用于热操控的双尺度数据驱动设计

Daicong Da，Wei Chen*

美国伊利诺伊州埃文斯顿，西北大学机械工程系，邮编 *60208*

arXiv:2304.00747v1 [cs.CE] 3 Apr 2023

摘要

数据驱动方法在计算力学与设计领域日益受到关注。本研究探讨了适用于具有多种功能的热超材料的双尺度数据驱动设计。为解决多尺度设计的复杂性，我们将设计变量设为源自低尺度晶胞的均质化热导率矩阵的分量。利用所开发的方法，实现了多种宏观功能，包括热斗篷、热聚集器、热旋转器/逆变器及其组合。我们进行了灵敏度分析，以确定各设计变量对所需功能的影响，并将分析结果纳入拓扑优化。几何提取结果表明，优化后的均质化热导率与从构建的数据库中提取的热导率高度吻合；该数据库包含结构与性能信息。所设计的异质结构展现出多种热超功能，可应用于从个人计算机到航空航天工程等广泛的传热领域。

关键词：
数据驱动方法、热超材料、设计优化、均匀化、热操控、热传导

1. 引言

数据驱动方法在计算力学领域持续受到关注，并被用于实现各种目标。具体而言，在结构和材料的计算拓扑优化方面，机器学习和数据驱动算法已应用于具有特定目标的不同场景。首先，由于拓扑优化通常需要数百次设计迭代，数据驱动方法一直致力于在无需迭代的情况下获得优化后的结构或材料（即无迭代优化）。当无法避免优化迭代时，数据驱动方法则探索如何加速每次迭代中的正向和逆向过程，例如利用机器学习加速甚至取代传统的有限元（FE）求解器。此外，为了在每次迭代中更新物理模型，拓扑设计通常需要获取特定目标函数相对于

*通讯作者电子邮箱： weichen@northwestern.edu
(Wei Chen)

设计变量的梯度信息。在某些工程问题和极端条件下，如果梯度信息难以或无法获取，机器学习算法可以帮助构建感兴趣输入与输出之间的代理模型。最后，在多尺度设计优化中，当低尺度结构不规则时，设计空间会显著扩大；对于非周期性多尺度结构，因此需要新颖的数据驱动设计方法来降低设计维度。关于机器学习在单一结构拓扑设计优化中的最新综述见 [1]。关于数据库管理、超材料的数据驱动设计以及（并发）多尺度设计的综合综述见 [2]。

对于非周期性异质结构，不同局部区域由不同构建单元组成。利用数据驱动技术进行多尺度设计，并直接调整有效宏观性能，是降低设计维度的有效方法。这一策略下文称为性能 设计。该策略高度依赖均匀化方法来连接两个不同尺度，即较低层次的材料单胞或构建单元尺度，以及较高层次的结构尺度。对于仅涉及结构设计的单尺度问题，材料本构关系已知，设计变量的数量等于当前仿真所用背景有限元网格中的单元数量。相比之下，在多尺度设计中，必须调整源自代表性体积单元（RVE）拓扑结构（结构）的材料本构定律。通过经典伪密度法直接更新RVE内的拓扑结构，所需设计维度会非常高；而有效性能的维度，例如均匀化弹性或电导率张量，通常远小于RVE内的像素或有限元数量。对于存在大量RVE的非周期性多尺度结构，设计维度可以大幅降低。

采用性能设计策略的首项多尺度设计研究见于 [3], ，其特点是在材料尺度更新与每个有限元相关联的伪密度。由于材料具有各向同性，该研究仅使用两个性能参数来表征一个代表性体积单元。通过开展拓扑优化，以实现结构尺度上给定的位移目标，获得优化后的性能分布。随后，通过检索数据库，找出与优化属性相匹配的代表性体积单元，并将每个结构有限元填充为一个替代用代表性体积单元，从而组装出最终的三维非周期性多尺度结构。鉴于上述多尺度性能设计方法的通用性，该框架已扩展至正交各向异性和各向异性代表性体积单元 [4] ，用于柔顺度最小化 [5–7], ， 以实现给定的变形 [7, 8], 、应力最小化和抗断裂性 [9], ，以及动力学问题 [10]。本研究针对多种热超功能采用了类似策略。据我们所知，这是数据驱动设计方法首次应用于此类问题。

热隐身、热集中器以及热旋转器/热反转器等热超功能，长期以来一直通过变换理论 [18–20],进行研究，包括数值研究 [21–23]和实验研究 [24–26]。本文将依次阐释不同热管理功能的含义。借助变换理论，可以针对特定功能（例如热斗篷）确定所需的热学属性分布，如热导率。关于热超材料基础、应用及展望的较新综述见 [27]。热

超材料的电流控制研究见 [28, 29], , 其在电子学中的应用综述见 [30]。不采用变换理论时，也可应用基于梯度的拓扑优化设计，寻找能够实现热斗篷 [31] 和直流电 [32]中相同功能的最佳热学性质。最近，Sha 等人 [33]先利用变换理论确定优化后的热传导性质，再通过拓扑优化寻找最佳代表性体积单元。这项工作随后扩展至各向异性空间 [34] 以及全向隐身传感器 [35]。Xu 等人 [36, 37] 没有采用变换理论，而是结合保角几何理论，在二维平面和三维实体的欧几里得空间中实现了热隐身斗篷。

然而，这些前沿研究仍存在若干不足：(1) 在单尺度（结构）设计中，往往需要多种各向同性材料才能实现所需功能（因为无法调控材料的热导率） [38, 39]；(2) 对于热斗篷而言，很难使“屏蔽区”本身实现热隐身 [37]；(3) 往往难以在单一设计中实现多种功能 [40, 41]；(4) 多尺度设计中存在大量设计变量[42]；(5) 缺乏结构与材料之间的相互作用分析。

本研究首次尝试利用双尺度数据驱动设计框架，实现包括热斗篷、热聚集器和热旋转器/热反转器在内的多种热功能。构建了一个包含大量代表性体积单元构造结构及其热传导性质的数据库。采用数值均匀化计算各代表性体积单元的热导率。在结构尺度上，利用来自较低单胞尺度的热传导性质求解稳态热传导问题。推导了各项功能相对于设计变量（即性能本身）的灵敏度。通过拓扑设计获得优化的性能分布，从而在结构层级成功实现不同的热功能。随后，从数据库中选择单胞/代表性体积单元，使其与各位置的目标性能相匹配，进而组装成最终的异质结构。数值算例表明，优化性质与替代后的性质高度吻合，两者的均方误差低至9.3e-6，决定系数高达0.9998。

