基于 BiGAMP 的海量免授权接入联合设备活动检测、信道估计与信号检测

张姗姗、崔颖（IEEE 会员）和陈文（IEEE 高级会员）

arXiv:2304.00744v1 [cs.IT] 3 Apr 2023

摘要——由于设备数量庞大导致通信负载急剧增加，海量接入一直是第五代移动通信（5G）及后续通信系统面临的挑战。在上行海量接入场景中，设备流量在任一给定相干时间内都是突发的。因此，每个设备的各天线信道呈现相关性，可用行稀疏信道矩阵结构来刻画。本文基于行稀疏信道矩阵结构，开发了一种双线性广义近似消息传递（BiGAMP）算法。该算法通过交替更新信道矩阵和信号矩阵，可在大规模多输入多输出（MIMO）系统中联合检测设备活动、估计信道并检测信号。与现有算法相比，信号观测提供了额外信息，从而提升了性能。我们进一步分析状态演化（SE），以衡量所提算法的性能，并刻画 SE 的收敛条件。此外，我们还对设备活动检测的错误概率、信道估计的均方误差以及信号检测的符号错误率进行了理论分析。数值结果表明，所提算法优于 DAD-CE-SD 领域的先进方法，且数值结果与理论分析结果较为接近。

索引词——海量免授权接入、设备活动检测、信号检测、双线性广义近似消息传递（BiGAMP）、状态演化。

I. 引言

蜂窝物联网（IoT）推动了连接到基站（BS）的设备数量不断增长。与此同时，海量机器类通信（mMTC）已成为无线通信网络的关键应用场景之一。因此，大规模接入已成为当前一代无线通信亟待解决的问题。大规模接入的主要特点包括低功耗、大规模连接和广覆盖 [1]。在海量接入场景中，设备数量众多，但设备活动模式通常具有间歇性，因此在任意时刻，只有一小部分潜在设备处于活动状态 [2]。因此，如何高效、及时地对大量设备进行设备活动检测、信道估计和信号检测（设备活动检测-信道估计-信号检测，DAD-CE-SD）是一项挑战。

A. 相关工作与研究动机

现有的长期演进（LTE）通信系统主要采用基于授权的随机接入协议，该协议面向活动设备较少且传输速率要求较高的人际（H2H）通信场景。在基于授权的随机接入协议中，设备必须先连接到基站，才能传输信号。[3], [4] 研究了一种基于竞争的协议，其中每个活动设备利用签名前导码和大规模多输入多输出（MIMO）信道的有利传播特性来实现冲突检测。如果没有其他设备选择该前导码，该活动设备便可接入基站。然而，由于潜在设备数量众多，基于竞争的协议容易发生冲突；此外，竞争阶段还可能带来过多的控制信令开销。因此，在导频序列和物理上行共享信道（PUSCH）资源有限的情况下，基于授权的随机接入协议并不适用于海量机器类通信（mMTC）场景。

为支持海量机器类通信（mMTC）场景，3GPP 在 2016 [5] 中提出了免授权协议。在免授权协议中，活动设备无需等待任何调度授权，即可自由接入基站。与现有的基于授权的协议不同，后者在每个相干时间内随机选择导频序列，而在免授权协议中，每台设备都会被分配一个唯一的导频序列，并在所有相干时间内使用该序列 [2]。因此，免授权随机接入方案大幅降低了调度信令开销，从而满足海量机器类通信的需求。然而，由于导频序列长度受相干时间限制，且设备数量众多，因此不可能像传统正交多址接入（OMA）那样，为所有潜在设备预先分配正交导频序列。为此，研究人员提出将非正交多址接入（NOMA）与免授权协议相结合，以满足大规模接入的需求 [6]–[8]。在免授权NOMA方案中，为设备分配非正交导频序列，以减少设备数量庞大所导致的导频开销；设备随后同时向基站发送导频和信号。然后，基站在每个相干时间内识别活动设备、估计信道和/或检测信号。由于大规模MIMO也是支持未来海量机器类通信场景的一项关键技术，将

本研究得到国家重点项目2018YFB1801102、国家自然科学基金62071296、上海市项目22JC1404000、20JC1416502、PKX2021-D02和20ZR1425300的资助。（通讯作者：陈文。）张姗姗任职于中国上海200240上海交通大学电子工程系（电子邮箱：shansz@sjtu.edu.cn）。崔颖任职于中国广州511400香港科技大学（广州）物联网学域，同时任职于中国香港香港科技大学电子工程系（电子邮箱：yingcui@ust.hk）。陈文任职于中国上海200240上海交通大学电子工程系（电子邮箱：wenchen@sjtu.edu.cn）。

免授权NOMA方案与大规模MIMO相结合，可以更好地满足海量机器类通信的需求。然而，这无疑会增加通信系统的复杂度，而此类问题通常被归结为稀疏信号恢复问题。

目前，压缩感知（CS）技术已广泛应用于通信中的信号恢复问题。其中一种方法是基于凸规划的优化方法，例如最小绝对收缩和选择算子（LASSO） [9] 和组 LASSO [10]。研究者采用交替方向乘子法（ADMM）算法[11] 求解 LASSO 问题。 [12] 提出了一种基于最大似然（ML）算法的优化方法，用于检测活动设备。除此之外，近似算法也广泛应用于压缩感知领域，并已开发出多种近似算法来解决稀疏信号恢复问题。 [13] 和 [14] 提出了近似消息传递（AMP）算法，用于求解多测量向量（ MMV）问题，同时考虑设备活动检测和信道估计。针对非独立同分布（non-i.i.d）的高斯感知矩阵，研究者提出了正交AMP（OAMP）[15] 和向量AMP（VAMP） [16] 。 [17] 针对具有广义输出信道的系统提出了广义AMP（ GAMP）。近年来，研究者通过结合传统压缩感知方法与深度学习方法，提出了深度学习架构，以设计有效的稀疏信号恢复方法 [18]–[20]。

尽管上述方法都是为了解决海量接入问题而研究的，但其中大多数将设备活动检测-信道估计-信号检测分为两个或三个阶段。具体而言， [13]–[17]首先检测活动设备并估计信道，然后 [21] 研究信号检测。 [22] 利用AMP提出了一种联合DAD-CE-SD算法。然而，该算法仅适用于单天线基站。还有一些算法通过将信息比特嵌入导频序列中，实现设备活动与数据的联合检测[23], [24]。但这类算法需要大量导频资源，且数据负载容量有限。 [25] 提出了一种双线性广义AMP（ BiGAMP）算法，可实现联合设备活动检测-信道估计-信号检测。在假设所有设备均已激活的条件下，[26]通过构造独立稀疏信号，利用BiGAMP联合估计信道和检测信号。然而，构造稀疏信号会降低有效信号的接收效率，并增加基站处理信号的时延。因此，该方法不适用于现有系统。由于 [25] 中的BiGAMP难以重构行稀疏矩阵，联合设备活动检测-信道估计-信号检测仍是一个开放问题。

此外，大量数值实验验证，近似消息传递算法的行为可由一种称为“状态演化”（状态演化）的形式化方法准确描述 [27], ，这对于指导导频序列长度的自适应选择至关重要。Donoho等人分析了状态演化与近似消息传递重构精度之间的约束关系 [28]。 [29] 提出了基于随机变量的BiGAMP启发式状态演化。我们的工作旨在描述稀疏矩阵存在相关性时BiGAMP的性能。因此，我们构建了基于随机向量的BiGAMP状态演化。

B. 主要贡献

本文聚焦于配备多天线基站的上行大规模免授权接入系统中的联合设备活跃检测、信道估计与信号检测。通过将联合设备活跃检测、信道估计与信号检测建模为广义双线性推断问题，我们提出了一种BiGAMP算法，以解决海量接入场景中的联合设备活跃检测、信道估计与信号检测问题。不同于 [25],[26], 中基于变量的BiGAMP算法，为了从间歇性设备活动模式所导致的相关信道中获取更多信息，所提算法基于随机向量进行构建与推导。我们运用中心极限定理（CLT）和泰勒级数展开，对信道和信号的最小均方误差（MMSE）估计进行近似，以处理该算法中的NP难问题。与将设备活动检测-信道估计-信号检测问题划分为两个阶段的传统算法相比，我们利用了发送信号的统计量和观测，从而有助于更准确地估计信道和检测信号。

随后，我们构建所提出的 BiGAMP 算法的状态演化（SE），用于刻画该算法的收敛性能。我们还分析了状态演化（SE）实现最优性能的收敛条件。基于对状态演化（SE）的分析，我们研究了所提出算法在联合设备活动检测-信道估计-信号检测中的理论性能，包括设备活动检测（DAD）的错误概率、信道估计（CE）的均方误差（ MSE），以及信号检测（SD）的符号错误率（SER）。

最后，我们设计仿真来验证该算法的性能。数值结果表明，与现有算法 [11]–[14] 相比，所提出的算法总体上在设备活动检测-信道估计-信号检测方面表现更优。此外，数值结果与理论分析相近，表明理论分析在一定程度上能够刻画设备活动检测-信道估计-信号检测的性能。

C. 论文结构

本文其余部分安排如下。第二节将设备活动检测-信道估计-信号检测问题表述为行稀疏双线性问题。第三节概述求解双线性矩阵估计问题的算法，并详细介绍如何应用该算法求解第二节提出的设备活动检测-信道估计-信号检测问题。第四节构建状态演化（SE）以描述算法性能，并分析设备活动检测-信道估计-信号检测的理论性能。第五节给出数值结果。最后，第六节总结本文的研究成果。

D. 符号说明

本文中，随机标量变量用正体小写字母（例如，x）表示，普通标量用斜体小写字母（例如， x）表示。随机向量用粗体小写字母（例如，$\mathbf{x}$）表示，普通向量用粗斜体小写字母（例如， $\boldsymbol{x}$）表示。若无歧义，我们不区分随机矩阵与普通矩阵，并用粗体大写字母（例如，$\mathbf{X}$）表示矩阵。令 $\mathbf{I}$ 表示单位矩阵。用花体大写字母



图 1. 传输序列结构。

（例如， $\mathcal{N}$）表示集合。 $|\mathcal{N}|$是集合 $\mathcal{N}$ 中的元素个数。 $x_{ij} = [\mathbf{X}]_{i,\ j}$表示矩阵 X 的第（$i$， j）个元素。哈达玛积记为 $\odot$。 $\propto$ 表示正相关。转置、复共轭和共轭转置算子分别记为 $(\cdot)^T$、 $(\cdot)^*$和 $(\cdot)^H$。Re(·) 和 Tr(·) 分别表示该项的实部和迹。 $\|\cdot\|_2$和 $\|\cdot\|_F$分别表示 2-范数和弗罗贝尼乌斯范数。 $\mathcal{CN}(x;\ u, v)$表示变量 x 服从均值为 u、方差为 v的复高斯分布。 $g(\cdot)$ 和 $\boldsymbol{g}(\cdot)$分别表示输出为标量和向量的函数。

II. 系统模型

我们考虑一个由N 个单天线物联网设备和一个配备 M 根天线的基站组成的单小区蜂窝网络。本文采用窄带块衰落模型，其中信道在每个相干时间内经历相互独立的准静态平坦衰落。设备 n 到基站的信道衰落系数记为 $\boldsymbol{h}_n = [h_{n1}, h_{n2}, \ldots, h_{nM}]^T \in \mathbb{C}^{M\times 1}$，其中 $n \in \mathcal{N}$和 $\mathcal{N}$，$\{1, 2, \ldots, N\}$表示潜在设备集合。我们将信道 $\boldsymbol{h}_n = \sqrt{\beta_n}\boldsymbol{g}_n$建模为，其中 β_n 表示路径损耗和阴影衰落分量。 $\boldsymbol{g}_n$ 是由复高斯分布 $\mathcal{CN}(0, \mathrm{I})$生成的瑞利衰落分量。

本文考虑一个海量接入场景，其中每个相干时间内，只有一小部分 N 潜在设备处于活动状态并接入基站。假设所有设备在每个相干时间内以相同的概率 $\varepsilon \in (0, 1)$接入基站，且各设备的接入行为相互独立。我们用 $\mathcal{K}$ ($\mathcal{K} \subset \mathcal{N}$)表示活动设备集合，并用 $|\mathcal{K}| = K$表示。对于所有 $n \in \mathcal{N}$，令 $\alpha_n \in \{0, 1\}$ 表示设备 n 的活动指示变量，其中$\alpha_n = 1$ 表示设备 n 处于活动状态，$\alpha_n = 0$ 表示设备处于非活动状态。因此，$\Pr(\alpha_n = 1) = \varepsilon$，且 $\Pr(\alpha_n = 0) = 1 - \varepsilon$。

我们采用免授权接入方案。具体而言，每个设备 $n \in \mathcal{N}$ 都预先分配了一个长度为 L_p的唯一导频序列，记为 $\boldsymbol{c}_n \in \mathbb{C}^{L_p\times 1}$。令 $L_p \ll N$，则所有导频序列均非正交。在每个相干时间内，每个设备 n 都会发送其导频序列和长度为 L_d的信号序列，记为 $\boldsymbol{d}_n \in \mathbb{C}^{L_d\times 1}$，如图 1 所示。整体发送序列的长度为$L = L_p + L_d$。设备 n 发送的序列记为 $\boldsymbol{a}_n = [\boldsymbol{c}_n^T, \boldsymbol{d}_n^T]^T \in \mathbb{C}^{L\times 1}$。我们假设 $\boldsymbol{a}_n$ 的信号符号互不相关，且 $\boldsymbol{c}_n$的各个元素均由均值为零、方差为 $1/L$的独立同分布复高斯分布生成。对于高斯码本 [30]–[32]，，不失一般性地，假设信号符号 d_{ln}由 $\mathcal{CN}(0, 1/L)$生成。 [1]

[1]本文提出的 BiGAMP算法还可用于估计信号符号的其他分布。图 4 中的数值结果表明，所提出的算法也适用于现有通信系统中的离散码字。

整体信道输入输出关系可建模为

$$\mathbf{Y} = \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{a}_n \alpha_n \boldsymbol{h}_n^T + \mathbf{W}, \tag{1}$$

其中，$\mathrm{Y} \in \mathbb{C}^{L\times M}$ 表示基站处跨越 M 根天线的接收信号，$\mathrm{W} \in \mathbb{C}^{L\times M}$ 表示加性白高斯噪声（AWGN），其 $\mathrm{w}_m \sim \mathcal{CN}(0, \sigma^2\mathrm{I})$ $m = 1,\ 2, \ldots, M$。我们可以将系统输出 (1) 转换为

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{W}, \tag{2}$$

其中，$\mathrm{A} = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_N] \in \mathbb{C}^{L\times N}$表示发送符号。活动指示变量与信道的乘积记为 X $= [\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n]^T \in \mathbb{C}^{N\times M}$，其中 $\boldsymbol{x}_n = \alpha_n \boldsymbol{h}_n$，即

$$\boldsymbol{x}_n = \begin{cases} \boldsymbol{h}_n, & \alpha_n = 1 \\ \mathbf{0}, & \alpha_n = 0 \end{cases}, n \in \mathcal{N}. \tag{3}$$

因此，信道矩阵 X 是一个行相关的行稀疏矩阵。X 的每一行都服从伯努利-高斯分布。 $\boldsymbol{x}_n$ 的概率密度函数（pdf）为

$$p_{\mathbf{x}_n}(\boldsymbol{x}_n) = (1 - \varepsilon)\delta_0(\boldsymbol{x}_n) + \varepsilon p_{\mathbf{h}_n}(\boldsymbol{x}_n), \tag{4}$$

其中， δ_0 表示在零点处测得的点质量， $p_{\mathbf{h}_n}$是设备 n的信道 $\mathrm{h}_n \sim \mathcal{CN}(0, \beta_n\mathrm{I})$ 的概率密度函数。

为估计 A 中的 X 和信号符号，我们开发了一种基于 BiGAMP 的算法，该算法利用信道随机向量和信号符号随机变量的统计特性。所提出的算法能够实现联合设备活跃检测、信道估计与信号检测。考虑到海量接入场景，本文研究命题1所述的渐近区间。

命题1：渐近区间意味着 L、 N、 $M \to \infty$、 M/N 和 L/N 均为固定值。因此，活动设备的数量 $K \to \varepsilon N$ 随 $N \to \infty$ 增大。

III. 基于 BiGAMP 的联合设备活动检测、信道估计与信号检测

A. 问题建模

对于上述系统统计模型，A 和 X 的概率密度函数为

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) &= \prod_{l=1}^{L}\prod_{n=1}^{N} p_{\mathrm{a}_{ln}}(a_{ln}), \\ p_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) &= \prod_{n=1}^{N} p_{\mathbf{x}_n}(\boldsymbol{x}_n), \end{aligned} \tag{5}$$

A 和 X 的后验分布为式 (6)，其中 $\mathrm{Y} = [\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_L]^T$，$\boldsymbol{y}_l \in \mathbb{C}^{M\times 1}$，且 $[\mathrm{A}]_{l,\ :}$表示 A 的第 l 行。

本研究旨在获得 X 和 A 的最小均方误差估计，它们分别是边缘后验分布 $p_{a_{ln}|\mathbf{Y}}(\cdot|\mathrm{Y})$ 和 $p_{\mathbf{x}_n|\mathbf{Y}}(\cdot|\mathrm{Y})$ 的均值 [33, 第11节.4]。尽管通常无法通过对式（6）进行积分来计算边缘后验分布，但可以通过含环置信传播（LBP）高效地近似边缘后验分布 [34]。在 LBP 中，

$$p_{\mathbf{X},\mathbf{A}|\mathbf{Y}}(\mathbf{X},\mathbf{A}|\mathbf{Y}) \propto p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X},\mathbf{A}}(\mathbf{Y}|\mathbf{X},\mathbf{A}) p_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \prod_{l=1}^{L} p_{\mathbf{y}_l|[\mathbf{A}]_{l,:},\mathbf{X}}(\boldsymbol{y}_l|\sum_{n=1}^{N} a_{ln}\boldsymbol{x}_n) \prod_{n=1}^{N} p_{\mathbf{x}_n}(\boldsymbol{x}_n) \prod_{l=1}^{L}\prod_{n=1}^{N} p_{\mathsf{a}_{ln}}(a_{ln}). \quad (6)$$

