arXiv:2304.00742v2 [cs.DM] 7 Mar 2024

弱直径为 2 的定向图中弧的最小数量计数

Sandip Das [a], Koushik Kumar Dey [a], Pavan P D [b], Sagnik Sen [b]

(a) 印度加尔各答印度统计研究所 (b) 印度达尔瓦德印度理工学院

摘要

如果每一对不邻接的顶点之间都存在一条有向 d-路，则称定向图的弱直径至多为 d 。函数 $f_d(n)$ 表示具有弱直径 d、含 n 个顶点的定向图中弧的最小数量。即使对于 $d = 2$，求出 $f_d(n)$ 的精确值也是一项具有挑战性的问题。该函数由 Katona 和 Szemerédi（1967）引入，此后 Znam（1970）、Dawes 和 Meijer（1987）、F¨uredi、Horak、Pareek 和 Zhu（1998），以及 Kostochka、Luczak、Simonyi 和 Sopena（1999）先后尝试通过改进其已知最佳界来求得精确值。在此过程中，人们证明该函数渐近等于 $n\log_2 n$，因此是一个渐增函数。然而，该函数的精确值及其变化规律仍然未知。

本文指出，弱直径至多为 2 的定向图恰好是绝对定向团，也就是说，它们是在定向着色背景下，团在定向图中的对应概念。通过研究弧数极小的绝对定向团，我们证明 $f_2(n)$ 是严格递增函数。此外，我们改进了 $f_2(n)$ 的已知最佳上界，并猜想我们的上界是紧的。这一上界的改进也改进了涉及定向无色数的已知界。

关键词：最小弧数函数、弱直径、定向着色、绝对定向团。

1 引言

关于著名的度-直径问题，Erd˝os、R´enyi 和 S´os [10] 定义了函数

$$h_d(n,k) = \min\{|E(G)| : \mathrm{diam}(G) \le d, \Delta(G) \le k \text{ and } |V(G)| = n\}$$

即具有直径至多为 d 且最大度至多为 k 的图中弧的最小数量。即使不限制最大度，它的有向（定向）对应问题在 d 取较小值时也颇为有趣。不过，在讨论这一问题之前，我们需要回顾几个概念。

1.1 $f_d(n)$函数

定向图 $\overrightarrow{G}$ 是一种不含大小为 1 或 2 的有向圈的有向图。 $\overrightarrow{G}$ 的顶点集合和弧集合分别记为 $V(\overrightarrow{G})$ 和 $A(\overrightarrow{G})$。此外， $\overrightarrow{G}$ 的弱直径记为 $\mathrm{diam}_w(\overrightarrow{G})$，它是满足以下条件的最小 d：对于 $\overrightarrow{G}$ 中任意两个不同的顶点 u 和 v，存在一条长度至多为 d 的有向路，该有向路从 u 到 v，或从 v 到 u。因此，在这种情况下， h_d 的对应问题（忽略最大度限制）可表示为

$$f_d(n) = \min\{|A(\overrightarrow{G})| : \mathrm{diam}_w(\overrightarrow{G}) \leq d \text{ and } |V(\overrightarrow{G})| = n\}.$$

即使在 $d = 2$ 的情况下，求出 $f_d(n)$ 的精确值仍然是一个颇具挑战性的问题。另一方面，弱直径至多为 2 的定向图，是后来发展起来的定向同态与着色理论中所关注的对象 [20]。

1.2 与定向着色的关系

定向同态、着色和色数的概念由 Courcelle [3] 在一系列论文中引入，这些论文最终促成了著名的 Courcelle 定理。顶点映射 $\phi: V(\overrightarrow{G}) \to V(\overrightarrow{H})$ 是从 $\overrightarrow{G}$ 到 $\overrightarrow{H}$ 的同态，当且仅当对于 $\overrightarrow{G}$ 的每条弧 $\overrightarrow{uv}$， $\overrightarrow{\phi(u)\phi(v)}$ 也是 $\overrightarrow{H}$ 的一条弧。 $\overrightarrow{G}$ 的定向色数记为 $\chi_o(\overrightarrow{G})$，它是满足 $\overrightarrow{G}$ 可同态映射到 $\overrightarrow{H}$ 的最小 $|V(\overrightarrow{H})|$。注意，对无向图给出类似的图同态定义，可以得到色数 [12] 的一个等价定义。因此，定向着色确实是普通着色的真正推广。

为了寻找与定向着色相关的、适用于定向图的团的类似概念，Klostermeyer 和 MacGillivray [15] 定义了绝对定向团： $\overrightarrow{C}$ 它是满足 $\chi_o(\overrightarrow{C}) = |V(\overrightarrow{C})|$ 的定向图。他们对绝对定向团作出了如下刻画。

定理 1.1（Klostermeyer 和 MacGillivray [15]）。定向图 $\overrightarrow{C}$ 是绝对定向团，当且仅当 $\overrightarrow{C}$ 是一个弱直径至多为 2 的定向图。

因此，在研究函数 $f_2(n)$ 时，我们所关注的对象是绝对定向团。

顺便指出，正如 Bensmail、Duffy 和 Sen [1], 所指出的，绝对定向团并不罕见：他们证明了几乎所有定向图都是绝对定向团。然而，检测它们却很困难，因为 Kirgizov、Duvignau 和 Bensmail [14] 证明了，判断给定的简单图是否能够定向为绝对定向团是 NP 困难的。本领域一项重要的结构性结果由 Nandi、Sen 和 Sopena [17], 给出：他们通过证明平面绝对定向团至多有 15 个顶点，解决了 Klostermeyer 和 MacGillivray [15] 提出的一个猜想。

注 1.2. 被称为绝对定向团的对象及其推广——相对定向团，出现在同态和

有向图的着色研究中的若干语境中。除了少数专门研究定向团的工作外 [4,5, 15, 17], ，它们也常被用于证明某些图族的定向色数下界 [7, 9, 20]。深度临界有向图的研究将绝对定向团作为主要结果的关键构造 [2, 8]。此外，有向完全着色和全色数的研究 [19, 21] 也高度依赖于对绝对定向团结构的理解。事实上，对函数 $f_2(n)$ 的了解可能会对其研究产生重大影响。

1.3 $f_2(n)$ 的界

确定函数 $f_2(n)$ 的问题最初由 Erd˝os、R´enyi 和 S´os [10] 于 1966年提出，后来 Znam [22] 、Dawes 和 Meijer [6]也提出了这一问题。对于无向图，类似问题的答案，即确定 $h_2(n, n-1)$ 的精确值，显而易见：直径至多为 2 的图至少有 $n-1$ 条边，而星图恰好达到这一界，因此 $h_2(n, n-1) = n-1$。对于定向图，Katona 和 Szemer´edi [13] 证明了以下结果。

定理 1.3（Katona 和 Szemer´edi [13]）。

$$\frac{n}{2}\log_2\frac{n}{2} \le f_2(n) \le n\lceil \log_2 n\rceil.$$

F¨uredi、Horak、Pareek 和 Zhu [11], 以及 Kostochka、Luczak、Simonyi 和 Sopena[16] 的研究独立地进一步改进了这些界，并证明了以下结果。

定理 1.4（F¨uredi、Horak、Pareek 和 Zhu [11]）。对于任意 $n \ge 9$,

$$(1-o(1))n\log_2 n \le f_2(n) \le n\log_2 n - \frac{3}{2}n.$$

定理 1.5（Kostochka、Luczak、Simonyi 和 Sopena [16]）。对于固定的 $d \ge 2$ ，且 n 足够大

$$n(\log_d n - 4\log_d\log_d n - 5) \le f_d(n) \le \lceil \log_d n\rceil(n - \lceil \log_d n\rceil).$$

定理 1.4 和 1.5 均改进了定理 1.3，但得出了相同的结论，如下所示：

定理 1.6（F¨uredi、Horak、Pareek 和 Zhu [11] 以及 Kostochka、Luczak、Simonyi 和 Sopena [16]）。设 $f_2(n)$ 为阶为 n的绝对定向团中弧的最小数量。那么,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_2(n)}{n\log_2 n} = 1.$$

1.4 研究动机与我们的贡献

因此，函数 $f_2(n)$ 渐近等于 $n\log_2 n$，从而渐近递增。然而，由于该函数的精确值仍未知，迄今为止， $f_2(n)$ 的一些具体性质也仍未明了。事实上，在第四作者与 Sopena 的一次私人交谈中，他们发现，看似简单的问题“函数 $f_2(n)$ 是否递增？”并没有显而易见的答案。本文通过证明以下结果来回答这个问题。

