arXiv:2304.00745v1 [math.AP] 3 Apr 2023

L^p_{loc} 正性保持与刘维尔型定理

ANDREA BISTERZO、ALBERTO FARINA 和 STEFANO PIGOLA

Abstract. 在完备黎曼流形（M， g）上，我们考虑满足微分不等式 $-\Delta u+\lambda u \geq 0$ 的分布解，其中 $\lambda > 0$ 是一个在无穷远处可能衰减至 0 的局部有界函数。若其在测地球上满足适当的增长条件，则可得任意此类解必为非负。这是一种广义的 L^p-保持性质，也可视为方程 $\Delta u \geq \lambda u$ 的非负次解所具有的刘维尔型性质。我们还将这些解析结果应用于完备极小子流形外在距离的增长估计。

1. Introduction

为介绍本文的工作，我们首先回顾分布意义下微分不等式的概念。设（M， g）为一个黎曼流形，且 λ 是定义在 M 上的光滑函数。给定 $f \in L^1_{loc}$（M），若函数 $u \in L^1_{loc}$（M）满足分布意义下的 $-\Delta u + \lambda u \geq f$（分别为 $\leq f$），则称

$$\int_M u(-\Delta\varphi + \lambda\varphi)\ \mathrm{dv} \geq \int_M f\varphi\ \mathrm{dv} \quad (\text{resp. } \leq)$$

对每个 $0 \leq \varphi \in C_c^\infty(M)$。通过分部积分，很容易看出，分布意义下的微分不等式这一概念是弱微分不等式概念的推广，后者涉及$W^{1,\,1}$ 函数。

定义 1.1（正性保持性质）。给定一个黎曼流形 (M, g) 以及一族函数 $\mathcal{S} \subseteq L^1_{loc}(M)$，若任何满足$-\Delta u + u \geq 0$ 分布意义下条件的函数 $u \in \mathcal{S}$ 几乎处处在 M上非负，则称 M具有 $\mathcal{S}$ 正性保持性质。

从历史上看，正性保持性质这一概念受到 M. Braverman、O. Milatovic 和 M. Shubin 的工作的启发， [3], 作者们猜想每个完备黎曼流形都是 L^2 正性保持的。特别是，这一猜想推动了对任意$p \in [1, +\infty]$的完备性与 L^p 正性保持性质之间关联的研究。

在获得一些涉及当前流形几何约束的部分结果后，并涵盖所有情形 $p \in [1, +\infty]$, 见 [10] （另见 [9]

和 [4]），作者证明了，任何黎曼流形（M， g）对于每个 $p \in (1, +\infty)$ 都是 L^p保正的，唯一假设是M 完备。

关于 $p = +\infty$ 的情形，近期的研究 [2] 指出， L^∞ 正性保持在某种意义上与（测地）完备性的概念相互独立。事实上，作者证明，黎曼流形满足 L^∞ 正性保持性质的充要条件是该空间具有随机完备性。

仿照定义 1.1，下面我们将为稍广泛的一类微分算子考虑正性保持性质的概念。具体而言，我们将研究形如 $\mathcal{L} := -\Delta + \lambda$ 的算子，其中 λ 是正的局部有界函数。在此背景下，本文将 [10] 和 [9] 针对完备黎曼流形的结果推广为：对于任意 $p \in (1, +\infty)$，均有 $\mathcal{S}_p$ 正性保持，其中 $\mathcal{S}_p$ 是一族局部 p-可积函数，并满足一个依赖于势函数 λ 在无穷远处衰减率的特定增长条件。接下来，我们针对 $p = 1$ 的情形，在 λ 为正常数的假设下，得到两个结果；其前提是存在一族适当的（穷竭）截断函数，且其拉普拉斯算子具有“良好”的衰减性。

我们强调，对于 $\Delta u \geq \lambda u$的非负解，我们所得结果可以解读为 L^p 刘维尔型定理。沿着这一思路，我们可以更直接地与现有文献进行比较；现有研究通常会进一步要求对函数的增长进行逐点控制，并要求解具有更高的正则性。我们将在后续各节讨论这些方面。

本文结构安排如下。第 2 节中，我们在低正则性条件下证明一个积分不等式，这是 L^p_{loc} 论证的核心$1 < p < +\infty$。第 3 节讨论针对 $-\Delta u + \lambda u \geq 0$ 分布解的一般化 L^p_{loc} 正性保持，其中函数 λ可能是衰减的x。情形 $p = 1$ 将在第 4 节中讨论，并附加曲率限制，以保证所谓拉普拉斯截断函数的存在。最后，第 5 节将其应用于完备的欧几里得极小子流形，其中外在距离增长以积分意义度量。这推广了一个众所周知的事实：具有二次指数体积增长的欧几里得空间中的完备极小子流形必定无界；见 [6] 和 [8]。

2. Some preliminary results

下文中，如果 u 是实值函数，我们记

$$u^+ := \max\{u, 0\} \quad \text{and} \quad u^- := \max\{-u, 0\}.$$

我们首先回顾一般黎曼流形背景下的 Brezis-Kato 不等式。该结果在 [9] 中针对一般不等式 $\Delta u \geq f \in L^1_{loc}$ 得到。

命题 2.1（Brezis-Kato 不等式）。设 (M,g) 是一个可能不完备的黎曼流形，且 λ 是一个可测函数。

若 $u \in L^1_{loc}(M)$ 满足 $\lambda u \in L^1_{loc}(M)$，且在分布意义下满足 $-\Delta u + \lambda u \leq 0$，则 $-\Delta u^+ + \lambda u^+ \leq 0$ 在分布意义下成立。

因此，在下一个命题中，我们将对 [9] 中针对完备流形得到的正则性结果作进一步改进。不等式 (2.1) 将成为第 3 节所述正性保持性质证明中的关键工具。

命题 2.2. 设 (M,g) 是一个完备黎曼流形，且 $0 \leq \lambda \in L^\infty_{loc}(M)$。假设 $u \in L^1_{loc}(M)$ 在分布意义下满足 $-\Delta u + \lambda u \geq 0$。