本文的组织结构如下。第2节介绍热传导的数值均匀化及其上层结构稳态问题。第3节给出数据驱动的性能 设计模型。第4节介绍不同热功能相对于所定义性能 设计变量的梯度信息。第5节展示数值算例。第6节介绍高尺度结构组装和提取质量分析。最后，第7节给出结论。

2. 稳态热传导问题

在较高的结构尺度上，我们将求解纯稳态热传导问题，其满足以下不含体热源项的泊松方程:

$$\operatorname{div}(\kappa \mathrm{T}) = 0, \tag{1}$$

其中，κ 为热导率。对于本文所研究的双尺度问题，RVE 的有效热导率通过均匀化理论 [43, 44]计算。与

弹性问题 [45, 46], 类似，仅与标量温度场相关的均匀化方程可表示为:

$$\int_V \tau_{,i}\kappa_{ij}T^k_{,j}dV = \int_V \tau_{,i}\kappa_{ij}T^{0(k)}_{,j}dV \tag{2}$$

and

$$\kappa^H_{ij} = \frac{1}{|V|}\int_V (T^{0(i)}_{,l} - T^{(i)}_{,l})\kappa_{lm}(T^{0(j)}_{,m} - T^{(j)}_{,m})dV \tag{3}$$

其中， τ 和T 分别表示虚温度和温度场。对于非结构网格，应在每个有限元上进行积分，均匀化热导率可写为

$$\boldsymbol{\kappa}^H = \frac{1}{|V|}\sum_{e=1}^{N_e}\int_{V_e}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}_e\boldsymbol{T}_e)^T\boldsymbol{\kappa}^e(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}_e\boldsymbol{T}_e)dV_e \tag{4}$$

其中，V 为代表性体积单元的体积，N_e 为其中的单元数，$\boldsymbol{I}$ 为二维情况下的二阶单位矩阵，$\boldsymbol{B}_e = \boldsymbol{L}_e\boldsymbol{N}_e$ ，其中$\boldsymbol{L}_e$ 为微分算子，$\boldsymbol{N}_e$ 为形函数矩阵。$\boldsymbol{T}_e$ 包含两列，分别对应于全局施加以下单位温度梯度场后得到的两个温度场:

$$\varepsilon^1_T = (1,0)^T, \text{ and } \varepsilon^2_T = (0,1)^T \tag{5}$$

$\boldsymbol{T}^0$ 在式（2）和（3）中包含两个温度场，分别对应于式（5）中的单位温度梯度场。式（2）和（3）中括号内的下标表示列号。

3. 数据驱动的性能设计模型

在经典的拓扑优化模型中，设计变量通常设为结构层级或材料代表性体积单元层级（或协同设计问题中的两个层级）的每个单元的伪密度。相比之下，我们的数据驱动性能设计模型中的设计变量明确设为均匀化热导率张量的分量，这些分量通过上一节所述方法获得。如图 1 所示，我们的设计模型假定宏观结构的拓扑结构已知，而仅优化设计域 内的代表性体积单元，通过调整其均匀化热导率来实现优化。由于本研究仅关注正交各向异性胞元，因此可用两个独立分量 $\boldsymbol{\kappa}^{11}$ 和 $\boldsymbol{\kappa}^{22}$ 完整表征均匀化有效热导率以及代表性体积单元本身:

$$\boldsymbol{\kappa}^H = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\kappa}^{11} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\kappa}^{22} \end{bmatrix} \tag{6}$$

基于 [47], ，我们采用图 2 (a) 所示的三个连续变量 $t_1, t_2,$ 和 t_3 ，构建包含不同方形代表性体积单元（几何形状）及其对应均匀化导热率 $\boldsymbol{\kappa}^{11}$ 和 $\boldsymbol{\kappa}^{22}$ （性能）的数据库。t_1 表示左右两侧固体材料所占的宽度，t_2 表示上下两侧相同的宽度，而t_3 则表示两个交叉或

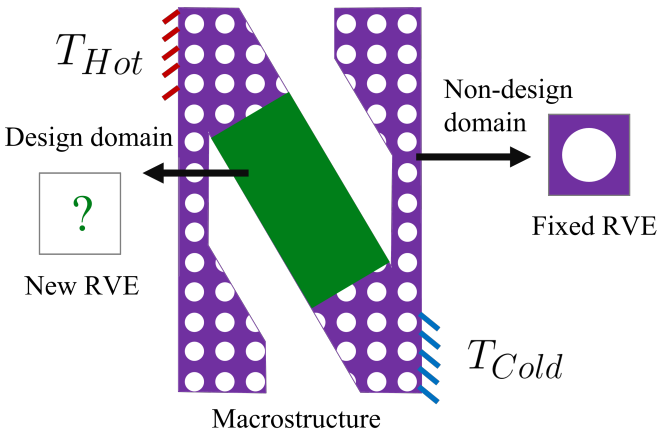


图 1：由包含各种代表性体积单元的设计域和非设计域组成的宏观结构示意图。

对角区域的宽度。给定每个方向上的像素数或有限元单元数（用于数值均匀化），即可确定t_1, t_2, t_3 的相应最大值，即每个方向上有限元单元数的一半。在我们的数据库中，方形代表性体积单元将划分为 50×50 个双线性正方形单元，因此有：$0 \le t_1 \le 50/2$、$0 \le t_2 \le 50/2$ 和 $0 \le t_3 \le 50/2$。由此可得，共有 $26 \times 26 \times 26 = 17576$ 种代表性体积单元几何形状。去除重复的几何形状后，代表性体积单元总数为 8282。

构建的数据库的热传导性质以及体积分数分布如图 2(b) 所示。图 2(b) 中，Y 轴左侧表示热导率的第二个分量 κ^{22}，右侧表示体积分数 Vf 的分布，X 轴表示热导率的第一个分量 κ^{11}。我们的构建的数据库具有几个显著优势。首先，构建的数据库分布广泛，覆盖了很大一部分可能的解。其次，由于参数设置的原因，所得代表性体积单元在整个数据库中始终保持良好连通。换言之，在进行完整的结构组装时，我们只需处理优化性质与替代性质之间的匹配，而无需处理相邻代表性体积单元之间的连通性。这是一个巨大的优势，因为我们的数据驱动设计仅针对性质进行，并且还需要根据这些性质或替代用代表性体积单元组装最终结构。最后，从体积分数分布可以看出，该数据库覆盖了从 0% 到 100% 的大量情况，如图 2(b) 中的紫色点所示。