定理 1.7。函数 $f_2(n)$ 严格递增。

此外，我们猜想 $f_2(n)$ 的精确值，并证明了 $f_2(n)$ 的一个上界，该上界与我们的猜想相符，同时也改进了其已知的最佳上界。猜想值通过递推关系给出，因此，为了陈述我们的猜想，我们首先介绍下面的递归数列 x_n。

定义 1.8。整数数列 x_m 的初始值为 $x_1 = 0, x_2 =1, x_3 = 2, x_4 = 4, x_5 = 5$。对于 $m \geq 6$，数列 x_m 由以下递推关系给出：

$$x_m = (m-1) + \begin{cases} x_{\frac{m+1}{2}} + x_{\frac{m-3}{2}} & \text{if } m \equiv 1 \pmod 4 \\ 2x_{\frac{m-1}{2}} & \text{if } m \equiv 3 \pmod 4 \\ x_{\frac{m}{2}} + x_{\frac{m-2}{2}} & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{1}$$

猜想1.9。对于所有正整数 n，有 $f_2(n) = x_n$。

我们的下一项贡献是证明 x_n 是 $f_2(n)$ 的一个上界。特别地，这改进了 $f_2(n)$ 已知的最佳上界。

定理 1.10. 对所有正整数 n，我们有 $f_2(n) \leq x_n$。

证明之后，我们将讨论我们为何认为该猜想成立，并介绍一些可能的解决途径。

1.5 文章结构

本文首先在第 2 节回顾一些基本预备知识。随后，我们分别在第 3 节和第 4 节证明定理 1.7 和定理 1.10。在第 5 节，我们讨论定理 1.10 在图的定向无色数中的应用。在第 6 节，我们总结全文，讨论我们的猜想，并提供一些支持该猜想的证据。

注：本工作的初步版本曾以海报形式在 EuroComb 2023 上展示。

2 预备知识

给定一条弧 $\overrightarrow{uv}$ of $\overrightarrow{G}$，顶点 u 是 v 的入邻点，顶点 v 是 u的出邻点。u 的所有入邻点（分别地，出邻点）组成的集合记作 $N^-(u)$

（分别地，$N^+(u)$）。若顶点 u 和 v 在 $\overrightarrow{G}$ 中都与第三个顶点 w 相邻，则称它们在该顶点上相合；也就是说，w 既是 u 也是 v的入邻点或出邻点。推点 u 就是反转与 u关联的弧的方向。注意，推点 u 会交换集合 $N^+(u)$ 和$N^-(u)$。

我们首先考察在绝对定向团中推点的影响。为方便起见，我们称顶点 u 看见顶点 v，如果 u 和 v 要么邻接，要么通过有向二阶路径相连。此外，如果 u 通过以 w 为内部顶点的有向二阶路径与 v 相连，那么我们称 u 通过 w 看见 v。

3 定理 1.7 的证明

如果我们对定向图 $\overrightarrow{H}$ 中的一个顶点 x 进行推点操作，则图中两个顶点之间的邻接关系保持不变（尽管弧的方向可能改变）。此外，如果在 $\overrightarrow{H}$ 中存在一条经过 x 的有向二阶路径，那么对 x 进行推点操作后，它仍然是一条有向二阶路径，尽管其中各弧的方向会反转。

观察 3.1。设 $\overrightarrow{H}$ 是一个绝对定向团，$\overrightarrow{H}'$ 是通过对 $\overrightarrow{H}$ 中的顶点 x 进行推点操作得到的定向图。那么，$V(\overrightarrow{H}')$ 中的顶点在 $\overrightarrow{H}'$ 中彼此看见，而 $n-1 \le \chi_o(\overrightarrow{H}')$ 中的顶点在 $\le n$ 中彼此看见。

上述观察的一个改进如下。

引理 3.2. 设 $\overrightarrow{H}$ 是一个含有 n 个顶点的绝对定向团，并设 $\overrightarrow{H}'$ 是由对 $\overrightarrow{H}$ 中的顶点 x 进行推点得到的定向图。若 $\chi_o(\overrightarrow{H}') = n-1$，则存在一个与 x 不邻接的顶点 x'，它在 $\overrightarrow{H}'$ 中的所有公共邻点上都与 x 一致。

证明. 设 $\chi_o(\overrightarrow{H}') = n-1$。因此，存在一个阶为 $(n-1)$ 的定向图 $\overrightarrow{T}$，使得 ϕ 是从 $\overrightarrow{H}'$ 到 $\overrightarrow{T}$ 的同态。根据观察 3.1，我们知道 $V(\overrightarrow{H}') \setminus \{x\}$ 中的所有顶点两两相见，因此在任何同态下，它们的像都互不相同。于是，根据鸽巢原理，对于某个 $x' \in V(\overrightarrow{H}') \setminus \{x\}$，必有 $\phi(x) = \phi(x')$。

由于 $\phi(x) = \phi(x')$，x 和 x' 在 $\overrightarrow{H}$中不能邻接，因此在 $\overrightarrow{H}'$中也不能邻接。因此，绝对定向团 $\overrightarrow{H}$中存在一条连接 x 和 x' 的有向二阶路径。

设 w 是 x 和 x'的一个公共邻点。注意，若 w 是 $\overrightarrow{H}'$中 x 的入邻点（分别地，出邻点），则在 $\overrightarrow{T}$中，$\phi(w)$ 是 $= \phi(x')$ $\phi(x)$ 的入邻点（分别地，出邻点）。这意味着 w 也是 x' 的入邻点（分别地，出邻点），因为 ϕ 是一个同态。因此，x 和 x' 在 $\overrightarrow{H}'$的每个公共邻点上取值相同。 □

设 $\overrightarrow{H}$ 是一个定向图，其中有两个不相邻顶点 x 和 x'，它们在公共邻点上的关系一致。设 $\overrightarrow{H}_{(xx')}$ 是通过合并 x 和 x' 得到的图。形式上，$\overrightarrow{H}_{(xx')}$ 是从 $\overrightarrow{H}$ 中删除顶点 x 和 x'，再添加一个新顶点 $v_{xx'}$ 得到的定向图；该新顶点的入邻点为 x 和 x' 的入邻点的并集，出邻点为 x 和 x' 的出邻点的并集。于是有如下结论。

引理 3.3. 设 $\overrightarrow{H}$ 是一个具有 n 个顶点的绝对定向团，设 $\overrightarrow{H}'$ 是通过对 $\overrightarrow{H}$ 中的顶点 x 进行推点得到的定向图。如果 $\chi_o(\overrightarrow{H}') = n-1$，且不相邻顶点 x、x' 在 $\overrightarrow{H}'$ 中与每个公共邻点的关系都一致，那么定向图 $\overrightarrow{H}'_{(xx')}$ 是一个绝对定向团。

证明。要证明 $\overrightarrow{H}'' = \overrightarrow{H}'_{(xx')}$ 是一个绝对定向团，只需根据定理 1.1 证明 $\overrightarrow{H}''$ 的顶点两两可达。

由观察 3.1 可知，$V(\overrightarrow{H}') \setminus \{x\}$ 两两可达于 $\overrightarrow{H}'$。设 y、$z \neq v_{xx'}$ 是 $\overrightarrow{H}''$ 中两个不同的顶点。如果 y 和 z 在 $\overrightarrow{H}'$ 中邻接，那么它们在 $\overrightarrow{H}''$ 中也邻接。假设 y 通过 $\overrightarrow{H}'$ 中的某个顶点 w 到达 z。如果 $w \neq x$，x'，那么 y 也通过 $\overrightarrow{H}''$ 中的 w 到达 z。如果 $w \in \{x, x'\}$，那么在 $\overrightarrow{H}''$ 中，y 通过 $v_{xx'}$ 到达 z。因此，$V(\overrightarrow{H}'')$ 中的每个顶点 $\setminus \{v_{xx'}\}$ 都能到达 $\overrightarrow{H}''$ 中的每个其他顶点。

另一方面，$v_{xx'}$ 能看到 $V(\overrightarrow{H}'')$中的每个顶点，这一点由 x'能看到 $V(\overrightarrow{H}') \setminus \{x, x'\}$ 中的每个顶点，以及$N^+(x') \subseteq N^+(v_{xx'})$ $N^-(x') \subseteq N^-(v_{xx'})$ 这一事实可直接得出。 □

若有向图 $\overrightarrow{H}$ 中的顶点 x x 没有入邻点，则称其为源点。

引理 3.4. 设 $\overrightarrow{H}$ 是一个含有 n 个顶点的绝对定向团，且 x 是一个源点。那么，有向图 $\overrightarrow{H} - x$ 也是一个绝对定向团。

