\int_{\Omega}|u(\gamma_{n}^{\alpha})-\phi_{n}|^{2}\,dx\,dt+\alpha\|\gamma_{n}^{\alpha}-\gamma^{*}\|^{2}_{L^{2}(\partial\Omega)}\Big\}\\
&\quad\leq\limsup_{n}\Big\{\int_{\tau-\sigma}^{\tau}\int_{\Omega}|u(\gamma)-\phi_{n}|^{2}\,dx\,dt+\alpha\|\gamma-\gamma^{*}\|^{2}_{L^{2}(\partial\Omega)}\Big\}\\
&\quad=\int_{\tau-\sigma}^{\tau}\int_{\Omega}|u(\gamma)-\phi_{\delta}|^{2}\,dx\,dt+\alpha\|\gamma-\gamma^{*}\|^{2}_{L^{2}(\partial\Omega)}
\end{aligned}$$

对任意 $\gamma\in\mathcal{A}.$，这表明 γ^{α} 是一个极小化子，我们将其记为 $\gamma_{\delta}^{\alpha}.$。此外，在最后一个等式中取 $\gamma=\gamma_{\delta}^{\alpha}$，得到

$$\begin{cases}\lim_{n}\int_{\tau-\sigma}^{\tau}\int_{\Omega}|u(\gamma_{n}^{\alpha})-\phi_{n}|^{2}\,dx\,dt+\alpha\|\gamma_{n}^{\alpha}-\gamma^{*}\|^{2}_{L^{2}(\partial\Omega)}\\ \quad=\int_{\tau-\sigma}^{\tau}\int_{\Omega}|u(\gamma_{\delta}^{\alpha})-\phi_{\delta}|^{2}\,dx\,dt+\alpha\|\gamma_{\delta}^{\alpha}-\gamma^{*}\|^{2}_{L^{2}(\partial\Omega)}\end{cases}\tag{3.4}$$

现在我们证明，当 $n\to\infty.$ 时， γ_{n}^{α} 在 $L^{2}(\partial\Omega)$ 中收敛到 γ_{δ}^{α}。证明采用反证法。假设 γ_{n}^{α} 在 $L^{2}(\partial\Omega)$ 中不收敛到 γ_{δ}^{α}。那么，显然

$$\|\gamma_{\delta}^{\alpha}-\gamma^{*}\|^{2}_{L^{2}(\partial\Omega)}<\limsup_{n}\|\gamma_{n}^{\alpha}-\gamma^{*}\|^{2}_{L^{2}(\partial\Omega)}=:\epsilon.$$

因此，存在 $\{\gamma_{n}^{\alpha}\}$ 的一个子序列，记为 $\{\gamma_{m}^{\alpha}\}$，使得 γ_{m}^{α} 在 $L^{2}(\partial\Omega)$ 中弱收敛到 γ_{δ}^{α}，并且

$$\|\gamma_{m}^{\alpha}-\gamma^{*}\|^{2}_{L^{2}(\partial\Omega)}\to\epsilon\quad\text{as } m\to\infty.$$

现在由 (3.4) 可得

$$\begin{aligned}
&\lim_{m}\int_{\tau-\sigma}^{\tau}\int_{\Omega}|u(\gamma_{m}^{\alpha})-\phi_{m}|^{2}\,dx\,dt\\
&\quad=\int_{\tau-\sigma}^{\tau}\int_{\Omega}|u(\gamma_{\delta}^{\alpha})-\phi_{\delta}|^{2}\,dx\,dt+\alpha\Big(\|\gamma_{\delta}^{\alpha}-\gamma^{*}\|^{2}_{L^{2}(\partial\Omega)}-\lim_{m}\|\gamma_{m}^{\alpha}-\gamma^{*}\|^{2}_{L^{2}(\partial\Omega)}\Big)\\
&\quad=\int_{\tau-\sigma}^{\tau}\int_{\Omega}|u(\gamma_{\delta}^{\alpha})-\phi_{\delta}|^{2}\,dx\,dt+\alpha\underbrace{\Big(\|\gamma_{\delta}^{\alpha}-\gamma^{*}\|^{2}_{L^{2}(\partial\Omega)}-\epsilon\Big)}_{<0}.
\end{aligned}$$

因此，

$$\lim_{m}\int_{\tau-\sigma}^{\tau}\int_{\Omega}|u(\gamma_{m}^{\alpha})-\phi_{m}|^{2}\,dx\,dt<\int_{\tau-\sigma}^{\tau}\int_{\Omega}|u(\gamma_{\delta}^{\alpha})-\phi_{\delta}|^{2}\,dx\,dt.$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}
\int_{\tau-\sigma}^{\tau}\int_{\Omega}|u(\gamma_{\delta}^{\alpha})-\phi_{\delta}|^{2}\,dx\,dt&=\liminf_{n}\int_{\tau-\sigma}^{\tau}\int_{\Omega}|u(\gamma_{n}^{\alpha})-\phi_{n}|^{2}\,dx\,dt\\
&\leq\lim_{m}\int_{\tau-\sigma}^{\tau}\int_{\Omega}|u(\gamma_{m}^{\alpha})-\phi_{m}|^{2}\,dx\,dt\\
&<\int_{\tau-\sigma}^{\tau}\int_{\Omega}|u(\gamma_{\delta}^{\alpha})-\phi_{\delta}|^{2}\,dx\,dt,
\end{aligned}$$

矛盾。 □

设 $f\in L^{2}(0,\tau;\,L^{2}(\Omega))$ $g\in L^{2}(0,\tau;\,L^{2}(\partial\Omega))$ 且 $u_{0}\in L^{2}(\Omega)$。根据定理 2.2，我们知道，对每个 $\gamma\in\mathcal{A}$，(1.1) 在 $L^{2}(0,\tau;\,H^{1}(\Omega))\cap L^{\infty}(0,\tau;\,L^{2}(\Omega))$ 中有唯一的弱解，并用记号 $u(\gamma)$ 表示此弱解。为简化记号，我们将其表示为映射 F，即 $F\colon\mathcal{A}\to L^{2}(0,\tau;\,H^{1}(\Omega))\cap L^{\infty}(0,\tau;\,L^{2}(\Omega))$ 定义为 $\gamma\mapsto F(\gamma):=u(\gamma)$。