在以下各节中，将分别介绍与多种热功能相关的不同目标函数，包括热隐身斗篷、热聚集器、热旋转器及其组合。所有设计案例研究均遵循图 3 所示的相同框架。

3.1. 热斗篷

热斗篷可根据其关注区域以多种方式进行定义。在大多数采用变换理论或非梯度型设计的文献中， [24], 热斗篷

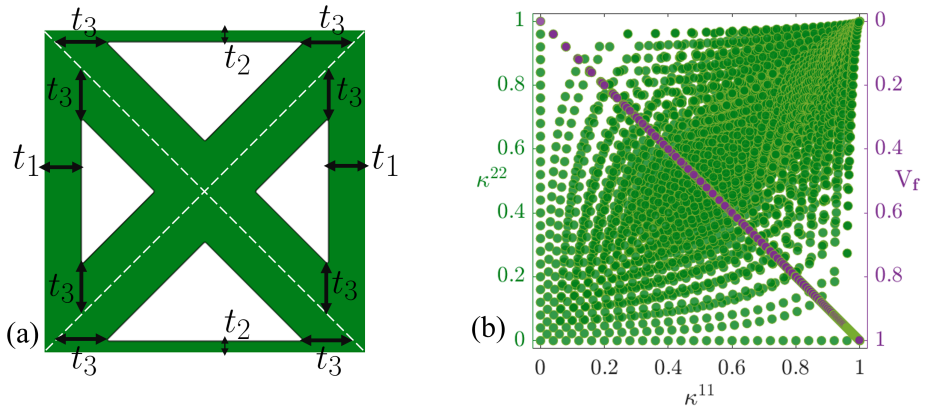


图 2：左：选定的代表性体积单元及其对应的三个参数（t_1, t_2, 和t_3）；右：根据左侧三个参数构建的数据库，涵盖了热传导性质和体积分数方面广泛的可行解。

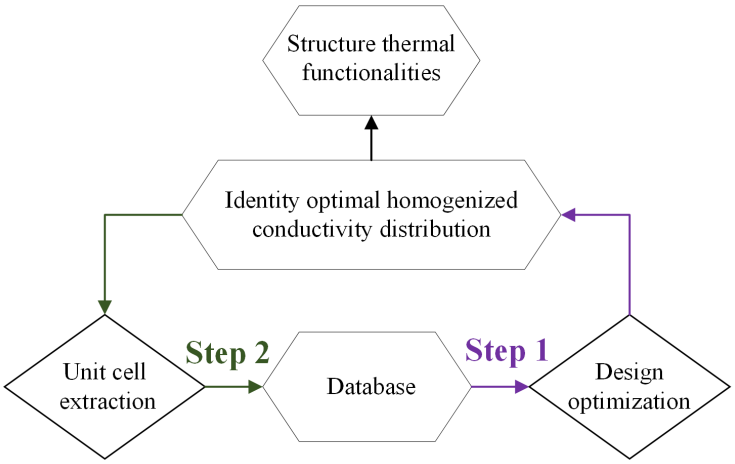


图 3：用于热功能的双尺度数据驱动性能设计框架。

要求由“屏蔽区”形成的内部空腔区域不存在温度梯度，且“屏蔽区”外部的外部区域温度与未设置“屏蔽区”时相同，如图 4 所示。图 4 (a) 中，不含任何“屏蔽区”的材料块具有均匀的温度梯度分布。该分布作为后续比较中的参考解。相比之下，图 4 (b) 中加入了“屏蔽区”（绿色区域），内部空腔区域不存在温度梯度，且与图 4 (a) 相比，外部区域的温度没有变化。

在大多数针对热斗篷的基于梯度的设计优化中， [37, 39], 如图 4 (c) 所示，上述内部区域通常被绝热体取代，此时关注区域只能是“屏蔽区”外部的外部区域。事实上，正如 [40], 所述，设计这种热斗篷的初衷是仅通过测量外部温度，就能使“屏蔽区”内的物体免受探测，从而让该物体在热学上“隐形”。在

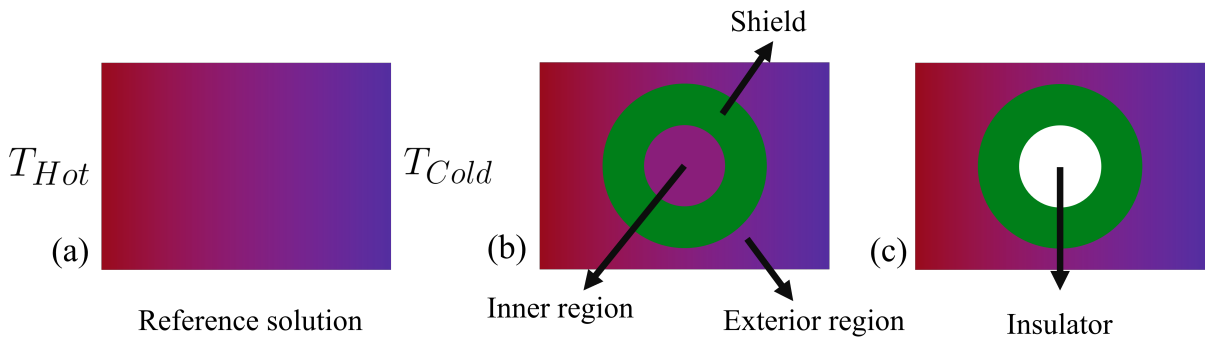


图 4：热斗篷示意图：(a) 具有参考温度分布的材料块；(b) 内部区域无温度梯度、且与 (a) 相比外部区域无温度偏差的热斗篷；(c) 内部区域含有绝热体、且与 (a) 相比外部区域无温度偏差的热斗篷。

采用热绝缘体的第二种表述中，当我们通过设计“屏蔽区”确保外部温度相对于参考分布保持不变时，就实现了隐身目标，并可将任意物体放入绝热体中使其“隐形”。因此，本研究确实采用基于梯度的数值优化，并选用第二种表述来设计热斗篷。在采用数据驱动的属性设计时，设计问题的数学表述如下：

$$\text{Minimize} : J_{ck}(\boldsymbol{\kappa}^{11}, \boldsymbol{\kappa}^{22}, \mathbf{T}) \tag{7}$$

$$\boldsymbol{\kappa}^{11}(\mathbf{x}) \tag{8}$$

$$\boldsymbol{\kappa}^{22}(\mathbf{x}) \tag{9}$$

$$\mathbf{T} \in \mathcal{S}_T \tag{10}$$

$$\text{subject} : \text{div}(\boldsymbol{\kappa}^{\text{H}}\ \text{T}) = 0, \tag{11}$$

$$T = T_{Hot},\ \text{on}\ \Gamma_L \tag{12}$$

$$T = T_{Cold},\ \text{on}\ \Gamma_R, \tag{13}$$

$$\kappa^{11}_{Min} \leq \kappa^{11} \leq \kappa^{11}_{Max}, \tag{14}$$

$$\kappa^{22}_{Min} \leq \kappa^{22} \leq \kappa^{22}_{Max}, \tag{15}$$

with

$$J_{ck} = \int_{\Omega_{Exterior}} \left| \frac{\boldsymbol{T} - \boldsymbol{T}_{Ref}}{\boldsymbol{T}_{Ref}} \right|^2 d\Omega_{Exterior}, \tag{16}$$