证明。$V(\overrightarrow{H}) \setminus \{x\}$ 中的任意一对顶点都能彼此看到，但不是通过 x，因为 x 是一个源点。因此，$\overrightarrow{H} - x$ 中的所有顶点都能彼此看到，从而 $\overrightarrow{H} - x$ 是一个绝对定向团。 □

最后，我们已经准备好证明定理 1.7。

定理 1.7 的证明。设 $\overrightarrow{H}$是一个阶为 $n+1$、恰有$f_2(n+1)$条弧的绝对定向团，其中 $n \geq 1$。我们希望证明存在一个包含 n 个顶点、弧数严格少于 $f_2(n+1)$的绝对定向团。

设 $w \in V(\overrightarrow{H})$ 和 $N^-(w) = \{w_1, w_2, \cdots, w_t\}$。我们定义一个由定向图组成的数列 $\overrightarrow{H}^i$，其中 $i \in \{1, 2, \cdots, t\}$。定向图 $\overrightarrow{H}^i$是通过对集合 $\{w_1, w_2, \cdots, w_i\}$中的顶点进行推点得到的，并且 $\overrightarrow{H}^0 = \overrightarrow{H}$。于是有以下两种情况。

情况 1 - $\overrightarrow{H}^t$不是绝对定向团：那么存在一个 $i \in \{1, 2, \cdots, t\}$，使得 $\overrightarrow{H}^0$、$\overrightarrow{H}^1$、$\cdots$、$\overrightarrow{H}^{i-1}$都是绝对定向团，而 $\overrightarrow{H}^i$不是。由于 $\overrightarrow{H}^i$是通过对定向团 $\overrightarrow{H}^{i-1}$中的顶点 w_i进行推点得到的，根据引理 3.2，存在一对不相邻顶点，例如 x、x'，它们位于 $\overrightarrow{H}^i$中，并且在所有公共邻点上相同。接着，根据引理 3.3，定向图 $\overrightarrow{H}^i{}_{(xx')}$ 是一个包含 n 个顶点的绝对定向团。由于 x和 x'在 $\overrightarrow{H}^{i-1}$中彼此可见，它们在 $\overrightarrow{H}^{i-1}$中至少有一个公共邻点。因此，$\overrightarrow{H}^i{}_{(xx')}$ 是一个阶为 n的绝对定向团，且其大小严格小于 $|A(\overrightarrow{H}^i)| = |A(\overrightarrow{H})| = f_2(n+1)$。因此，$f_2(n) < f_2(n+1)$。

情况 2 - $\overrightarrow{H}^t$是一个绝对定向团：由于 $w \in \overrightarrow{H}^t$是源点，根据引理 3.4，定向图 $\overrightarrow{H}^t - w$是一个含有 n个顶点的绝对定向团。由于 $deg(w) \geq 1$,

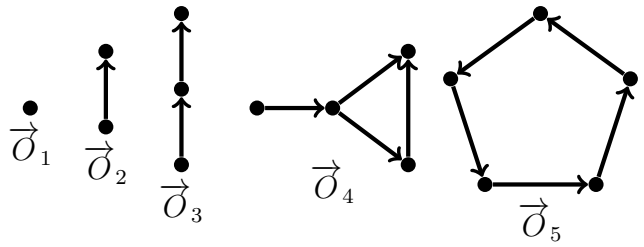

图 1：绝对定向团 $\overrightarrow{O}_1$、$\overrightarrow{O}_2$、$\overrightarrow{O}_3$、$\overrightarrow{O}_4$ 和 $\overrightarrow{O}_5$。

$\overrightarrow{H}^t - w$ 中的弧数严格小于 $|A(\overrightarrow{H}^t)| = |A(\overrightarrow{H})| = f_2(n+1)$。因此，$f_2(n) < f_2(n+1)$。

因此，函数 $f_2(n)$ 严格递增。 □

4 定理 1.10 的证明

为了证明这一结果，我们将首先描述一个数列的构造：对所有 $n \geq 1$，构造绝对定向团 $\overrightarrow{O}_n$，使得 $\overrightarrow{O}_n$ 有 x_n 条弧（回顾第 1 节中定义的数列 $((x_m))$ ）。注意，这足以证明定理 1.10。我们的证明分为两部分：首先描述该构造，然后说明该构造确实满足 $|A(\overrightarrow{O}_n)| = x_n$。对于证明的第二部分，我们还需要证明数列 $((x_m))$ 的一些性质。为方便读者，我们将在若干小节中展开证明。

4.1 $\overrightarrow{O}_n$的构造

图 1 明确展示了绝对定向团 $\overrightarrow{O}_n$（ $n \leq 5$）。可以很容易验证，它们都是绝对定向团。此外，根据 Sopena [21], ，每个团都有 f_2（n）条弧；在本例中，这与 x_n （初始值）相同。

给定两个定向图 $\overrightarrow{G}_1$和 $\overrightarrow{G}_2$，定向图 $\overrightarrow{G}_1 \ltimes \overrightarrow{G}_2$按如下方式构造：取 $\overrightarrow{G}_1$和 $\overrightarrow{G}_2$的不交并，并添加一个新顶点 v（例如）。然后，对所有顶点 $u \in V$（$\overrightarrow{G}_1$）添加形如 $\overrightarrow{uv}$ 的弧，并对所有顶点 $w \in V$（$\overrightarrow{G}_2$）添加形如 $\overrightarrow{vw}$的弧。图 2 展示了这一构造。
$\overrightarrow{G}_1 \ltimes \overrightarrow{G}_2$的一个尤为有趣且有用的性质如下；这一性质使该构造在定向着色研究中具有重要意义。

命题 **4 1** $\chi_o = \chi_o +$ .. 设 $\overrightarrow{G}_1$和 $\overrightarrow{G}_2$ 是两个定向图。则 $\chi_o \overrightarrow{G}_2 + 1$ $(\overrightarrow{G}_1 \ltimes \overrightarrow{G}_2)$ $(\overrightarrow{G}_1)$ ( ) 。

证明。首先注意，$\overrightarrow{G}_1$的顶点通过特殊顶点 v能够看到 $\overrightarrow{G}_2$的顶点（根据 $\overrightarrow{G}_1 \ltimes \overrightarrow{G}_2$的定义）。因此，根据定理 1.1，在任何同态下，$\overrightarrow{G}_1$的顶点与 $\overrightarrow{G}_2$的顶点的像都彼此不同。此外，由于 v 与其他每个顶点都邻接，在任何同态下，它的像都必须与其他每个顶点的像不同。因此，我们有 $\chi_o(\overrightarrow{G}_1 \ltimes \overrightarrow{G}_2) \geq \chi_o(\overrightarrow{G}_1) + \chi_o(\overrightarrow{G}_2) + 1$。

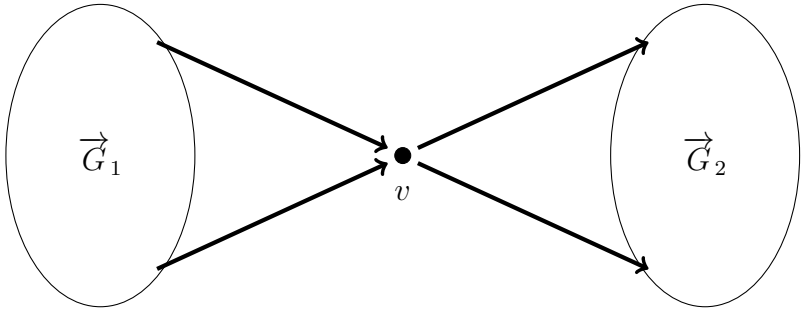

图 2：定向图 $\overrightarrow{G}_1 \ltimes \overrightarrow{G}_2$。

另一方面，存在一个有 $\chi_o(\overrightarrow{G}_i)$ 个顶点的定向图 $\overrightarrow{H}_i$，使得对于 $i \in \{1,2\}$，$\overrightarrow{G}_i$存在到 $\overrightarrow{H}_i$的同态。因此，$\chi_o(\overrightarrow{G}_1 \ltimes \overrightarrow{G}_2)$ 存在到 $\chi_o(\overrightarrow{H}_1 \ltimes \overrightarrow{H}_2)$ 的同态。由于 $\chi_o(\overrightarrow{H}_1 \ltimes \overrightarrow{H}_2)$ 恰有 $\chi_o(\overrightarrow{G}_1) + \chi_o(\overrightarrow{G}_2) + 1$ 个顶点，我们有 $\chi_o(\overrightarrow{G}_1 \ltimes \overrightarrow{G}_2) \leq \chi_o(\overrightarrow{G}_1) + \chi_o(\overrightarrow{G}_2) + 1$。 □