为避免记号过于复杂，在全文中， C 均表示一个泛指常数，它仅依赖于 Ω τ、σ、$\underline{\gamma}$、$\overline{\gamma}$、u_{0}、f、g、迹算子的算子范数（以及稍后在定理 3.4 中讨论的某个函数 ψ）。

引理 3.3. 映射 $F\colon\mathcal{A}\subset L^{\infty}(\partial\Omega)\to L^{2}(0,\tau;\,H^{1}(\Omega))\cap L^{\infty}(0,\tau;\,L^{2}(\Omega))$ 是 Fr´echet 可微的。

证明. 由于 $u(\gamma)$ 表示 (1.1) 的唯一弱解，我们有

$$\begin{cases} \int_0^\tau \int_\Omega [-u(\gamma)\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla u(\gamma)\cdot\nabla\eta]\,dx\,dt + \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \gamma u(\gamma)\eta\,dx\,dt \\ \quad = \int_0^\tau \int_\Omega f\eta\,dx\,dt + \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} g\eta\,dx\,dt + \int_\Omega u_0\eta(\cdot,0)\,dx \end{cases} \tag{3.5}$$

对所有 $\eta \in H^1(0,\tau;\ H^1(\Omega))$，其中 $\eta(\cdot,\tau) = 0$. 设 $h \in L^\infty(\partial\Omega)$ 满足 $\gamma + h \in \mathcal{A}$. 那么，我们有 e

$$\begin{cases} \int_0^\tau \int_\Omega [-u(\gamma+h)\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla u(\gamma+h)\cdot\nabla\eta]\,dx\,dt + \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \gamma u(\gamma+h)\eta\,dx\,dt \\ \quad = \int_0^\tau \int_\Omega f\eta\,dx\,dt + \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} g\eta\,dx\,dt + \int_\Omega u_0\eta(\cdot,0)\,dx \end{cases} \tag{3.6}$$

对所有 $\eta \in H^1(0,\tau;\ H^1(\Omega))$，其中 $\eta(\cdot,\tau) = 0$. 因此，由 (3.5) 和 (3.6)，我们有

$$\begin{cases} \int_0^\tau \int_\Omega -[u(\gamma+h)-u(\gamma)]\frac{\partial \eta}{\partial t}\,dx\,dt + \int_0^\tau \int_\Omega [\nabla u(\gamma+h) - \nabla u(\gamma)]\cdot\nabla\eta\,dx\,dt \\ \quad + \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} (\gamma+h)[u(\gamma+h)-u(\gamma)]\eta\,dx\,dt + \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} hu(\gamma)\eta\,dx\,dt = 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

对所有 $\eta \in H^1(0,\tau;\ H^1(\Omega))$，其中 $\eta(\cdot,\tau) = 0$. 现在考虑偏微分方程

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v & \text{in} \quad \Omega_\tau, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} + \gamma v = -hu(\gamma) & \text{on} \quad \partial\Omega_\tau, \\ v(\cdot,0) = 0 & \text{in} \quad \Omega. \end{cases} \tag{3.8}$$

根据定理 2.2，存在 (3.8) 的唯一弱解 v，满足

$$\int_0^\tau \int_\Omega v\frac{\partial \eta}{\partial t}\,dx\,dt - \int_0^\tau \int_\Omega \nabla v\cdot\nabla\eta\,dx\,dt - \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \gamma v\eta\,dx\,dt = \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} hu(\gamma)\eta\,dx\,dt \tag{3.9}$$

对所有满足 $\eta(\cdot,\tau) = 0$ in Ω 的 $\eta \in h^1(0;\ \tau, H^1(\Omega))$。此外，由 (3.8) 和估计 (2.1) 可得

$$\begin{aligned} \max_{t\in[0,\tau]} \|v(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(0,\tau;H^1(\Omega))} &\leq C\|hu(\gamma)\|_{L^2(0,\tau;L^2(\partial\Omega))} \\ &\leq C\|h\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\|u(\gamma)\|_{L^2(0,\tau;L^2(\partial\Omega))} \\ &\leq C\|h\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\|u(\gamma)\|_{L^2(0,\tau;H^1(\Omega))}. \end{aligned}$$

因此，对于固定的 $\gamma \in \mathcal{A}$，映射 $h \mapsto v$（其中 v 是 (3.8) 的唯一弱解）是从 $L^\infty(\partial\Omega)$ 到 $\to L^\infty(0,\tau;\ L^2(\Omega)) \cap L^2(0,\tau;\ H^1(\Omega))$ 的有界线性算子。令 $w := u(\gamma+h) - u(\gamma) - v$，则由 (3.9) 和 (3.7) 可得

$$\int_0^\tau \int_\Omega -w\frac{\partial \eta}{\partial t}\,dx\,dt + \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} (\gamma+h)w\eta\,dx\,dt + \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} hv\eta\,dx\,dt \tag{3.10}$$

对所有满足 $\eta(\cdot,\tau) = 0$ in Ω 的 $\eta \in H^1(0,\tau;\ H^1(\Omega))$。因此，由 (3.10)、弱解的定义及估计 (2.1) 可知，存在一个仅依赖于 $\underline{\gamma}$、Ω 和 τ 的常数 C，使得

$$\max_{t\in[0,\tau]} \|w(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|w\|_{L^2(0,\tau;H^1(\Omega))} \leq C\|hv\|_{L^2(0,\tau;L^2(\partial\Omega))}. \tag{3.11}$$

现在利用 $u(\gamma)$ 是 (1.1) 的弱解这一事实，由定理 2.2 可得

$$\|u(\gamma)\|_{L^2(0,\tau;H^1(\Omega))} \leq C\|h\|_{L^\infty(\partial\Omega)}(\|f\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))} + \|g\|_{L^2(0,\tau;L^2(\partial\Omega))} + \|u_0\|_{L^2(\Omega)}).$$