其中，$\boldsymbol{\kappa}^{11}_{Min}$、$\boldsymbol{\kappa}^{11}_{Max}$、$\boldsymbol{\kappa}^{22}_{Min}$和 $\boldsymbol{\kappa}^{22}_{Max}$ 是通过一个包含几何信息及其对应有效导热特性的数据库确定的。根据我们的数据库，由于假设本构各向同性材料的热导率为 $\kappa = 1$，因此 κ^{11} 和 κ^{22} 的最小值和最大值分别为 0 和 1。$\boldsymbol{T}$ 表示带有“屏蔽区”的结构的温度分布，而$\boldsymbol{T}^{Ref}$ 表示没有“屏蔽区”时的参考解。目标

函数J_{ck} 将使感兴趣区域内有“屏蔽区”和无“屏蔽区”时的温度差异最小，例如图 4 (b) 所示的上述外部区域。

显然，上述目标函数无法保证“屏蔽区”内的温度分布，因此该区域内的温度会与参考解中相同区域的温度显著不同。这一问题被认为是使用变换理论或非梯度基础设计 [20], 时面临的最大挑战之一，也就是说，“屏蔽区”本身无法实现“隐身”。幸运的是，在我们的框架中，只需定义一个不同的目标函数即可轻松解决这一问题：

$$J_{ck} = \int_{\Omega_{(Exterior\ +\ Shield)}} \left| \frac{\boldsymbol{T} - \boldsymbol{T}_{Ref}}{\boldsymbol{T}_{Ref}} \right|^2 \ d\Omega_{(Exterior\ +\ Shield)} \tag{17}$$

我们针对不同目标函数或隐身区域进行设计优化的性能，将在第5节的数值示例中展示。据我们所知，这也是首次使用基于梯度的数据驱动设计来隐身屏蔽/设计域本身。

3.2. 热集中器

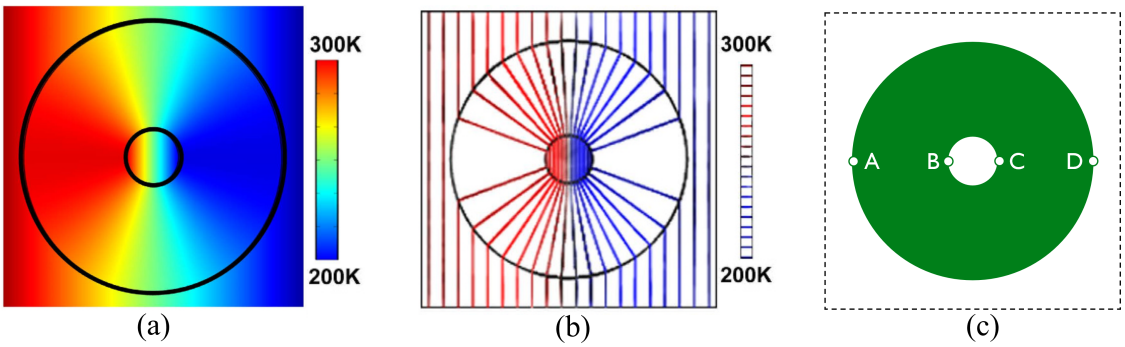
第二种有趣的热功能称为热聚集。图5（a）[16] 展示了热集中器的温度分布，其中热量集中在内部区域。图5（b）中不同的等温线也展示了这一现象或功能。等温线是温度相同的点所组成的线。再次参照文献 [16], , 根据图5（c）中A、B、C和D四个不同点的温度值，建立了热聚集指数：

$$J_{ct} = \left| \frac{T_B - T_C}{T_A - T_D} \right| \tag{18}$$

对于具有热聚集功能的理想超材料器件，上述J_{ct} 应等于 100%。图 5(a) 和 (b) 中温度分布的J_{ct} 值为 96.3%。

在我们针对热聚集器的数据驱动性能设计模型中，数学问题可表述为：

$$\begin{aligned}
&\text{Minimize}: \left(J_{ct}(\boldsymbol{\kappa}^{11}, \boldsymbol{\kappa}^{22}, \mathbf{T}) - 100\%\right)^2 \\
&\quad \boldsymbol{\kappa}^{11}(\mathbf{x}) \\
&\quad \boldsymbol{\kappa}^{22}(\mathbf{x}) \\
&\quad \mathbf{T} \in \mathcal{S}_T \\
&\text{subject}: \operatorname{div}(\boldsymbol{\kappa}^{\mathrm{H}}\, \mathrm{T}) = 0, \\
&\qquad T = T_{Hot},\ \text{on}\ \Gamma_L, \\
&\qquad T = T_{Cold},\ \text{on}\ \Gamma_R, \\
&\qquad \kappa^{11}_{Min} \le \kappa^{11} \le \kappa^{11}_{Max}, \\
&\qquad \kappa^{22}_{Min} \le \kappa^{22} \le \kappa^{22}_{Max}
\end{aligned} \tag{19}$$



(a) (b) (c)

图 5：引自参考文献 [16] 的热聚集器示意图：(a) 热聚集器的温度分布；(b) 热聚集器的等温线；(c) 水平中心线上的四个点，用于计算集中效率。

3.3. 热旋转器/逆变器

第三种热功能称为热旋转器，在极限状态下也称为热反转器。在介绍这一功能之前，先给出一种基本功能，即热或热流：

$$\vec{\boldsymbol{\phi}}_q = -\boldsymbol{\kappa}\nabla \boldsymbol{T} \tag{20}$$

热流是矢量量，负号表示热流从高温区域流向低温区域。

如图 6(a) 所示，当热源位于左边界、冷源位于右边界时，热流将从左向右流动，即在整个区域内从较高温度区域流向较低温度区域。热旋转器/逆变器的目标是操控温度分布，使热流在某些区域内从右向左流动，同时不改变热源和冷源的位置。这是超材料特性，因为如果不进行设计，靠近热源的左侧区域温度总是高于右侧区域，整个区域内的热流也总是从左向右流动。

为实现上述目标，我们选择与从左向右的单位方向向量$\boldsymbol{q}_e$ 以及感兴趣区域 Ω_{obj} 的热流相关的目标函数，在该区域中，热流将被旋转或反转：

$$J_{ri} = \sum_{\omega \in \Omega_{obj}} \hat{\boldsymbol{q}} \cdot \vec{\boldsymbol{\phi}}_q^{\omega} \tag{21}$$