通常使用因子图来表示后验分布，如图2所示。随机变量（向量）的消息在因子节点与变量（向量）节点之间传播，直至收敛。计算这些消息的标准方法称为和积算法（SPA）；当因子图中没有环时，该算法可以得到精确的边缘后验分布 [35]。遗憾的是，对于含环因子图，这是一个 NP难问题，因此 LBP 无法保证得到正确的后验概率密度函数。不过，经验研究表明，含环信念通常能够收敛，并对正确的边缘分布给出良好近似 [36]。在高维推断问题中，SPA 精确实现的复杂度很高，因此人们采用 SPA 的近似方法来求解广义压缩感知问题，例如 [17], [25], [37], [38]。所提出的 BiGAMP算法对图2所示双线性因子图上的基于向量的和积算法进行近似，其中我们使用向量节点 $\boldsymbol{x}_n$ 代替变量节点$x_{1n}, x_{n2}, \ldots, x_{nM}$，以表征 $\boldsymbol{x}_n$ 的相关性。正如我们将看到的，这些近似主要基于中心极限定理和泰勒级数论证。

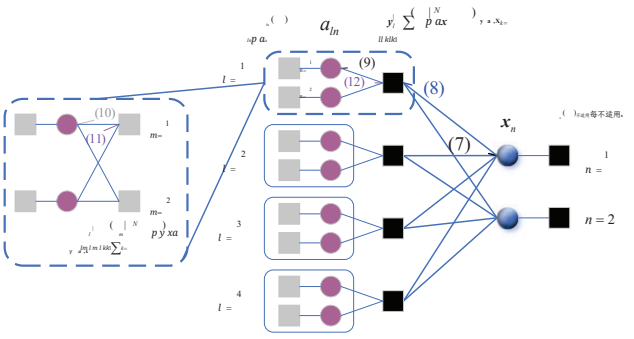


图2. 问题维度为 $L=4$, $M=2$ 和 $N=2$ 时的双线性因子图。函数节点称为“因子节点”，以方形表示。随机变量 $a_{l,n} \in \mathbb{C}$ 称为“变量节点”，以圆形表示。随机向量 $\boldsymbol{x}_n \in \mathbb{C}^{M\times 1}$ 称为“向量节点”，以球形表示。式 (7)-(12) 的消息传播更新规则显示在因子图中。

B. 和积算法

由于 BiGAMP 源于对和积算法（SPA）的近似，我们先展示在迭代 $t \in \mathbb{Z}$ 时因子节点与变量节点之间的消息传播过程。将和积算法应用于图2中的双线性因子图，可得以下消息传播更新规则[2]：

1) 因子节点与向量节点之间的消息：

从因子节点 $p_{\mathbf{y}_l|[\mathbf{A}]_{l,:},\mathbf{X}}\left(\boldsymbol{y}_l|\sum_{k=1}^{N} a_{lk}\boldsymbol{x}_k\right)$ 到向量节点 $\boldsymbol{x}_n$ 的消息可表示为式（7）。从向量节点 $\boldsymbol{x}_n$ 到因子节点 $p_{\mathbf{y}_l|[\mathbf{A}]_{l,:},\mathbf{X}}\left(\boldsymbol{y}_l|\sum_{k=1}^{N} a_{lk}\boldsymbol{x}_k\right)$ 的消息为

$$I^{\mathbf{x}}_{l\leftarrow n}(\boldsymbol{x}_n, t+1) \propto p_{\mathbf{x}_n}(\boldsymbol{x}_n) \prod_{k=1,k\neq l}^{L} I^{\mathbf{x}}_{k\to n}(\boldsymbol{x}_n, t), \quad (8)$$

[2]这里提到的消息本质上指的是概率信息。(7)-(13)中的消息是由图2中运行的和积算法推导而来的。有关和积算法的更多详情，请读者参阅 [35], [39], [40, 第 IV 节。26]

其中，$p_{\mathbf{x}_n}(\boldsymbol{x}_n)$ 是 $\boldsymbol{x}_n$ 的先验概率。

2) 因子节点与变量节点之间的消息：

从因子节点 $p_{\mathbf{y}_l|[\mathbf{A}]_{l,:},\mathbf{X}}\left(\boldsymbol{y}_l|\sum_{k=1}^{N} a_{lk}\boldsymbol{x}_k\right)$ 到变量节点 a_{ln} 的消息为式（9）。从变量节点 a_{ln} 到因子节点 $p_{\mathbf{y}_l|[\mathbf{A}]_{l,:},\mathbf{X}}\left(\boldsymbol{y}_l|\sum_{k=1}^{N} a_{lk}\boldsymbol{x}_k\right)$ 的消息则稍复杂。根据典型的和积算法，有$I^{\mathsf{a}}_{l\leftarrow ln}(a_{ln}, t+1) \propto p_{\mathsf{a}_{ln}}(a_{ln})$，这意味着变量节点到因子节点的消息无法随迭代更新。上述问题是由于忽略了 $\boldsymbol{y}_l$ 中的每个元素可能向 a_{ln} 传播不同的消息，如图2所示。为此，我们假设从$p_{\mathbf{y}_{l/m}|[\mathbf{A}]_{l,:},\mathbf{X}} \sim_m \left(\boldsymbol{y}_{l/m}|\sum_{k=1}^{N} a_{lk}\boldsymbol{x}_{k/m}\right)$ 到 a_{ln}的联合消息为式（10），其中$\boldsymbol{y}_{l/m} = [y_{l1}, \ldots, y_{l(m-1)}, y_{l(m+1)}, \ldots, y_{lM}]^T$，$\boldsymbol{x}_{n/m} = [x_{n1}, \ldots, x_{n(m-1)}, x_{n(m+1)}, \ldots, x_{nM}]^T$，$\mathbf{X}_{1/m} \cdots \mathbf{X}_{N/m}]^T$ $I^{\mathbf{x}}_{l\leftarrow n}\ \boldsymbol{x}_{n/m} = \int_{x_{nm}} I^{\mathbf{x}}_{l\leftarrow n}\ \boldsymbol{x}_n$ $\mathbf{x}$, , $\mathbf{x}$ and ( ) ( )。然后，从 a_{ln} 到$p_{y_{lm}|\mathbf{a}_l^T\mathbf{x}_m}\left(y_{lm}|\sum_{k=1}^{N} a_{lk}x_{km}\right)$ 的消息为

$$I^{\mathsf{a}}_{lm\leftarrow ln}(a_{ln}, t+1) \propto p_{\mathsf{a}_{ln}}(a_{ln}) I^{\mathsf{a}}_{lm\to ln}(a_{ln}, t), \quad (11)$$

其中，$p_{\mathsf{a}_{ln}}(a_{ln})$是 a_{ln}的先验概率。最后，我们取 $I^{\mathsf{a}}_{lm\leftarrow ln}(a_{ln}, t+1)$的几何平均，作为从变量节点 a_{ln} 到因子节点 $p_{\mathbf{y}_l|[\mathbf{A}]_{l,:},\mathbf{X}}\left(\boldsymbol{y}_l|\sum_{k=1}^{N} a_{lk}\boldsymbol{x}_k\right)$的消息，即

$$I^{\mathsf{a}}_{l\leftarrow ln}(a_{ln}, t+1) \propto \left(\prod_{m=1}^{M} I^{\mathsf{a}}_{lm\leftarrow ln}(a_{ln}, t)\right)^{1/M}. \quad (12)$$

3) $\boldsymbol{x}_n$ 和 a_{ln} 的后验概率可近似为：

$$I^{\mathbf{x}}_{n}(\boldsymbol{x}_n, t+1) \propto p_{\mathbf{x}_n}(\boldsymbol{x}_n) \prod_{k=1}^{L} I^{\mathbf{x}}_{k\to n}(\boldsymbol{x}_n, t+1), \quad (13a)$$

$$I^{\mathsf{a}}_{ln}(a_{ln}, t+1) \propto p_{\mathsf{a}_{ln}}(a_{ln}) I^{\mathsf{a}}_{l\to ln}(a_{ln}, t+1). \quad (13b)$$

由于涉及高维积分，式(7)-(13)的计算通常难以处理。因此，我们应用中心极限定理和泰勒级数论证来近似和积算法的更新(7)-(13)。在渐近区间内，这些近似将是精确的。

C. 从因子节点到变量节点的近似消息（因子到变量）

定义 $\mathbf{Z} \triangleq \mathbf{AX}$。不失一般性，假设$\mathbb{E}[z_{lm}^2]$ 和 $\mathbb{E}[x_{nm}^2]$ 按 $O(1)$的尺度变化。由于 $\mathbf{z}_{lm} = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{a}_{lk}\mathbf{x}_{km}$,$\mathbb{E}[a_{ln}^2]$必须按 $O(1/N)$的尺度变化，因为 $N \to \infty$。因此，$\mathbb{E}[x_{nm}]$按 $O(1)$的尺度变化，而 $\mathbb{E}[a_{ln}]$按 $O(1/\sqrt{N})$的尺度变化。根据先验概率密度函数和式(7)-(13)，这些关于随机变量 $\mathbf{a}_{ln}$、$\mathbf{x}_{nm}$ 和 $\mathbf{z}_{lm}$ 的假设成立。

假设 $\mathbf{x}_{l,\ n} \in \mathbb{C}^{M\times 1}$ 是一个随机向量，其概率分布为 $I^{\mathbf{x}}_{l\leftarrow n}$，其均值和协方差矩阵分别记为 $\hat{}\boldsymbol{x}_{l,\ n}$ 和$\boldsymbol{v}^{\mathbf{x}}_{l,\ n}$。类似地，假设 $\mathbf{a}_{l,\ ln}$ 是一个随机变量，其概率分布为$I^{\mathsf{a}}_{l\leftarrow ln}$，均值为 $\hat{}a_{l,\ ln}$，方差为$v^{\mathsf{a}}_{l,\ ln}$。根据

$$I^{\mathsf{x}}_{l\to n}(\boldsymbol{x}_n,t)\propto\int_{[\mathbf{A}]_{l,:},\{\boldsymbol{x}_r\}_{r\neq n}}p_{\mathbf{y}_l|[\mathbf{A}]_{l,:},\mathbf{X}}\left(\boldsymbol{y}_l|\sum_{k=1}^{N}a_{lk}\boldsymbol{x}_k\right)\prod_{r=1,r\neq n}^{N}I^{\mathsf{x}}_{l\leftarrow r}(\boldsymbol{x}_r,t)\prod_{k=1}^{N}I^{\mathsf{a}}_{l\leftarrow lk}(a_{lk},t). \tag{7}$$

$$I^{\mathsf{a}}_{l\to ln}(a_{ln},t)\propto\int_{\{a_{lr}\}_{r\neq n},\mathbf{X}}p_{\mathbf{y}_l|[\mathbf{A}]_{l,:},\mathbf{X}}\left(\boldsymbol{y}_l|\sum_{k=1}^{N}a_{lk}\boldsymbol{x}_k\right)\prod_{k=1}^{N}I^{\mathsf{x}}_{l\leftarrow k}(\boldsymbol{x}_k,t)\prod_{r=1,r\neq n}^{N}I^{\mathsf{a}}_{l\leftarrow lr}(a_{lr},t). \tag{9}$$

$$I^{\mathsf{a}}_{lm\to ln}(a_{ln},t)\propto\int_{\{a_{lr}\}_{r\neq n},\mathbf{X}_{\sim m}}p_{\mathbf{y}_{l/m}|[\mathbf{A}]_{l,:},\mathbf{X}_{\sim m}}\left(\boldsymbol{y}_{l/m}|\sum_{k=1}^{N}a_{lk}\boldsymbol{x}_{k/m}\right)\prod_{k=1}^{N}I^{\mathsf{x}}_{l\leftarrow k}(\boldsymbol{x}_{k/m},t)\prod_{r=1,r\neq n}^{N}I^{\mathsf{a}}_{l\leftarrow lr}(a_{lr},t). \tag{10}$$

中心极限定理，我们可以将 z_l 的概率密度函数描述为高斯分布。首先，将估计的均值 $\hat{}\boldsymbol{p}_l(t)$ 和协方差矩阵 $\boldsymbol{v}^{\mathsf{p}}_l(t)$定义为

$$\hat{\boldsymbol{p}}_l(t)=\sum_{k=1}^{N}\hat{a}_{l,lk}(t)\hat{\boldsymbol{x}}_{l,k}(t), \tag{14a}$$

$$\boldsymbol{v}^{\mathsf{p}}_l(t)=\sum_{k=1}^{N}|\hat{a}_{l,lk}(t)|^2\boldsymbol{v}^{\mathsf{x}}_{l,k}(t)+v^{\mathsf{a}}_{l,lk}(t)\hat{\boldsymbol{x}}_{l,k}(t)\hat{\boldsymbol{x}}^H_{l,k}(t)+v^{\mathsf{a}}_{l,lk}(t)\boldsymbol{v}^{\mathsf{x}}_{l,k}(t), \tag{14b}$$

其中，$\hat{}\boldsymbol{p}_l(t)$ 和 $\boldsymbol{v}^{\mathsf{p}}_l(t)$ 的量级为 $O(1)$。接着，定义条件概率密度函数

$$p_{\mathbf{z}_l|\mathbf{p}_l}(\boldsymbol{z}_l|\hat{\boldsymbol{p}}_l(t);\boldsymbol{v}^{\mathsf{p}}_l(t))\triangleq\frac{1}{C_{\boldsymbol{z}}}p_{\mathbf{y}_l|\mathbf{z}_l}(\boldsymbol{y}_l|\boldsymbol{z}_l)\mathcal{CN}(\boldsymbol{z}_l;\hat{\boldsymbol{p}}_l(t),\boldsymbol{v}^{\mathsf{p}}_l(t)), \tag{15}$$

其中，$C_{\boldsymbol{z}}=\int_{\boldsymbol{z}}p_{\mathbf{y}_l|\mathbf{z}_l}(\boldsymbol{y}_l|\boldsymbol{z}_l)\mathcal{CN}(\boldsymbol{z}_l;\hat{}\boldsymbol{p}_l(t)\ \boldsymbol{v}^{\mathsf{p}}_l(t))$。将 z_l 近似为高斯分布后，在观测 $\boldsymbol{y}_l$ 下估计的均值和协方差矩阵为

$$\hat{\boldsymbol{z}}_l(t)=\mathbb{E}[\boldsymbol{z}_l|\hat{\boldsymbol{p}}_l(t);\boldsymbol{v}^{\mathsf{p}}_l(t)]\triangleq\boldsymbol{g}_{\mathbf{z}}(\hat{\boldsymbol{p}}_l(t),\boldsymbol{v}^{\mathsf{p}}_l(t)), \tag{16a}$$

$$\boldsymbol{v}^{\mathsf{z}}_l(t)=\mathsf{var}[\boldsymbol{z}_l|\hat{\boldsymbol{p}}_l(t);\boldsymbol{v}^{\mathsf{p}}_l(t)]=\boldsymbol{v}^{\mathsf{p}}_l(t)\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{g}_{\mathbf{z}}(\hat{\boldsymbol{p}}_l(t),\boldsymbol{v}^{\mathsf{p}}_l(t)), \tag{16b}$$

其中，$\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{g}_{\mathbf{z}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\Sigma})$ 是 $\boldsymbol{g}_{\mathbf{z}}$ 关于第一个参数项的梯度。通过高斯近似，并在点 $\hat{}\boldsymbol{x}_n(t)$ 处进行泰勒展开，可将 $I^{\mathsf{x}}_{l\to n}(\boldsymbol{x}_n,t)$ 近似为

$$I^{\mathsf{x}}_{l\to n}(\boldsymbol{x}_n,t)\approx const\cdot\exp\left(\mathsf{Re}\left[2\boldsymbol{x}_n^H\left(\hat{a}^*_{l,ln}(t)\hat{\boldsymbol{s}}_l(t)+|\hat{a}_{ln}(t)|^2\boldsymbol{v}^{\mathsf{s}}_l(t)\hat{\boldsymbol{x}}_n(t)\right)+\boldsymbol{x}_n^H\left(v^{\mathsf{a}}_{ln}(t)\left(\hat{\boldsymbol{s}}_l(t)\hat{\boldsymbol{s}}_l^H(t)-\boldsymbol{v}^{\mathsf{s}}_l(t)\right)-|\hat{a}_{ln}(t)|^2\boldsymbol{v}^{\mathsf{s}}_l(t)\right)\boldsymbol{x}_n\right]\right), \tag{17}$$

其中

$$\hat{\boldsymbol{s}}_l(t)=\boldsymbol{v}^{\mathsf{p}}_l(t)^{-1}(\hat{\boldsymbol{z}}_l(t)-\hat{\boldsymbol{p}}_l(t)), \tag{18a}$$

$$\boldsymbol{v}^{\mathsf{s}}_l(t)=\boldsymbol{v}^{\mathsf{p}}_l(t)^{-1}(\mathbf{I}-\boldsymbol{v}^{\mathsf{z}}_l(t)\boldsymbol{v}^{\mathsf{p}}_l(t)^{-1}). \tag{18b}$$

$\hat{}\boldsymbol{s}_l(t)$ 是后验估计 $\hat{}\boldsymbol{z}_l(t)$ 的缩放残差，$\boldsymbol{v}^{\mathsf{s}}_l(t)$ 是残差协方差逆矩阵。$const$ 表示一个常数，使概率密度函数的积分为 1。$I^{\mathsf{x}}_{l\to n}(\boldsymbol{x}_n,t)$ 的详细推导见附录 A。

$I^{\mathsf{a}}_{l\to ln}(a_{ln},t)$ 的推导与 $I^{\mathsf{x}}_{l\to n}(\boldsymbol{x}_n,t)$ 的推导类似。具体而言，使用高斯近似