因此，由 (3.11) 可得

$$\begin{cases} \max_{t\in[0,\tau]} \|w(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|w\|_{L^2(0,\tau;H^1(\Omega))} \\ \quad \leq C\|h\|^2_{L^\infty(\partial\Omega)}(\|f\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))} + \|g\|_{L^2(0,\tau;L^2(\partial\Omega))} + \|u_0\|_{L^2(\Omega)}). \end{cases}$$

由此可知，F 关于 Fr´echet 可微，并且

$$F'(\gamma)h = v,$$

其中，v 是给定 $\gamma \in \mathcal{A}$. 时 (3.8) 的唯一弱解 □

现在我们可以陈述并证明关于弱源条件下收敛率的主要结果。回顾一下，$\gamma^\dagger \in \mathcal{A}$ 是待识别的精确罗宾系数，$\gamma^* \in L^2(\partial\Omega)$ 是 $\gamma^\dagger$ 的一个先验初始猜测，而 $u(\gamma^\dagger)$ 表示给定 $\gamma = \gamma^\dagger$. 时 (1.1) 的唯一弱解

定理 3.4。（收敛率）设 $\psi \in H_0^1(\tau-\sigma,\tau;\ L^2(\Omega)) \cap L^2(\tau-\sigma,\tau;\ H^2(\Omega)$ 满足

$$\int_{\tau-\sigma}^\tau u(\gamma^\dagger)\psi\,dt = \gamma^\dagger - \gamma^* \quad on\ \partial\Omega. \tag{3.12}$$

对于固定的 α、$\delta > 0$，设 γ_δ^α 为 (3.1) 的极小化子。则

$$\|\gamma^\dagger - \gamma_\delta^\alpha\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\Big(\frac{\delta^2}{\alpha} + \alpha\Big)^{\frac{1}{2}},$$

对于某个常数 $C > 0$，其与 α、δ、$\gamma^\dagger$ 和 γ_δ^α. 无关

证明。由于对于固定的 α， γ_δ^α 是 (3.1) 的极小化子，利用 (1.3) 可得

$$\begin{aligned}&\int_{\tau-\sigma}^{\tau}\int_\Omega |u(\gamma_\delta^\alpha)-\phi_\delta|^2\,dx\,dt+\alpha\|\gamma_\delta^\alpha-\gamma^*\|_{L^2(\partial\Omega)}\\&\quad\le\int_{\tau-\sigma}^{\tau}\int_\Omega |u(\gamma^\dagger)-\phi_\delta|^2\,dx\,dt+\alpha\|\gamma^\dagger-\gamma^*\|_{L^2(\partial\Omega)}\\&\quad\le\delta^2+\alpha\|\gamma^\dagger-\gamma^*\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}&\int_{\tau-\sigma}^{\tau}\|u(\gamma_\delta^\alpha)-\phi_\delta\|^2_{L^2(\Omega)}+\alpha\|\gamma^\dagger-\gamma_\delta^\alpha\|^2_{L^2(\partial\Omega)}\\&\quad\le\delta^2+\alpha\big[\|\gamma^\dagger-\gamma_\delta^\alpha\|^2_{l^2(\partial\Omega)}+\|\gamma^\dagger-\gamma^*\|^2_{L^2(\partial\Omega)}-\|\gamma_\delta^\alpha-\gamma^*\|^2_{L^2(\partial\Omega)}\big]\\&\quad=\delta^2+2\alpha\langle\gamma^\dagger-\gamma_\delta^\alpha,\gamma^\dagger-\gamma^*\rangle_{L^2(\partial\Omega)}.\end{aligned}$$

源条件意味着

$$\alpha\langle\gamma^\dagger-\gamma_\delta^\alpha,\gamma^\dagger-\gamma^*\rangle_{L^2(\partial\Omega)}=\alpha\langle\int_{\tau-\sigma}^{\tau}u(\gamma^\dagger)\psi\,dt,\gamma^\dagger-\gamma_\delta^\alpha\rangle_{L^2(\partial\Omega)}=\alpha\int_{\tau-\sigma}^{\tau}\int_{\partial\Omega}u(\gamma^\dagger)\psi\,(\gamma^\dagger-\gamma_\delta^\alpha)\,dx\,dt.$$

由于 F 是 Fr´echet 可微的 取 $h=\gamma_\delta^\alpha-\gamma^\dagger$、 $\eta=\psi$、 $u(\gamma)$ 和 $=u(\gamma^\dagger)$，并利用恒等式 (3.9)，我们得到

$$\begin{aligned}\int_{\tau-\sigma}^{\tau}\int_{\partial\Omega}u(\gamma^\dagger)\psi\,(\gamma_\delta^\alpha-\gamma^\dagger)\,dx\,dt\quad&=\quad\int_{\tau-\sigma}^{\tau}\int_\Omega[F'(\gamma^\dagger)(\gamma_\delta^\alpha-\gamma^\dagger)\frac{\partial\psi}{\partial t}-\nabla F'(\gamma^\dagger)(\gamma_\delta^\alpha-\gamma^\dagger)\cdot\nabla\psi]\,dx\,dt\\&\quad-\int_{\tau-\sigma}^{\tau}\int_{\partial\Omega}\gamma^\dagger F'(\gamma^\dagger)(\gamma_\delta^\alpha-\gamma^\dagger)\psi\,dx\,dt.\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}\alpha\langle\gamma^\dagger-\gamma_\delta^\alpha,\gamma^\dagger-\gamma^*\rangle_{L^2(\partial\Omega)}\quad&=\quad\alpha\Big(\int_{\tau-\sigma}^{\tau}\int_\Omega\big[-F'(\gamma^\dagger)(\gamma_\delta^\alpha-\gamma^\dagger)\frac{\partial\psi}{\partial t}+\nabla F'(\gamma^\dagger)(\gamma_\delta^\alpha-\gamma^\dagger)\cdot\nabla\psi\big]\,dx\,dt\\&\quad+\int_{\tau-\sigma}^{\tau}\int_{\partial\Omega}\gamma^\dagger F'(\gamma^\dagger)(\gamma_\delta^\alpha-\gamma^\dagger)\psi\,dx\,dt\Big).\end{aligned}$$