如果我们选择 $\overrightarrow{G}_1$ 和 $\overrightarrow{G}_2$ 作为绝对定向团，那么根据命题 4.1 可直接推出，$\overrightarrow{G}_1 \ltimes \overrightarrow{G}_2$ 也是一个绝对定向团。

推论 4.2。设 $\overrightarrow{G}_1$ 和 $\overrightarrow{G}_2$ 是两个绝对定向团，则定向图 $\overrightarrow{G}_1 \ltimes \overrightarrow{G}_2$ 也是一个绝对定向团。

证明。设 $\overrightarrow{G}_1$ 和 $\overrightarrow{G}_2$ 是绝对定向团，即 $\chi_o(\overrightarrow{G}_1) = |V(\overrightarrow{G}_1)|$ 和 $\chi_o = |V|$ $\chi_o = \chi_o + \chi_o + 1 = |V| + (\overrightarrow{G}_2)(\overrightarrow{G}_2)$。根 $|V\ \overrightarrow{G}_2| + 1$ 4 1, $\overrightarrow{G}_1 \ltimes \overrightarrow{G}_2$ 据命题，我们知道 $(\overrightarrow{G}_1 \ltimes \overrightarrow{G}_2)(\overrightarrow{G}_1)(\overrightarrow{G}_2)(\overrightarrow{G}_1)()$。这恰好是 中顶点的数量。因此，根据定义，定向图 $\overrightarrow{G}_1 \ltimes \overrightarrow{G}_2$ 也是一个绝对定向团。 □

特别地，命题 4.1 还为函数$f_2(n)$证明了一个递归上界。

推论 4.3. 对任意 $n \geq 3$，有

$$f_2(n) \leq (n-1) + \min\{f_2(n_1) + f_2(n_2) : n_1 + n_2 = n - 1\}.$$

证明. 设 $\overrightarrow{G}_{n_1}$和 $\overrightarrow{G}_{n_2}$分别是阶为 n_1和 n_2的绝对定向团。设$|A(\overrightarrow{G}_{n_1})| = f_2(n_1)$，且 $|A(\overrightarrow{G}_{n_2})| = f_2(n_2)$。若 $\overrightarrow{G}_n = \overrightarrow{G}_{n_1} \ltimes \overrightarrow{G}_{n_2}$，则根据该构造，$n_1 + n_2 = n - 1$；由推论 4.2，$\overrightarrow{G}_n$是一个绝对定向团。因此，$\overrightarrow{G}_n$的弧数是 $f_2(n)$的一个上界。现在，我们可以改变 n_1和 n_2的取值，并在上述过程中选取使 $f(n)$的上界尽可能小的取值。由此即可得到所需结果。

□

直观上，我们认为上述推论给出的上界实际上是紧的。我们的构造基于这一直觉。回想一下，初始的 $\overrightarrow{O}_n$，即 $\overrightarrow{O}_n$对于 $n \leq 5$，已在图 1 中明确展示。对于 $n \geq 6$，我们定义

$$\overrightarrow{O}_n = \overrightarrow{O}_{n_1} \ltimes \overrightarrow{O}_{n_2}$$

其中 $n_1+n_2=n-1$、 n_1 和 n_2 的选取使得 $|A(\overrightarrow{O}_{n_1})|+|A(\overrightarrow{O}_{n_2})|$ 最小。接下来的任务是证明，对于所有 $n\geq 1$， $\overrightarrow{O}_n$ 中的弧数确实等于 x_n。我们将在后续各节中证明这一部分。

4.2 数列 $((x_m))$ 的性质

引理 4.4. 对所有 $m\geq 3$,

$$x_{m+1}=\begin{cases} x_m+x_{m-1}-x_{m-2}+1, & \textit{if } m=3\cdot 2^i \textit{ or } 3\cdot 2^i-1, \textit{ for some } i\geq 0,\\ x_m+x_{m-1}-x_{m-2}, & \textit{otherwise.}\end{cases}$$

证明。我们对 m 使用强归纳法来证明这一点，也就是说，假设上文所述的恒等式对所有 $m\in\{3,4,5,\ldots,k-1\}$ 都成立。不过，事后看来，我们知道归纳步骤的证明对所有 $m=k\geq 6$ 都同样适用。因此，尽管只需验证 $m=3$ 的陈述即可证明基础情形，我们仍将验证所有 $m=3$、4、5 的陈述，并将其作为基础情形。

对于基础情形，我们将验证给定恒等式对 $m\in\{3,4,5\}$ 的正确性。由于这些只是简单的计算，为方便读者，我们仅将结果列于下方。

- 对于 $m=3$: $x_3+x_2-x_1+1=2+1-0+1=4=x_4$。
- 对于 $m=4$: $x_4+x_3-x_2=4+2-1=5=x_5$。
- 对于 $m=5$: $x_5+x_4-x_3+1=5+4-2+1=8=x_6$。

接下来，我们将证明归纳步骤：假设陈述中的恒等式对所有 $m\leq k-1$ 都成立，然后证明该恒等式对 $m=k$ 也成立。由于该恒等式取决于 k 模 4 的余数，我们需要分几种情况讨论。

情况 1——当 $k\equiv 1$，2（模 4）时：在这种情况下， k 不可能是 $3\cdot 2^i$ 或 $3\cdot 2^i-1$ 的形式，其中 i 是一个大于或等于 2 的整数。因此，只需将式 ^{n}(1) 中相应的项代入，即可直接得到该恒等式。详细计算如下。

- 如果 $k\equiv 1$ （模 4），那么

$$\begin{aligned} x_k+x_{k-1}-x_{k-2} &= \left(k-1+x_{\frac{k+1}{2}}+x_{\frac{k-3}{2}}\right)+\left(k-2+x_{\frac{k-1}{2}}+x_{\frac{k-3}{2}}\right)\\ &\qquad -\left(k-3+2x_{\frac{k-3}{2}}\right)\\ &= k+x_{\frac{k+1}{2}}+x_{\frac{k-1}{2}}\\ &= x_{k+1}.\end{aligned}$$

• 如果 $k \equiv 2$ （模 4），那么

$$\begin{aligned} x_k + x_{k-1} - x_{k-2} &= \left(k-1+x_{\frac{k}{2}} + x_{\frac{k-2}{2}}\right) + \left(k-2+x_{\frac{k}{2}} + x_{\frac{k-4}{2}}\right) \\ &\qquad - \left(k-3+x_{\frac{k-2}{2}} + x_{\frac{k-4}{2}}\right) \\ &= k + 2x_{\frac{k}{2}} \\ &= x_{k+1}. \end{aligned}$$

情形 2——当 $k \equiv 0$，3（模 4）时：在这种情况下，我们需要考虑那些形式为 $3 \cdot 2^i$ 或 $3 \cdot 2^i - 1$ 的 k。此时的关键观察是，当$k \geq 6$时，整数 k 是 $3 \cdot 2^i - 1$ 形式，当且仅当 $(k-1)/2$ 也是相同形式。因此，对于索引 k 和 $(k-1)/2$，恒等式中都含有 $+1$ 项；将适当的项代入式 ^{n}(1)，即可得到所需表达式。类似地，当 $k \geq 6$ 时，整数 k 是 $3 \cdot 2^i$ 形式，当且仅当 $k/2$ 也是相同形式。因此，对于索引 k 和 $k/2$，恒等式中都含有 $+1$ 项；将适当的项代入式^n(1)，即可得到所需表达式。下面给出详细计算。为方便起见，下面使用的项 ϵ 在 k 是 $3 \cdot 2^i$ 或 $3 \cdot 2^i - 1$ 形式时取值为 1，否则取值为 0。

• 若 $k \equiv 3$ （模 4），则

$$\begin{aligned} x_k + x_{k-1} - x_{k-2} + \epsilon &= \left(k-1+2x_{\frac{k-1}{2}}\right) + \left(k-2+x_{\frac{k-1}{2}} + x_{\frac{k-3}{2}}\right) \\ &\qquad - \left(k-3+x_{\frac{k-1}{2}} + x_{\frac{k-5}{2}}\right) + \epsilon \\ &= k + \left(x_{\frac{k-1}{2}} + x_{\frac{k-3}{2}} - x_{\frac{k-5}{2}}\right) + x_{\frac{k-1}{2}} + \epsilon \\ &= k + x_{\frac{k+1}{2}} - \epsilon + x_{\frac{k-1}{2}} + \epsilon \\ &= x_{k+1}. \end{aligned}$$