根据中心极限定理和泰勒级数展开，$I^{\mathsf{a}}_{l\to ln}(a_{ln},t)$ 可近似为式（19）。

$$I^{\mathsf{a}}_{l\to ln}(a_{ln},t)\approx const\cdot\exp(\mathsf{Re}[2a^*_{ln}\left(\hat{\boldsymbol{s}}_l^T(t)\hat{\boldsymbol{x}}^*_{l,n}(t)+\mathsf{Tr}\left(\boldsymbol{v}^{\mathsf{s}}_l(t)\hat{\boldsymbol{x}}^*_n(t)\hat{\boldsymbol{x}}^T_n(t)\right)\hat{a}_{ln}(t)\right)-|a_{ln}|^2\mathsf{Tr}(\boldsymbol{v}^{\mathsf{s}}_l(t)\hat{\boldsymbol{x}}^*_n(t)\hat{\boldsymbol{x}}^T_n(t)-\left(\hat{\boldsymbol{s}}_l(t)\hat{\boldsymbol{s}}_l^H(t)-\boldsymbol{v}^{\mathsf{s}}_l(t)\right)^T\boldsymbol{v}^{\mathsf{x}}_n(t))]). \tag{19}$$

D. 从变量节点到因子节点的近似消息（V-to-F）

在 III-C 节中，我们得到了$I^{\mathsf{x}}_{l\to n}(\boldsymbol{x}_n,t)$的近似结果。现在，我们尝试根据式（8）和（17）对 $I^{\mathsf{x}}_{l\leftarrow n}(\boldsymbol{x}_n,t)$进行近似。$I^{\mathsf{x}}_{l\leftarrow n}(\boldsymbol{x}_n,t)$ 可以写为

$$\begin{aligned}&I^{\mathsf{x}}_{l\leftarrow n}(\boldsymbol{x}_n,t+1)\\&\approx p_{\mathbf{x}_n}(\boldsymbol{x}_n)\cdot\exp\Big(\mathsf{Re}\Big[-(\boldsymbol{x}_n-\hat{\boldsymbol{r}}_{l,n}(t))^H\\&\qquad\boldsymbol{v}^{\mathsf{r}}_{l,n}(t)^{-1}(\boldsymbol{x}_n-\hat{\boldsymbol{r}}_{l,n}(t))\Big]\Big)\cdot const\\&=p_{\mathbf{x}_n}(\boldsymbol{x}_n)\mathcal{CN}\left(\boldsymbol{x}_n;\hat{\boldsymbol{r}}_{l,n}(t),\boldsymbol{v}^{\mathsf{r}}_{l,n}(t)\right)\cdot const,\end{aligned} \tag{20}$$

其中

$$\boldsymbol{v}^{\mathsf{r}}_{l,n}(t)\triangleq\left(\sum_{k=1,k\neq l}^{L}|\hat{a}_{kn}(t)|^2\boldsymbol{v}^{\mathsf{s}}_k(t)-v^{\mathsf{a}}_{kn}(t)\left(\hat{\boldsymbol{s}}_k(t)\hat{\boldsymbol{s}}_k^H(t)-\boldsymbol{v}^{\mathsf{s}}_k(t)\right)\right)^{-1}, \tag{21a}$$

$$\hat{\boldsymbol{r}}_{l,n}(t)\triangleq\boldsymbol{v}^{\mathsf{r}}_{l,n}(t)\left(\sum_{k=1,k\neq l}^{L}\hat{a}^*_{k,kn}(t)\hat{\boldsymbol{s}}_k(t)+|\hat{a}_{kn}(t)|^2\boldsymbol{v}^{\mathsf{s}}_k(t)\hat{\boldsymbol{x}}_n(t)\right). \tag{21b}$$

采用最小均方误差去噪器后，我们有

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{l,n}(t+1)=\boldsymbol{g}_{\mathbf{x}}\left(\hat{\boldsymbol{r}}_{l,n}(t),\boldsymbol{v}^{\mathsf{r}}_{l,n}(t)\right)\triangleq\frac{1}{C_{\boldsymbol{x}_{l,n}}}\int_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x}p_{\mathbf{x}_n}(\boldsymbol{x})\mathcal{CN}\left(\boldsymbol{x};\hat{\boldsymbol{r}}_{l,n}(t),\boldsymbol{v}^{\mathsf{r}}_{l,n}(t)\right), \tag{22a}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}^{\mathsf{x}}_{l,n}(t+1)&\triangleq\frac{1}{C_{\boldsymbol{x}_{l,n}}}\int_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}_{l,n}(t+1))(\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}_{l,n}(t+1))^H\\&\qquad\cdot p_{\mathbf{x}_n}(\boldsymbol{x})\mathcal{CN}(\boldsymbol{x};\hat{\boldsymbol{r}}_{l,n}(t),\boldsymbol{v}^{\mathsf{r}}_{l,n}(t))\\&=\boldsymbol{v}^{\mathsf{r}}_{l,n}(t)\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{g}_{\mathbf{x}}(\hat{\boldsymbol{r}}_{l,n}(t),\boldsymbol{v}^{\mathsf{r}}_{l,n}(t)),\end{aligned} \tag{22b}$$

其中 $C_{\boldsymbol{x}_{l,\ n}} = \int_{\boldsymbol{x}} p_{\mathbf{x}_n}(\boldsymbol{x})\mathcal{CN}(\boldsymbol{x};\ \hat{}\boldsymbol{r}_{l,\ n}(t)\ \boldsymbol{v}^{\mathsf{r}}_{l,\ n}(t))$ 。与 (21) 类似，定义

$$\boldsymbol{v}^{\mathsf{r}}_n(t) \triangleq \left(\sum_{k=1}^{L}|\hat{a}_{kn}(t)|^2\boldsymbol{v}^{\mathsf{s}}_k(t) - v^{\mathsf{a}}_{kn}(t)\left(\hat{\boldsymbol{s}}_k(t)\hat{\boldsymbol{s}}^H_k(t) - \boldsymbol{v}^{\mathsf{s}}_k(t)\right)\right)^{-1}, \tag{23a}$$

$$\hat{\boldsymbol{r}}_n(t) \triangleq \boldsymbol{v}^{\mathsf{r}}_n(t)\sum_{k=1}^{L}\left(\hat{a}^*_{k,kn}(t)\hat{\boldsymbol{s}}_k(t) + |\hat{a}_{kn}(t)|^2\boldsymbol{v}^{\mathsf{s}}_k(t)\,\hat{\boldsymbol{x}}_n(t)\right). \tag{23b}$$

比较式（23）与式（21），可得

$$\boldsymbol{v}^{\mathsf{r}}_{l,n}(t) = \boldsymbol{v}^{\mathsf{r}}_n(t) + O(1/N), \tag{24a}$$

$$\hat{\boldsymbol{r}}_{l,n}(t) = \hat{\boldsymbol{r}}_n(t) - \boldsymbol{v}^{\mathsf{r}}_{l,n}(t)\hat{a}^*_{ln}(t)\hat{\boldsymbol{s}}_l(t) + O(1/N). \tag{24b}$$

在 $\hat{}\boldsymbol{r}_n(t)$ 处对 $\hat{}\boldsymbol{x}_{l,n}(t+1)$ 作泰勒级数展开，可得

$$\begin{aligned}
&\hat{\boldsymbol{x}}_{l,n}(t+1)\\
&= \boldsymbol{g}_{\mathbf{x}}\left(\hat{\boldsymbol{r}}_{l,n}(t), \boldsymbol{v}^{\mathsf{r}}_{l,n}(t)\right)\\
&= \boldsymbol{g}_{\mathbf{x}}\left(\hat{\boldsymbol{r}}_n(t) - \boldsymbol{v}^{\mathsf{r}}_{l,n}(t)\hat{a}^*_{ln}(t)\hat{\boldsymbol{s}}_l(t) + O\left(1/N\right),\right.\\
&\qquad \left.\boldsymbol{v}^{\mathsf{r}}_n(t) + O\left(1/N\right)\right)\\
&\approx \boldsymbol{g}_{\mathbf{x}}\left(\hat{\boldsymbol{r}}_n(t), \boldsymbol{v}^{\mathsf{r}}_n(t)\right) -\\
&\qquad 2\mathsf{Re}\left[\left(\boldsymbol{v}^{\mathsf{r}}_n(t)\hat{a}^*_{ln}(t)\hat{\boldsymbol{s}}_l(t)\right)^H\nabla_{\boldsymbol{u}^*}\boldsymbol{g}_{\mathbf{x}}\left(\hat{\boldsymbol{r}}_n(t), \boldsymbol{v}^{\mathsf{r}}_n(t)\right)\right]^H\\
&= \hat{\boldsymbol{x}}_n(t+1) - 2\mathsf{Re}\left[\left(\hat{a}^*_{ln}(t)\hat{\boldsymbol{s}}_l(t)\right)^H\boldsymbol{v}^{\mathbf{x}}_n(t+1)\right]^H,
\end{aligned} \tag{25}$$

其中

$$\hat{\boldsymbol{x}}_n(t+1) \triangleq \boldsymbol{g}_{\mathbf{x}}(\hat{\boldsymbol{r}}_n(t), \boldsymbol{v}^{\mathsf{r}}_n(t)) \tag{26a}$$

$$= \frac{1}{C_{\boldsymbol{x}}}\int_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x}p_{\mathbf{x}_n}(\boldsymbol{x})\mathcal{CN}(\boldsymbol{x};\hat{\boldsymbol{r}}_n(t), \boldsymbol{v}^{\mathsf{r}}_n(t)), \tag{26b}$$

$$\boldsymbol{v}^{\mathbf{x}}_n(t+1) \triangleq \boldsymbol{v}^{\mathsf{r}}_n(t)\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{g}_{\mathbf{x}}\left(\hat{\boldsymbol{r}}_n(t), \boldsymbol{v}^{\mathsf{r}}_n(t)\right), \tag{26c}$$

以及 $C_{\boldsymbol{x}} = \int_{\boldsymbol{x}} p_{\mathbf{x}_n}(\boldsymbol{x})\mathcal{CN}(\boldsymbol{x};\ \hat{}\boldsymbol{r}_n(t)\ \boldsymbol{v}^{\mathsf{r}}_n(t))$。通过最小均方误差去噪器 $\boldsymbol{g}_{\mathbf{x}}$ 得到 $\hat{}\boldsymbol{x}_n(t+1)$ 和 $\boldsymbol{v}^{\mathbf{x}}_n(t+1)$。式（25）证实，$\hat{}\boldsymbol{x}_n(t) - \hat{}\boldsymbol{x}_{l,n}(t)$ 的量级为 $O(1/\sqrt{N})$。类似地，在第一个自变量取 $\hat{}\boldsymbol{r}_n(t)$、第二个自变量取 $\boldsymbol{v}^{\mathsf{r}}_n(t)$ 时，对式（22b）中的 $\boldsymbol{v}^{\mathbf{x}}_{l',n}(t+1)$ 进行泰勒级数展开，结果证实 $\boldsymbol{v}^{\mathbf{x}}_n(t) - \boldsymbol{v}^{\mathbf{x}}_{l',n}(t)$ 的量级为 $O(1/\sqrt{N})$。

与上述过程类似，可推导出 $I^{\mathsf{a}}_{l\leftarrow ln}(a_{ln}, t+1)$ 的近似值，其对应的均值进一步近似为

$$\begin{aligned}
&\hat{a}_{l,ln}(t+1)\\
&\approx \hat{a}_{ln}(t+1) - 2\mathsf{Re}\left[\frac{1}{M}\hat{\boldsymbol{x}}^H_n(t)\hat{\boldsymbol{s}}_l(t)v^{\mathsf{a}}_{ln}(t+1)\right].
\end{aligned} \tag{27}$$

for

$$\hat{a}_{ln}(t+1) = g_{\mathsf{a}}(\hat{q}_{ln}(t), v^{\mathsf{q}}_{ln}(t)) \tag{28a}$$

$$\triangleq \frac{1}{C_a}\int_a a p_{\mathsf{a}_{ln}}(a)\mathcal{CN}(a;\hat{q}_{ln}(t), v^{\mathsf{q}}_{ln}(t)), \tag{28b}$$

$$v^{a}_{ln}(t+1) = v^{\mathsf{q}}_{ln}(t)\nabla_u g_{\mathsf{a}}(\hat{q}_{ln}(t), v^{\mathsf{q}}_{ln}(t)) \tag{28c}$$

$$\triangleq \frac{1}{C_a}\int_a |a - \hat{a}_{ln}(t+1)|^2 p_{\mathsf{a}_{ln}}(a)\mathcal{CN}(a;\hat{q}_{ln}(t), v^{\mathsf{q}}_{ln}(t)), \tag{28d}$$

其中 $C_a = \int_a p_{\mathsf{a}_{ln}}(a)\mathcal{CN}(a;\ \hat{}q_{ln}(t)\ v^{\mathsf{q}}_{ln}(t))$，且

$$v^{\mathsf{q}}_{ln}(t) = \mathsf{Tr}\left(\boldsymbol{v}^{\mathsf{s}}_l(t)\hat{\boldsymbol{x}}^*_n(t)\hat{\boldsymbol{x}}^T_n(t) - \left(\hat{\boldsymbol{s}}_l(t)\hat{\boldsymbol{s}}^H_l(t) - \boldsymbol{v}^{\mathsf{s}}_l(t)\right)^T\boldsymbol{v}^{\mathbf{x}}_n(t)\right)^{-1}, \tag{29a}$$

$$\hat{q}_{ln}(t) = v^{\mathsf{q}}_{ln}(t)\left(\hat{\boldsymbol{s}}^T_l(t)\hat{\boldsymbol{x}}^*_{l,n}(t) + \mathsf{Tr}\left(\boldsymbol{v}^{\mathsf{s}}_l(t)\hat{\boldsymbol{x}}_n(t)^*\hat{\boldsymbol{x}}^T_n(t)\right)\hat{a}_{ln}(t)\right). \tag{29b}$$

根据式（29），v^{q}_{ln} 的量级为 $O(1/N)$。因此，$\hat{a}_{ln}(t) - \hat{}a_{l,ln}$ 的差值的量级为 $O(1/N)$。同样可以验证，$v^{\mathsf{a}}_{ln}(t) - v^{\mathsf{a}}_{l,ln}(t)$ 的量级为 $O\left(1/N^{2/3}\right)$。

E. 消息传递循环

最后，我们尝试闭合消息传递循环，以实现迭代。将（25）和（27）代入附录 B 中的（14），得到

$$\hat{\boldsymbol{p}}_l(t) \approx \bar{\boldsymbol{p}}_l(t) - \bar{\boldsymbol{v}}^{\mathsf{p}}_l(t)\hat{\boldsymbol{s}}_l(t-1), \tag{30a}$$

$$\boldsymbol{v}^{\mathsf{p}}_l(t) \approx \bar{\boldsymbol{v}}^{\mathsf{p}}_l(t) + \sum_{k=1}^{N}v^{\mathsf{a}}_{lk}(t)\boldsymbol{v}^{\mathbf{x}}_k(t), \tag{30b}$$

其中

$$\bar{\boldsymbol{p}}_l(t) \triangleq \sum_{k=1}^{N}\hat{a}_{lk}(t)\hat{\boldsymbol{x}}_k(t), \tag{31a}$$

$$\bar{\boldsymbol{v}}^{\mathsf{p}}_l(t) \triangleq \sum_{k=1}^{N}|\hat{a}_{lk}(t)|^2\boldsymbol{v}^{\mathbf{x}}_k(t) + v^{\mathsf{a}}_{lk}(t)\hat{\boldsymbol{x}}_k(t)\hat{\boldsymbol{x}}^H_k(t). \tag{31b}$$

$\bar{\boldsymbol{p}}_l(t)$ 和 $\bar{\boldsymbol{v}}^{\mathsf{p}}_l(t)$ 分别是矩阵乘积 $[\mathbf{AX}]_{l,\ :}$ 及其对应协方差矩阵的估计值。式（30）采用 Onsager校正，得到 $\hat{}\boldsymbol{p}_l(t)$ 和 $\boldsymbol{v}^{\mathsf{p}}_l(t)$。

将（27）和（23a）代入（23b），得到

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{r}}_n(t) &\approx \boldsymbol{v}^{\mathsf{r}}_n(t)\left(\sum_{k=1}^{L}\hat{a}^*_{kn}\hat{\boldsymbol{s}}_k(t)\right)\\
&\quad + \left(\mathbf{I} - \sum_{k=1}^{L}\boldsymbol{v}^{\mathsf{r}}_n(t)v^{a}_{kn}(t)\boldsymbol{v}^{\mathsf{s}}_k(t)\right)\hat{\boldsymbol{x}}_n(t).
\end{aligned} \tag{32}$$

根据附录 A 中 $\hat{}\boldsymbol{s}_l$ 和 $\boldsymbol{v}^{\mathsf{s}}_l$ 的定义，附录 B 中的 [25] 证明了 $\hat{}\boldsymbol{s}_l(t)\hat{}\boldsymbol{s}^H_l(t) - \boldsymbol{v}^{\mathsf{s}}_l(t)$ 可近似为零。因此，（23a）可简化为

$$\boldsymbol{v}^{\mathsf{r}}_n(t) \approx \left(\sum_{k=1}^{L}|\hat{a}_{kn}(t)|^2\boldsymbol{v}^{\mathsf{s}}_k(t)\right)^{-1}. \tag{33}$$

$\hat{}\boldsymbol{r}_n(t)$可解释为真实 $\boldsymbol{x}_n$ 加上协方差矩阵为 $\boldsymbol{v}^{\mathsf{r}}_n(t)$的白高斯噪声后的观测（即 $\mathbf{r}_n = \hat{}\boldsymbol{r}_n(t)$）。其关系类似于 $\mathbf{r}_n = \mathbf{x}_n + \mathbf{w}^{\mathsf{r}}_n$，其中 $\mathbf{w}^{\mathsf{r}} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \boldsymbol{v}^{\mathsf{r}}_n(t))$。因此，$\boldsymbol{g}_{\mathbf{x}}$是一个最小均方误差去噪器，可在观测$\hat{}\boldsymbol{r}_n(t)$的条件下估计$\hat{}\boldsymbol{x}_n(t)$。类似地，我们可以得到

$$\hat{q}_{ln}(t) \approx v^{\mathsf{q}}_{ln}(t)\hat{\boldsymbol{s}}^T_l(t)\hat{\boldsymbol{x}}^*_n(t) + (1 - v^{\mathsf{q}}_{ln}(t)\mathsf{Tr}\left(\boldsymbol{v}^{\mathbf{x}}_n(t)\boldsymbol{v}^{\mathsf{s}}_l(t)\right))\hat{a}_{ln}(t), \tag{34}$$

$$v^{\mathsf{q}}_{ln}(t) \approx \mathsf{Tr}\left(\boldsymbol{v}^{\mathsf{s}}_l(t)\hat{\boldsymbol{x}}^*_n(t)\hat{\boldsymbol{x}}^T_n(t)\right)^{-1}. \tag{35}$$