令 $w_\delta^\alpha:=u(\gamma_\delta^\alpha)-u(\gamma^\dagger)-F'(\gamma^\dagger)(\gamma_\delta^\alpha-\gamma^\dagger)$。于是，我们有

$$\text{(3.13)}\qquad\begin{cases}\alpha\langle\gamma^\dagger-\gamma_\delta^\alpha,\gamma^\dagger-\gamma^*\rangle_{L^2(\partial\Omega)}\\\quad=\alpha\Big[\int_{\tau-\sigma}^{\tau}\int_\Omega\big(-[u(\gamma_\delta^\alpha)-u(\gamma^\dagger)]\frac{\partial\psi}{\partial t}+\nabla[u(\gamma_\delta^\alpha)-u(\gamma^\dagger)]\cdot\nabla\psi\big)\,dx\,dt\\\qquad+\int_{\tau-\sigma}^{\tau}\int_{\partial\Omega}\gamma^\dagger[u(\gamma_\delta^\alpha)-u(\gamma^\dagger)]\psi\,dx\,dt\\\qquad+\int_{\tau-\sigma}^{\tau}\int_\Omega\big(w_\delta^\alpha\frac{\partial\psi}{\partial t}-\nabla w_\delta^\alpha\cdot\nabla\psi\big)\,dx\,dt-\int_{\tau-\sigma}^{\tau}\int_{\partial\Omega}\gamma^\dagger w_\delta^\alpha\psi\,dx\,dt\Big]\end{cases}$$

取 $w=w_\delta^\alpha$，由 (3.10) 可得

$$\int_{\tau-\sigma}^{\tau}\int_\Omega[-w_\delta^\alpha\frac{\partial\psi}{\partial t}+\nabla w_\delta^\alpha\cdot\nabla\psi]\,dx\,dt+\int_{\tau-\sigma}^{\tau}\int_{\partial\Omega}\gamma_\delta^\alpha w_\delta^\alpha\psi\,dx\,dt+\int_{\tau-\sigma}^{\tau}\int_{\partial\Omega}(\gamma_\delta^\alpha-\gamma^\dagger)F'(\gamma^\dagger)(\gamma_\delta^\alpha-\gamma^\dagger)\psi\,dx\,dt=0.$$

因此,

$$\int_{\tau-\sigma}^{\tau}\int_\Omega[w_\delta^\alpha\frac{\partial\psi}{\partial t}-\nabla w_\delta^\alpha\cdot\nabla\psi]\,dx\,dt-\int_{\tau-\sigma}^{\tau}\int_{\partial\Omega}\gamma^\dagger w_\delta^\alpha\psi\,dx\,dt=\int_{\tau-\sigma}^{\tau}\int_{\partial\Omega}(\gamma_\delta^\alpha-\gamma^\dagger)(u(\gamma_\delta^\alpha)-u(\gamma^\dagger))\psi\,dx\,dt.$$

因此，由（3.13）可得

$$\begin{aligned}&\alpha\langle\gamma^\dagger-\gamma_\delta^\alpha,\gamma^\dagger-\gamma^*\rangle_{L^2(\partial\Omega)}\\&\quad=\alpha\Big[\int_{\tau-\sigma}^{\tau}\int_\Omega\big(-[u(\gamma_\delta^\alpha)-u(\gamma^\dagger)]\frac{\partial\psi}{\partial t}+\nabla[u(\gamma_\delta^\alpha)-u(\gamma^\dagger)]\cdot\nabla\psi\big)\,dx\,dt\\&\qquad+\int_{\tau-\sigma}^{\tau}\int_{\partial\Omega}\gamma_\delta^\alpha(u(\gamma_\delta^\alpha)-u(\gamma^\dagger))\psi\,dx\,dt\Big]\\&\quad=\alpha\Big[\int_{\tau-\sigma}^{\tau}\int_\Omega\big(-[u(\gamma_\delta^\alpha)-u(\gamma^\dagger)]\frac{\partial\psi}{\partial t}+[u(\gamma^\dagger)-u(\gamma_\delta^\alpha)]\Delta\psi\big)\,dx\,dt\\&\qquad+\int_{\tau-\sigma}^{\tau}\int_{\partial\Omega}[u(\gamma_\delta^\alpha)-u(\gamma^\dagger)]\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\,dx\,dt+\int_{\tau-\sigma}^{\tau}\int_{\partial\Omega}\gamma_\delta^\alpha[u(\gamma_\delta^\alpha)-u(\gamma^\dagger)]\psi\,dx\,dt\Big]\\&\quad=:I_1+I_2+I_3+I_4.\end{aligned}$$

现在估计积分 I_1、I_2、I_3 和 I_4. 。我们将适当地使用柯西–施瓦茨不等式和杨氏不等式，其中会涉及一个任意的 $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned}
|I_1| &= |\alpha \int_{\tau-\sigma}^{\tau} \int_{\Omega} -[u(\gamma_\delta^\alpha) - u(\gamma^\dagger)] \frac{\partial \psi}{\partial t}\, dx\, dt| \\
&\le \alpha \int_{\tau-\sigma}^{\tau} \|u(\gamma_\delta^\alpha) - u(\gamma^\dagger)\|_{L^2(\Omega)} \|\frac{\partial \psi}{\partial t}\|_{L^2(\Omega)}\, dt \\
&\le \alpha \int_{\tau-\sigma}^{\tau} \|u(\gamma_\delta^\alpha) - \phi_\delta\|_{L^2(\Omega)} \|\frac{\partial \psi}{\partial t}\|_{L^2(\Omega)}\, dt + \alpha \int_{\tau-\sigma}^{\tau} \|\phi_\delta - u(\gamma^\dagger)\|_{L^2(\Omega)} \|\frac{\partial \psi}{\partial t}\|_{L^2(\Omega)}\, dt \\
&\le \varepsilon \int_{\tau-\sigma}^{\tau} \|u(\gamma_\delta^\alpha) - \phi_\delta\|_{L^2(\Omega)}^2\, dt + \frac{\alpha^2}{4\varepsilon} \int_{\tau-\sigma}^{\tau} \|\frac{\partial \psi}{\partial t}\|_{L^2(\Omega)}^2\, dt \\
&\quad + \varepsilon \int_{\tau-\sigma}^{\tau} \|\phi_\delta - u(\gamma^\dagger)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha^2}{4\varepsilon} \int_{\tau-\sigma}^{\tau} \|\frac{\partial \psi}{\partial t}\|_{L^2(\Omega)}^2\, dt \\
&\le \varepsilon \int_{\tau-\sigma}^{\tau} \|u(\gamma_\delta^\alpha) - \phi_\delta\|_{L^2(\Omega)}^2\, dt + \delta^2 \varepsilon + \frac{\alpha^2}{2\varepsilon} \int_{\tau-\sigma}^{\tau} \|\frac{\partial \psi}{\partial t}\|_{L^2(\Omega)}^2\, dt.
\end{aligned}$$