于是，对于每个 $p \in (1,+\infty)$，$u^- \in L^\infty_{loc}(M)$ 和 $(u^-)^{\frac{p}{2}} \in W^{1,2}_{loc}(M)$。此外，$u^-$ 满足

$$(p-1)\int_M \lambda (u^-)^p \varphi^2 \, \mathrm{dv} \leq \int_M (u^-)^p |\nabla \varphi|^2 \, \mathrm{dv} \tag{2.1}$$

对于每个 $0 \leq \varphi \in C^1_c(M)$。

证明。根据 Brezis-Kato 不等式，函数 $u^- \in L^1_{loc}(M)$ 在分布意义下满足 $\Delta u^- \geq \lambda u^-$。因此，由 [10, 定理 3.1]可知，对于每个 $p \in (1,+\infty)$，$u^- \in L^\infty_{loc}(M)$ 和 $(u^-)^{\frac{p}{2}} \in W^{1,2}_{loc}(M)$。

为证明 (2.1)，令 $\delta > 0$ 并设 $v_\delta := u^- + \delta \in L^\infty_{loc}(M) \cap W^{1,2}_{loc}(M)$。显然，对于每个 $q > 0$，函数 v_δ^q 属于 $L^\infty_{loc}(M) \cap W^{1,2}_{loc}(M)$，且根据 [10, 引理 5.4]，其弱梯度满足

$$\nabla v_\delta^q = q v_\delta^{q-1} \nabla v_\delta. \tag{2.2}$$

此外，$\Delta v_\delta \geq \lambda u^-$ 在分布的意义下，这意味着

$$\int_M \lambda u^- \psi \, \mathrm{dv} + \int_M g(\nabla v_\delta, \nabla \psi) \leq 0$$

对每个几乎处处非负的 $\psi \in W^{1,2}_{loc}(M)$ 都成立。特别地，取满足 $\varphi \in C^1_c(M)$ 的 $\psi = v_\delta^{p-1}\varphi^2$，并利用 (2.2)，可得

$$\begin{aligned} 0 \geq &\int_M \lambda u^- v_\delta^{p-1} \varphi^2 \, \mathrm{dv} + (p-1)\int_M v_\delta^{p-2}\varphi^2 |\nabla v_\delta|^2 \, \mathrm{dv} \\ &+ 2\int_M \varphi v_\delta^{p-1} g(\nabla v_\delta, \nabla \varphi) \, \mathrm{dv}. \end{aligned}$$

由柯西-施瓦茨不等式和杨氏不等式，对于任意 $\epsilon \in (0, p-1)$，我们有

$$\begin{aligned} 2\varphi v_\delta^{p-1} g(\nabla v_\delta, \nabla \varphi) &\geq -2\varphi v_\delta^{p-1} |\nabla v_\delta| |\nabla \varphi| \\ &\geq -\epsilon \varphi^2 v_\delta^{p-2} |\nabla v_\delta|^2 - \epsilon^{-1} v_\delta^p |\nabla \varphi|^2 \end{aligned}$$

因此

$$0 \geq \int_M \lambda u^- v_\delta^{p-1} \varphi^2 \, \mathrm{dv} + (p-1-\epsilon) \int_M v_\delta^{p-2} \varphi^2 |\nabla v_\delta|^2 \, \mathrm{dv} - \epsilon^{-1} \int_M v_\delta^p |\nabla \varphi|^2 \, \mathrm{dv}.$$

由此 $\epsilon \to p-1$ 可得

$$(p-1) \int_M \lambda u^- v_\delta^{p-1} \varphi^2 \, \mathrm{dv} \leq \int_M v_\delta^p |\nabla \varphi|^2 \, \mathrm{dv}$$

再结合这一事实:

$$\begin{aligned} \lambda u^- v_\delta^{p-1} &\xrightarrow{\delta \to 0} \lambda (u^-)^p \quad \text{in } L^1_{loc}(M) \\ v_\delta^p &\xrightarrow{\delta \to 0} (u^-)^p \quad \text{in } L^1_{loc}(M) \end{aligned}$$

根据控制收敛定理，可推出

$$(p-1) \int_M \lambda (u^-)^p \varphi^2 \, \mathrm{dv} \leq \int_M (u^-)^p |\nabla \varphi|^2 \, \mathrm{dv}$$

从而得到所需结论。 □

3. L^p_{loc} POSITIVITY PRESERVING PROPERTY

本节探讨在不要求任何曲率假设的情况下，完备黎曼流形上 $p \in (1, +\infty)$ 的 L^p_{loc} 正性保持性质。

显然，如果流形是非紧的，我们无法控制一般函数 $u \in L^p_{loc}(M)$（的 p-范数）在“无穷远处”的增长，因此无法逐步重现 [10] 和[9] 中 L^p 情形下的做法。

此外，我们还指出，不能指望对整个函数族 $L^p_{loc}(M)$ 获得真正的正性保持性质。事实上，如果 λ 是正常数，那么 $u(x) = -e^{\sqrt{\lambda} x}$ 是一个满足 $-u'' + \lambda u = 0$ 的负函数，其中 $\mathbb{R}$。因此，在一般的完备黎曼流形上，L^p_{loc} 正性保持性质并不成立。

考虑到目前为止的观察，我们自然会将范围限制在这样一类 L^p_{loc} 函数中：其 p范数满足适当的（次指数）增长条件。

我们先给出以下迭代引理。

引理 3.1. 设 $A > 0$ 和 $f\colon [A, +\infty) \to (0, +\infty)$ 是一个单调不减函数。假设存在 $\alpha > 0$、$\delta \geq 0$、$\beta \geq 1$ 和 $\gamma > 0$，使得

$$f(r) \leq \frac{1}{\alpha (1+r)^{-\delta} h^\gamma + \beta} f(r+h) \tag{3.1}$$

对每个 $r \geq A$ 以及每个 $h > 0$。

那么，对每个 $h>0$，函数 f 满足

$$f(R)\geq f(A)\left(\alpha(1+R-h)^{-\delta}h^{\gamma}+\beta\right)^{\frac{R-A}{h}-1}$$