$\hat{}q_{ln}(t)$也可解释为真实 a_{ln} 加上方差为 $v_{ln}^{\mathsf{q}}(t)$的白高斯噪声后的观测（即 $\mathsf{q}_{ln}=\hat{}q_{ln}(t)$），也就是说，$\mathsf{q}_{ln}=\mathsf{a}_{ln}+\mathsf{w}_{ln}^{\mathsf{q}}$，且 $\mathsf{w}_{ln}^{\mathsf{q}}\sim\mathcal{CN}(0,v_{ln}^{\mathsf{q}}(t))$。$g_{\mathsf{a}}$ 也是一个最小均方误差去噪器，可在观测$\hat{}q_{ln}(t)$的条件下估计$\hat{a}_{ln}(t)$。

F. 基于所提出的 BiGAMP 的联合设备活动检测-信道估计-信号检测

考虑大规模接入场景和第 II 节中的系统模型，我们可以给出函数 $\boldsymbol{g}_{\mathbf{z}}$、$\boldsymbol{g}_{\mathbf{x}}$和 g_{a} 的具体形式，并进行一些简化。

假设1：在第 II 节中，对于所有l和 n，随机变量 a_{ln} 与随机向量 $\mathbf{x}_n$ 相互独立；在设备 n 处于活动状态的条件下，随机变量 $\mathbf{x}_{n1},\ldots,\mathbf{x}_{nM}$是独立同分布的。在渐近区间内，协方差矩阵 $\boldsymbol{v}_n^{\mathsf{x}}$ 是对角元素相同的对角矩阵，可表示为 $\boldsymbol{v}_n^{\mathsf{x}}=v_n^{\mathsf{x}}\mathbf{I}$。类似地，$\bar{\boldsymbol{v}}_l^{\mathsf{p}}=\bar{v}_l^{\mathsf{p}}\mathbf{I}$、$\boldsymbol{v}_l^{\mathsf{p}}=v_l^{\mathsf{p}}\mathbf{I}$、$\boldsymbol{v}_l^{\mathsf{z}}=v_l^{\mathsf{z}}\mathbf{I}$、$\boldsymbol{v}_l^{\mathsf{s}}=v_l^{\mathsf{s}}\mathbf{I}$和$\boldsymbol{v}_n^{\mathsf{r}}=v_n^{\mathsf{r}}\mathbf{I}$。

考虑加性白高斯噪声输出信道，根据式（16）和假设1，输出估计值 $\boldsymbol{z}_l(t)$及方差 $v_n^{\mathsf{z}}(t)$为

$$\hat{\boldsymbol{z}}_l(t)=\left(\sigma^2+v_l^{\mathsf{p}}(t)\right)^{-1}\left(v_l^{\mathsf{p}}(t)\boldsymbol{y}_l+\sigma^2\hat{\boldsymbol{p}}_l(t)\right), \tag{36a}$$

$$v_l^{\mathsf{z}}(t)=\sigma^2\left(\sigma^2+v_l^{\mathsf{p}}(t)\right)^{-1}v_l^{\mathsf{p}}(t). \tag{36b}$$

根据 (26)–(28)，$\boldsymbol{g}_{\mathbf{x}}$ 和 g_{a} 是用于估计信道和信号的最小均方误差去噪器。由于基站已知导频序列，根据 (28)，对于 $l\le L_p$，有$\hat{a}_{ln}(t)=c_{ln}$ 和 $v_{ln}^{\mathsf{a}}(t)=0$。对于高斯码字，当$l>L_p$时，估计值$\hat{a}_{ln}(t)$ 和方差 $v_{ln}^{\mathsf{a}}(t)$ 为

$$\begin{aligned}\hat{a}_{ln}(t+1)&=\frac{\hat{q}_{ln}(t)}{1+Lv_{ln}^{\mathsf{q}}(t)},\\ v_{ln}^{a}(t+1)&=\frac{v_{ln}^{\mathsf{q}}(t)}{1+Lv_{ln}^{\mathsf{q}}(t)}.\end{aligned} \tag{37}$$

命题 1：对于类似于 (4) 的伯努利-高斯分布，通过最小均方误差去噪器 $\boldsymbol{g}_{\mathbf{x}}$ 得到的估计值 $\hat{}\boldsymbol{x}_n(t+1)$ 为

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{x}}_n(t+1)&=\boldsymbol{g}_{\mathbf{x}}(\hat{\boldsymbol{r}}_n(t),v_n^{\mathsf{r}}(t)\mathbf{I})\\&=\beta_n\phi\left(\hat{\boldsymbol{r}}_n\left(t\right)\right)\left(\beta_n+v_n^{\mathsf{r}}\left(t\right)\right)^{-1}\hat{\boldsymbol{r}}_n\left(t\right),\end{aligned} \tag{38}$$

其中

$$\phi\left(\hat{\boldsymbol{r}}_n\left(t\right)\right)=\frac{1}{1+\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\exp\left(-M\psi_n(t)\right)}, \tag{39}$$

$$\begin{aligned}\psi_n(t)=&\left(\frac{1}{v_n^{\mathsf{r}}(t)}-\frac{1}{\beta_n+v_n^{\mathsf{r}}(t)}\right)\frac{\hat{\boldsymbol{r}}_n^H(t)\hat{\boldsymbol{r}}_n(t)}{M}\\&-\log\left(1+\frac{\beta_n}{v_n^{\mathsf{r}}(t)}\right).\end{aligned} \tag{40}$$

方差为

$$\begin{aligned}&v_n^{\mathsf{x}}(t+1)\\&=\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\beta_n^2\phi^2(\hat{\boldsymbol{r}}_n(t))\exp\left(-M\psi_n(t)\right)\frac{\hat{\boldsymbol{r}}_n^H(t)\hat{\boldsymbol{r}}_n(t)}{M(\beta_n+v_n^{\mathsf{r}}(t))^2}\\&\quad+\beta_nv_n^{\mathsf{r}}(t)\phi(\hat{\boldsymbol{r}}_n(t))\left(\beta_n+v_n^{\mathsf{r}}(t)\right)^{-1}\end{aligned} \tag{41}$$

证明：请参阅附录 C。

根据附录 C 中的式 (69)，$\phi(\hat{}\boldsymbol{r}_n(t))$ 表示设备 n 处于活动状态的估计概率。考察最小均方误差去噪器 (38)- (40) 的上述非线性函数形式，值得注意的是，如果设备 n 处于活动状态，$\phi(\hat{}\boldsymbol{r}_n(t))$ 趋近于 1；否则，它趋近于 0。因此，该算法采用阈值策略进行活动检测，所提出的活动检测器和信道估计器如下。

定义 1：对于每个设备 n，经过 t 次迭代后，设备活动检测器定义为

$$\hat{\alpha}_{n,t}=\begin{cases}1, & \phi(\hat{\boldsymbol{r}}_n(t))>\varepsilon\\ 0, & \phi(\hat{\boldsymbol{r}}_n(t))\le\varepsilon\end{cases}. \tag{42}$$

根据 (69)，设备 n 的估计激活概率为$\phi(\hat{}\boldsymbol{r}_n(t))$。当 $\phi(\hat{}\boldsymbol{r}_n(t))$大于先验激活概率 ε时，设备 n 被判定为活动状态；否则，判定为非活动状态。对于活动设备 k，其信道和信号估计如下：

$$\hat{\boldsymbol{h}}_{k,t}=\hat{\boldsymbol{x}}_k(t),\quad \hat{\boldsymbol{d}}_{k,t}=[\hat{a}_{L_p+1,k}(t),\ldots,\hat{a}_{L,k}(t)]. \tag{43}$$

算法1：所提出的 BiGAMP算法 给定系统输出 Y 和估计函数 $\boldsymbol{g}_{\mathbf{z}}$、$\boldsymbol{g}_{\mathbf{x}}$ 和 g_{a}。对于 $t=1$、.....、$T_{\max}$，通过以下递推生成估计值 $\hat{}\mathbf{X}(t)$、$\hat{}\mathbf{A}(t)$ 和 $\hat{}\mathbf{Z}(t)$：1：初始化：对于每个 l、n、m，设置 $\hat{}\boldsymbol{s}_l(0)=0$、$\hat{a}_{ln}(1)=c_{ln}$ $(l\le L_p)$、$\hat{a}_{ln}(1)=0(l>L_p)$、$\hat{}\boldsymbol{x}_n(1)=0$、$v_{ln}^{\mathsf{a}}(1)=1$ 以及 $\boldsymbol{v}_n^{\mathsf{x}}(1)=\beta_n\mathbf{I}$。2：重复 3：根据式（31）更新矩阵乘积 $[\mathbf{AX}]_l$ 的估计值 $\bar{\boldsymbol{p}}_l(t)$、及相应的协方差矩阵 $\bar{\boldsymbol{v}}_l^{\mathsf{p}}(t)$。4：根据式（30）应用 Onsager校正，计算校正后的估计值 $\hat{}\boldsymbol{p}_l(t)$ 和协方差矩阵 $\boldsymbol{v}_l^{\mathsf{p}}(t)$。5：根据式（36）更新近似后验均值 $\hat{}\boldsymbol{z}_l(t)$ 和协方差矩阵 $\boldsymbol{v}_l^{\mathsf{z}}(t)$。6：根据式（18）更新缩放残差 $\hat{}\boldsymbol{s}_l(t)$ 和残差协方差逆矩阵集合 $\boldsymbol{v}_l^{\mathsf{s}}(t)$。7：根据式（34）和（35）更新$\hat{q}_{ln}(t)$ 和 $v_{ln}^{\mathsf{q}}(t)$。8：根据式（32）和（33）更新 $\hat{}\boldsymbol{r}_n(t)$ 和 $\boldsymbol{v}_n^{\mathsf{r}}(t)$。9：根据式（37）计算 a_{nl} 的估计值$\hat{a}_{ln}(t+1)$ 和方差 $v_{ln}^{\mathsf{a}}(t+1)$。10：根据式（38）—（41）计算估计值 $\hat{}\boldsymbol{x}_n(t+1)$、$\boldsymbol{v}_n^{\mathsf{x}}(t+1)$ 和 $\phi(\hat{}\boldsymbol{r}_n(t))$。11 $\|\bar{\ }_{t}^{t+1}-\bar{\ }_{t}^{t}\|_F^2\le\kappa\|\bar{\ }_{t}^{t}\|_F^2$：直至 P( ) P( ) P( )：返回 12 $\hat{}\boldsymbol{x}_n(\,)$、$\hat{a}_{ln}(\,)$、$v_{ln}^{\mathsf{q}}(\,)$、$v_n^{\mathsf{r}}(\,)$ 和 $\phi(\hat{}\boldsymbol{r}_n(t))$。

我们在算法 1[3],中总结了所提出的算法，其中 $T_{\max}$ 为最大迭代次数。根据（31a），定义 $\bar{}\mathbf{P}(t)=\hat{}\mathbf{A}(t)\,\hat{}\mathbf{X}(t)=[\bar{\boldsymbol{p}}_1(t)\ldots,\bar{\boldsymbol{p}}_L(t)]^T$。当更新后的$\bar{}\mathbf{P}(t+1)$与 $\bar{}\mathbf{P}(t)$之间的差异足够小时，算法1停止。给定 $\kappa=10^{-4}$，停止准则为 $\|\bar{}\mathbf{P}(t+1)-\bar{}\mathbf{P}(t)\|_F^2\le\kappa\|\bar{}\mathbf{P}(t)\|_F^2$。在下文中，如果不存在歧义，BiGAMP算法均指算法1。算法1的复杂度取决于信道矩阵与信号矩阵的乘法，即算法1中“3”处的$\hat{}\mathbf{A}(t)\,\hat{}\mathbf{X}(t)$。由于$\hat{}\mathbf{A}(t)\in\mathbb{C}^{L\times N}$且$\hat{}\mathbf{X}(t)\in\mathbb{C}^{N\times M}$，复杂度按 $O(LNM)$的规模增长。

IV. BiGAMP算法的性能

本节首先构建状态演化（SE）来描述算法的收敛性，然后分析所提出的设备活动检测-信道估计-信号检测（DAD-CE-SD）算法的理论性能，包括DAD的错误概率、相应的信道估计（CE）均方误差（MSE）以及信号检测（SD）的符号错误率（SER）。

[3]注意，算法1中涉及方差的计算需要借助假设1进行简化。为确保所提出的BiGAMP算法收敛，我们采用了算法1中未包含的自适应阻尼。阻尼的细节与 [25, 第IV节]类似。受篇幅所限，我们不再讨论这一问题，感兴趣的读者可参阅 [25]。

A. 状态演化

估计值$\hat{}$A(t)和$\hat{}$X(t)由观测Y得到。$\hat{}$P(t) $=[\hat{}\boldsymbol{p}_1(t)\ldots,\hat{}\boldsymbol{p}_L(t)]^T$ 是对 $\bar{}$Y $-$P(t) 的误差进行解耦并应用 Onsager 校正后得到的Z的估计值。对于所提出的BiGAMP算法，根据 [17], [29], ，我们尝试跟踪均方误差随迭代次数的演化。因此，我们定义

$$\boldsymbol{\Gamma}(t) \triangleq \mathbb{E}[(\boldsymbol{y}_l - \hat{\boldsymbol{p}}_l(t))(\boldsymbol{y}_l - \hat{\boldsymbol{p}}_l(t))^H]. \tag{44}$$

注意， $\mathbb{E}[\cdot]$ 也是所有 l的均值。显然， $\boldsymbol{\Gamma}(t)$表征了算法1的收敛性能。

假设 2：为便于分析，我们将方差估计简化如下（省略迭代 t）：

$$\begin{aligned} v_l^{\mathsf{p}} &\approx v^{\mathsf{p}} \triangleq \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L} v_l^{\mathsf{p}}, \\ v_n^{\mathsf{r}} &\approx v^{\mathsf{r}} \triangleq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} v_n^{\mathsf{r}}, \\ v_{ln}^{\mathsf{q}} &\approx v^{\mathsf{q}} \triangleq \frac{1}{LN}\sum_{l=1}^{L}\sum_{n=1}^{N} v_{ln}^{\mathsf{q}}. \end{aligned} \tag{45}$$

假设 2 在渐近区间内成立。

定理1：在渐近区间内，可以证明

$$\boldsymbol{\Gamma}(t) = \tau(t)\mathbf{I} = (v^{\mathsf{p}}(t) + \sigma^2)\mathbf{I}, \tag{46}$$

其中， $\tau(t)$称为“状态演化”（SE），并按照递推值 $v^{\mathsf{p}}(t)$更新。该算法在以下条件下收敛

$$L > c_1 K, \quad and \quad M > c_2 K, \tag{47}$$

其中， $\frac{1}{4} < c_1$、 $c_2 < 2$ 是受附录 D 中式 (74) 约束的常数。

证明：请参见附录 D。

根据定理 1，SE 按照 $v^{\mathsf{p}}(t)$ 更新，这取决于附录 D 中的 $v^{\mathsf{r}}(t)$ 和 $v^{\mathsf{q}}(t)$。 $v^{\mathsf{r}}(t)$ 和 $v^{\mathsf{q}}(t)$ 刻画了 X 和 A 的估计误差。为保证 SE 收敛， $v^{\mathsf{r}}(t)$ 和 $v^{\mathsf{q}}(t)$ 必须收敛。因此，BiGAMP算法的行为可由 SE 描述。同时，为确保 BiGAMP算法收敛，式 (47) 给出了活动设备数量 K、导频长度 L 与天线数 M 之间的关系。

B. 设备活动检测的错误概率 *tion*

现在，我们根据定义 1 中的检测器分析 DAD 的错误概率。经过第 t 次迭代后，设备 n 的错误概率定义为

$$\begin{aligned} P_{n,t}^{e}(M) =& P(\alpha_n = 0)P(\hat{\alpha}_{n,t} = 1|\alpha_n = 0) \\ &+ P(\alpha_n = 1)P(\hat{\alpha}_{n,t} = 0|\alpha_n = 1), \end{aligned} \tag{48}$$

已证明其是 $v_n^{\mathsf{r}}(t)$ 和基站天线数 M 的函数。

定理 2：对于设备 n，经过 t 次迭代后，DAD 的错误概率表示为

$$P_{n,t}^{e}(M) = (1-\varepsilon)\frac{\bar{\Gamma}(M, Mb_{n,t})}{\Gamma(M)} + \varepsilon\frac{\underline{\Gamma}(M, Mc_{n,t})}{\Gamma(M)}, \tag{49}$$

$\bar{}$其中 $\Gamma(\cdot)$ $\Gamma(\cdot)$ 和 $\underline{\Gamma}(\cdot)$ 分别为上不完全伽马函数、伽马函数和下不完全伽马函数。[4] 考虑路径损耗和阴影分量 β_n，有

$$b_{n,t} = \frac{\beta_n + v_n^{\mathsf{r}}(t)}{\beta_n}\log\frac{\beta_n + v_n^{\mathsf{r}}(t)}{v_n^{\mathsf{r}}(t)}, \tag{50a}$$

$$c_{n,t} = \frac{v_n^{\mathsf{r}}}{\beta_n}\log\frac{\beta_n + v_n^{\mathsf{r}}(t)}{v_n^{\mathsf{r}}(t)}. \tag{50b}$$