同理，我们得到

$$\begin{aligned}
|I_2| &= |\alpha \int_{\tau-\sigma}^{\tau} [u(\gamma^\dagger) - u(\gamma_\delta^\alpha)] \Delta \psi\, dx\, dt| \\
&\le \varepsilon \int_{\tau-\sigma}^{\tau} \|u(\gamma_\delta^\alpha) - \phi_\delta\|_{L^2(\Omega)}^2\, dt + \delta^2 \varepsilon + \frac{\alpha^2}{2\varepsilon} \int_{\tau-\sigma}^{\tau} \|\Delta \psi\|_{L^2(\Omega)}^2\, dt.
\end{aligned}$$

为了估计 I_3 和 I_4，我们还将利用迹映射从 $H^1(\Omega)$ 到 $L^2(\partial\Omega)$ 的连续性。

$$\begin{aligned}
|I_3| &= |\alpha \int_{\tau-\sigma}^{\tau} \int_{\partial\Omega} [u(\gamma_\delta^\alpha) - u(\gamma^\dagger)] \frac{\partial \psi}{\partial \nu}\, dx\, dt| \\
&\le \alpha \int_{\tau-\sigma}^{\tau} \|u(\gamma_\delta^\alpha) - u(\gamma^\dagger)\|_{L^2(\partial\Omega)} \|\frac{\partial \psi}{\partial \nu}\|_{L^2(\partial\Omega)}\, dt \\
&\le C\alpha \int_{\tau-\sigma}^{\tau} \|u(\gamma_\delta^\alpha) - u(\gamma^\dagger)\|_{L^2(\Omega)} \|\frac{\partial \psi}{\partial \nu}\|_{L^2(\partial\Omega)}\, dt \\
&\le C\alpha \int_{\tau-\sigma}^{\tau} \|u(\gamma_\delta^\alpha) - \phi_\delta\|_{L^2(\Omega)} \|\frac{\partial \psi}{\partial \nu}\|_{L^2(\partial\Omega)}\, dt + C\alpha \int_{\tau-\sigma}^{\tau} \|\phi_\delta - u(\gamma^\dagger)\|_{L^2(\Omega)} \|\frac{\partial \psi}{\partial \nu}\|_{L^2(\partial\Omega)}\, dt \\
&\le \varepsilon \int_{\tau-\sigma}^{\tau} \|u(\gamma_\delta^\alpha) - u(\gamma^\dagger)\|_{L^2(\Omega)}^2\, dt + \delta^2 \varepsilon + \frac{C^2\alpha^2}{2\varepsilon} \int_{\tau-\sigma}^{\tau} \|\frac{\partial \psi}{\partial \nu}\|_{L^2(\partial\Omega)}^2\, dt.
\end{aligned}$$

同理，我们有

$$\begin{aligned}
|I_4| &= |\alpha \int_{\tau-\sigma}^{\tau} \int_{\partial\Omega} \gamma_\delta^\alpha [u(\gamma_\delta^\alpha) - u(\gamma^\dagger)] \psi\, dx\, dt| \\
&\le \overline{\gamma}\, C\alpha \int_{\tau-\sigma}^{\tau} \|u(\gamma_\delta^\alpha) - u(\gamma^\dagger)\|_{L^2(\Omega)} \|\psi\|_{L^2(\partial\Omega)}\, dx\, dt \\
&\le \varepsilon \int_{\tau-\sigma}^{\tau} \|u(\gamma_\delta^\alpha) - \phi_\delta\|_{L^2(\Omega)}^2\, dt + \delta^2 \varepsilon + \frac{\overline{\gamma}^2\, C^2\alpha^2}{2\varepsilon} \int_{\tau-\sigma}^{\tau} \|\psi\|_{L^2(\partial\Omega)}^2\, dt.
\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_{\tau-\sigma}^{\tau} \|u(\gamma_\delta^\alpha) - \phi_\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \|\gamma^\dagger - \gamma_\delta^\alpha\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \\
&\le \delta^2 + 8\varepsilon \int_{\tau-\sigma}^{\tau} \|u(\gamma_\delta^\alpha) - \phi_\delta\|_{L^2(\Omega)}^2\, dt + 8\delta^2 \varepsilon \\
&\quad + \frac{\alpha^2}{\varepsilon} \Big[\int_{\tau-\sigma}^{\tau} \Big(\|\frac{\partial \psi}{\partial t}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\Delta \psi\|_{L^2(\Omega)}^2 + C^2 \|\frac{\partial \psi}{\partial \nu}\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 + \overline{\gamma}^2 C^2 \|\psi\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \Big)\, dt \Big].
\end{aligned}$$