对每个 $R\geq A+h$。

证明。固定 $h>0$，根据假设，对于任意 $r\geq A$，我们有 $f(r)\leq\left(\alpha(1+r)^{-\delta}h^{\gamma}+\beta\right)^{-1}f(r+h)$。迭代可得，对每个 $n\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}f(r)&\leq\left(\alpha(1+r)^{-\delta}h^{\gamma}+\beta\right)^{-1}f(r+h)\\&\leq\left(\alpha(1+r)^{-\delta}h^{\gamma}+\beta\right)^{-1}\left(\alpha(1+r+h)^{-\delta}h^{\gamma}+\beta\right)^{-1}f(r+2h)\\&\leq\left(\alpha(1+r+h)^{-\delta}h^{\gamma}+\beta\right)^{-2}f(r+2h)\\&\leq\ldots\leq\left(\alpha(1+r+(n-1)h)^{-\delta}h^{\gamma}+\beta\right)^{-n}f(r+nh)\end{aligned}$$

对任意 $r\geq A$。由此可得，对每个 $R>A$

$$\begin{aligned}f(R)&\geq f(A+nh)\\&\geq\left(\alpha(1+A+(n-1)h)^{-\delta}h^{\gamma}+\beta\right)^{n}f(A)\\&\geq\left(\alpha(1+A+(n-1)h)^{-\delta}h^{\gamma}+\beta\right)^{\frac{R-A}{h}-1}f(A),\end{aligned}$$

其中，$n=n(R,A,h)$ 是满足 $A+(n+1)h\geq R\geq A+nh$ 的唯一自然数。特别地，若 $R\geq A+h$，则 $\frac{R-A}{h}\geq 1$ 得到

$$\begin{aligned}f(R)&\geq\left(\alpha(1+A+(n-1)h)^{-\delta}h^{\gamma}+\beta\right)^{\frac{R-A}{h}-1}f(A)\\&\geq\left(\alpha(1+R-h)^{-\delta}h^{\gamma}+\beta\right)^{\frac{R-A}{h}-1}f(A)\end{aligned}$$

因为 $\frac{R-A}{h}-1\geq n-1$。证明至此完成。 □

将引理 3.1 与命题 2.2 结合，并选取标准族的旋转对称截断函数，可得以下定理。

定理 3.2（广义 L^p_{loc} 正性保持性质）。设 (M,g) 是一个完备黎曼流形，$\lambda\in L^{\infty}_{loc}(M)$ 是一个正函数，且$p\in(1,+\infty)$。此外，假设存在 $o\in M$ 和一个常数 $C>0$，使得

$$\lambda(x)\geq\frac{C}{(1+d^M(x,o))^{2-\epsilon}}\quad\forall x\in M,$$

其中，$\epsilon\in(0,2]$，且 d^M 是 M 上的内在距离。

如果 $u\in L^p_{loc}(M)$ 在分布意义下满足 $-\Delta u+\lambda u\geq 0$，并且

$$\int_{B_R(o)}(u^-)^p\ \mathrm{dv}=o\left(e^{\theta R^{\frac{\epsilon}{2}}}\right)\quad as\ R\to+\infty,\tag{3.2}$$

其中 $\theta = \sqrt{\frac{(p-1)C}{e-1}}$，那么 $u \geq 0$。

注记 3.3（刘维尔型定理）。显然，满足条件（3.2）的唯一非正 L^p_{loc} 分布解是零函数。在此意义下，定理 3.2 可视为一个 L^p 刘维尔型定理。

注记 3.4。情形 $\epsilon > 2$ 可通过将问题归结为情形 $\epsilon = 2$来处理，因为

$$\lambda(x) \geq C(1 + d^M(x, o))^{\epsilon-2} \geq C \quad \forall x \in M.$$

证明。设 $u \in L^p_{loc}(M)$ 是满足（3.2）的 $-\Delta u + \lambda u \geq 0$分布解。对于任意固定的 $a > 0$ 和 $b > a$，考虑函数$\eta_{a,b} \in C^{0,1}([0, +\infty))$，使得

$$\begin{cases} \eta_{a,b} \equiv 1 & \text{in } [0, a] \\ \eta_{a,b}(t) = \frac{b-t}{b-a} & \text{in } [a, b] \\ \eta_{a,b} \equiv 0 & \text{in } [b, +\infty). \end{cases}$$

特别地，$|\eta'_{a,\,b}(t)| \leq \frac{1}{b-a}$ 在 $[0, +\infty$ 中几乎处处成立$)$。

设 $\varphi_{a,\,b}(x) := \eta_{a,\,b}(d(x, o))$，其中 $d(\cdot, \cdot)$ 是 M 上的内在距离。那么，$\varphi_{a,\,b} \in C^0_{,\,c}{}^1(M)$ 且满足

$$\begin{cases} \varphi_{a,b} \geq 0 & \text{in } M \\ |\nabla \varphi_{a,b}(x)| \leq \frac{1}{b-a} & \text{a.e. in } M \\ \varphi_{a,b} \equiv 0 & \text{in } M \setminus \overline{B_b(o)} \\ \varphi_{a,b} \equiv 1 & \text{in } B_a(o). \end{cases}$$

将 $\varphi = \varphi_{a,\,b}$ 代入 (2.1)，得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{(b-a)^2} \int_{B_b(o) \setminus B_a(o)} (u^-)^p \, \mathrm{dv} &\geq (p-1) \int_{B_a(o)} \lambda (u^-)^p \, \mathrm{dv} \\ &\geq (p-1) \int_{B_a(o)} \frac{C}{(1 + d^M(\cdot, o))^{2-\epsilon}} (u^-)^p \, \mathrm{dv} \\ &\geq (p-1) \frac{C}{(1+a)^{2-\epsilon}} \int_{B_a(o)} (u^-)^p \, \mathrm{dv} \end{aligned}$$