$\vec{\text{感兴趣的热流}}\ \boldsymbol{\phi}_q^{\omega}$ 与单位向量 $\hat{\boldsymbol{q}} = [1 \quad 0]$ 的点积$\vec{\text{将为正值，当且仅当}}\ \boldsymbol{\phi}_q^{\omega}$ 与 $\hat{\boldsymbol{q}}$ 方向完全相同，即从左向右。通过最小化该目标函数，我们能够反转感兴趣的热流，使目标函数值变为负值。因此，我们的数据驱动性能 设计问题可以数学表述为：

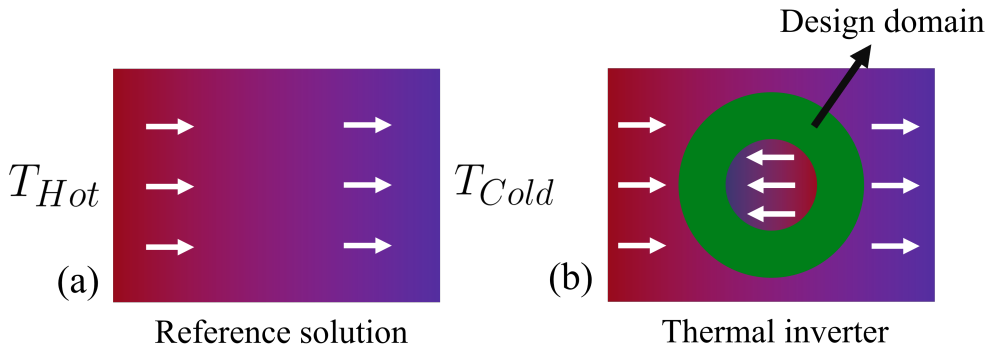


图 6：热旋转器/逆变器的示意图：(a) 具有参考温度分布的材料块；(b) 热旋转器/逆变器。

$$
\begin{aligned}
&\text{Minimize} : J_{ri}(\boldsymbol{\kappa}^{11}, \boldsymbol{\kappa}^{22}, \mathbf{T}) \\
&\quad \boldsymbol{\kappa}^{11}(\mathbf{x}) \\
&\quad \boldsymbol{\kappa}^{22}(\mathbf{x}) \\
&\quad \mathbf{T} \in \mathcal{S}_T \\
&\text{subject} : \operatorname{div}(\boldsymbol{\kappa}^{\mathrm{H}}\, \mathrm{T}) = 0, \\
&\qquad\qquad T = T_{Hot}, \text{ on } \Gamma_L, \\
&\qquad\qquad T = T_{Cold}, \text{ on } \Gamma_R, \\
&\qquad\qquad \kappa^{11}_{Min} \leq \kappa^{11} \leq \kappa^{11}_{Max}, \\
&\qquad\qquad \kappa^{22}_{Min} \leq \kappa^{22} \leq \kappa^{22}_{Max}
\end{aligned}
\tag{22}
$$

3.4. 多种热功能

采用我们的数据驱动的基于梯度的设计，最大的优势之一是，只需设置多个目标函数，我们就能实现多种（超材料）热功能。在这种情况下，设计优化问题可以数学表述为

$$
\begin{aligned}
\text{Minimize}: & \xi_{ck}\frac{J_{ck}}{J_{ck}^{0}}+\xi_{ct}\frac{(J_{ct}-100\%)^{2}}{(J_{ct}^{0}-100\%)^{2}}+\xi_{ri}\frac{J_{ri}}{J_{ri}^{0}} \\
& \boldsymbol{\kappa}^{11}(\mathbf{x}) \\
& \boldsymbol{\kappa}^{22}(\mathbf{x}) \\
& \mathbf{T}\in\mathcal{S}_{T} \\
\text{subject}: & \operatorname{div}(\boldsymbol{\kappa}^{\mathrm{H}}\,\mathrm{T})=0, \\
& T=T_{Hot},\ \text{on}\ \Gamma_{L}, \\
& T=T_{Cold},\ \text{on}\ \Gamma_{R}, \\
& \kappa_{Min}^{11}\le\kappa^{11}\le\kappa_{Max}^{11}, \\
& \kappa_{Min}^{22}\le\kappa^{22}\le\kappa_{Max}^{22}
\end{aligned}
\tag{23}
$$

其中，$J^{0}{}_{ck}$、J_{ct}^{0}和$J^{0}{}_{ri}$ 分别表示优化前热斗篷、热集中器和热旋转器的归一化项及对应的指标值。 ξ_{ck}、 ξ_{ct}和 ξ_{ri} 是用于多目标函数优化中不同热功能的不同权重。

4. 灵敏度分析

为了开展所提出的基于梯度的数据驱动性能设计，需要推导所选目标函数相对于设计变量（热导率的分量 $\boldsymbol{\kappa}^{11}$ 和 $\boldsymbol{\kappa}^{22}$）的梯度信息。该梯度通常称为灵敏度。为说明灵敏度分析，我们采用稳态热传导问题的离散平衡方程（式（1）：

$$
\boldsymbol{K}_{T}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{F}_{T} \tag{24}
$$

其中，$\boldsymbol{K}_{T}$ 是全局热刚度矩阵，$\boldsymbol{T}$ 是未知温度分布，$\boldsymbol{F}_{T}$表示全局温度载荷向量。全局热刚度矩阵$\boldsymbol{K}_{T}$ 可通过标准有限元方式由单元热刚度矩阵$\boldsymbol{K}_{e}$ 组装而成。对于每个有限元，$\boldsymbol{K}_{e}$ 可通过以下方式组装:

$$
\boldsymbol{K}_{e}=\int_{\Omega_{e}}\boldsymbol{B}_{e}\boldsymbol{\kappa}_{e}^{H}\boldsymbol{B}_{e}d\Omega_{e} \tag{25}
$$

其中，$\boldsymbol{\kappa}_{e}^{H}$由式（4）计算得出。下文将推导不同/多种功能指标相对于性能设计变量的灵敏度。

4.1. 热斗篷

对于热斗篷，通过加入热平衡方程(24)，目标函数(7)可写成拉格朗日增广函数:

$$
J_{ck}^{\mathcal{L}}=J_{ck}(\boldsymbol{\kappa}^{11},\boldsymbol{\kappa}^{22},\mathbf{T})-\boldsymbol{\lambda}^{T}\left(\boldsymbol{K}_{T}(\boldsymbol{\kappa}^{11},\boldsymbol{\kappa}^{22})\,\boldsymbol{T}-\boldsymbol{F}_{T}\right) \tag{26}
$$