证明：请参见附录 E

由于 $u/(1+u) \le \log(1+u) \le u$对于 $u \in [0,\infty)$，我们有 $(\frac{v_n^{\mathsf{r}}}{\beta_n})\log\frac{\beta_n+v_n^{\mathsf{r}}}{v_n^{\mathsf{r}}} \le 1$以及 $(\frac{\beta_n+v_n^{\mathsf{r}}}{\beta_n})\log\frac{\beta_n+v_n^{\mathsf{r}}}{v_n^{\mathsf{r}}} \ge 1$，即 $b_{n,t} \ge 1$和 $c_{n,t} \le 1$。根据 [41] 以及 [13], 中的附录 E，对于 $b_{n,t} \ge 1$和 $c_{n,t} \le 1$，$\bar{\Gamma}(M,Mb_{n,t})/\Gamma(M) \to 0$以及 $\underline{\Gamma}(M,Mc_{n,t})/\Gamma(M) \to 0$如 $M \to \infty$。因此，存在 $P_{n,t}^{e} \to 0$如 $M \to \infty$，这意味着在渐近区间内，当 $M \to \infty$时，检测错误概率趋于零。

C. 信道估计均方误差

当设备 $k \in \mathcal{K}$ 被检测为活跃时，估计的信道 $\hat{}\boldsymbol{h}_{k,t}$ 定义于式 (43) 中。将实际信道 $\boldsymbol{h}_k$ 与估计的 $\hat{}\boldsymbol{h}_{k,t}$ 之间的差定义为 $\Delta\boldsymbol{h}_{k,t}$, $\hat{}\boldsymbol{h}_k - \boldsymbol{h}_{k,t}$。接下来给出以下定理。

定理 3：对于活动设备 $k \in \mathcal{K}$，信道估计的均方误差为

$$Cov(\Delta\boldsymbol{h}_{k,t}, \Delta\boldsymbol{h}_{k,t}) = v_{k,t}^{\Delta\mathsf{h}}(M)\mathbf{I}, \tag{51}$$

其中

$$\begin{aligned} v_{k,t}^{\Delta\mathsf{h}}(M) = \frac{1}{M}\mathbb{E}\Bigg[\phi_{k,t}^2\left(\frac{\beta_k\left(\boldsymbol{h}_k + \boldsymbol{w}_k^{\mathsf{r}}(t)\right)}{\beta_k + v_k^{\mathsf{r}}(t)} - \boldsymbol{h}_k\right)^H \\ \left(\frac{\beta_k\left(\boldsymbol{h}_k + \boldsymbol{w}_k^{\mathsf{r}}(t)\right)}{\beta_k + v_k^{\mathsf{r}}(t)} - \boldsymbol{h}_k\right)\Bigg], \end{aligned} \tag{52}$$

根据附录 C， $\boldsymbol{w}_k^{\mathsf{r}}(t)$由 $\mathcal{CN}(\mathbf{0}, v_k^{\mathsf{r}}(t)\mathbf{I})$生成。在渐近区间内，$v_k^{\Delta\mathsf{h}}{}_{,\,t}(M)$收敛到

$$\lim_{M\to\infty} v_{k,t}^{\Delta\mathsf{h}}(M) = \frac{\beta_k v_k^{\mathsf{r}}(t)}{\beta_k + v_k^{\mathsf{r}}(t)}. \tag{53}$$

证明：请参见附录 F。

定理 3 表明，信道估计的均方误差与 $v_k^{\mathsf{r}}(t)$有关。根据第 IV-A 节，BiGAMP算法要正常工作， $v_k^{\mathsf{r}}(t)$应当收敛，因此当 M 足够大时，$v_k^{\Delta\mathsf{h}}{}_{,\,t}$ 收敛到不动点。注意，式 (80) 中的残余噪声被视为在各天线之间不相关，因为假设每个活动设备在基站的多根接收天线上的信道彼此不相关。

D. 信号检测符号错误率

$\hat{}$ 对于任意活动设备 $k \in \mathcal{K}$，估计的 $\boldsymbol{d}_{k,\,t}$ 定义如式（43）所示。为简单起见，以下省略 t 。假设系统采用高斯码本 $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}^{J\times 1}$ 和$\mathcal{D} = |D|$，其中 J 为码字长度。共有 $L_d = N_s \times J$，其中 N_s 为码字数量。对于 $\boldsymbol{d}_k^{n_s} \in \mathcal{D}$，

[4]对于伽马函数 $\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-t}t^{a-1}dt$，将其分解为从 0 到 x 的积分和从 x 到 ∞的另一积分，即可得到不完全伽马函数：$\underline{\Gamma}(a) = \int_0^x e^{-t}t^{a-1}dt$ 和 $\bar{\Gamma}(a) = \int_x^\infty e^{-t}t^{a-1}dt$。

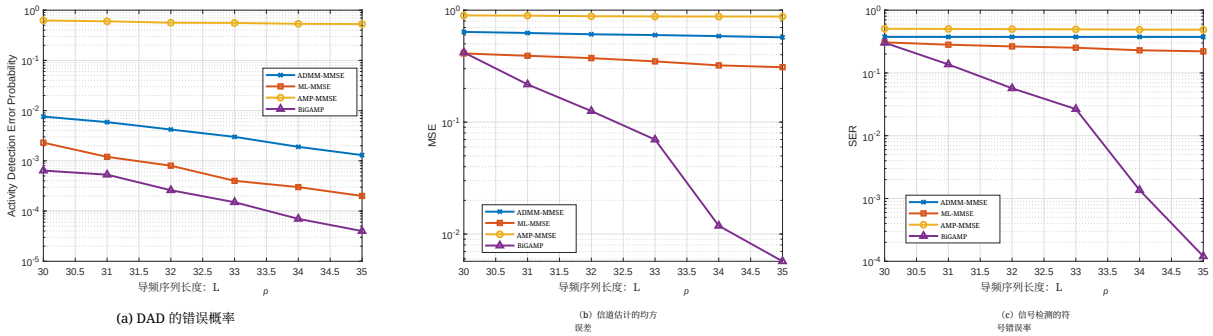


图3. $N = 1000$、 $\varepsilon = 0.05$、 $L_d = 100$。(a)、(b) 和 (c) 分别表示 DAD 的错误概率、信道估计的均方误差和信号检测的符号错误率随导频长度 L_p （$M = 64$）的变化。

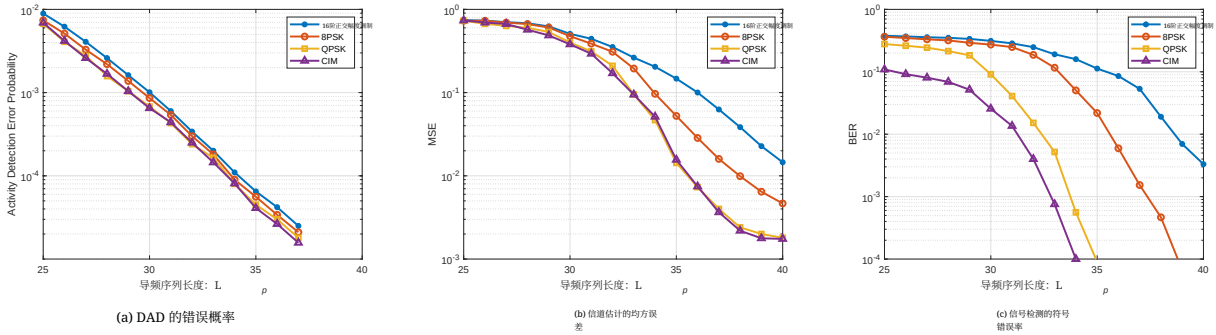


图 4. 存在 $N = 1000$, $\varepsilon = 0.05$, $L_d = 128$. (a)、(b) 和 (c) 分别为 DAD 的错误概率、信道估计的均方误差和信号检测的符号错误率，随导频 L_p 的长度变化 $M = 64$。

发送符号为 $\boldsymbol{d}_k = [(\boldsymbol{d}_k^1)^T, \ldots, (\boldsymbol{d}_k^{N_s})^T]^T$。对于给定的估计值 $\hat{\boldsymbol{d}}_k = [(\hat{\boldsymbol{d}}_k^1)^T, \ldots, (\hat{\boldsymbol{d}}_k^{N_s})^T]^T$，设备 k 的第 n_s个检测码字可表示为

$$\boldsymbol{d}_k^{'n_s} = \arg\min_{\boldsymbol{d}\in\mathcal{D}} \|\hat{\boldsymbol{d}}_k^{n_s} - \boldsymbol{d}\|_2. \tag{54}$$

当检测到的符号 $\boldsymbol{d}_k^{'n_s} \neq \boldsymbol{d}_k^{n_s}$时，信号检测结果错误。符号错误率定义为

$$\begin{aligned} P_d^e &= \mathbb{E}[\frac{1}{K'N_s}\sum_{k=1}^{K'}\sum_{n_s=1}^{N_s} 1\{\boldsymbol{d}_k^{'n_s} \neq \boldsymbol{d}_k^{n_s}\}] \\ &= \mathbb{P}(\boldsymbol{d}_k^{'n_s} \neq \boldsymbol{d}_k^{n_s}), \end{aligned} \tag{55}$$

其中， K' 是检测到的活跃设备数量。根据上述定义，给出定理4。

定理4：信号检测的符号错误率为

$$P_d^e \leq \exp\left(-\rho\ln(D-1) - J\rho\ln\left(1+\frac{1}{Lv^{\mathrm{a}}(t)(1+\rho)}\right)\right).$$

证明：请参见附录 G。

上述符号错误率是基于 Gallager 型上界得到的上界，$\rho \in (0, 1)$表示 Gallager 的 ρ技巧。 L 对符号错误率的影响主要是通过影响信号功率实现的。但信号功率也会影响仿真中的 $v^{\mathrm{a}}(t)$。根据式（37），我们有 $Lv^{\mathrm{a}}(t) = 1 - \frac{1}{1+Lv^{\mathrm{q}}(t-1)}$。因此，在 D和 J固定时， P_d^e会随着 $Lv^{\mathrm{q}}(t)$的增加而增大。

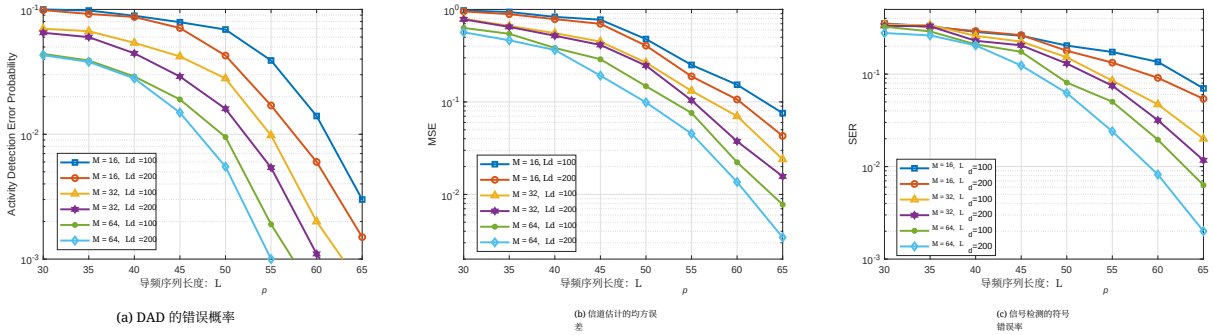
V. 数值结果

本节给出数值结果，以验证所提出算法的性能。在仿真中，信噪比（SNR）为 10 dB。此外，我们假设在该蜂窝网络中，设备均为静止或固定状态，因此路径-损耗和阴影衰落分量 $\beta_1 = \ldots = \beta_N = \beta = 1$。对于高斯码本，我们设置 $\rho = 1/2$、 $J = 5$ 和 $D = |\mathcal{D}| = 64$。此外，所有数值结果均通过对 1000 次仿真实现取平均得到。

A. DAD-CE-SD 的性能

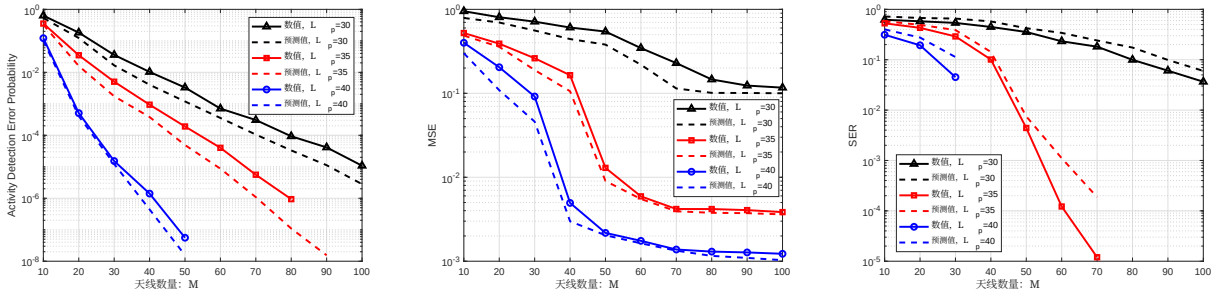
首先，我们选择三种在 DAD-CE-SD 中得到广泛研究且性能良好的方法作为基线。ML-MMSE 是一种基于优化的方法，使用坐标下降法对 [12] 执行最大似然估计，以检测设备活动。随后，它使用标准 MMSE 估计信道，并检测已判定为活跃的设备所发送的信号。ML 的复杂度为 $O(NL_p^2)$，此外还需加上 MMSE 的复杂度，即 $\max\{O(L_p^2K)\ O(L_pKM)\ O(L_p^3)\}$，再加上 $\max\{O(M^2K)\ O(L_dKM)\ O(M^3)\}$。ADMM 也是一种基于优化的方法，用于求解组 LASSO，并通过块坐标下降算法 [10], [19] 执行信道估计。随后使用 MMSE 估计信号。ADMM-MMSE 的复杂度为 $O(L_pNM)$，此外还需加上 $\max\{O(M^2K)\ O(L_dKM)\ O(M^3)\}$。AMP 是一种基于 MMSE 的近似消息传递算法，用于检测活动，并通过 MMSE 估计来估计信道和信号 [13], [21]。AMP-MMSE 的复杂度与 ADMM-MMSE 相同。

图 3(a) 展示了 DAD 的错误概率。导频长度有限时，所提出的算法优于 ADMM-MMSE、ML-MMSE 和 AMP-MMSE。图 3(b) 和图 3(c) 分别展示了 CE 的均方误差和 SD 的符号错误率。可以看出，所提出的算法表现优于其他算法。请注意，符号错误率和均方误差



(a) DAD 的错误概率　(b) 信道估计的均方误差　(c) 信号检测的符号错误率

图5。存在 $N = 1000$ 和 $\varepsilon = 0.05$。(a)　，(b)和(c)分别表示DAD的错误概率、信道估计的均方误差以及信号检测的符号错误率随导频长度 L_p 变化的情况，其中采用了不同的 t M 和 L_d。



(a) DAD 的错误概率　(b) 信道估计的均方误差　(c) 信号检测的符号错误率

图 6. 存在 $N = 1000$、$\varepsilon = 0.05$、$L_d =$ 100. (a)、(b) 和 (c) 分别为在 M 条件下，采用 $L_p = 30$、$L_p = 35$ 和 $L_p = 40$ 时的数值结果及预测值。

仅在正确检测到活动设备时测量，原因有二：a) 避免 CE 和 SD 的性能过度依赖 DAD 的表现；b) 消除被误判为活动设备的设备所造成的影响。在此仿真中，设置 L_p/N 小于ε。因此，所提出的算法在导频长度较短时具有优势，可显著节省导频开销。

考虑现有通信系统，图 4(a)、4(b) 和 4(c) 分别给出了信号调制方式为四相移键控[5]，8相移键控、16阶正交幅度调制和码索引调制（CIM）[6], 时的数值结果。由于 CIM 是一种直接序列扩频调制，且比特嵌入在扩频码中，因此图 4(c) 使用误比特率（BER）而非 SER 来表示信号检测（SD）的错误概率。结果表明，调制方式对 DAD 性能的影响很小。根据（39），估计的活动概率由跨天线的信道决定，因此只要 M 足够大，这种影响就足够小。均方误差和 BER 的性能差异源于码字的统计特性。在相同信噪比下，可以观察到，对于四相移键控、8相移键控和

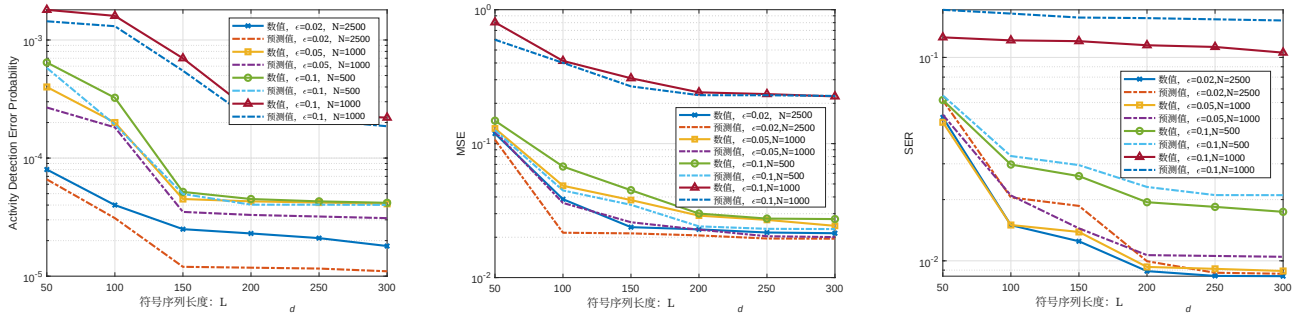
[5]关于在采用四相移键控调制的通信系统中应用所提算法的更多详情，请参见我们的工作 [42]。[6]CIM 基于直接序列扩频调制。本文中，CIM 指的是 [43], , 其中比特流被划分为长度为 2 比特的调制子块和长度为 6 比特的映射子块。每个调制子块中的 2 比特组合经四相移键控调制为一个星座符号。每个映射子块中的 6 比特组合被映射为扩频码，用于扩展四相移键控符号；每个扩频码均为 2^6 正交沃尔什码。由于 CIM 的调制子块采用四相移键控，因此 CIM 中符号的统计量与四相移键控中星座符号的统计量相同。