• 若 $k \equiv 0$ （模 4），则

$$\begin{aligned} x_k + x_{k-1} - x_{k-2} + \epsilon &= \left(k-1+x_{\frac{k}{2}} + x_{\frac{k-2}{2}}\right) + \left(k-2+2x_{\frac{k-2}{2}}\right) \\ &\qquad - \left(k-3+x_{\frac{k-2}{2}} + x_{\frac{k-4}{2}}\right) + \epsilon \\ &= k + \left(x_{\frac{k}{2}} + x_{\frac{k-2}{2}} - x_{\frac{k-4}{2}}\right) + x_{\frac{k-2}{2}} + \epsilon \\ &= k + x_{\frac{k+2}{2}} - \epsilon + x_{\frac{k-2}{2}} + \epsilon \\ &= x_{k+1}. \end{aligned}$$

上述结论证明了归纳步骤，从而完成了该引理的证明。

□

了解数列 ((x_m)) 的项的一个性质后，让我们来说明本节结果的动机。回顾一下，构造绝对定向团 $\overrightarrow{\mathcal{O}}_n$需要两个阶分别为 n_1和 n_2、满足 $n_1+n_2=n-1$的较小绝对定向团，使得 $|A(\overrightarrow{\mathcal{O}}_{n_1})|+|A(\overrightarrow{\mathcal{O}}_{n_2})|$最小。根据定义，我们无法确定这个最小值在 n_1和 n_2取何值时能够达到。我们证明了 x_n的初始值 ($n\le 5$) 与 $|A(\overrightarrow{\mathcal{O}}_n)|$相符。为了最终证明 $|A(\overrightarrow{\mathcal{O}}_n)|=x_n$，我们利用已知的 x_n 的精确值（见式[n](1)），来确定可能的 n_1和n_2的取值，使和 $x_{n_1}+x_{n_2}$最小。事实上，我们断言 n_1和 n_2 的最优取值大致在 $\frac{n}{2}$ 附近。为此，我们将论证分为两种情况： n为偶数和 n 为奇数。针对每种情况，我们都会证明数列 ((x_m)) 的一些其他性质，以支持我们的断言。

4.2.1 $n=2m$ 为偶数

假设 n 为偶数，且形式为 $n=2m$。无序对 $\{1,2m-2\}$、$\{2,2m-3\}$、$\cdots$、$\{m-2,m+1\}$ 和 $\{m-1,m\}$ 为 n_1 和n_2 的取值提供了可能的选择，使得 $n_1+n_2=n-1=2m-1$。我们比较每一对对应的 $x_{n_1}+x_{n_2}$ 的值，以确定哪些取值能使总和最小。例如，将引理 4.4 中等式的各项重新排列，可直接得到以下不等式，即选择 $\{n_1,n_2\}=\{m-1,m\}$ 优于$\{n_1,n_2\}=\{m-2,m+1\}$。

推论 4.5。对于 $m\ge 3$，我们有 $x_m+x_{m-1}\le x_{m+1}+x_{m-2}$。

在下述引理中，我们通过证明对于偶数 n， $\{n_1,n_2\}=\{m-1,m\}$ 的选择实际上是 n_1 和 n_2 所有选项中的最优选择，完成相关讨论。

引理 4.6。对于 $m\ge 2$， $x_{m-i}+x_{m-1+i}\le x_{m+i}+x_{m-1-i}$，其中 $i\in[0,m-2]$。此外，$x_m+x_{m-1}\le x_{m+i}+x_{m-1-i}$，其中 $i\in[0,m-2]$。

证明。固定一个 $m\ge 2$。为证明引理的第一部分，我们对指标 i 使用强归纳法，也就是说，假设上述恒等式对所有 $i\in\{0,1,\cdots,j-1\}$ 都成立。为证明基础情形，我们验证该命题对 $i=0$ 和 1 成立，因为代入 $i=0$ 后会得到一个显然的结果。将 $i=1$ 代入恒等式，得到 $x_{m-1}+x_m\le x_{m+1}+x_{m-2}$，这由推论 4.5 可知成立。由此证明了基础情形。

接下来，我们将证明归纳步骤：假设陈述中的恒等式对所有 $i\le j-1$ 都成立，再证明该恒等式对 $i=j$ 也成立。为此，我们从 $x_{m+j}+x_{m-1-j}$ 开始，并应用推论 4.5，将所得各项合并分组。随后，我们将应用归纳假设，得到所需的证明。详细计算如下。

我们分别在推论 4.5 中用 ($m-1+j$) 和 ($m+1-j$) 替换 m，并进行一些调整，得到

$$\begin{aligned}x_{m+j}+x_{m-1-j}&\ge(x_{m-1+j}+x_{m-2+j}-x_{m-3+j})+(x_{m+1-j}+x_{m-j}-x_{m+2-j})\\&=(x_{m-1+j}+x_{m-j})+(x_{m-2+j}+x_{m+1-j})-(x_{m-3+j}+x_{m+2-j}).\end{aligned}$$

但根据归纳假设，当 $i = j - 2$

$$x_{m-3+j} + x_{m+2-j} \leq x_{m-2+j} + x_{m+1-j}.$$

因此，结合上述两个不等式可得

$$\begin{aligned} x_{m+j} + x_{m-1-j} &\geq (x_{m-1+j} + x_{m-j}) + (x_{m-3+j} + x_{m+2-j}) - (x_{m-3+j} + x_{m+2-j}) \\ &= x_{m-1+j} + x_{m-j}, \end{aligned}$$

由此完成归纳步骤的证明。

引理的后半部分可以通过反复应用我们刚刚证明的恒等式来证明。具体计算如下。

$$\begin{aligned} x_{m+i} + x_{m-1-i} \geq x_{m-1+i} + x_{m-i} &= x_{m+(i-1)} + x_{m-1-(i-1)} \\ &\geq x_{m+(i-2)} + x_{m-1-(i-2)} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\geq x_{m+(1)} + x_{m-1-(1)} \\ &\geq x_m + x_{m-1}. \end{aligned}$$

引理的证明至此完成。 □

注：引理 4.6 表明，当 $n_1 + n_2 = n - 1$ 时，$x_{n_1} + x_{n_2}$ 的值会随着 n_1 与 n_2 之间的差值增大而增大。这支持了我们的主张，即 n_1 和 n_2 的最佳取值大致在 $\frac{n}{2}$ 附近，此时 n_1 与 n_2 之间的差值最小。引理 4.6 的后半部分证明了我们的主张。

4.2.2 $n = 2m + 1$ 为奇数

假设 n 是奇数，且具有 $n = 2m + 1$ 的形式。无序对 $\{1, 2m - 1\}$、$\{2, 2m - 2\}$、$\cdots$、$\{m - 1, m + 1\}$ 和 $\{m, m\}$ 为 n_1 和 n_2 的取值提供了可能的选择，使得 $n_1 + n_2 = n - 1 = 2m$。和之前一样，我们比较每个无序对对应的 $x_{n_1} + x_{n_2}$ 的值，并确定哪些取值能使总和最小。

下面的引理说明，当 n 是奇数时，在 n_1 和 n_2 的所有取值选择中，最佳选择是 $\{n_1, n_2\} = \{m - 1, m + 1\}$ 或 $\{n_1, n_2\} = \{m, m\}$。

引理 4.7。对于 $m \geq 2$、$x_{m+i-1} + x_{m-i+1} \leq x_{m+i+1} + x_{m-i-1}$，其中 $i \in [0, m - 2]$。此外，

$$x_{m+i+1} + x_{m-i-1} \geq \begin{cases} x_{m-1} + x_{m+1}, & i \text{ is even}, \\ 2x_m, & i \text{ is odd}, \end{cases}$$

其中 $i \in [-1, m - 2]$。

证明。固定一个 $m \geq 2$。为证明该引理的第一部分，我们对指标 i 使用强归纳法，即假设上述恒等式对所有 $i \in \{0, 1, 2, \ldots, j-1\}$ 都成立。将 $i = 0$ 代入该恒等式后，我们得到一个显然的结果，从而证明基础情形。

接下来，我们将证明归纳步骤，即假设陈述中的恒等式对所有 $i \leq j-1$ 都成立，我们将证明该恒等式对 $i = j$ 成立。为此，我们从 $x_{m+j+1} + x_{m-j-1}$ 开始，并应用推论 4.5，以便将所得各项分组。之后，我们将应用归纳假设，从而得到所需的证明。下面给出详细计算。