并对两边求和

$$\frac{1}{(b-a)^2} \int_{B_a(o)} (u^-)^p \, \mathrm{dv}$$

在前一个不等式两边分别加上，得到

$$\left((p-1) \frac{C}{(1+a)^{2-\epsilon}} + \frac{1}{(b-a)^2} \right) \int_{B_a(o)} (u^-)^p \, \mathrm{dv} \leq \frac{1}{(b-a)^2} \int_{B_b(o)} (u^-)^p \, \mathrm{dv}$$

对每个固定的 $a > 0$ 和 $b > a$。特别是，这意味着

$$\int_{B_a(o)} (u^-)^p \, \mathrm{dv} \leq \frac{1}{(p-1)C(1+a)^{\epsilon-2}h^2 + 1} \int_{B_{a+h}(o)} (u^-)^p \, \mathrm{dv} \tag{3.3}$$

对每个 $a > 0$ 和 $h > 0$。

如果我们假设 $u^- \neq 0$，那么存在 $A > 0$ 使得

$$\int_{B_A(o)} (u^-)^p \, \mathrm{dv} > 0.$$

根据 (3.3)，我们可以将引理 3.1 应用于

$$f : a \mapsto \int_{B_a(o)} (u^-)^p \, \mathrm{dv}$$

在 $[A, +\infty)$ 中，令 $\gamma = \epsilon$、$\delta = 2 - \epsilon$、$\alpha = (p-1)C$ 以及 $\beta = 1$，则对于任意 $h > 0$ 以及任意 $R > A + h$，函数 f 满足

$$f(R) \geq f(A)\Big((p-1)C(1+R-h)^{\epsilon-2}h^2 + 1\Big)^{\frac{R-A}{h}-1}.$$

若 $0 < \epsilon < 2$ 我们可以取 $h = R^{1-\frac{\epsilon}{2}}\sqrt{\frac{e-1}{(p-1)C}}$，则得到

$$\begin{aligned} f(R) &\geq f(A)\left((p-1)C\frac{h^2}{(1+R-h)^{2-\epsilon}} + 1\right)^{\frac{R-A}{h}-1} \\ &\geq f(A)\left((p-1)C\frac{h^2}{(h+R-h)^{2-\epsilon}} + 1\right)^{\frac{R-A}{h}-1} \\ &= f(A)\left((p-1)C\frac{h^2}{R^{2-\epsilon}} + 1\right)^{\frac{R-A}{h}-1} \\ &= f(A)e^{-\frac{A}{h}-1}e^{\frac{R}{h}} \\ &\geq \frac{f(A)e^{-1}}{2}e^{\theta R^{\frac{\epsilon}{2}}} \end{aligned}$$

对每个足够大的 R，使得

$$R > A + h, \quad h \geq 1 \quad \text{and} \quad e^{-\frac{A}{h}} \geq \frac{1}{2}.$$

类似地，若 $\epsilon = 2$ 我们可以选择 $h = \sqrt{\frac{e-1}{(p-1)C}}$，以便得到

$$\begin{aligned} f(R) &\geq f(A)\left((p-1)Ch^2 + 1\right)^{\frac{R-A}{h}-1} \\ &= f(A)e^{-\theta A-1}e^{\theta R}. \end{aligned}$$

两种情况下都会导致与 (3.2) 矛盾，这意味着 $u^- = 0$几乎处处成立，即得证。

□

注 3.5. 在 L. Mari、M. Rigoli 和 A.G. Setti 的论文 [7] 中，作者从 φ-Laplacian 的无穷远处最大值原理这一视角出发，证明了一个一般的先验估计；在我们的设定下，该估计可化简如下。

定理 3.6（[7, 定理 B]）。设 (M, g) 为一个完备黎曼流形， $\lambda \in C(M)$ 为满足下列条件的正函数

$$\lambda(x) \geq \frac{B}{r(x)^{2-\epsilon}} \quad in\ M \setminus B_{R_0}(o)$$

对于某个 $\epsilon \in (0, +\infty)$ $B > 0, R_0 > 0$ 以及 $o \in M$。

设 $\sigma \geq 0$ 和 $u \in C^1(M)$ 是以下方程的分布解

$$-\Delta u + \lambda u \geq 0 \quad in\ M$$

因此，如果 $\sigma > 0$，则当 $r(x) \to +\infty$ 时， $u^-(x) = o(r(x)^\sigma)$；或者，如果 $\sigma = 0$，则 u 有下界。最后，假设

$$\liminf_{r \to +\infty} \frac{\ln |B_r(o)|}{r^{\epsilon - \sigma}} < +\infty \quad if\ \sigma < \epsilon$$

or

$$\text{下极限}_{r \to +\infty} \frac{\ln\ |B_r(o)|}{\ln r} < +\infty \quad if\ \sigma = \epsilon.$$

那么， $u \geq 0$。

这一结果与我们的定理 3.2 相比较。事实上，一方面，若我们假设逐点控制 $u^-(x) = o(r^\sigma(x))$，对 $0 < \sigma < \epsilon$ 而言，只要 $|B_R| = O(R^{-p\sigma} e^{\theta R^2})$， $p \in (1, +\infty)$，条件(3.2)便成立；而定理 3.6 要求体积增长 $|B_R| = O(e^{R^{\epsilon - \sigma}})$。

另一方面，我们的定理 3.2 在两个方面改进了定理 3.6。首先，我们对函数 u 和 λ 的正则性要求较低。事实上，为了使用 Kato 不等式以及第 2 节中提出的正则性结果，我们只需要具有 L^∞_{loc} 势函数的 L^p_{loc} 解。其次，对于 u^- 的渐近增长，我们只需要一个 L^p 界，而不需要逐点渐近控制。这使我们能够考虑范围更广的函数，例如具有超二次增长的函数，即使在 $\epsilon < 2$ 的情形下也是如此。

在 $\epsilon = 2$ 的特殊情形下，例如当 λ 为常数时，我们得到定理 3.2 的下述版本。

推论 3.7. 设 (M, g) 是一个完备黎曼流形， $\lambda \in L^\infty_{loc}(M)$，使得 $\lambda \geq C$ 对某个正常数 C 成立，且 $p \in (1, +\infty)$。