图 4(c) 中的 16阶正交相移键控，提高频谱效率会导致 BER 上升。从图 4(b) 可见，四相移键控的均方误差与 CIM 的均方误差接近，因为 CIM 中星座符号的统计特性与四相移键控相同。然而，从图 4(c) 可以看出，CIM 的 BER 小于四相移键控，因为 CIM 采用序列扩频技术，并将比特嵌入扩频码中。通过采用扩频码，编码增益得以提高，系统对错误的抵抗能力增强，BER 也进一步降低（根据[43]）。数值结果表明，所提出的算法也适用于现有通信系统中的离散码字。

图 5(a)、5(b) 和 5(c) 分别描述了 $\boldsymbol{h}_n$ 中各元素之间的信道存在相关性时 DAD 的错误概率、信道估计的均方误差以及信号检测的符号错误率。相关信道建模为 [44]。图 3(c) 显示，天线数越多、L_d 越长且 L_p 越长，错误就越小。但与 $\boldsymbol{h}_n$ 中各元素之间信道不相关的情况相比，相关信道需要更长的 L_p 才能获得可接受的结果。图 5(a) 显示，如果 $M = 64$，$L_d = 200$，$L_p \geq K = 50$可以使 DAD 小于 5×10^{-3}。但根据图 5(b) 和 5(c)，当 $M = 64$、$L_d = 200$时，需要 $L_p \geq 60$ 才能使均方误差和符号错误率小于 10^{-2}。因此，所提出的算法适用于具有相关信道的通信系统，但该系统需要承担更高的开销才能获得令人满意的结果。

B. 理论性能分析

在本节中，我们尝试利用数值结果验证第 IV 节中的预测性能。图 6(a) 展示了 DAD 的错误概率以及预测的错误



(a) DAD 的错误概率　(b) 信道估计的均方误差　(c) 信号检测的符号错误率

图7. (a)、(b)和(c)分别展示了 DAD 错误概率、CE 均方误差和 SD 符号错误率随符号长度 L_d 变化的数值结果和预测值，其中 $L_p/K = 0.66$ 和 $M = 64$。

概率（由定理 2 给出）随天线 M 变化且具有不同的L_p时的情况。可以观察到，错误概率随着 M增大而降低，且定理 2 的预测能够刻画数值仿真结果。此外，当 L_p 较大时，降低幅度更为显著。具体而言，当$L_p = 30$时， M 约为 100，才能使错误概率低于10^{-5}；当 $L_p = 35$时，需要 $M \approx 67$ ；当 $L_p = 40$时，只需 $M \approx 40$ 即可。图 6(b) 展示了 CE 的均方误差以及定理 3 中公式 (52) 给出的预测均方误差随天线 M 变化且具有不同 L_p 时的情况。可以观察到，利用所提算法通过数值计算得到的均方误差与定理 3 的预测值接近。尽管均方误差会随着M 和 L_p 增大而降低，但当 $M \geq 90$、$M \geq 80$和 $M \geq 70$ 分别对应于 $L_p = 30$、 $L_p = 35$和 $L_p = 40$时，降低幅度较小。这是因为当 v^{r} 收敛时，均方误差会收敛到定理 3 中公式 (53) 给出的点。图 6(c) 展示了 SD 的 SER 及定理 4 给出的预测值随 M变化且具有不同 L_p时的情况。对于不同的 L_p，数值结果与预测值相符。此外，可以观察到，SER 随着 M 增大而降低，并且 L_p 越大，SER 下降越快。请注意，我们忽略了低于 10^{-15}的一些预测值。

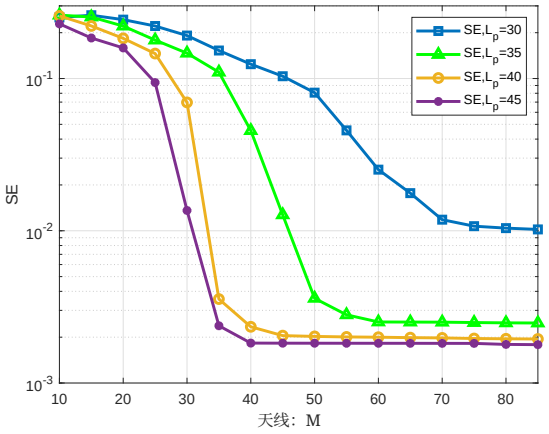


图8。存在 $N = 1000$、 $\varepsilon = 0.05$、 $L_d = 100$。该图展示了定理1给出的状态演化与 M 的关系，其中 $L_p = 30$、 $L_p = 35$、 $L_p = 40$和 $L_p = 45$分别对应。

图7(a)、7(b)和7(c)展示了 DAD 错误概率、CE 均方误差和 SD 符号错误率随符号长度 L_d变化的数值结果和预测值。结果表明， L_d 越长，错误概率、均方误差和符号错误率越低。但当$L_d > 100$时，性能提升很小。此外，根据定理1，所提出的算法主要取决于 K、 L和 M之间的关系。可以观察到，尽管 ε 降低时算法性能会有所提升，但如果 $N \times \varepsilon = K$ 相同，算法的性能提升非常有限，尤其是对于 CE 均方误差和 SD 符号错误率。

C. 状态演化

图8分别展示了在 M with$L_p = 30$、 $L_p = 35$、 $L_p = 40$ 和 $L_p = 45$ 条件下定理1中的状态演化。结果表明，随着 M 增大，状态演化会降低，这意味着 BiGAMP 倾向于获得更精确的 AX 估计。同时，结果还表明，当 L_p 变大时，状态演化会迅速降低。当 $M = 40$、 τ 时，对于 $L_p = 45$，状态演化趋于收敛。然而，对于 $L_p = 40$ ，当 $M = 45$ 和 $M = 60$ 时，状态演化达到收敛，且 $L_p = 35$，分别。对于 $L_p = 30$，状态演化收敛至 M =80。

VI. 结论

对于大规模无线连接应用，联合设备活跃检测、信道估计与信号检测是一个关键问题。本文提出了一种BiGAMP算法来解决联合设备活跃检测、信道估计与信号检测问题，该算法能够充分利用信道和信号的统计量，有助于更准确地估计信道和检测信号。采用状态演化来描述所提算法的收敛性能并获得其收敛条件。同时，我们分析了设备活跃检测、信道估计与信号检测的理论性能，该性能可用于从理论上预测设备活跃检测、信道估计与信号检测的性能。最后，数值结果表明，所提算法在使用较少导频的情况下，仍能较好地解决设备活跃检测、信道估计与信号检测问题，这对于支持大规模物联网场景至关重要。

附录 A

$\Delta^{\mathbf{x}}_{l\to n}(\boldsymbol{x}_n, t)$ 的推导

由于 $\mathbf{z}_l = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{a}_{lk}\mathbf{x}_k \in \mathbb{C}^{M\times 1}$，在给定 $\mathbf{x}_l = \boldsymbol{x}_l$ 的条件下，$\mathbf{z}_l$ 的均值和协方差矩阵分别为 $\mathbb{E}[\mathbf{z}_l|\mathbf{x}_n = \boldsymbol{x}_n] = \hat{a}_{l,ln}(t)\boldsymbol{x}_n + \hat{\boldsymbol{p}}_{l,n}(t)$ 和 $\mathrm{var}[\mathbf{z}_l|\mathbf{x}_n = \boldsymbol{x}_n] = v^{\mathrm{a}}_{l,ln}(t)\boldsymbol{x}_n\boldsymbol{x}_n^H + \boldsymbol{v}^{\mathrm{p}}_{l,n}(t)$，其中 $\hat{\boldsymbol{p}}_{l,n}(t) = \sum_{k=1, k\neq n}^{N} \hat{a}_{l,lk}(t)\hat{\boldsymbol{x}}_{l,k}(t)$，并且

$$
\begin{aligned}
I^{\mathsf{x}}_{l\to n}(\boldsymbol{x}_n,t) =& const\cdot\int_{\boldsymbol{a}_l,\{\boldsymbol{x}_r\}_{r\neq n}} p_{\mathbf{y}_l|\mathbf{z}_l}(\boldsymbol{y}_l|\boldsymbol{z}_l)\prod_{r=1,r\neq n}^{N} I^{\mathsf{x}}_{l\leftarrow r}(\boldsymbol{x}_r,t)\prod_{k=1}^{N} I^{\mathsf{a}}_{l\leftarrow lk}(a_{lk},t)\\
\approx& const\cdot\int_{\boldsymbol{z}_l} p_{\mathbf{y}_l|\mathbf{z}_l}(\boldsymbol{y}_l|\boldsymbol{z}_l)\mathcal{CN}\left(\boldsymbol{z}_l;\mathbb{E}[\mathbf{z}_l|\mathbf{x}_n=\boldsymbol{x}_n],\mathsf{var}[\mathbf{z}_l|\mathbf{x}_n=\boldsymbol{x}_n]\right)\\
=& \exp\left(H_l\left(\hat{a}_{l,ln}(t)\boldsymbol{x}_n+\hat{\boldsymbol{p}}_{l,n}(t),v^{\mathsf{a}}_{l,ln}(t)\boldsymbol{x}_n\boldsymbol{x}_n^H+\boldsymbol{v}^{\mathsf{p}}_{l,n}(t);\boldsymbol{y}_l\right)+const\right). \qquad (56)\\
\approx& const\cdot\exp(H_l)\cdot\exp(2\mathsf{Re}[(\boldsymbol{x}_n-\hat{\boldsymbol{x}}_n(t))^H(\hat{a}^*_{l,ln}(t)\nabla_{\boldsymbol{u}^*}H_l+v^{\mathsf{a}}_{l,ln}(t)\nabla_{\boldsymbol{\Sigma}}H_l\hat{\boldsymbol{x}}_n(t)+O(1/N^{3/2}))]\\
&+\mathsf{Re}[(\boldsymbol{x}_n-\hat{\boldsymbol{x}}_n(t))^H(\nabla_{\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{u}}H_l|\hat{a}_{l,ln}(t)|^2+v^{\mathsf{a}}_{l,ln}(t)\nabla_{\boldsymbol{\Sigma}}H_l+O(1/N^{3/2}))(\boldsymbol{x}_n-\hat{\boldsymbol{x}}_n(t))]), \qquad (57)\\
\approx& const\cdot\exp(2\mathsf{Re}[(\boldsymbol{x}_n-\hat{\boldsymbol{x}}_n(t))^H(\hat{a}^*_{l,ln}(t)\nabla_{\boldsymbol{u}^*}H_l+v^{\mathsf{a}}_{ln}(t)\nabla_{\boldsymbol{\Sigma}}H_l\hat{\boldsymbol{x}}_n(t))]\\
&+\mathsf{Re}[(\boldsymbol{x}_n-\hat{\boldsymbol{x}}_n(t))^H(\nabla_{\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{u}}H_l|\hat{a}_{ln}(t)|^2+v^{\mathsf{a}}_{ln}(t)\nabla_{\boldsymbol{\Sigma}}H_l)(\boldsymbol{x}_n-\hat{\boldsymbol{x}}_n(t))]). \qquad (58)
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{v}^{\mathsf{p}}_{l\,n}\ t\ =\sum_{k=1\ k\neq n}^{N}|a_{l\,lk}\ t\ |^2\boldsymbol{v}^{\mathsf{x}}_{l\,k}\ t\ +v^{\mathsf{a}}_{l\,lk}\ t\ \boldsymbol{x}_{l\,k}\ t\ \boldsymbol{x}^H_{l\,k}\ t\ +,\ (\ )\ ,\ v^{\mathsf{a}}_{l\,lk}\ t\ \boldsymbol{v}^{\mathsf{x}}_{l\,k}\ t$

ˆ, ( ), ( ), ( )ˆ, ( ) ˆ, ( ), ( ), ( )。根据中心极限定理，给定 x $_n$ = $\boldsymbol{x}_n$ 时，随机变量 z$_l$ 的分布可用具有条件均值和协方差矩阵的复高斯分布来表征。因此，消息$I^{\mathsf{x}}_{l\to n}(\boldsymbol{x}_n,t)$近似为式 (56)，其中 $H_l(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\Sigma};\boldsymbol{y}_l)$ ≜log $\int_{\mathbf{z}_l} p_{\mathbf{y}_l|\mathbf{z}_l}(\boldsymbol{y}_l|\boldsymbol{z}_l)\mathcal{CN}(\boldsymbol{z}_l;\boldsymbol{u},\boldsymbol{\Sigma})$。将式 (14) 代入式 (56) 中的 H_l 项，可得

$$
\begin{aligned}
&H_l(\hat{a}_{l,ln}(t)\boldsymbol{x}_n+\hat{\boldsymbol{p}}_{l,n}(t),v^{\mathsf{a}}_{l,ln}(t)\boldsymbol{x}_n\boldsymbol{x}_n^H+\boldsymbol{v}^{\mathsf{p}}_{l,n}(t);\boldsymbol{y}_l)\\
&=H_l\left(\hat{a}_{l,ln}(t)(\boldsymbol{x}_n-\hat{\boldsymbol{x}}_n(t))+\hat{\boldsymbol{p}}_l(t)+O\left(1/N\right),\right. \qquad (59)\\
&\left.v^{\mathsf{a}}_{l,ln}(t)(\boldsymbol{x}_n\boldsymbol{x}_n^H-\hat{\boldsymbol{x}}_n(t)\hat{\boldsymbol{x}}_n^H(t))+\boldsymbol{v}^{\mathsf{p}}_l(t)+O\left(1/N\right);\boldsymbol{y}_l\right)
\end{aligned}
$$

在点 ˆ$\boldsymbol{x}_n$(t) 处，对 $\boldsymbol{x}_n$ 进行泰勒级数展开，则 (56) 可写为 (57)，其中 H_l 是 H_l(ˆ$\boldsymbol{p}_l$(t) $\boldsymbol{v}^{\mathsf{p}}_l$(t); $\boldsymbol{y}_l$) 的简化表示，而 $\nabla_{\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{u}}H_l$, $\nabla_{\boldsymbol{u}^*}(\nabla_{\boldsymbol{u}}H_l)$。$\nabla_{\boldsymbol{u}^*}H_l$ 和 $\nabla_{\boldsymbol{\Sigma}}H_l$ 分别是 H_l 关于第一个参数的共轭 $\boldsymbol{u}^*$ （在复数条件下）以及第二个参数 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的导数。由于 $N\to\infty$， H_l 中的高阶项 O($1/N^{3/2}$) 和 $O(1/N)$ 消失。将 $|\hat{a}_{l,ln}(t)|^2$ 替换为 $|\hat{a}_{ln}(t)|^2$，并将 $v^{\mathsf{a}}_{l,ln}(t)$ 替换为 $v^{\mathsf{a}}_{ln}(t)$，因为它们的误差为 $O(1/N^{3/2})$，于是 $I^{\mathsf{x}}_{l\to n}(\boldsymbol{x}_n,t)$ 可近似为 (58)。 [25] 中的附录 A 证明了

$$
\hat{\boldsymbol{s}}_l(t)=\nabla_{\boldsymbol{u}^*}H_l(\hat{\boldsymbol{p}}_l(t),\boldsymbol{v}^{\mathsf{p}}_l(t);\boldsymbol{y}_l)=\boldsymbol{v}^{\mathsf{p}}_l(t)^{-1}(\hat{\boldsymbol{z}}_l(t)-\hat{\boldsymbol{p}}_l(t)), \qquad (60)
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v}^{\mathsf{s}}_l(t)&=-\nabla_{\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{u}}H_l(\hat{\boldsymbol{p}}_l(t),\boldsymbol{v}^{\mathsf{p}}_l(t);\boldsymbol{y}_l)\\
&=\boldsymbol{v}^{\mathsf{p}}_l(t)^{-1}(\mathbf{I}-\boldsymbol{v}^{\mathsf{z}}_l(t)\boldsymbol{v}^{\mathsf{p}}_l(t)^{-1}).
\end{aligned} \qquad (61)
$$

同时， $\nabla_{\boldsymbol{u}^*}H_l$、$\nabla_{\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{u}}H_l$和 $\nabla_{\boldsymbol{\Sigma}}H_l$ 满足如下关系

$$
\nabla_{\boldsymbol{\Sigma}}H_l=\nabla_{\boldsymbol{u}^*}H_l(\nabla_{\boldsymbol{u}}H_l)^T+\nabla_{\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{u}}H_l. \qquad (62)
$$

将式 (60)–(62) 代入式 (58)，则

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{I}^{\mathsf{x}}_{l\to n}(\boldsymbol{x}_n,t)\approx const\\
&\cdot\exp(\mathsf{Re}[2(\hat{a}^*_{l,ln}(t)\hat{\boldsymbol{s}}_l(t)+\hat{\boldsymbol{x}}_n(t)\boldsymbol{v}^{\mathsf{s}}_l(t)|\hat{a}_{ln}(t)|^2)\boldsymbol{x}_n^H \qquad (63)\\
&+\boldsymbol{x}_n^H(v^{\mathsf{a}}_{ln}(t)(\hat{\boldsymbol{s}}_l(t)\hat{\boldsymbol{s}}_l^H(t)-\boldsymbol{v}^{\mathsf{s}}_l(t))-|\hat{a}_{ln}(t)|^2\boldsymbol{v}^{\mathsf{s}}_l(t))\boldsymbol{x}_n]).
\end{aligned}
$$

附录B 式 (30) 的证明

将 (25) 和 (27) 代入 (14a)。由于 $M\to\infty$，Re [ˆ$\boldsymbol{x}_k$ $(t-1)^H$ˆ$\boldsymbol{s}_l(t-1)v^{\mathsf{a}}_{lk}(t)/M]$ ˆ$\boldsymbol{x}_k(t)\to 0$，这会丢失用于校正 ˆ$a_{l,lk}$(t) 的信息。因此，