Repl分别在推论 4.5 中以 m 替换 ace、以 $m+j$ 替换 by、以 m 替换 and、以 $m-j+1$ 替换 by，从而得到

$$\begin{aligned} x_{m+j+1} + x_{m-j-1} &\geq x_{m+j} + x_{m+j-1} - x_{m+j-2} + x_{m-j+1} + x_{m-j} - x_{m-j+2} \\ &= (x_{m+j} + x_{m-j}) + (x_{m+j-1} + x_{m-j+1}) - (x_{m+j-2} + x_{m-j+2}) \end{aligned}$$

对 $i = j-1$ 应用归纳假设，得到

$$x_{m+j} + x_{m-j} \geq x_{m+j-2} + x_{m-j+2}.$$

因此，我们有：

$$\begin{aligned} x_{m+j+1} + x_{m-j-1} &\geq (x_{m+j-2} + x_{m-j+2}) + (x_{m+j-1} + x_{m-j+1}) - (x_{m+j-2} + x_{m-j+2}) \\ &= x_{m+j-1} + x_{m-j+1}, \end{aligned}$$

这就完成了归纳步骤的证明。

引理的后一半可以通过递归应用我们刚刚证明的恒等式来证明。具体计算略有不同，取决于 i 是偶数还是奇数。具体计算如下。

- 当 i 是偶数时：

$$\begin{aligned} x_{m+i+1} + x_{m-1-i} \geq x_{m+i-1} + x_{m-i+1} &= x_{m+1+(i-2)} + x_{m-1-(i-2)} \\ &\geq x_{m+1+(i-4)} + x_{m-1-(i-4)} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\geq x_{m+1+(i-i)} + x_{m-1-(i-i)} \\ &= x_{m+1} + x_{m-1}. \end{aligned}$$

- 当 i 为奇数时：

$$\begin{aligned} x_{m+i+1} + x_{m-1-i} \geq x_{m+i-1} + x_{m-i+1} &= x_{m+1+(i-2)} + x_{m-1-(i-2)} \\ &\geq x_{m+1+(i-4)} + x_{m-1-(i-4)} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\geq x_{m+1+(i-\{i+1\})} + x_{m-1-(i-\{i+1\})} \\ &= 2x_m. \end{aligned}$$

引理的证明到此完成。 □

注：与前面一样，引理 4.7 表明，当 $n_1 + n_2 = n - 1$ 时， $x_{n_1} + x_{n_2}$ 的值会随着 n_1 与 n_2 之差的增大而增大。这证明了我们的结论： n_1 和 n_2 的最佳选择大致在 $\frac{n}{2}$ 附近，此时 n_1 与 n_2 之差最小。

以下两个引理通过给出在 n 为奇数时，何时选择 $\{n_1, n_2\} = \{m-1, m+1\}$ 、何时选择 $\{n_1, n_2\} = \{m, m\}$作为 n_1 和 n_2更好的条件，帮助我们进一步理解这一情形。

引理 4.8. 如果 $m \geq 2$ 为偶数，那么 $2x_m \geq x_{m-1} + x_{m+1}$。

证明。设 m 为偶数。我们对 m 使用强归纳法，也就是说，假设上文陈述的恒等式对所有 $m \in \{2, 4, \cdots, k-2\}$ 都成立。为证明基础情形，只需注意，当 $m = 2$ 时，

$$x_1 + x_3 = 0 + 2 = 2 = 2x_2.$$

接下来，我们证明归纳步骤，也就是说，假设陈述中的恒等式对所有 $m \leq k-2$ 都成立，我们将证明该恒等式对 $m = k$ 也成立。为此，我们考虑 $x_{k-1} + x_{k+1}$，并代入式 ^{n}(1)。由于式 ^{n}(1) 取决于 k 模 4 的余数，因此根据 k 的值，我们会得到两种不同的代入方式。在这两种情况下，接下来我们都应用归纳假设来化简各项，从而得到所需结果。下面给出详细计算。

- 若 $k \equiv 0$ （模 4），则

$$x_{k+1} + x_{k-1} = \left(k + x_{\frac{k+2}{2}} + x_{\frac{k-2}{2}}\right) + \left(k - 2 + 2x_{\frac{k-2}{2}}\right).$$

但是，由于 $\frac{k}{2}$ 也是偶数，对 $m = \frac{k}{2}$ 应用归纳假设可得

$$2x_{\frac{k}{2}} \geq x_{\frac{k}{2}-1} + x_{\frac{k}{2}+1} = x_{\frac{k-2}{2}} + x_{\frac{k+2}{2}},$$

代入并整理后，得到

$$\begin{aligned} x_{k+1} + x_{k-1} &\leq \left(k - 1 + x_{\frac{k-2}{2}} + x_{\frac{k}{2}}\right) + \left(k - 1 + x_{\frac{k-2}{2}} + x_{\frac{k}{2}}\right) \\ &= 2x_k. \end{aligned}$$

- 若 $k \equiv 2$ （模 4），则

$$x_{k+1} + x_{k-1} = \left(k + 2x_{\frac{k}{2}}\right) + \left(k - 2 + x_{\frac{k}{2}} + x_{\frac{k-4}{2}}\right).$$

But 由于 $\frac{k-2}{2}$ 也是偶数，对 $m = \frac{k-2}{2}$ 应用归纳假设可得 t

$$2x_{\frac{k-2}{2}} \geq x_{\frac{k-2}{2}-1} + x_{\frac{k-2}{2}+1} = x_{\frac{k-4}{2}} + x_{\frac{k}{2}},$$

代入并重新整理后，得到

$$\begin{aligned} x_{k+1} + x_{k-1} &\leq \left(k - 1 + x_{\frac{k-2}{2}} + x_{\frac{k}{2}}\right) + \left(k - 1 + x_{\frac{k-2}{2}} + x_{\frac{k}{2}}\right) \\ &= 2x_k. \end{aligned}$$

引理的证明至此完成。 □

引理 4.9. 若 $m \geq 3$ 为奇数，则 $2x_m \leq x_{m-1} + x_{m+1}$。

证明。设 m 为奇数。我们采用与上文类似的方法。对指标 m 使用强归纳法进行证明，即假设上述恒等式对所有 $m \in \{3, \cdots, k-2\}$ 都成立。要证明基础情形，只需注意，当 $m = 3$ 时，

$$x_2 + x_4 = 1 + 4 = 5 \geq 4 = 2x_3.$$

接下来，我们将证明归纳步骤，也就是说，假设陈述中的恒等式对所有 $m \leq k-2$ 都成立，我们将证明该恒等式对 $m = k$ 也成立。为此，我们考虑 $x_{k-1} + x_{k+1}$ 并代入公式 [n](1)。由于公式 [n](1) 取决于 k 模 4 的余数，因此根据 k 的值，我们会得到两种不同的代入方式。在这两种情况下，根据 $\frac{k-1}{2}$ 是偶数还是奇数，我们进行相应的代入以简化各项，并得到所需结果。下面给出详细计算。

- 若 $k \equiv 1$ （模 4），则

$$x_{k+1} + x_{k-1} = \left(k + x_{\frac{k+1}{2}} + x_{\frac{k-1}{2}}\right) + \left(k - 2 + x_{\frac{k-1}{2}} + x_{\frac{k-3}{2}}\right).$$

注意到 $\frac{k-1}{2}$ 是偶数。因此，根据引理 4.8，我们有：

$$2x_{\frac{k-1}{2}} \geq x_{\frac{k-1}{2}-1} + x_{\frac{k-1}{2}+1} = x_{\frac{k-3}{2}} + x_{\frac{k+1}{2}}.$$

因此，通过重新排列并合并各项，我们得到：

$$\begin{aligned} x_{k+1} + x_{k-1} &\geq \left(k - 1 + x_{\frac{k+1}{2}} + x_{\frac{k-3}{2}}\right) + \left(k - 1 + x_{\frac{k+1}{2}} + x_{\frac{k-3}{2}}\right) \\ &= 2x_k. \end{aligned}$$

- 若 $k \equiv 3$ （模 4），则

$$x_{k+1} + x_{k-1} = \left(k + x_{\frac{k+1}{2}} + x_{\frac{k-1}{2}}\right) + \left(k - 2 + x_{\frac{k-1}{2}} + x_{\frac{k-3}{2}}\right).$$

但是，由于 $\frac{k-1}{2}$ 也是奇数，关于 $m = \frac{k-1}{2}$ 的归纳假设给出

$$2x_{\frac{k-1}{2}} \leq x_{\frac{k-1}{2}-1} + x_{\frac{k-1}{2}+1} = x_{\frac{k-3}{2}} + x_{\frac{k+1}{2}},$$