因此，取 $\varepsilon = \frac{1}{16}$，我们有

$$\begin{aligned}&\int_{\tau-\sigma}^{\tau} \|u(\gamma_\delta^\alpha) - \phi_\delta\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt + 2\alpha\|\gamma^\dagger - \gamma_\delta^\alpha\|^2_{L^2(\partial\Omega)}\\ &\quad\le 3\delta^2 + 32\alpha^2\Big[\int_{\tau-\sigma}^{\tau}\Big(\|\frac{\partial\psi}{\partial t}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\Delta\psi\|^2_{L^2(\Omega)} + C^2\|\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\|^2_{L^2(\partial\Omega)} + \overline{\gamma}^2C^2\|\psi\|^2_{L^2(\partial\Omega)}\Big)\, dt\Big]\\ &\quad\le C(\delta^2+\alpha^2).\end{aligned}$$

因此，

$$\int_{\tau-\sigma}^{\tau} \|u(\gamma_\delta^\alpha) - \phi_\delta\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt \le C(\delta^2+\alpha^2)$$

and

$$\|\gamma^\dagger - \gamma_\delta^\alpha\|_{L^2(\partial\Omega)} \le C\Big(\frac{\delta^2}{\alpha} + \alpha\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

□

注释 3.5. 根据上述定理在源条件 (3.12) 下对 $\|\gamma^\dagger - \gamma_\delta^\alpha\|_{L^2(\partial\Omega)}$ 所得的估计可知，若将正则化参数 α 选为 $\alpha \sim \delta$，则有 $\|\gamma^\dagger - \gamma_\delta^\alpha\|_{L^2(\partial\Omega)} = O(\delta^{\frac{1}{2}})$. ♢

注释 3.6. 如前所见，我们的分析可得出速率 $O(\delta^{\frac{1}{2}})$。若沿着基于变分源条件的近期研究方向（例如参见 [7, 16, 17, 28]）来分析收敛速率，将会很有意义。据我们所知，这一方向在阻抗系数识别领域仍有待探索。事实上，我们仅了解到一篇非常近期的论文 [8]，该文利用变分源条件研究了椭圆型偏微分方程中的罗宾系数识别问题。♢

4. Discussion about source condition

现在我们讨论源条件 (3.12) 的优点。由定理 3.4 可知，与标准非线性算子蒂霍诺夫正则化收敛理论中所要求的形如 (1.4) 的小量条件不同，我们的源条件无需验证任何小量条件（参见 [10, 11]）。此外，为了获得 $O(\delta^{\frac{1}{2}})$ 的收敛率，我们无需假设 $\gamma^\dagger$ 属于参数到解算子的 Fr´echet 导数的伴随算子的值域。这是另一项重要优点，因为这类算子的值域往往只是具有较高光滑性的某些 Sobolev 空间（例如参见 [15]）；因此，我们的源条件不受此类先验值域条件的限制，这意味着无需对 $\gamma^\dagger$ 施加更高的光滑性假设，就能获得上述收敛率，而 $\gamma^\dagger$ 显然是我们所不知道的。

现在我们讨论嵌入源条件 (3.12) 中的 $\gamma^\dagger$ 的先验正则性。回顾一下，为了定义迹算子，我们所需的最小假设是 $\int_{\tau-\sigma}^{\tau} u(\gamma^\dagger)\,\psi\, dt \in H^1(\Omega)$；在这种情况下，可推出必须有 $\gamma^\dagger - \gamma^* \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$。因此，为使源条件 (3.12) 有意义，我们所需的正则性假设是 $\gamma^\dagger - \gamma^* \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$。我们将证明，在我们的设定下，始终有 $\int_{\tau-\sigma}^{\tau} u(\gamma^\dagger)\psi\, dt \in H^1(\Omega)$，这要归功于以下关于索伯列夫空间中元素的乘法的最新结果 [4]。

定理 4.1.（参见 [4, 定理 7.4]）设 $D \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{1,2,3\}$ 为具有 Lipschitz 连续边界的有界区域。设 $s_i (i = 1, 2)$ s 为实数，满足 $s_i \ge s \ge 0$ 且 $s_1 + s_2 - s > \frac{d}{2}$。那么存在一个常数 C，它仅依赖于 s_1, s_2, s, d 和 Ω，使得

$$\|UV\|_{H^s(D)} \le C\,\|U\|_{H^{s_1}(D)}\|V\|_{H^{s_2}(D)}, \quad \forall\, U \in H^{s_1}(D),\ V \in H^{s_2}(D).$$

且 $u(\gamma^\dagger) \in L^2(\tau-\sigma,\tau;\ H^1(\Omega))$，由定理 4.1 可知 $\int_{\tau-\sigma}^{\tau} u(\gamma^\dagger)\psi\, dt \in H^1(\Omega$ 由于 $\psi \in L^2(\tau-\sigma,\tau;\ H^2(\Omega))$).

注 4.2. 值得注意的是，也可以基于 Sobolev 空间 Banach 代数性质相关的结果，推导出 $\int_{\tau-\sigma}^{\tau} u(\gamma^\dagger)\psi\, dt \in H^1(\Omega)$ 的一个充分条件；但采用这种论证时，我们需要假设 H^2- $u(\gamma^\dagger)$ 的空间正则性，这当然是一个缺点。事实上，回顾可知，对于 $d \in \{2,3\}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $H^s(\Omega)$ $s \ge 2$ 是一个 Banach 代数。因此，若假设 $u(\gamma^\dagger) \in L^2(\tau-\sigma,\tau;\ H^2(\Omega))$（若假设初始分布 u_0 和式 (1.1) 中的源函数 f 具有适当的空间正则性，则确实满足此类正则性），那么 $\int_{\tau-\sigma}^{\tau} u(\gamma^\dagger)\,\psi\, dt \in H^2(\Omega) \subset H^1(\Omega)$，进而由迹算子的性质可知，必有 $\gamma^\dagger - \gamma^* \in H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega) \subset H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$。♢

现在我们考察与源条件相关的相容性问题。从源条件（3.12）的表达式来看，人们可能会认为，在终端时刻状态附近的边界 $\partial\Omega$ 的某些部分上，$u(\gamma^\dagger)$ 可能会消失（以迹的意义），而 $\gamma^\dagger - \gamma^*$ 不会消失，这意味着必须了解这些部分上的 $\gamma^\dagger$. 。但这与以下事实相容：对于终端时刻状态，若 $u(\gamma^\dagger)$ 在边界 $\partial\Omega$ 的某些部分上消失（以迹的意义），则不可能恢复这些部分上的 $\gamma^\dagger$，这可由（2.2）看出。