其中， $\boldsymbol{\lambda}^T$ 是所谓的向量形式的拉格朗日乘子。以目标函数式(16)为例，上式还可进一步写为:

$$J_{ck}^{\mathcal{L}} = \left(\frac{\boldsymbol{T}-\boldsymbol{T}_{Ref}}{\boldsymbol{T}_{Ref}}\right)^T \boldsymbol{D}\,(\frac{\boldsymbol{T}-\boldsymbol{T}_{Ref}}{\boldsymbol{T}_{Ref}}) - \boldsymbol{\lambda}^T\left(\boldsymbol{K}_T(\boldsymbol{\kappa}^{11},\boldsymbol{\kappa}^{22})\,\boldsymbol{T}-\boldsymbol{F}_T\right) \tag{27}$$

其中，$\boldsymbol{D}$ 是与感兴趣隐身域的查询节点相关联的对角矩阵。以对拉格朗日函数 $J^{\mathcal{L}}{}_{ck}$ 关于热传导分量 κ_e^{11}求偏导为例，可得:

$$\frac{\partial J_{ck}^{\mathcal{L}}}{\partial \kappa_e^{11}} = 2\boldsymbol{D}\left(\frac{\boldsymbol{T}-\boldsymbol{T}_{Ref}}{\boldsymbol{T}_{Ref}^2}\right)\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \kappa_e^{11}} - \boldsymbol{\lambda}^T\left(\frac{\partial \boldsymbol{K}_T}{\partial \kappa_e^{11}}\boldsymbol{T} + \boldsymbol{K}_T\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \kappa_e^{11}}\right) \tag{28}$$

$$= 2\boldsymbol{D}\left(\frac{\boldsymbol{T}-\boldsymbol{T}_{Ref}}{\boldsymbol{T}_{Ref}^2}\right)\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \kappa_e^{11}} - \boldsymbol{\lambda}^T\frac{\partial \boldsymbol{K}_T}{\partial \kappa_e^{11}}\boldsymbol{T} - \boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{K}_T\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \kappa_e^{11}} \tag{29}$$

$$= \left(2\boldsymbol{D}\left(\frac{\boldsymbol{T}-\boldsymbol{T}_{Ref}}{\boldsymbol{T}_{Ref}^2}\right) - \boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{K}_T\right)\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \kappa_e^{11}} - \boldsymbol{\lambda}^T\frac{\partial \boldsymbol{K}_T}{\partial \kappa_e^{11}}\boldsymbol{T} \tag{30}$$

Th通过令以下各项成立，可以消去式（30）右侧的第一项

$$2\boldsymbol{D}\left(\frac{\boldsymbol{T}-\boldsymbol{T}_{Ref}}{\boldsymbol{T}_{Ref}^2}\right) - \boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{K}_T = 0 \tag{31}$$

通过求解伴随方程（31），可得乘子为

$$\boldsymbol{\lambda}^T = 2\boldsymbol{D}\left(\frac{\boldsymbol{T}-\boldsymbol{T}_{Ref}}{\boldsymbol{T}_{Ref}^2}\right)\boldsymbol{K}_T^{-1} \tag{32}$$

最后，推导得到的灵敏度可写为

$$\frac{\partial J_{ck}^{\mathcal{L}}}{\partial \boldsymbol{\kappa}^{11}} = 2\boldsymbol{D}\left(\frac{\boldsymbol{T}-\boldsymbol{T}_{Ref}}{\boldsymbol{T}_{Ref}^2}\right)\boldsymbol{K}_T^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{K}_T}{\partial \kappa_e^{11}}\boldsymbol{T} \tag{33}$$

其中， ${}^{\partial}\boldsymbol{K}_{\partial \kappa_e^{11}}{}^{T}$ 可通过有限元格式运算直接获得，而 ${}^{\partial}\boldsymbol{K}_{\partial \kappa_e^{22}}{}^{T}$ 亦然。对于式（16）和式（17）中的~~不~~同目标函数，只需通过更改对角矩阵 $\boldsymbol{D}$来更新方程。

4.2. 热聚集器

首先，热聚集器指标公式（18）可改写为:

$$J_{ct} = \left|\frac{T_B - T_C}{T_A - T_D}\right| = \left|\frac{\boldsymbol{V}_B\boldsymbol{T} - \boldsymbol{V}_C\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{V}_A\boldsymbol{T} - \boldsymbol{V}_D\boldsymbol{T}}\right| \tag{34}$$

其中，$\boldsymbol{V}_A$、$\boldsymbol{V}_B$、$\boldsymbol{V}_C$和$\boldsymbol{V}_D$ 分别是与点A、B、C和D处有限元节点相关联的行向量（与上文的对角矩阵$\boldsymbol{D}$ 类似）。同样，仿照上文对热斗篷的灵敏度

推导，我们首先得到热集中器的增广拉格朗日函数如下:

$$\begin{aligned} J_{ct}^{\mathcal{L}} = &\left(J_{ct}(\boldsymbol{\kappa}^{11},\boldsymbol{\kappa}^{22},\mathbf{T}) - 100\%\right)^2 - \boldsymbol{\lambda}_A^T\left(\boldsymbol{K}_T(\boldsymbol{\kappa}^{11},\boldsymbol{\kappa}^{22})\,\boldsymbol{T} - \boldsymbol{F}_T\right) \\ &- \boldsymbol{\lambda}_B^T\left(\boldsymbol{K}_T(\boldsymbol{\kappa}^{11},\boldsymbol{\kappa}^{22})\,\boldsymbol{T} - \boldsymbol{F}_T\right) - -\boldsymbol{\lambda}_C^T\left(\boldsymbol{K}_T(\boldsymbol{\kappa}^{11},\boldsymbol{\kappa}^{22})\,\boldsymbol{T} - \boldsymbol{F}_T\right) \\ &- \boldsymbol{\lambda}_D^T\left(\boldsymbol{K}_T(\boldsymbol{\kappa}^{11},\boldsymbol{\kappa}^{22})\,\boldsymbol{T} - \boldsymbol{F}_T\right) \end{aligned} \tag{35}$$