并且我们有

$$\begin{aligned} x_{k+1} + x_{k-1} &\geq \left(k - 1 + 2x_{\frac{k-1}{2}}\right) + \left(k - 1 + 2x_{\frac{k-1}{2}}\right) \\ &= 2x_k. \end{aligned}$$

至此，归纳步骤的证明完成，因此引理的证明也完成了。

□

4.3 完成定理 1.10 的证明

定理 1.10 的证明：现在，我们终于具备了证明这一结果所需的所有工具。如前所述，我们通过证明对于所有 $n \geq 1$, $|A(\overrightarrow{O}_n)| = x_n$ 来证明该定理。

证明采用关于 n 的强归纳法，即假设对于所有 $n \in \{1, 2, \cdots, m-1\}$，该命题都成立。为证明基础情形，我们验证 $n \leq 5$ 时该命题成立。这是因为我们已经证明， x_n 的初始值（$n \leq 5$）与 $|A（\overrightarrow{O}_n）$ 的初始值|相匹配。

接下来，我们将证明归纳步骤，即假设对于所有 $n \leq m-1$，该命题都成立，我们将证明该命题对 $n = m$ 成立。为此，根据 m 的模 4 的余数值，我们将使用已经证明的引理，得到 n_1 和 n_2 的值，使得和 $x_{n_1} + x_{n_2}$（等价地， $|A（\overrightarrow{O}_{n_1}）| + |A（\overrightarrow{O}_{n_2}）|$）达到最小。具体细节如下。对于小于或等于 $m-1$ 的指标，归纳假设允许我们交替使用 $|A（\overrightarrow{O}_m）|$ 和 x_m。

- 当 m 为奇数时：根据引理 4.7， $|A(\overrightarrow{O}_{n_1})| + |A(\overrightarrow{O}_{n_2})|$ 在 $\frac{m-1}{2}$ 为偶数或奇数时，分别在 $\{n_1, n_2\} = \{\frac{m-1}{2} - 1, \frac{m-1}{2} + 1\}$ 或 $\{n_1, n_2\} = \{\frac{m-1}{2}, \frac{m-1}{2}\}$ 时取最小值。

  - 当 $m \equiv 1 \pmod 4$ 时，$\frac{m-1}{2}$ 为偶数，因此根据引理 4.8，

$$\begin{aligned} |A(\overrightarrow{O}_m)| &= m - 1 + |A(\overrightarrow{O}_{\frac{m-3}{2}})| + |A(\overrightarrow{O}_{\frac{m+1}{2}})| \\ &= x_m. \end{aligned}$$

  - 当 $m \equiv 3 \pmod 4$ 时，$\frac{m-1}{2}$ 为奇数，因此根据引理 4.9，

$$\begin{aligned} |A(\overrightarrow{O}_m)| &= m - 1 + 2|A(\overrightarrow{O}_{\frac{m-1}{2}})| \\ &= x_m. \end{aligned}$$

- 当 m 为偶数时：根据引理 4.6， $|A(\overrightarrow{O}_{n_1})| + |A(\overrightarrow{O}_{n_2})|$ 在 $\{n_1, n_2\} = \{\frac{m}{2} - 1, \frac{m}{2}\}$ 时取最小值。因此，我们有

$$\begin{aligned} |A(\overrightarrow{O}_m)| &= m - 1 + |A(\overrightarrow{O}_{\frac{m-2}{2}})| + |A(\overrightarrow{O}_{\frac{m}{2}})| \\ &= x_m. \end{aligned}$$

至此，定理得证。 □

5 有向全色数的应用

设 $\overrightarrow{G}$和 $\overrightarrow{H}$为定向图。满同态 h: $V(\overrightarrow{G}) \to V(\overrightarrow{H})$ 是完全的，当且仅当对每条弧 $\overrightarrow{ab} \in A(\overrightarrow{H})$，都存在一条弧 $\overrightarrow{uv} \in A(\overrightarrow{G})$，使得 $h(u) = a$ 且 $h(v) = b$。定向图 $\overrightarrow{G}$的定向无色数，

记为 $\psi_o(\overrightarrow{G})$，是满足存在完全同态 $h: V(\overrightarrow{G}) \to V(\overrightarrow{O}_n)$ 的绝对定向团 $\overrightarrow{O}_n$ 的最大阶。定向无色数最早由 Sopena [21]定义。

根据定义，不难看出，关于绝对定向团的结果将直接影响定向无色数的结果。举例来说，我们给出若干改进了 [19] 中已有结果的结论。感兴趣的读者可参阅 [21] 和 [19]，了解原始结果及所用约定。数列 $((x_m))$ 的定义见公式 (1)。

令 $v_{odd}(G)$ 表示 G 中度为奇数的顶点数。以下结果改进了 [19] 中的定理 2.6。

定理 5.1。对于每个整数 $m \geq 2$ 及每个 $n \geq \frac{k}{2} + x_m$，$\psi_o(P_n) \geq m$，其中

$$k = \begin{cases} v_{odd}(O_m) - 2, & if\ m \neq 5 \\ v_{odd}(O_m), & if\ m = 5. \end{cases}$$

类似地，对于圈，我们可以改进 [19] 中的定理 2.8，得到以下结果。

定理 5.2。对于每个 $m \geq 2$ 及每个 $n \geq \frac{v_{odd}(O_m) - 2}{2} + x_m$，$\psi_o(C_n) \geq m$。

图 G 和 H 的笛卡尔积 $G \square H$ 是一个图，其顶点集为笛卡尔积 $V(G) \times V(H)$；并且，当且仅当以下条件之一成立时，两个顶点 (u, u') 和 (v, v') 在 $G \square H$ 中邻接：(a) $u = v$ 且 u' 在 H 中与 v' 邻接；或 (b) $u' = v'$ 且 u 在 G 中与 v 邻接。

接下来的几个结果讨论某些类型图的笛卡尔积的定向无色数。我们改进了 [19] 中的定理 3.11、3.12 和 3.13，得到以下结果。

定理 5.3。设 $n \geq 1$ 为一个整数。则当 $3n + 1 < x_m$ 时，$\psi_o(P_n \square K_2) < m$。

T定理 5.4。设 $n \geq 3$ 为一个整数。则当 $3n < x_m$ 时，$\psi_o(C_n \square K_2) < m$.

T理 5.5。设 $n \geq 3$ 是一个整数。那么 $\psi_o(C_n \square C_\ell) < m$，如果 $2n\ell < x_m$.