如果 $u \in L^p_{loc}(M)$ 在分布意义下满足 $-\Delta u + \lambda u \geq 0$，并且

$$\int_{B_R} (u^-)^p \ \mathrm{dv} = o(e^{\theta R}) \quad as\ R \to +\infty \tag{3.4}$$

其中 $\theta = \sqrt{\frac{(p-1)C}{p}}$，那么 $u \geq 0$ 属于 M。

注 3.8. 推论 3.7 大幅改进了 [9] 关于完备流形情形的一个主要结果。事实上，在那篇论文中， L^p_{loc}正性保持是在条件 $\int_{B_R(o)} (u^-)^p \ \mathrm{dv} = o(R^2)$ 下得到的。参见 [9, 推论 5.2 和注 5.3]。

作为一个附带结果，将推论 3.7 应用于函数 u 和$-u$，我们得到关于 L^p_{loc} 到 $-\Delta u+\lambda u=0$ 的解的唯一性结论。

推论 3.9（唯一性）。设 (M,g) 是一个完备黎曼流形，$\lambda\in L^\infty_{loc}(M)$，使得对于正常数 C，有 $\lambda\geq C$，且 $p\in(1,+\infty)$。若 $u\in L^p_{loc}(M)$ 满足分布意义下的 $-\Delta u+\lambda u=0$，并且

$$\int_{B_R}(u^\pm)^p\ \mathrm{dv}=o(e^{\theta R})\quad as\ R\to+\infty$$

满足 $\theta=\sqrt{\frac{(p-1)\lambda}{e-1}}$，则在 M 上几乎处处有 $u=0$。

注 3.10。如本节开头所述，对于每个 $\lambda>0$，函数 $u(x)=-e^{\sqrt{\lambda}x}$ 为 $L^p_{loc}(\mathbb{R})$ 正性保持性质提供了一个反例，其中 $p\in(1,+\infty)$ 任意。此外，我们强调，其 p-范数具有如下渐近增长

$$\int_{-R}^{R}(u^-)^p(x)\ \mathrm{d}x=O(e^{p\sqrt{\lambda}R})$$

具有 $p\sqrt{\lambda}>\sqrt{\frac{(p-1)\lambda}{e-1}}$。因此，定理 3.2 和推论 3.7 离达到最佳状态已不远。若能弄清这个指数可以在多大程度上改进，将会非常有趣。

4. L^1_{loc} POSITIVITY PRESERVING PROPERTY

第 3 节采用的方法基于不等式 (2.1)，显然不适用于 $p=1$。为解决这一问题，我们采用某些特殊的截断函数，将其作为测试函数代入 u 所满足的分布不等式中。只要对里奇曲率的衰减提出某些条件，就能确保这些函数存在。

4.1. 拉普拉斯算子衰减的截断函数。本节介绍的第一个定理基于以下迭代引理。对于情形 $p=1$，它是引理 3.1 的类似结果。

引理 4.1. 设 $A>0$ 和 $f\colon[A,+\infty)\to(0,+\infty)$ 为单调不减函数。假设存在 $\sigma>1,\gamma>0,\alpha>0$ 和 $\beta\geq1$，使得

$$f(r)\leq\frac{1}{\alpha r^\gamma+\beta}f(\sigma r)\tag{4.1}$$

对每个 $r\geq A$ 都成立。因此，f 满足

$$f(R)\geq\left(\frac{R}{A}\right)^{\log_\sigma(\alpha A^\gamma+\beta)}\frac{f(A)}{\alpha A^\gamma+\beta}$$

对每个 $R>A$。

证明。固定 $R \geq A$ 后，我们有

$$\begin{aligned} f(R) &\leq (\alpha R^\gamma + \beta)^{-1} f(\sigma R) \\ &\leq (\alpha R^\gamma + \beta)^{-1} (\alpha(\sigma R)^\gamma + \beta)^{-1} f(\sigma^2 R) \\ &\leq (\alpha R^\gamma + \beta)^{-2} f(\sigma^2 R) \end{aligned}$$

并反复迭代,

$$f(R) \leq (\alpha R^\gamma + \beta)^{-n} f(\sigma^n R)$$

对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都成立。

现在考虑 $n \in \mathbb{N}$，使得 $\sigma^{n+1} A \geq R \geq \sigma^n A$。特别地，由

$$\sigma^{n+1} A \geq R \quad \Rightarrow \quad n \geq \log_\sigma \left(\frac{R}{A} \right) - 1$$

我们推出

$$\begin{aligned} f(R) &\geq f(\sigma^n A) \geq (\alpha A^\gamma + \beta)^n f(A) \\ &\geq (\alpha A^\gamma + \beta)^{\log_\sigma(\frac{R}{A})} \frac{f(A)}{\alpha A^\gamma + \beta} \\ &= \left(\frac{R}{A} \right)^{\log_\sigma(\alpha A^\gamma + \beta)} \frac{f(A)}{\alpha A^\gamma + \beta} \end{aligned}$$

如上所述 □

因此，要求存在一族截断函数 $\{\phi_R\}_R$，其拉普拉斯算子按 $|\Delta \phi_R| \leq C R^{-\gamma}$ 的速度衰减，其中 γ 为正常数，即可得到

定理 4.2（广义正性保持性质）。设 (M, g) 为完备黎曼流形，且 λ 为正常数。假设对于固定的 $o \in M$，存在一些正常数 γ 和 R_0，以及满足以下条件的常数 $\sigma > 1$：对每个 $R > R_0$，都存在 $\phi_R \in C_c^2(M)$，使得

$$\begin{cases} 0 \leq \phi_R \leq 1 & \text{in } M \\ \phi_R \equiv 1 & \text{in } B_R(o) \\ \operatorname{supp}(\phi_R) \subset B_{\sigma R}(o) & \\ |\Delta \phi_R| \leq \frac{C}{R^\gamma} & \text{in } M \end{cases} \tag{4.2}$$