接下来，受 [12] 中针对一维扩散系数识别问题所给构造的启发，我们给出一种显式验证源条件的步骤。不过，本文所考虑的维数 $d \in \{2,3\}$ 下，该构造仍然有效，但前提是我们有 $u(\gamma^\dagger) \in L^2(\tau-\sigma,\tau;\, H^2(\Omega))$。事实上，我们构造一个 $\psi \in H_0^1(\tau-\sigma,\tau;\, L^2(\Omega)) \cap L^2(\tau-\sigma,\tau;\, H^2(\Omega))$，使其满足源条件（3.12）。在继续之前，我们回顾 [27] 中的以下有趣结果。

定理 4.3.（参见 [27, 定理 A.2.9]）设 $D \subset \mathbb{R}^d$ 为具有 Lipschitz 边界的有界区域。设 $s > \frac{d}{2}$。若$U \in H^s(D)$，且 $U \geq c > 0$ 对某个常数 c成立，则 $\frac{1}{U} \in H^s(D)$。

我们的结果是关于在一定光滑性假设下对源条件的验证 n.

定理 4.4. 设 $\gamma^\dagger, \gamma^* \in L^\infty(\partial\Omega)$ 和$\cap\, H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$，且 $u(\gamma^\dagger) \in L^2(\tau-\sigma,\tau;\, H^2(\Omega))$。设 $\psi_1 \in H^1(\tau-\sigma,\tau)$ 为任意函数。定义

$$u_1(x) := \int_{\tau-\sigma}^{\tau} (\tau-t)(\tau-\sigma-t)\psi_1\, u(\gamma^\dagger)\, dt.$$

假设

$$u_1 \neq 0 \ \textit{a.e. in}\ \Omega \quad \textit{and} \quad \frac{1}{u_1} \in L^\infty(\Omega). \tag{4.1}$$

那么存在 一个满足源条件 (3.12) 的 $\psi \in H_0^1(\tau-\sigma,\tau;\, L^2(\Omega)) \cap L^2(\tau-\sigma,\tau;\, H^2(\Omega))$。

证明。设 $\psi_2 \in H^1(\tau-\sigma,\tau)$ 和 $\varphi \in H^m(\Omega)$、 $m \geq 2$ 是任意两个函数。我们用 u 表示 $u(\gamma^\dagger)$。定义 e

$$u_2(x) := \int_{\tau-\sigma}^{\tau} (\tau-t)(\tau-\sigma-t)\psi_2\varphi\, u\, dt.$$

设 $\Upsilon^\dagger, \Upsilon^* \in H^2(\Omega)$，使得 $\gamma^\dagger$ 和 γ^* 分别是它们的迹。我们定义

$$\psi := (\tau-t)(\tau-\sigma-t)\Big(\psi_2\varphi + \psi_1 \frac{\Upsilon^\dagger - \Upsilon^* - u_2}{u_1}\Big).$$

我们声称这个 ψ 满足源条件。注意，由 (4.1) 中的 L^∞-假设和定理 4.3 可知，$\frac{1}{u_1} \in H^2(\Omega)$，从而 $\frac{\Upsilon^\dagger - \Upsilon^* - u_2}{u_1} \in L^2(\tau-\sigma,\tau;\, H^2(\Omega))$。此外，根据 ψ的定义，显然有 $\psi(\cdot,\tau-\sigma) = 0 = \psi(\cdot,\tau)$ 在 Ω 中成立。因此， $\psi \in H_0^1(\tau-\sigma,\tau;\, L^2(\Omega)) \cap L^2(\tau-\sigma,\tau;\, H^2(\Omega))$。此外，

$$\begin{aligned}\int_{\tau-\sigma}^{\tau} u(\gamma^\dagger)\psi\, dt &= \int_{\tau-\sigma}^{\tau} (\tau-t)(\tau-\sigma-t)\Big(\psi_2\varphi\, u + \psi_1\, u\frac{\gamma^\dagger - \gamma^* - u_2}{u_1}\Big) \quad \text{on } \partial\Omega \\ &= \gamma^\dagger - \gamma^* \quad \text{on } \partial\Omega.\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

注 4.5。注意，(4.1) 中的非零假设是有意义的，因为否则就意味着 $u(\gamma^\dagger)$ 在终止时刻 τ（即 $[\tau-\sigma,\tau]$）附近的边界上为零；但由 (2.2) 可知，此时不可能恢复阻抗系数 $\gamma^\dagger$。◊

5. Conclusion

我们研究了一个反问题：根据温度分布的短时观测，识别抛物型偏微分方程中依赖于空间的阻抗系数。我们提出了一种弱型源条件，在选择正则化参数 $\alpha \sim \delta$ 时，可得到收敛率 $O(\delta^{\frac{1}{2}})$，其中 δ 为确定性噪声水平。与希尔伯特空间中非线性算子 Tikhonov 正则化的标准收敛理论相比，上述收敛速率是在一个简单的源条件下得到的，该条件不要求 Fr´echet 导数的伴随算子满足任何值域条件，无需验证小量条件，并要求正则性假设 $\gamma^\dagger \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$。此外，若已知 $u(\gamma^\dagger)$ 在边界 $\partial\Omega$ 的某些部分上（按迹的意义）为零，则必须预先知道这些部分上的 $\gamma^\dagger$，因为这些部分上的阻抗系数无法恢复。

致谢。作者谨向 Thorsten Hohage 教授（哥廷根大学）致以谢意，感谢他提出的多条富有见地的意见，并提醒我们关注了 [27] 中的结果，这有助于改进本文内容。本研究始于作者在哥廷根大学数值与应用数学研究所从事博士后研究期间。作者谨此感谢 TIFR 应用数学中心提供的博士后研究员资助。