我们用 Re [ˆ$\boldsymbol{x}^*_k(t)\odot$ˆ$\boldsymbol{s}_l(t-1)v^{\mathsf{a}}_{lk}(t)]\odot$ˆ$\boldsymbol{x}_k(t)$ 代替 Re [ˆ$\boldsymbol{x}_k$ $(t-1)^H$ˆ$\boldsymbol{s}_l(t-1)\ v^{\mathsf{q}}_{lk}(t)/M]$ˆ$\boldsymbol{x}_k(t)$，得到 (64)。然后，将 $\hat{a}^*_{lk}(t-1)$ 替换为 $\hat{a}^*_{lk}(t)$，并忽略 $O(1/\sqrt{N})$ 项，ˆ$\boldsymbol{p}_l(t)$ 可近似为 (65)。(a) 表示当实部和虚部同分布时在概率意义下相等。类似地，将 (25)、(27)、 $\boldsymbol{v}^{\mathsf{x}}_n(t)=\boldsymbol{v}^{\mathsf{a}}_l$、$_n(t)$ $+O(1/\sqrt{N})$ 和 $v^{\mathsf{a}}_{ln}(t)=v^{\mathsf{a}}_l$、$_{ln}(t)+O\left(1/N^{2/3}\right)$ 代入 (14b)，仅保留 O(1) 项，则 $\boldsymbol{v}^{\mathsf{p}}_n(t)$ 可近似为 (66)。

附录 C 命题 1 的证明

为简化记号，我们省略迭代 t。定义随机向量 r$_n$ 、x $_n$ +w$^{\mathsf{r}}$，其中 w$^{\mathsf{r}}$ 是服从 $\mathcal{CN}(0,v^{\mathsf{r}}_n\mathbf{I})$ 的随机向量。因此，若设备 n 处于激活状态，则 r$_n$ $\sim\mathcal{CN}(0,(\beta_n+v^{\mathsf{r}}_n)\,\mathbf{I})$；否则，r$_n$ $\sim\mathcal{CN}(0,v^{\mathsf{r}}_n\mathbf{I})$。根据式 (4)、(26) 和假设1，我们有

$$
\hat{\boldsymbol{x}}_n=\mathbb{E}[\mathbf{x}_n|\mathbf{r}_n=\hat{\boldsymbol{r}}_n]=\frac{\varepsilon}{C_{\boldsymbol{x}}}\int_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x}p_{\mathbf{h}_n}(\boldsymbol{x})\mathcal{CN}(\boldsymbol{x};\hat{\boldsymbol{r}}_n(t),v^{\mathsf{r}}_n(t)\mathbf{I}),
$$

其中， $C_{\boldsymbol{x}}$ 可解释为 p(r$_n$ = ˆ$\boldsymbol{r}_n$)。令

$$
\begin{aligned}
p_{\mathbf{h}_n}(\boldsymbol{x})\mathcal{CN}(\boldsymbol{x};\hat{\boldsymbol{r}}_n,v^{\mathsf{r}}_n\mathbf{I})&=\frac{\exp\left(-(\beta_n+v^{\mathsf{r}}_n)^{-1}\hat{\boldsymbol{r}}_n^H\hat{\boldsymbol{r}}_n\right)}{|\pi(v^{\mathsf{r}}_n+\beta_n)|^M} \qquad (67)\\
&\cdot\mathcal{CN}(\boldsymbol{x};\beta_n(\beta_n+v^{\mathsf{r}}_n)^{-1}\hat{\boldsymbol{r}}_n,\beta_nv^{\mathsf{r}}_n(t)\left(\beta_n+v^{\mathsf{r}}_n(t)\right)^{-1}\mathbf{I}),
\end{aligned}
$$

我们有

$$
\hat{\boldsymbol{x}}_n=\phi(\hat{\boldsymbol{r}}_n)\beta_n(\beta_n+v^{\mathsf{r}}_n)^{-1}\hat{\boldsymbol{r}}_n, \qquad (68)
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\phi(\hat{\boldsymbol{r}}_n)&=\frac{p(\mathbf{r}_n=\hat{\boldsymbol{r}}_n,\alpha_n=1)}{p(\mathbf{r}_n=\hat{\boldsymbol{r}}_n)}\\
&=\frac{\varepsilon}{C_{\boldsymbol{x}}}\frac{\exp(-(\beta_n+v^{\mathsf{r}}_n)^{-1}\hat{\boldsymbol{r}}_n^H\hat{\boldsymbol{r}}_n)}{|\pi(v^{\mathsf{r}}_n+\beta_n)|^M}.
\end{aligned} \qquad (69)
$$

ϕ(ˆ$\boldsymbol{r}_n$) 是设备 n 的激活概率估计值。通过对 ˆ$\boldsymbol{x}_n$ 中的 ˆ$\boldsymbol{r}_n$ 求导，可以得到 v^{x}_n。

$$\hat{\boldsymbol{p}}_l(t)=\sum_{k=1}^{N}\hat{a}_{lk}(t)\hat{\boldsymbol{x}}_k(t)-2\mathsf{Re}\left[\frac{1}{M}\hat{\boldsymbol{x}}_k^H(t-1)\hat{\boldsymbol{s}}_l(t-1)v_{lk}^{\mathsf{a}}(t)\right]\hat{\boldsymbol{x}}_k(t)-2\mathsf{Re}\left[\left(\hat{a}_{lk}^*(t-1)\hat{\boldsymbol{s}}_l(t-1)\right)^H\boldsymbol{v}_k^{\mathsf{x}}(t)\right]^H\hat{a}_{lk}(t)+O(\frac{1}{\sqrt{N}})$$

$$\approx\sum_{k=1}^{N}\hat{a}_{lk}(t)\hat{\boldsymbol{x}}_k(t)-2\mathsf{Re}\left[\hat{\boldsymbol{x}}_k^*(t)\odot\hat{\boldsymbol{s}}_l(t-1)v_{lk}^{\mathsf{a}}(t)\right]\odot\hat{\boldsymbol{x}}_k(t)-2\mathsf{Re}\left[\left(\hat{a}_{lk}^*(t)\hat{\boldsymbol{s}}_l(t-1)\right)^H\boldsymbol{v}_k^{\mathsf{x}}(t)\right]^H\hat{a}_{lk}(t) \tag{64}$$

$$\overset{(a)}{\approx}\sum_{k=1}^{N}\hat{a}_{lk}(t)\hat{\boldsymbol{x}}_k(t)-\left(\sum_{k=1}^{N}|\hat{a}_{lk}(t)|^2\boldsymbol{v}_k^{\mathsf{x}}(t)+v_{lk}^{\mathsf{a}}(t)\hat{\boldsymbol{x}}_k(t)\hat{\boldsymbol{x}}_k^H(t)\right)\hat{\boldsymbol{s}}_l(t-1). \tag{65}$$

$$\boldsymbol{v}_n^{\mathsf{p}}(t)\approx\sum_{k=1}^{N}|\hat{a}_{lk}(t)|^2\boldsymbol{v}_k^{\mathsf{x}}(t)+v_{lk}^{\mathsf{a}}(t)\hat{\boldsymbol{x}}_k(t)\hat{\boldsymbol{x}}_k^H(t)+v_{lk}^{\mathsf{a}}(t)\boldsymbol{v}_k^{\mathsf{x}}(t)+O\left(1/\sqrt{N}\right)\approx\bar{\boldsymbol{v}}_l^{\mathsf{p}}+\sum_{k=1}^{N}v_{lk}^{\mathsf{a}}(t)\boldsymbol{v}_k^{\mathsf{x}}(t). \tag{66}$$

$$v^{\mathsf{p}}(t+1)\approx\frac{K}{L}\frac{\bar{\beta}v^{\mathsf{r}}(t)}{\bar{\beta}+v^{\mathsf{r}}(t)}+K\frac{v^{\mathsf{q}}(t)}{1+Lv^{\mathsf{q}}(t)}+K\frac{\bar{\beta}v^{\mathsf{r}}(t)}{\bar{\beta}+v^{\mathsf{r}}(t)}\frac{v^{\mathsf{q}}(t)}{1+Lv^{\mathsf{q}}(t)}, \tag{71}$$

附录 D 定理1的证明

式（44）可写为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Gamma}(t)&=\mathbb{E}[(\boldsymbol{y}_l-\hat{\boldsymbol{p}}_l(t))(\boldsymbol{y}_l-\hat{\boldsymbol{p}}_l(t))^H]\\&=\mathbb{E}[(\boldsymbol{z}_l-\hat{\boldsymbol{p}}_l(t)+\boldsymbol{w}_l)(\boldsymbol{z}_l-\hat{\boldsymbol{p}}_l(t)+\boldsymbol{w}_l)^H]\\&=\mathbb{E}_{\mathbf{p}}\mathbb{E}_{\mathbf{z}|\mathbf{p}=\hat{\boldsymbol{p}}}[(\boldsymbol{z}_l-\hat{\boldsymbol{p}}_l(t))(\boldsymbol{z}_l-\hat{\boldsymbol{p}}_l(t))^H]+\sigma^2\mathbf{I}\\&=\mathbb{E}_{\mathbf{p}}[\boldsymbol{v}_l^{\mathsf{p}}(t)]+\sigma^2\mathbf{I}\overset{(b)}{=}(v^{\mathsf{p}}(t)+\sigma^2)\mathbf{I},\end{aligned} \tag{70}$$

其中，期望 $\mathbb{E}_{\mathbf{z}|\mathbf{p}=\hat{\boldsymbol{p}}}[\cdot]$ 是根据式（15）对 $\mathsf{z}_l|\mathsf{p}_l\sim\mathcal{CN}(\hat{\boldsymbol{p}}_l,\boldsymbol{v}_l^{\mathsf{p}})$ 求取的。由于 Onsager校正，可以近似认为 $\boldsymbol{w}_l$ 和 $\boldsymbol{z}_l-\hat{\boldsymbol{p}}_l(t)$ 相互独立 [16]，[27]。(b) 根据假设 2 得出。定义 $\tau(t)\ v^{\mathsf{p}}(t)+\sigma^2$，则 $\tau(t)$ 与 [29] 中的状态演化一致。

为保证算法收敛，必须满足$\tau(t+1)<\tau(t)$，即 $v^{\mathsf{p}}(t+1)<v^{\mathsf{p}}(t)$。在渐近区间内，

$$v^{\mathsf{p}}\ t+1\qquad\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\beta_n\qquad71\qquad v^{\mathsf{r}}\ t\qquad\beta=()\qquad v^{\mathsf{p}}\ t+1\qquad71\qquad v^{\mathsf{q}}\ t\qquad()$$

可以近似为 ()，其中 。根据式（ ），随着 () 和 () 增大，() 也随之增大，因此要求 $v^{\mathsf{r}}(t+1)<v^{\mathsf{r}}(t)$ 且 $v^{\mathsf{q}}(t+1)<v^{\mathsf{q}}(t)$。在渐近区间内，根据式（33）、（35）和假设 2，$v^{\mathsf{r}}(t+1)$ 和 $v^{\mathsf{q}}(t+1)$ 是 $v^{\mathsf{r}}(t)$ 和 $v^{\mathsf{q}}(t)$ 的函数，如下所示

$$\begin{aligned}v^{\mathsf{r}}(t+1)&\approx\sigma^2+v^{\mathsf{p}}(t+1)\triangleq\Phi_{\mathsf{r}}(v^{\mathsf{r}}(t),v^{\mathsf{q}}(t)),\\v^{\mathsf{q}}(t+1)&\approx\frac{1}{M}\Phi_{\mathsf{r}}(v^{\mathsf{r}}(t),v^{\mathsf{q}}(t))\triangleq\Phi_{\mathsf{q}}(v^{\mathsf{r}}(t),v^{\mathsf{q}}(t)).\end{aligned} \tag{72}$$

为确保当 t 增大时，$v^{\mathsf{r}}(t)$和 $v^{\mathsf{q}}(t)$减小，存在

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi_{\mathsf{r}}(v^{\mathsf{r}}(t),v^{\mathsf{q}}(t))}{\partial v^{\mathsf{r}}(t)}&=\frac{K}{L}c_1<1,\\\frac{\partial\Phi_{\mathsf{q}}(v^{\mathsf{r}}(t),v^{\mathsf{q}}(t))}{\partial v^{\mathsf{q}}(t)}&=\frac{K}{M}c_2<1,\end{aligned}$$

其中，常数 c_1 和 c_2 为

$$c_1=\frac{\bar{\beta}^2}{(\bar{\beta}+v^{\mathsf{r}}(t))^2}+\frac{\bar{\beta}^2}{(\bar{\beta}+v^{\mathsf{r}}(t))^2}\frac{Lv^{\mathsf{q}}(t)}{1+Lv^{\mathsf{q}}(t)}, \tag{74a}$$

$$c_2=\frac{1}{(1+Lv^{\mathsf{q}}(t))^2}+\frac{\bar{\beta}v^{\mathsf{r}}(t)}{\bar{\beta}+v^{\mathsf{r}}(t)}\frac{1}{(1+Lv^{\mathsf{q}}(t))^2}. \tag{74b}$$

不失一般性，我们假设 $v^{\mathsf{r}}(t)\beta\le1$且$v^{\mathsf{q}}(t)\ll1$，则存在 $\frac{1}{4}=\frac{\bar{\beta}^2}{2\bar{\beta}^2}()^2<c_1<\frac{2\bar{\beta}^2}{(\bar{\beta}+v^{\mathsf{r}}(t))^2}<2$ 且 $\frac{1}{4}<\frac{1}{1+Lv^{\mathsf{q}}((t))^2}<c_2<\frac{2}{(1+Lv^{\mathsf{q}}(t))_2}<2$。因此，该算法收敛为

$$L>c_1K,\qquad M>c_2K. \tag{75}$$

附录 E 定理 2 的证明

为简化起见，省略迭代 t 。根据定义 1，$\hat{}\alpha_n=0$ 的概率可表示为

$$P(\hat{\alpha}_n=0)=P(\phi(\boldsymbol{r}_n)\le\varepsilon)=P(\boldsymbol{r}_n^H\boldsymbol{r}_n\le\theta), \tag{76}$$

其中，$\theta=M\log\frac{\beta_n+v_n^{\mathsf{r}}}{v_n^{\mathsf{r}}}/\frac{\beta_n}{v_n^{\mathsf{r}}(\beta_n+v_n^{\mathsf{r}})}$。根据附录 C 中 r_n 的定义，我们有在给定 $\alpha_n=1$的条件下 $\mathrm{r}_n\sim\mathcal{CN}(0,(v_n^{\mathsf{r}}+v_n^{\mathsf{x}})\mathrm{I})$，以及在给定 $\alpha_n=0$的条件下 $\mathrm{r}_n\sim\mathcal{CN}(0,v_n^{\mathsf{r}}\mathrm{I})$。由于 r_n 的实部和虚部独立同分布，随机变量 $\mathrm{r}_n^H\mathrm{r}_n/((v_n^{\mathsf{r}}+v_n^{\mathsf{x}})/2)$ 和 $\mathrm{r}_n^H\mathrm{r}_n/(v_n^{\mathsf{r}}/2)$ 服从具有 $2M$ 个自由度的 χ^2 分布。定义随机变量$G_1=2\mathrm{r}_n^H\mathrm{r}_n/(v_n^{\mathsf{r}}+\beta_n)\sim\chi^2(2M)$ 和 $G_0=2\mathrm{r}_n^H\mathrm{r}_n/v_n^{\mathsf{r}}\sim\chi^2(2M)$，则有

$$\begin{aligned}P(\hat{\alpha}_n=0|\alpha_n=1)&=P(\boldsymbol{r}_n^H\boldsymbol{r}_n\le\theta|\alpha_n=1)\\&=P(G_1\le\frac{2\theta}{v_n^{\mathsf{r}}+\beta_n})=\frac{\underline{\Gamma}(M,Mc_{n,t})}{\Gamma(M)},\end{aligned} \tag{77a}$$

$$\begin{aligned}P(\hat{\alpha}_n=1|\alpha_n=0)&=P(\boldsymbol{r}_n^H\boldsymbol{r}_n>\theta|\alpha_n=0)\\&=P(G_0>\frac{2\theta}{v_n^{\mathsf{r}}+\beta_n})=\frac{\bar{\Gamma}(M,Mb_{n,t})}{\Gamma(M)}.\end{aligned} \tag{77b}$$

因此，活动检测的错误概率为

$$P_{n,t}^e(M)=(1-\varepsilon)\frac{\bar{\Gamma}(M,Mb_{n,t})}{\Gamma(M)}+\varepsilon\frac{\underline{\Gamma}(M,Mc_{n,t})}{\Gamma(M)}. \tag{78}$$

附录 F 定理 3 的证明

$\hat{}$ 将 (38) 代入 (43)，$\boldsymbol{h}_{k,t}$ 可表示为

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{h}}_{k,t}&=\phi(\hat{\boldsymbol{r}}_k(t))\frac{\beta_k}{\beta_k+v_k^{\mathsf{r}}(t)}\hat{\boldsymbol{r}}_k(t)\\&\overset{(c)}{=}\phi_{k,t}\frac{\beta_k}{\beta_k+v_k^{\mathsf{r}}(t)}(\boldsymbol{h}_k+\boldsymbol{w}_k^{\mathsf{r}}(t)),\end{aligned} \tag{79}$$

$$Cov(\Delta \boldsymbol{d}_k^{n_s}, \Delta \boldsymbol{d}_k^{n_s}) = v^{\Delta \mathsf{d}}\mathbf{I} = \frac{1}{J}\mathbb{E}[(\frac{\boldsymbol{d}_k^{n_s}+\boldsymbol{w}^{\mathsf{q}}}{1+Lv^{\mathsf{q}}} - \boldsymbol{d}_k^{n_s})^H(\frac{\boldsymbol{d}_k^{n_s}+\boldsymbol{w}^{\mathsf{q}}}{1+Lv^{\mathsf{q}}} - \boldsymbol{d}_k^{n_s})] = \frac{v^{\mathsf{q}}}{1+Lv^{\mathsf{q}}}\mathbf{I} = v^{\mathsf{a}}\mathbf{I}. \tag{81}$$