将式（34）代入式（35），可得

$$\begin{aligned} J_{ct}^{\mathcal{L}} = &\left(\frac{\boldsymbol{V}_B\boldsymbol{T} - \boldsymbol{V}_C\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{V}_A\boldsymbol{T} - \boldsymbol{V}_D\boldsymbol{T}} - 1\right)^2 - \boldsymbol{\lambda}_A^T\left(\boldsymbol{K}_T\,\boldsymbol{T} - \boldsymbol{F}_T\right) - \boldsymbol{\lambda}_B^T\left(\boldsymbol{K}_T\,\boldsymbol{T} - \boldsymbol{F}_T\right) \\ &- \boldsymbol{\lambda}_C^T\left(\boldsymbol{K}_T\,\boldsymbol{T} - \boldsymbol{F}_T\right) - \boldsymbol{\lambda}_D^T\left(\boldsymbol{K}_T\,\boldsymbol{T} - \boldsymbol{F}_T\right) \end{aligned} \tag{36}$$

再次以$J_{ct}^{\mathcal{L}}$关于 κ_e^{11}的灵敏度为例，我们有

$$\frac{\partial J_{ct}^{\mathcal{L}}}{\partial \kappa_e^{11}} = \frac{\partial \left(\frac{V_B T - V_C T}{V_A T - V_D T} - 1\right)^2}{\partial \kappa_e^{11}} \underbrace{-\lambda_A^T \left(\frac{\partial K_T}{\partial \kappa_e^{11}} T + K_T \frac{\partial T}{\partial \kappa_e^{11}}\right)}_{\Lambda_A} \underbrace{-\lambda_B^T \left(\frac{\partial K_T}{\partial \kappa_e^{11}} T + K_T \frac{\partial T}{\partial \kappa_e^{11}}\right)}_{\Lambda_B}$$
$$\underbrace{-\lambda_C^T \left(\frac{\partial K_T}{\partial \kappa_e^{11}} T + K_T \frac{\partial T}{\partial \kappa_e^{11}}\right)}_{\Lambda_C} \underbrace{-\lambda_D^T \left(\frac{\partial K_T}{\partial \kappa_e^{11}} T + K_T \frac{\partial T}{\partial \kappa_e^{11}}\right)}_{\Lambda_D} \tag{37}$$

$$= 2\left(\frac{V_B T - V_C T}{V_A T - V_D T} - 1\right) \frac{\partial \left(\frac{V_B T - V_C T}{V_A T - V_D T}\right)}{\partial \kappa_e^{11}} + \Lambda_A + \Lambda_B + \Lambda_C + \Lambda_D \tag{38}$$

$$= \underbrace{2\left(\frac{V_B T - V_C T}{V_A T - V_D T} - 1\right)}_{\mathsf{C}} \frac{1}{(V_A T - V_D T)^2} \left[\left(V_B \frac{\partial T}{\partial \kappa_e^{11}} - V_C \frac{\partial T}{\partial \kappa_e^{11}}\right)(V_A T - V_D T)\right.$$
$$\left. - \left(V_A \frac{\partial T}{\partial \kappa_e^{11}} - V_D \frac{\partial T}{\partial \kappa_e^{11}}\right)(V_B T - V_C T)\right] + \Lambda_A + \Lambda_B + \Lambda_C + \Lambda_D \tag{39}$$

$$= \frac{\mathsf{C} V_B}{(V_A T - V_D T)} \frac{\partial T}{\partial \kappa_e^{11}} - \frac{\mathsf{C} V_C}{(V_A T - V_D T)} \frac{\partial T}{\partial \kappa_e^{11}} - \frac{\mathsf{C} V_A (V_B T - V_C T)}{(V_A T - V_D T)^2} \frac{\partial T}{\partial \kappa_e^{11}}$$
$$+ \frac{\mathsf{C} V_D (V_B T - V_C T)}{(V_A T - V_D T)^2} \frac{\partial T}{\partial \kappa_e^{11}} + \Lambda_A + \Lambda_B + \Lambda_C + \Lambda_D \tag{40}$$

$$= \underbrace{\left[\frac{\mathsf{C} V_B}{(V_A T - V_D T)} - \lambda_A^T K_T\right]}_{\mathcal{A}_B} \frac{\partial T}{\partial \kappa^{11}} - \lambda_B^T \frac{\partial K_T}{\partial \kappa_e^{11}} T$$
$$+ \underbrace{\left[\frac{-\mathsf{C} V_C}{(V_A T - V_D T)} - \lambda_C^T K_T\right]}_{\mathcal{A}_C} \frac{\partial T}{\partial \kappa_e^{11}} - \lambda_C^T \frac{\partial K_T}{\partial \kappa_e^{11}} T$$
$$+ \underbrace{\left[\frac{-\mathsf{C} V_A (V_B T - V_C T)}{(V_A T - V_D T)^2} - \lambda_A^T K_T\right]}_{\mathcal{A}_A} \frac{\partial T}{\partial \kappa_e^{11}} - \lambda_A^T \frac{\partial K_T}{\partial \kappa_e^{11}} T$$
$$+ \underbrace{\left[\frac{\mathsf{C} V_D (V_B T - V_C T)}{(V_A T - V_D T)^2} - \lambda_D^T K_T\right]}_{\mathcal{A}_D} \frac{\partial T}{\partial \kappa_e^{11}} - \lambda_D^T \frac{\partial K_T}{\partial \kappa_e^{11}} T \tag{41}$$

通过求解伴随方程 $\mathcal{A}_A$、 $\mathcal{A}_B$、 $\mathcal{A}_C$和 $\mathcal{A}_D$，我们可以消去未知项 $\frac{\partial T}{\partial \kappa_e^{11}}$，并得到拉格朗日乘子 λ_A^T、 λ_B^T、 λ_C^T和 λ_D^T:

$$\text{let } \mathcal{A}_A = 0, \text{ with } \boldsymbol{\lambda}_A^T = \frac{-\complement \boldsymbol{V}_A(\boldsymbol{V}_B\boldsymbol{T} - \boldsymbol{V}_C\boldsymbol{T})}{(\boldsymbol{V}_A\boldsymbol{T} - \boldsymbol{V}_D\boldsymbol{T})^2}\boldsymbol{K}_T^{-1}, \tag{42}$$

$$\text{let } \mathcal{A}_B = 0, \text{ with } \boldsymbol{\lambda}_B^T = \frac{\complement \boldsymbol{V}_B}{(\boldsymbol{V}_A\boldsymbol{T} - \boldsymbol{V}_D\boldsymbol{T})}\boldsymbol{K}_T^{-1}, \tag{43}$$

$$\text{let } \mathcal{A}_C = 0, \text{ with } \boldsymbol{\lambda}_C^T = \frac{-\complement \boldsymbol{V}_C}{(\boldsymbol{V}_A\boldsymbol{T} - \boldsymbol{V}_D\boldsymbol{T})}\boldsymbol{K}_T^{-1}, \tag{44}$$

$$\text{let } \mathcal{A}_D = 0, \text{ with } \boldsymbol{\lambda}_D^T = \frac{\complement \boldsymbol{V}_D(\boldsymbol{V}_B\boldsymbol{T} - \boldsymbol{V}_C\boldsymbol{T})}{(\boldsymbol{V}_D\boldsymbol{T} - \boldsymbol{V}_D\boldsymbol{T})^2}\boldsymbol{K}_T^{-1}. \tag{45}$$