其中 $C = C(\sigma) > 0$ 是一个与 R 无关的常数。若 $u \in L^1_{loc}(M)$ 在分布意义下满足 $-\Delta u + \lambda u \geq 0$，且存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得

$$\int_{B_R(o)} u^- \, \mathrm{dv} = O(R^k) \quad as \ R \to +\infty, \tag{4.3}$$

那么在 M 中几乎处处有 $u \geq 0$。

证明。取 $u \in L^1_{loc}(M)$ 为 $-\Delta u + \lambda u \geq 0$ 的一个分布解，它满足某个 $k \in \mathbb{N}$ 下的条件 (4.3)。由 Brezis-Kato 不等式$\Delta u^- \geq \lambda u^-$ （在分布意义下），可得

$$\lambda \int_M u^- \phi_R \, \mathrm{dv} \leq \int_M u^- \Delta \phi_R \, \mathrm{dv} \qquad \forall R > R_0.$$

根据 ϕ_R 的定义，我们得到

$$\lambda \int_{B_R(o)} u^- \phi_R \, \mathrm{dv} \leq \frac{C}{R^\gamma} \int_{B_{\sigma R}(o) \setminus B_R(o)} u^- \, \mathrm{dv} \qquad \forall R > R_0$$

并将

$$\frac{C}{R^\gamma} \int_{B_R(o)} u^- \, \mathrm{dv}$$

加到前一个不等式的两边，得到

$$\begin{aligned} \int_{B_R(o)} u^- \, \mathrm{dv} &\leq \frac{C}{\lambda R^\gamma + C} \int_{B_{\sigma R}(o)} u^- \, \mathrm{dv} \\ &= \frac{1}{\alpha R^\gamma + 1} \int_{B_{\sigma R}(o)} u^- \, \mathrm{dv} \qquad \forall R > R_0, \end{aligned} \tag{4.4}$$

其中 $\alpha = \frac{\lambda}{C}$ 取决于 σ。与定理 3.2 中的做法类似，若假设在 M 中 $u^- \neq 0$ 几乎处处成立，则存在 $A \geq R_0$，使得

$$\int_{B_A(o)} u^- \, \mathrm{dv} > 0.$$

根据 (4.4)，我们可以将引理 4.1 应用于函数 $f\colon [A, +\infty) \to \mathbb{R}_{>0}$，其定义为

$$f : r \mapsto \int_{B_r(o)} u^- \, \mathrm{dv}$$

其中 $\beta = 1$，从而得到

$$f(R) \geq \left(\frac{R}{A}\right)^{\log_\sigma(\alpha A^\gamma + 1)} \frac{f(A)}{\alpha A^\gamma + 1}$$

对任意 $R > A$ 均成立。取 $A \geq R_0$ 足够大，使得

$$\log_\sigma(\alpha A^\gamma + 1) \geq k + 1$$

我们有

$$f(R) \geq \left(\frac{R}{A}\right)^{k+1} \frac{f(A)}{\alpha A^\gamma + 1}$$

对每个 $R > A$，从而与 (4.3) 矛盾。因此，$u^- = 0$几乎处处，这就证明了该结论。□

正如 D. Bianchi 和 A.G. Setti 在 [1, 推论 2.3], 中所证明的，存在满足 (4.2) 的一族 $\{\phi_R\}_R$ 的一个充分条件是里奇曲率呈次二次衰减。因此，我们得到以下推论。

推论 4.3。设 (M, g) 是一个维数为m 的完备黎曼流形，且 λ 为正常数。考虑 $o \in M$，并假设

$$\mathrm{Ric}_g \geq -(m-1)C^2(1+r^2)^{\eta},$$

其中 C为正常数， $\eta \in [-1, 1)$ 且 $r(x) := d(x, o)$ 是 M 中从 o 出发的内在距离。若 $u \in L^1_{loc}(M)$ 在分布意义下满足 $-\Delta u + \lambda u \geq 0$，并且对某个 $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_{B_R(o)} u^- \, \mathrm{dv} = O(R^k) \quad as \ R \to +\infty,$$

则 $u \geq 0$ 在 M 中几乎处处成立。

4.2. 具有一致有界拉普拉斯算子的截断函数。本节的第二个定理是一项基于存在一族拉普拉斯算子一致有界的截断函数的 L^1_{loc} 正性保持性质。其证明结构与定理 4.2 的证明非常相似，并用到了以下迭代引理。

引理 4.4. 设 $A > 0$和 $f\colon [A, +\infty) \to (0, +\infty)$ 是一个单调不减函数。假设存在 $\alpha > 1$ 和 $\sigma > 1$，使得

$$f(r) \leq \frac{1}{\alpha} f(\sigma r) \tag{4.5}$$

对每个 $r \geq A$均成立。那么， f 满足

$$f(R) \geq f(A) \left(\frac{R}{A\sigma} \right)^{\theta}$$

对每个 $R > A$均成立，其中 $\theta = \frac{\ln(\alpha)}{\ln(\sigma)} > 0$。

证明。反复应用 (4.5)，对每个 $n \in \mathbb{N}$，我们得到

$$f(r) \leq \frac{1}{\alpha^n} f(\sigma^n r)$$

对任意 $r \geq A$均成立。因此，对任意 $R > A$

$$f(R) \geq f(A\sigma^n) \geq \alpha^n f(A) \geq \alpha^{\log_\sigma(\frac{R}{A\sigma})} f(A) = f(A) \left(\frac{R}{A\sigma} \right)^{\frac{\ln(\alpha)}{\ln(\sigma)}},$$

其中 $n = n(R, A, \sigma)$ 是满足 $\sigma^{n+1} \geq \frac{R}{A} \geq \sigma^n$ 的唯一自然数。证明完毕。□

现在我们可以陈述第二个主要定理，该定理涉及具有 L^1-控制增长的函数。

定理 4.5（广义 L^1_{loc} 正性保持性质）。设 (M, g) 为一个完备黎曼流形，且 λ 为正常数。假设对于一个固定的 $o \in M$，存在一些正常数 C 和 R_0，以及一个满足以下条件的常数 $\sigma > 1$：对于每个 $R > R_0$，都存在 $\phi_R \in C_c^2(M)$，使得

$$\begin{cases} 0 \le \phi_R \le 1 & \text{in } M \\ \phi_R \equiv 1 & \text{in } B_R(o) \\ \operatorname{supp}(\phi_R) \subset B_{\sigma R}(o) & \\ |\Delta \phi_R| \le C & \text{in } M. \end{cases} \tag{4.6}$$