其中，(c) 根据 $\hat{}\boldsymbol{r}_k(t) = \boldsymbol{h}_k + \boldsymbol{w}_k^{\mathsf{r}}(t)$ 得出，且 $\boldsymbol{w}_k^{\mathsf{r}}(t)$ 由 $\mathcal{CN}(0, v_k^{\mathsf{r}}(t)\mathbf{I})$ 生成，具体说明见附录 C。为方便起见，记 $\phi_{k,t} = \phi(\boldsymbol{h}_k + \boldsymbol{w}_k^{\mathsf{r}}(t))$。则误差为

$$\Delta \boldsymbol{h}_{k,t} = \phi_{k,t}\frac{\beta_k}{\beta_k + v_k^{\mathsf{r}}(t)}(\boldsymbol{h}_k + \boldsymbol{w}_k^{\mathsf{r}}(t)) - \boldsymbol{h}_k. \tag{80}$$

$\hat{}$式 (79) 和 (80) 表明 $\boldsymbol{h}_k(t)$ 和 $\Delta\boldsymbol{h}_k(t)$ 是随机向量。在渐近区间内，根据 (39)，对于任意设备 n，$\lim_{M\to\infty}\phi(\hat{}\boldsymbol{r}_n(t))$ 要么为 0，要么为 1。由于设备 k处于激活状态，即 $\hat{}\alpha_{k,t} = 1$，因此 $\lim_{M\to\infty}\phi_{k,t} = 1$。于是可得定理 3。

附录 G 定理4的证明

与信道估计的分析类似，对于处于激活状态的设备 $\hat{} k$，根据 (37) 和 (43)，估计的 d_{lk} 可表示为

$$\hat{d}_{lk} = \frac{\hat{q}_{lk}}{1+Lv_{lk}^{\mathsf{q}}} = \frac{1}{1+Lv_{lk}^{\mathsf{q}}}(d_{lk} + w_{lk}^{\mathsf{q}}), \tag{82}$$

其中，w_{lk}^{q} 由 $\mathcal{CN}(0, v_{lk}^{\mathsf{q}})$生成。于是有

$$\Delta d_k = \frac{d_{lk}+w_{lk}^{\mathsf{q}}}{1+Lv_{lk}^{\mathsf{q}}} - d_{lk}. \tag{83}$$

根据假设 2，有

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{d}}_k^{n_s} &= \frac{1}{1+Lv^{\mathsf{q}}}(\boldsymbol{d}_k^{n_s} + \boldsymbol{w}^{\mathsf{q}}),\\ \Delta\boldsymbol{d}_k^{n_s} &= \frac{\boldsymbol{d}_k^{n_s}+\boldsymbol{w}^{\mathsf{q}}}{1+Lv^{\mathsf{q}}} - \boldsymbol{d}_k^{n_s},\end{aligned} \tag{84}$$

其中，$\boldsymbol{w}^{\mathsf{q}}$ 由 $\mathcal{CN}(0, v^{\mathsf{q}}\mathbf{I})$生成。因此，估计误差的协方差矩阵为 (81)。于是，$\Delta\boldsymbol{d}_k^{n_s}$可解释为由 $\mathcal{CN}(0, v^{\mathsf{a}}\mathbf{I})$生成的随机向量。为证明定理4，我们考虑 Gallager 型界，并令 $\boldsymbol{d}_k^{'n_s} \in \mathcal{D}\backslash\{\boldsymbol{d}_k^{n_s}\}$。结合第 IV-D 节中的信号检测，定义错误事件 $F(\boldsymbol{d}_k^{n_s}, \boldsymbol{d}_k^{'n_s})$ $\{\|\boldsymbol{d}_k^{n_s} - \boldsymbol{d}_k^{'n_s} + \Delta\boldsymbol{d}_k^{n_s}\|_2 < \|\Delta\boldsymbol{d}_k^{n_s}\|_2\}$ [32] $F\ \boldsymbol{d}_k^{n_s}$ 和 ( ) $\cup_{\boldsymbol{d}_k^{'n_s}\in\mathcal{D}\backslash\{\boldsymbol{d}_k^{n_s}\}} F\ \boldsymbol{d}_k^{n_s}$ $\lambda > 0$ (, $\boldsymbol{d}_k^{'n_s}$)。接下来，给定 和 z $\sim$ $\mathcal{CN}$ $\mathbf{0}$, (I)，有以下恒等式成立。

$$\mathbb{E}[\exp(-\lambda\|\sqrt{a}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{u}\|_2^2)] = \frac{\exp(\frac{-\lambda\|\boldsymbol{u}\|_2^2}{1+a\lambda})}{(1+a\lambda)^J}, \tag{85}$$

利用 Chernoff 界和式 (85)，可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(F(\boldsymbol{d}_k^{n_s}, \boldsymbol{d}_k^{'n_s})|\boldsymbol{d}_k^{n_s}, \Delta\boldsymbol{d}_k^{n_s})\\ &= \mathbb{P}(\|\boldsymbol{d}_k^{n_s} - \boldsymbol{d}_k^{'n_s} + \Delta\boldsymbol{d}_k^{n_s}\|_2^2 < \|\Delta\boldsymbol{d}_k^{n_s}\|_2^2|\boldsymbol{d}_k^{n_s}, \Delta\boldsymbol{d}_k^{n_s})\\ &= \mathbb{P}(\exp(-\lambda\|\boldsymbol{d}_k^{n_s} - \boldsymbol{d}_k^{'n_s} + \Delta\boldsymbol{d}_k^{n_s}\|_2^2)\\ &\qquad > \exp(-\lambda\|\Delta\boldsymbol{d}_k^{n_s}\|_2^2)|\boldsymbol{d}_k^{n_s}, \Delta\boldsymbol{d}_k^{n_s})\\ &\le \frac{\exp(\lambda\|\Delta\boldsymbol{d}_k^{n_s}\|_2^2)}{(1+\frac{\lambda}{L})^J}\exp(-\frac{\lambda\|\boldsymbol{d}_k^{n_s}+\Delta\boldsymbol{d}_k^{n_s}\|_2^2}{1+\frac{\lambda}{L}}).\end{aligned} \tag{86}$$

然后我们采用 Gallager 的 ρ-技巧，即对于任意 $\rho\in[0,1]$，$\mathbb{P}[\cup_d A_d] \le (\sum_d \mathbb{P}[A_d])^\rho$，得到

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(F(\boldsymbol{d}_k^{n_s})|\boldsymbol{d}_k^{n_s}, \Delta\boldsymbol{d}_k^{n_s})\\ &\qquad \le (D-1)^\rho\frac{\exp(\lambda\rho(\|\Delta\boldsymbol{d}_k^{n_s}\|_2^2 - \frac{\|\boldsymbol{d}_k^{n_s}+\Delta\boldsymbol{d}_k^{n_s}\|_2^2}{1+\frac{\lambda}{L}}))}{(1+\frac{\lambda}{L})^{\rho J}}.\end{aligned}$$

将 (85) 应用两次，对 $\boldsymbol{d}_k^{n_s}$ 和 $\Delta\boldsymbol{d}_k^{n_s}$ 取期望，得到

$$\mathbb{P}(F(\boldsymbol{d}_k^{n_s})) \le (D-1)^\rho\frac{1}{(1+\frac{\lambda}{L})^{\rho J}}\frac{1}{(1+\frac{\mu}{L})^J}\frac{1}{(1-\mu_1 v^{\mathsf{a}})^J}, \tag{87}$$

其中 $\mu = \rho\lambda/(1+\frac{\lambda}{L})$ 和 $\mu_1 = \rho\lambda - \mu/(1+\frac{\mu}{L})$。因此，我们有

$$P_d^e \le \mathbb{P}(F(\boldsymbol{d}_k^{n_s})) \le \exp(-JE_{\rho,\lambda}), \tag{88}$$

其中

$$\begin{aligned}E_{\rho,\lambda} =& \frac{\rho}{J}\ln(D-1) + \rho\ln(1+\frac{\lambda}{L})\\ &+ \ln(1+\frac{\mu}{L}) + \ln(1-\mu_1 v^{\mathsf{a}}),\end{aligned} \tag{89}$$

其中 $1-\mu_1 v^{\mathsf{a}} > 0$。使 $E_{\rho,\lambda}$ 最大化的 λ 的最优值为 $\lambda = \frac{1}{v^{\mathsf{a}}(1+\rho)}$。将 $\lambda = \frac{1}{v^{\mathsf{a}}(1+\rho)}$ 代入 (89) 和 (88)，得到

$$P_d^e \le \exp\left(-\rho\ln(D-1) - J\rho\ln\left(1+\frac{1}{Lv^{\mathsf{a}}(1+\rho)}\right)\right). \tag{90}$$

参考文献

[1] X. Chen, D. W. K. Ng, W. Yu, E. G. Larsson, N. Al-Dhahir, and R. Schober, 《面向第五代移动通信及未来的海量接入》，IEEE通信领域精选期刊，第39卷，第3期，第615–637页，2021年。[2] L. Liu, E. G. Larsson, W. Yu, P. Popovski, C. Stefanovic, and E. d. Carvalho, 《面向物联网随机接入协议未来范式的免授权海量连接稀疏信号处理》，IEEE信号处理汇刊，第35卷，第5期，第88–99页，2018年。[3] M. Hasan, E. Hossain, and D. Niyato, 《LTE-Advanced 网络中机器对机器通信的随机接入：问题与方法》，IEEE Commun. Mag.，第51卷，第6期，第86–93页，2013年。[4] E. Bj¨ornson, E. de Carvalho, J. H. Sørensen, E. G. Larsson, and P. Popovski, 《拥挤大规模 MIMO 系统中用于导频分配的随机接入协议》，IEEE无线通信汇刊，第16卷，第4期，第2220–2234页，2017年。[5] 3GPP, 《新空口上行多址方案：R1-165174》，技术报告，2016年5月。[6] L. Dai, B. Wang, Y. Yuan, S. Han, I. Chih-lin, and Z. Wang, 《面向第五代移动通信的非正交多址：解决方案、挑战、机遇与未来研究趋势》，IEEE Commun. Mag.，第53卷，第9期，第74–81页，2015年。[7] F. Wei, W. Chen, Y. Wu, J. Ma, and T. A. Tsiftsis, 《上行免授权 SCMA 系统中用于联合信道估计与数据译码的消息传递接收机设计》，IEEE无线通信汇刊，第18卷，第1期，第167–181页，2019年。[8] F. Wei, W. Chen, Y. Wu, J. Li, and Y. Luo, 《面向第五代移动通信无线接口技术：在稀疏码域实现非正交多址》，IEEE Veh. Technol. Mag.，第13卷，第4期，第18–27页，2018年。[9] R. Tibshirani, 《通过 LASSO 进行回归收缩与变量选择》，J. Roy. Stat. Soc. Ser. B，第58卷，第1期，第267–288页，1996年。[10] Z. Qin, K. Scheinberg, and D. Goldfarb, 《组 LASSO 的高效分块坐标下降算法》，Mathematical Programming Computation，第5卷，第2期，第143–169页，2013年。

[11] S. Boyd, N. Parikh, E. Chu, B. Peleato, and J. Eckstein, 《通过交替方向乘子法实现分布式优化与统计学习》, Found. Trends Mach. Learn., 第3卷, 第1–122页, 2011年。[12] A. Fengler, S. Haghighatshoar, P. Jung, and G. Caire, 《大规模MIMO接收机中的非贝叶斯活动检测、大尺度衰落系数估计与无源随机接入》, IEEE信息论汇刊, 第67卷, 第5期, 第2925–2951页, 2021年。[13] L. Liu and W. Yu, 《大规模MIMO下的大规模连接——第一部分：设备活动检测与信道估计》, IEEE信号处理汇刊, 第66卷, 第11期, 第2933–2946页, 2018年。[14] M. Ke, Z. Gao, Y. Wu, X. Gao, and R. Schober, 《基于压缩感知的自适应活跃用户检测与信道估计：大规模接入与大规模MIMO的结合》, IEEE信号处理汇刊, 第68卷, 第764–779页, 2020年。[15] Y. Cheng, L. Liu, and L. Ping, 《具有空间和时间相关信道的大规模接入正交近似消息传递》, IEEE通信领域精选期刊, 第39卷, 第3期, 第726–740页, 2021年。[16] S. Rangan, P. Schniter, and A. K. Fletcher, 《向量近似消息传递》, 载于 IEEE国际信息论研讨会论文集, 2017年6月, 第1588–1592页。[17] S. Rangan, 《用于随机线性混合估计的广义近似消息传递》, 第1010.5141页, arXiv, 2010年10月。[18] Y. Yang, J. Sun, H. Li, and Z. Xu, 《ADMM-CSNet：一种用于图像压缩感知的深度学习方法》, IEEE模式分析与机器智能汇刊, 第42卷, 第3期, 第521–538页, 2020年。[19] Y. Cui, S. Li, and W. Zhang, 《通过深度学习实现联合稀疏信号恢复与支撑集恢复及其在基于MIMO的免授权随机接入中的应用》, IEEE通信领域精选期刊, 第1–1页, 2020年。[20] W. Zhu, M. Tao, X. Yuan, and Y. Guan, 《面向异步大规模连接的深度学习近似消息传递》, IEEE无线通信汇刊, 第20卷, 第8期, 第5434–5448页, 2021年。[21] L. Liu and W. Yu, 《大规模MIMO下的大规模连接——第二部分：可达速率刻画》, IEEE信号处理汇刊, 第66卷, 第11期, 第2947–2959页, 2018年。[22] S. Jiang, X. Yuan, X. Wang, C. Xu, and W. Yu, 《免授权非正交多址中的联合用户识别、信道估计与信号检测》, IEEE无线通信汇刊, 第19卷, 第10期, 第6960–6976页, 2020年。[23] K. Senel and E. G. Larsson, 《支持免授权大规模机器类通信的大规模 MIMO：一种压缩感知方法》, IEEE Trans. Commun., 第66卷, 第12期, 第6164–6175页, 2018年。[24] Z. Chen, F. Sohrabi, Y. Liu, and W. Yu, 《大规模MIMO大规模随机接入中的基于协方差的联合活动与数据检测》, 载于 IEEE国际通信会议论文集, 中国上海, 2019年5月, 第1–6页。[25] J. T. Parker, P. Schniter, and V. Cevher, 《双线性广义近似消息传递——第一部分：推导》, IEEE信号处理汇刊, 第62卷, 第22期, 第5839–5853页, 2014年。[26] T. Ding, X. Yuan, and S. C. Liew, 《免授权大规模设备多址接入中的基于稀疏性学习的多用户检测》, IEEE无线通信汇刊, 第18卷, 第7期, 第3569–3582页, 2019年。[27] M. Bayati and A. Montanari, 《稠密图上的消息传递动态及其在压缩感知中的应用》, IEEE信息论汇刊, 第57卷, 第2期, 第764–785页, 2011年。[28] D. L. Donoho, A. Maleki, and A. Montanari, 《压缩感知的消息传递算法：II. 分析与验证》, IEEE ITW 论文集, 第1–5页, 2010年。[29] Y. Kabashima, F. Krzakala, M. M´ezard, A. Sakata, and L. Zdeborov´a, 《贝叶斯最优矩阵分解中的相变与样本复杂度》, IEEE信息论汇刊, 第62卷, 第4265页, 2016年7月, 第4228–4265页。[30] Y. Polyanskiy, 《关于大规模随机接入的观点》, 载于 IEEE国际信息论研讨会论文集, 2017年, 第2523–2527页。[31] I. Zadik, Y. Polyanskiy, and C. Thrampoulidis, 《利用高斯不等式改进高斯多址信道与稀疏回归的界》, 载于 IEEE国际信息论研讨会论文集, 2019年, 第430–434页。[32] S. S. Kowshik and Y. Polyanskiy, 《具有有限载荷与衰落的多用户多址信道基本极限》, IEEE信息论汇刊, 第67卷, 第9期, 第5853–5884页, 2021年。[33] S. M. Kay, 《统计信号处理基础：估计理论》。Prentice-Hall, Inc., 1993年。[34] B. J. Frey and D. MacKay, 《一场变革：有环图中的置信传播》, 载于 Neural. Inf. Process. Syst. Conf. 论文集, 1997年, 第479–485页。[35] F. R. Kschischang, B. J. Frey, and H. Loeliger, 《因子图与和积算法》, IEEE信息论汇刊, 第47卷, 第2期, 第498–519页, 2001年。[36] K. P. Murphy, Y. Weiss, and M. I. Jordan, 《用于近似推断的环路置信传播：一项实证研究》, 载于人工智能中的不确定性会议论文集, 美国加利福尼亚州旧金山, 1999年, 第467–475页。

[37] D. L. Donoho、A. Maleki 和 A. Montanari, “用于压缩感知的消息传递算法：I. 动机与构建”, 载于 IEEE ITW 会议论文集, 开罗, 2010年1月。[38] J. T. Parker、P. Schniter 和 V. Cevher, “双线性广义近似消息传递——第二部分：应用”, IEEE信号处理汇刊, 第 62 卷, 第 22 期, 第 5854–5867 页, 2014年。[39] M. I. Jordan 和 M. J. Wainwright, “图模型、指数族与变分推断”, 《机器学习基础与趋势》, 第 1 卷, 第 1–2 期, 第 1–305 页, 2007年。[40] D. J. MacKay, 《信息论、推断与学习算法》。剑桥大学出版社, 2003年。[41] W. Gautschi, “Tricomi 以来的不完全伽马函数”, Atti dei Convegni Linci, 第 1998 期, 第 203–237 页, 2011年。[42] S. Zhang、Y. Cui 和 W. Chen, “基于 BiGAMP 的海量免授权接入联合检测”, 载于 IEEE ISWCS 会议论文集, 2022年, 第 1–6 页。[43] G. Kaddoum、Y. Nijsure 和 H. Tran, “适用于高速率通信系统的广义码索引调制技术”, IEEE车辆技术汇刊, 第 65 卷, 第 9 期, 第 7000–7009 页, 2016年。[44] L. You、X. Gao、X.-G. Xia、N. Ma 和 Y. Peng, “空间相关瑞利衰落信道上的大规模MIMO传输导频复用”, IEEE无线通信汇刊, 第 14 卷, 第 6 期, 第 3352–3366 页, 2015年。