References

[1] R. Adams, *Sobolev spaces.* 纯粹与应用数学丛书第 65 卷，Academic Press，纽约，1975。[2] M. Bellassoued, J. Cheng and M. Choulli, *Stability estimate for an inverse boundary coefficient problem in thermal imaging.* J. Math. Anal. Appl. 343 (2008), no. 1, 328–336. [3] J.V. Beck, B. Blackwell and C.R.S. Clair, *Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems*, Wiley-Interscience，纽约，1985。[4] A. Behzadan and M. Holst, *Multiplication in Sobolev spaces, revisited.* Ark. Mat. 59 (2021), no. 2, 275–306. [5] H. Cao and S.V. Pereverzev, *Natural linearization for the identification of a diffusion coefficient in a quasi-linear parabolic system from short-time observations.* 22 2006 2311 2330 Inverse Problems ( ), - . [6] K. Cao, *Convergence rates for the reaction coefficient and the initial temperature identification problems.* 101 2022 7, Appl. 2472 2497 Anal. ( ), no. – .[7] D.H. Chen and I. Yousept, *Variational source conditions in L^p-spaces.* SIAM J. Math. Anal. 53 (2021), no. 3, 2863–2889. [8] D.H. Chen, D. Jiang, I. Yousept and J. Zou, *Variational source conditions for inverse Robin and flux problems by partial measurements.* Inverse Problems and Imaging, 2022, 16(2): 283-304. [9] J. Cheng, S. Lu and M. Yamamoto, *Reconstruction of the Stefan-Boltzmann coefficients in a heat-transfer process.* Inverse Problems 28 (2012), no. 4, 045007, 17 pp. [10] H.W. Engl, M. Hanke and A. Neubauer, *Regularization of inverse problems.* Kluwer，多德雷赫特，1996。[11] H.W. Engl, K. Kunisch and A. Neubauer, *Convergence rates for Tikhonov regularisation of nonlinear ill-posed problems.* Inverse Problems 5 (1989), no. 4, 523–540. [12] H.W. Engl and J. Zou, *A new approach to convergence rate analysis of Tikhonov regularization for parameter identification in heat conduction* 16 2000 1907 1923 , Inverse Problems ( ) - . [13] L.C. Evans, *Partial differential equations.* 第二版，数学研究生丛书第 19 卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2010。xxii+749 页。ISBN: 978-0-8218-4974-3 35-01.[14] D.N. H`ao, P.X. Thanh and D. Lesnic, *Determination of the heat transfer coefficients in transient heat conduction.* Inverse Problems 29 (2013), no. 9, 095020, 21 pp. [15] T. Hohage, *Logarithmic convergence rates of the iterated Tikhonov regularized Gauss-Newton method for an inverse potential and an inverse scattering problem.* 13 1997 5, 1279 1299 Inverse Problems ( ), no. – . [16] T. Hohage and F. Weidling, *Verification of a variational source condition for acoustic inverse medium scattering problems.* Inverse Prob-lems 31 (2015), no. 7, 075006, 14 pp. [17] T. Hohage and F. Weidling, *Characterizations of variational source conditions converse results and maxisets of spectral regularization methods.* , , SIAM J. Numer. Anal. 55 2017 2, 598 620 ( ), no. – . [18] V. Isakov, *Inverse Parabolic Problems with the final overdetermination.* Comm. Pure Appl. Math., 44 (1991), 185-209. [19] B. Jin and X. Lu, *Numerical identification of a Robin coefficient in parabolic problems.* Math. Comp. 81 (2012), no. 279, 1369–1398. [20] B. Jin and J. Zou, *Numerical estimation of piecewise constant Robin coefficient.* SIAM J. Control Optim. 48 (2009), no. 3, 1977–2002. [21] Y.L. Keung and J. Zou, *Numerical identifications of parameters in parabolic systems.* Inverse Problems 14 (1998), no. 1, 83–100. [22] P. K¨ugler and E. Sincich, *Logarithmic convergence rates for the identification of a nonlinear Robin coefficient.* J. Math. Anal. Appl. 359 (2009), no. 2, 451–463. [23] J. Liu and Y. Wang, *On the reconstruction of boundary impedance of a heat conduction system from nonlocal measurement.* Inverse Problems 32 (2016), no. 7, 075002, 23 pp. [24] M.T. Nair, *Linear Operator Equations: Approximation and Regularization.* World Scientific，哈肯萨克，2009。[25] A. Neubauer, *Tikhonov regularisation for nonlinear ill-posed problems: optimal convergence rates and finite-dimensional approximation.* Inverse Problems 5 (1989), no. 4, 541–557. [26] E. Schock, *On the asymptotic order of accuracy of Tikhonov regularization.* J. Optim. Theory Appl. 44 (1984), no. 1, 95–104. [27] B. Sprung, *Convergence rates for variational regularization of statistical inverse problems.* 博士论文，哥廷根大学（2019）。[28] B. Sprung and T. Hohage, *Higher order convergence rates for Bregman iterated variational regularization of inverse problems.* Numer. Math. 141 (2019), no. 1, 215–252. [29] F. Tr¨oltzsch, *Optimal control of partial differential equations. Theory, methods and applications.* 数学研究生丛书第 112 卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2010。xvi+399 页。ISBN: 978-0-8218-4904-0[30] Y. Wang and J. Liu, *On the simultaneous recovery of boundary heat transfer coefficient and initial heat status.* J. Inverse Ill-Posed Probl. 25 (2017), no. 5, 597–616. [31] M. Yamamoto and J. Zou, *Simultaneous reconstruction of the initial temperature and heat radiative coefficient.* Inverse Problems 17 (2001) 1181–1202. [32] M. Zhang and J. Liu, *On the simultaneous reconstruction of boundary Robin coefficient and internal source in a slow diffusion system.* Inverse Problems 37 (2021), no. 7, Paper No. 075008, 33 pp.

TIFR Centre for Applicable Mathematics, Bangalore-560065, India
Email address: subhankar22@tifrbng.res.in; s.subhankar80@gmail.com