若 $u \in L^1_{loc}(M)$ 在分布意义下满足 $-\Delta u + \lambda u \ge 0$，且

$$\int_{B_R(o)} u^- \, \mathrm{dv} = o(R^\theta) \quad as \ R \to +\infty \tag{4.7}$$

满足 $\theta = \underline{\ln(1+\frac{\lambda}{C})} \ln(\sigma)$，则在 M 中几乎处处有 $u \ge 0$。

证明。与定理 4.2 的证明一样，我们得到

$$\lambda \int_M u^- \phi_R \, \mathrm{dv} \le \int_M u^- \Delta \phi_R \qquad \forall R > R_0$$

这意味着

$$\int_{B_R(o)} u^- \, \mathrm{dv} \le \frac{C}{\lambda + C} \int_{B_{\sigma R}(o)} u^- \, \mathrm{dv} \qquad \forall R > R_0. \tag{4.8}$$

若在 M 中 $u^- \ne 0$ 几乎处处成立，则存在 $A > 0$ 使得

$$\int_{B_A(o)} u^- \, \mathrm{dv} > 0.$$

由 (4.8)，我们可以将引理 4.4 应用于

$$f : r \mapsto \int_{B_r(o)} u^- \, \mathrm{dv}$$

并且 $\alpha = \frac{C+\lambda}{C}$，由此可得，对于每个 $R > A$, ~~都~~有 $f(R) \ge C_0 R^{\ln(\alpha)\ln(\sigma)}$，其中$C_0 > 0$。这与 (4.7) 矛盾。因此，$u^- = 0$ 在 M 中几乎处处成立，证毕。□

在 [5, 推论 4.1]，的证明中，作者仅假设里奇曲率存在下界，便构造出一族满足 (4.6) 的截断函数。因此，我们得到如下结果

推论 4.6. 设 (M, g) 为一个完备黎曼流形，且 λ 为正常数。考虑 $o \in M$，并假设

$$\mathrm{Ric}_g(x) \ge -G^2(r(x))$$

对每个 $x \in M \setminus B_R(o)$，其中 $G \in C^\infty$ 由下式给出

$$G(t) = \alpha t \prod_{0 \le j \le k} \ln^{[j]}(t)$$

对于 $t > 1$、$\alpha > 0$ 和 $k \in \mathbb{N}$。那么，存在一个常数 $\theta = \theta(\lambda, M, \alpha, k) > 0$，使得如果 $u \in L^1_{loc}(M)$ 满足 $-\Delta u + \lambda u \ge 0$（在分布意义下），并且

$$\int_{B_R(o)} u^- \, \mathrm{dv} = o(R^\theta) \quad as \ R \to +\infty,$$

那么在 M 中，$u \ge 0$ 几乎处处成立。特别是，L^1 正性保持性质在以下函数族中成立

$$\{u \in L^1_{loc}(M) \ : \ u^- \in L^1(M)\}.$$

注释 4.7. 在 [2, 定理 B], 中，作者构造了一个反例，说明在一个完备二维流形上，若高斯曲率具有 $K(x) \sim -Cr(x)^{2+\epsilon}$（其中 $\epsilon > 0$）的渐近形式，则 L^1 正性保持性质不成立。这表明推论 4.6 中的结果是尖锐的。

注释 4.8. 若以刘维尔型性质来表述，我们的推论 4.6 可与例如 [11, 定理 C], 作比较，后者的作者研究了 $\lambda = 0$ 次调和函数的情形。他们的结果表明，满足精确逐点指数控制和对数 L^1 增长条件的 C^1非负次调和函数必为常数。他们还给出了一个旋转对称例子（M, g），其高斯曲率为 $K(x) \sim -Cr(x)^2$，该例表明，若没有逐点控制，则存在一个无界的 $\Delta u = 1$ 对数 L^1增长光滑解。因此，在保持推论 4.6 的曲率限制的前提下，若要在纯 L^1增长条件下得到刘维尔结论（其增长甚至快于对数增长），就必须假设 $\lambda > 0$。

5. An application to minimal submanifolds

回顾一下，若浸入子流形 $x\colon \Sigma^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ 的平均曲率向量场满足 $H^\Sigma = 0$，则称其为极小子流形。一个标准事实是，极小性条件等价于等距浸入的坐标函数为调和函数，即，

$$\Delta^\Sigma x_i = 0 \quad \forall i = 1, ..., m.$$

特别地，这意味着对于欧几里得空间中的任意极小子流形，

$$\Delta^\Sigma |x|^2 = 2n.$$

作为第 3 节主要结果的应用，我们证明完备极小子流形满足以下 L^p 外在距离增长条件。

推论 5.1. 设 $x:\Sigma\hookrightarrow\mathbb{R}^m$ 为完备极小子流形，并假设存在正函数 $\xi:\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}_{>0}$，使得

$$(d^{\mathbb{R}^m}(x,o))^2\leq\xi(d^\Sigma(x,o))\qquad and\qquad \xi(R)=O(R^{2-\epsilon}),\ as\ R\to+\infty$$

对于某些常数 $C>0$ 和 $\epsilon\in(0,2]$，以及某个固定原点 $o\in\Sigma$。于是，对于每个 $p\in(1,+\infty)$,

$$\limsup_{R\to+\infty}\frac{\int_{B_R^\Sigma(o)}\xi^p\ \mathrm{dv}_\Sigma}{e^{\theta R^{\frac{\epsilon}{2}}}}>0, \tag{5.1}$$