下面的结果讨论正则图的定向无色数，是对 [19] 中定理 3.14 的改进。

定理 5.6。设 G 是一个阶为 n、满足 $r \geq 1$ 的 r-正则图。那么 $\psi_o(G) < m$，如果 $nr < 2x_m$。

这些结果的证明与 [19] 中的完全相同。虽然我们采用 x_m 作为绝对定向团弧数的上界，但 [19] 采用了另一个通过不同构造得到的上界。

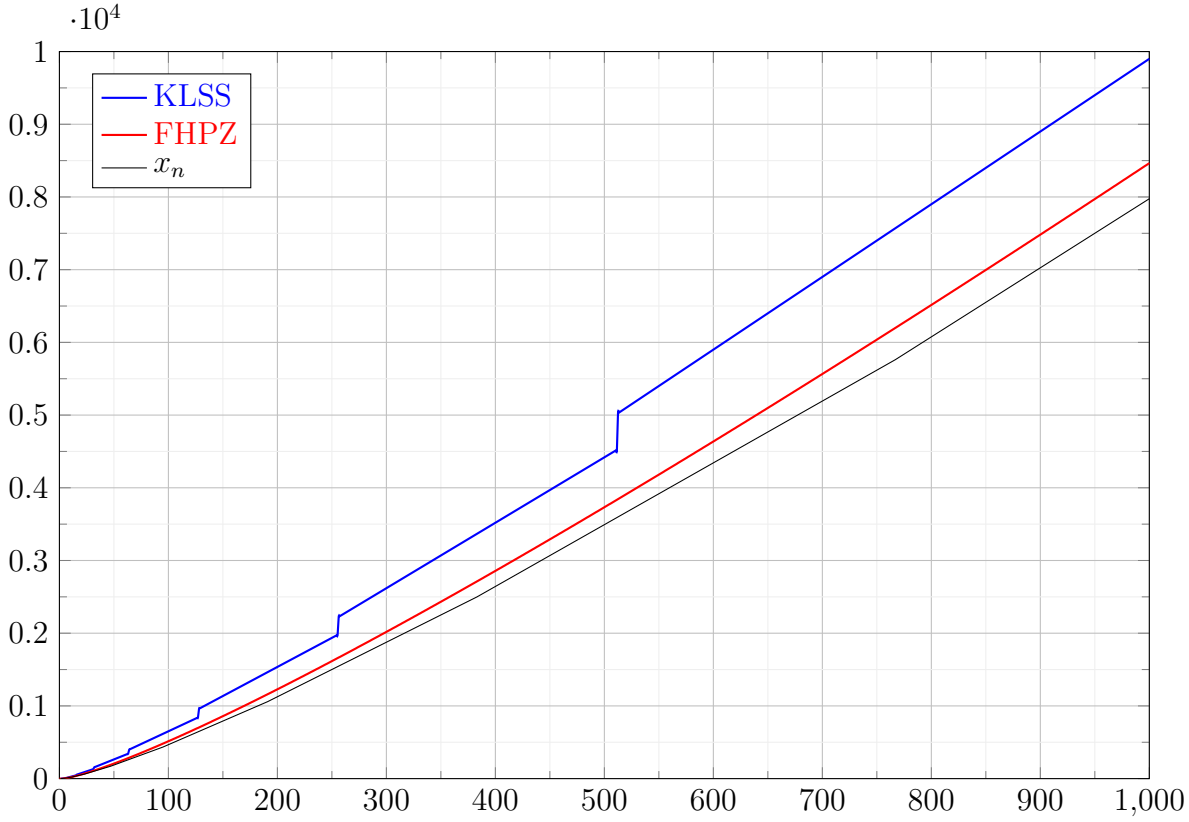

图3：本文提及的各种结果所得到的 $f_2(n)$ 上界比较

6 结论

(1) 关于 $f_2(n)$ 的上界：为推导他们的上界，F¨uredi、Horak、Pareek 和 Zhu [11] 采用了与我们所用方法颇为相似的绝对定向团递归构造。他们的构造与我们的不同之处在于，在构造每个绝对定向团 $\overrightarrow{O}_n = \overrightarrow{O}_{n_1} \ltimes \overrightarrow{O}_{n_2}$ 时，我们确保 $|A(\overrightarrow{O}_{n_1})|+|A(\overrightarrow{O}_{n_2})|$ 最小化。这样一来，我们得到的上界就优于 [11] 中得到的上界。

使用计算机程序，可以很容易地计算任意 n 对应的数列 $((x_n))$ 的值。在图3中，我们绘制了顶点数 n 关于 x 轴的图，并将其与 Kostochka、Luczak、Simonyi 和 Sopena [16](KLSS)、F¨uredi、Horak、Pareek 和 Zhu [11](FHPZ) 以及我们的结果（x_n）给出的、在 n 个顶点上的绝对定向团所需弧的最小数量上界进行对比。该图以及表1中提到的一些具体数值，更直观地展示了我们的上界迄今为止是最优的。

(2) $f_2(n)$的精确值：我们编写了一个程序，用于检验猜想1.9在顶点数较少时是否成立。我们确认了该猜想对于 $n \leq 12$成立。对于$n = 12$，程序检验了超过 1.6×10^{11} 个定向图。或许这并不令人意外，对于 $n \geq 13$，需要检验的图的数量急剧增加，因而不再

n	KLSS	FHPZ	x_n
10	24	18	**18**
10^2	651	514	**467**
10^3	9900	8465	**7976**
10^4	139804	117877	**112727**
10^5	1699711	1510964	**1453411**
10^6	19999600	18431568	**17927158**

表1：若干 n 的 $f_2(n)$ 已知上界的比较。

可行。找出绝对定向团的结构性质，以帮助我们大幅减少程序需要检验的情形数量，将是一个有趣的问题。

根据我们在这项工作中的观察，我们提出如下猜想 .

猜想6.1. 对所有 $n > 5$，都存在一个含有 n 个顶点、 $f_2(n)$ 条弧的定向团，使其具有一个割点。

注意，猜想6.1与定理 1.10结合起来可推出猜想1.9。我们还提出猜想6.1的一个较弱版本，如下所示。

猜想6.2. 对所有 $n > 5$，都存在一个含有 n 个顶点、 $f_2(n)$ 条弧的定向团，使其具有一个度为 $n - 1$ 的顶点。

我们认为，猜想6.2可能比猜想6.1更容易证明。值得探究的是，证明猜想6.2是否能够推出猜想6.1。

(3) 彩色混合图：彩色混合图是对定向图及其同态的一种广泛推广，由 Neˇsetˇril 和 Raspaud [18] 引入。彩色混合图的彩色同态是其核心概念。具体而言，彩色混合图，也称为 (n, m)-图，是具有 n 种不同类型弧和 m 种不同类型边的图。注意，对于 $(n, m) = (1, 0)$，一个（简单的）(n, m)-图就是一个定向图。文献中也研究了 (n, m)-图中与绝对定向团类似的概念 [1] 。因此，一个自然的未来研究方向是在 (n, m)-图的框架下推广 $f_2(n)$ 的概念，并研究其性质。此外，还可以研究定向无色数在 (n, m)-图中的自然推广。

参考文献

[1] J. Bensmail、C. Duffy 和 S. Sen。《({m, n})-彩色混合图中团的类似概念》。《Graphs and Combinatorics》，33：735–750，2017。

[2] O. Borodin、D. Fon-Der-Flaass、A. Kostochka、A. Raspaud 和 E. Sopena。关于深度临界有向图。组合理论杂志 B辑，81(1):150–155，2001。

[3] B . Courcelle . 图的单子二阶逻辑 VI：关于若干种表示
关系结构对图的研究。Discrete Applied Mathematics, 54(2):117–149, 1994.[4] S. Das、S. Mj 和 S. Sen。论定向相对团数。离散数学电子札记, 50:95–101, 2015.[5] S. Das、S. Prabhu 和 S. Sen。定向相对团数研究。离散数学, 341(7):2049–2057, 2018.[6] R. Dawes 和 H. Meijer。具有指定直径的弧极小有向图。J. Combin. Math. and Combin. Comput, 1:85–96, 1987.[7] C. Duffy、G. MacGillivray 和 ´E. Sopena。最大度为三和四的图的定向着色。离散数学, 342(4):959–974, 2019.[8] C. Duffy、P. D. Pavan、R. B. Sandeep 和 S. Sen。论深度临界定向团。Journal of Graph Theory, 104(1):150–159, 2023.[9] J. Dybizba´nski、P. Ochem、A. Pinlou 和 A. Szepietowski。低最大度图的定向团与着色。离散数学 , 343(5):111829, 2020.[10] P. Erdos、A. R´enyi 和 V. S´os。关于图论中的一个问题。Studica Sci. Math Hungr. 1, 1:215–235, 1966年.[11] Z. F¨uredi、P. Horak、C. M. Pareek 和 X. Zhu。直径为 2 的极小定向图。《Graphs and Combinatorics》, 14(4):345–350, 1998.[12] P. Hell 和 J. Neˇsetˇril。图与同态，第 28 卷。牛津大学出版社, 2004.[13] G. Katona 和 E. Szemer´edi。关于图论中的一个问题。匈牙利数学科学研究, 2:23–28, 1967.[14] S. Kirgizov、R. Duvignau 和 J. Bensmail。判定图是否存在具有固定弱直径定向的复杂性。离散数学与理论计算机科学, 17, 2016.[15] W. F. Klostermeyer 和 G. MacGillivray。定向着色中团的类似物。数学讨论：图论, 24(3):373–387, 2004.[16] A. V. Kostochka、T. Luczak、G. Simonyi 和 E. Sopena。使定向色数达到最大值的最少边数。DIMACS离散数学与理论计算机科学系列, 49:179–182, 1999.[17] A. Nandy、S. Sen 和 ´E. Sopena。外平面与平面定向团。Journal of Graph Theory, 82(2):165–193, 2016.[18] J. Neˇsetˇril 和 A. Raspaud。彩色混合图的彩色同态。Jour- nal of Combinatorial Theory, Series B, 80(1):147–155, 2000。

[19] P. D. Pavan 和 ´Eric Sopena。论图的定向无色数。Discrete Applied Mathematics, 347:48–61, 2024年.[20] E. Sopena。定向图的色数。Journal of Graph Theory, 25(3):191–205, 1997.[21] ´E. Sopena。完全定向着色与定向无色数。Dis- crete Applied Mathematics, 173:102–112, 2014.[22] S. Znam。具有给定直径的有向图的最小边数。Acta Fac. Rerum Natur. Univ. Comenian. Math. Publ, 24:181–185, 1970。