其中 $\theta=\sqrt{\frac{(p-1)C}{e-1}}$。

证明。不失一般性，我们可以假设 $o=0\in\mathbb{R}^m$。令

$$w(x):=d^{\mathbb{R}^m}(x,o)=|x|^2$$

并定义

$$\lambda(x):=\frac{2n}{\xi(d^\Sigma(x,o))}.$$

Then

$$\Delta^\Sigma w=2n=\lambda\xi\geq\lambda w.$$

反证法：假设对于某个 $p\in(1,+\infty)$，(5.1) 不成立。那么

$$0=\limsup_{R\to+\infty}\frac{\int_{B_R^\Sigma(o)}\xi^p\ \mathrm{dv}_\Sigma}{e^{\theta R^{\frac{\epsilon}{2}}}}\geq\limsup_{R\to+\infty}\frac{\int_{B_R^\Sigma(o)}w^p\ \mathrm{dv}_\Sigma}{e^{\theta R^{\frac{\epsilon}{2}}}}\geq 0,$$

这表明

$$\int_{B_R^\Sigma(o)}w^p\ \mathrm{dv}_\Sigma=o(e^{\theta R^{\frac{\epsilon}{2}}}),\ R\to+\infty.$$

将定理 3.2 应用于刘维尔型结果，可得 $w\equiv 0$。矛盾。□

注 5.2。在推论 5.1 的假设下，我们可以得到关于 $|B_R^\Sigma|$ 行为的渐近估计。事实上，由于存在两个常数$C>0$ 和 $\epsilon\in(0,2]$，使得

$$\xi(x)\leq C\left(1+d^\Sigma(x,o)\right)^{2-\epsilon},$$

then

$$\int_{B_R^\Sigma(o)}\xi^p\ \mathrm{dv}\leq C\int_{B_R^\Sigma(o)}(1+d^\Sigma(x,o))^{(2-\epsilon)p}\ \mathrm{dv}\leq C(1+R)^{(2-\epsilon)p}|B_R^\Sigma(o)|.$$

由 (5.1) 可知

$$\limsup_{R\to+\infty}\frac{(1+R)^{(2-\epsilon)p}|B_R^\Sigma(o)|}{e^{\theta R^{\frac{\epsilon}{2}}}}>0.$$

由此，我们得到以下不存在性结果成立。

推论 5.3. 不存在满足以下条件的完备极小子流形 $\Sigma^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$:

a）从固定原点出发的外在距离 $o \in \Sigma$ 满足

$$\left(d^{\mathbb{R}^m}(x,o)\right)^2 \leq \xi(d^{\Sigma}(x,o))$$

with

$$\xi(R) = O(R^{2-\epsilon}) \quad as\ R \to +\infty$$

对于某个 $\epsilon \in (0,2]$;

b）以 o 为中心的 Σ 的内蕴测地球满足渐近估计

$$|B_R^{\Sigma}(o)| = o\left(R^{-(2-\epsilon)p} e^{\theta R^{\frac{\epsilon}{2}}}\right) \quad as\ R \to +\infty,$$

with $\theta = \sqrt{\frac{(p-1)C}{e-1}}$ *and* $p \in (1, +\infty)$.

注 5.4. 我们强调，在 $\epsilon = 2$ 的情形下，也就是说，对于有界极小子流形，我们得到的体积增长远非最优。事实上，在 [6] 和 [8] 中，作者得到了 $|B_R^{\Sigma}(o)| = O(e^{CR^2})$ 的增长率。这种差异源于我们使用了积分技巧和估计。

References

[1] D. Bianchi 和 A. G. Setti。流形上的拉普拉斯截断函数、孔隙扩散与快速扩散及其他应用。 *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*，57 1 1 33，2018年（）：–。[2] A. Bisterzo 和 L. Marini。 L^{∞}-正性保持性质与随机完备性。 *Potential Analysis*，第 1–18 页，2022年。[3] M. Braverman、O. Milatovic 和 M. Shubin。流形上 Schr¨odinger 型算子的本质自伴性。 *Russian Mathematical Surveys*，57(4):641，2002年。[4] B. G¨uneysu、S. Pigola、P. Stollmann 和 G. Veronelli。局部光滑化空间上的次调和性新概念，以及 Braverman、Milatovic、Shubin 提出的猜想。 *arXiv preprint arXiv:2302.09423*，2023年。[5] D. Impera、M. Rimoldi 和 G. Veronelli。高阶距离型函数与 Sobolev 空间。 *Advances in Mathematics*，396:108166，2022年。[6] L. Karp。完备黎曼流形上的微分不等式及其应用。*Math. Ann.*，272(4):449–459，1985年。[7] L. Mari、M. Rigoli 和 A. G. Setti。黎曼流形上扩散型算子的 Keller–Osserman 条件。 *Journal of Functional Analysis* 258 2 665 712, , 2010

（）：–。[8] S. Pigola、M. Rigoli 和 A. G. Setti。关于极大值原理与随机完备性的注记。 *Proc. Amer. Math. Soc.*，131(4):1283–1288，2003年。[9] S. Pigola、D. Valtorta 和 G. Veronelli。黎曼流形上的逼近、正则性与正性保持。 *arXiv preprint arXiv:2301.05159*，2023年。[10] S. Pigola 和 G. Veronelli。 L^p 正性保持与 M. Braver-man、O. Milatovic 及 M. Shubin 提出的猜想。 *arXiv preprint arXiv:2105.14847*，2021年。[11] M. Rigoli 和 A. G. Setti。关于 φ-次调和函数的 Liouville 型定理。*Revista Matematica Iberoamericana*，17(3):471–520，2001年。

Università degli Studi di Milano-Bicocca,
Dipartimento di Matematica eApplicazioni, Via Cozzi 55,
20126 Milano - ITALY*Email address*: a.bisterzo@campus.unimib.it
Université Picardie Jules Verne, LAMFA, UMR CNRS 7352,
33 rue St. Leu, 80039 Amiens - FRANCE*Email address*:
alberto.farina@u-picardie.frUniversità degli Studi di Milano-Bicocca,
Dipartimento di Matematica eApplicazioni, Via Cozzi 55,
20126 Milano - ITALY*Email address*: stefano.pigola@unimib.it