最后，灵敏度公式（41）可写为：

$$\begin{aligned}\frac{\partial J_{ct}^{\mathcal{L}}}{\partial \kappa_e^{11}} = 2\left(\frac{\boldsymbol{V}_B\boldsymbol{T} - \boldsymbol{V}_C\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{V}_A\boldsymbol{T} - \boldsymbol{V}_D\boldsymbol{T}} - 1\right)\Bigg[&\left(\frac{\boldsymbol{V}_A(\boldsymbol{V}_B\boldsymbol{T} - \boldsymbol{V}_C\boldsymbol{T})}{(\boldsymbol{V}_A\boldsymbol{T} - \boldsymbol{V}_D\boldsymbol{T})^2}\right)\boldsymbol{K}_T^{-1} - \left(\frac{\boldsymbol{V}_B}{(\boldsymbol{V}_A\boldsymbol{T} - \boldsymbol{V}_D\boldsymbol{T})}\right)\boldsymbol{K}_T^{-1} \\ &+ \left(\frac{\boldsymbol{V}_C}{(\boldsymbol{V}_A\boldsymbol{T} - \boldsymbol{V}_D\boldsymbol{T})}\right)\boldsymbol{K}_T^{-1} - \left(\frac{\boldsymbol{V}_D(\boldsymbol{V}_B\boldsymbol{T} - \boldsymbol{V}_C\boldsymbol{T})}{(\boldsymbol{V}_A\boldsymbol{T} - \boldsymbol{V}_D\boldsymbol{T})^2}\right)\boldsymbol{K}_T^{-1}\Bigg]\frac{\partial \boldsymbol{K}_T}{\partial \kappa_e^{11}}\boldsymbol{T}\end{aligned} \tag{46}$$

相应地，仅将 $\partial \boldsymbol{K}^T / \partial \kappa_e^{11}$ 替换为 $\partial \boldsymbol{K}^T / \partial \kappa_e^{22}$，即可通过（46）得到灵敏度 $\partial J_{ct}^{\mathcal{L}} / \partial \kappa_e^{22}$ —— ——.

4.3. 热旋转器/逆变器

对于热流旋转和逆变，热流计算中的温度梯度 $\nabla \boldsymbol{T}$ 可写为：

$$\begin{cases}\overrightarrow{\boldsymbol{\phi}}_q = -\boldsymbol{\kappa}\nabla \boldsymbol{T} \\ \nabla \boldsymbol{T} = \begin{Bmatrix}\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial x} \\ \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial y}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x} \\ \frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial y}\end{Bmatrix}\boldsymbol{T}^{(e)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{T}^{(e)}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y}\end{bmatrix}\end{cases} \tag{47}$$

$\boldsymbol{N}$ 是所采用的四节点双线性正方形单元的形函数。热旋转器/逆变器的拉格朗日函数为：

$$J_{ri}^{\mathcal{L}} = \sum_{\omega \in \Omega_{obj}} \hat{\boldsymbol{q}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{\phi}}_q^{\omega} - \boldsymbol{\lambda}^T(\boldsymbol{K}_T\,\boldsymbol{T} - \boldsymbol{F}_T) \tag{48}$$

于是，我们有

$$\frac{\partial J_{ri}^{\mathcal{L}}}{\partial \kappa_e^{11}} = \left[\sum_{\omega \in \Omega_{obj}}\left(\frac{\partial \hat{\boldsymbol{q}}}{\partial \kappa_e^{11}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{\phi}}_q^{\omega} + \hat{\boldsymbol{q}} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{\boldsymbol{\phi}}_q^{\omega}}{\partial \kappa_e^{11}}\right)\right] - \boldsymbol{\lambda}^T\underbrace{\left(\frac{\partial \boldsymbol{K}_T}{\partial \kappa_e^{11}}\boldsymbol{T} + \boldsymbol{K}_T\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \kappa_e^{11}}\right)}_{0} \tag{49}$$

如果令上式右侧的第二项等于 0，则有

$$\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \kappa_e^{11}} = -\boldsymbol{K}_T^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{K}_T}{\partial \kappa_e^{11}}\boldsymbol{T} \quad \text{and} \tag{50}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial J_{ri}^{\mathcal{L}}}{\partial \kappa_e^{11}} &= \sum_{\omega\in\Omega_{obj}}\left(\cancelto{0}{\frac{\partial \hat{\boldsymbol{q}}}{\partial \kappa_e^{11}}\cdot\vec{\boldsymbol{\phi}}_q^{\omega}} + \hat{\boldsymbol{q}}\cdot\frac{\partial \vec{\boldsymbol{\phi}}_q^{\omega}}{\partial \kappa_e^{11}}\right)\\ &= \sum_{\omega\in\Omega_{obj}}\left(-\hat{\boldsymbol{q}}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\kappa}^{(\omega)}}{\partial \kappa_e^{11}}\nabla \boldsymbol{T}^{(\omega)} - \hat{\boldsymbol{q}}\cdot\boldsymbol{\kappa}^{(\omega)}\frac{\partial\left(\boldsymbol{B}^{(\omega)}\boldsymbol{T}^{(\omega)}\right)}{\partial \kappa_e^{11}}\right)\\ &= -\sum_{\omega\in\Omega_{obj}}\left(\hat{\boldsymbol{q}}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\kappa}^{(\omega)}}{\partial \kappa_e^{11}}\nabla \boldsymbol{T}^{(\omega)}\right) - \sum_{\omega\in\Omega_{obj}}\left(\hat{\boldsymbol{q}}\cdot\boldsymbol{\kappa}^{(\omega)}\frac{\partial\left(\boldsymbol{B}^{(\omega)}\boldsymbol{L}^{(\omega)}\boldsymbol{T}\right)}{\partial \kappa_e^{11}}\right)\end{aligned} \tag{51}$$

其中，$\boldsymbol{L}^{(\omega)}$ 是与单元的查询节点 ω相关联的矩阵。最后，我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial J_{ri}^{\mathcal{L}}}{\partial \kappa_e^{11}} &= -\sum_{\omega\in\Omega_{obj}}\left(\hat{\boldsymbol{q}}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\kappa}^{(\omega)}}{\partial \kappa_e^{11}}\nabla \boldsymbol{T}^{(\omega)}\right) - \sum_{\omega\in\Omega_{obj}}\left(\hat{\boldsymbol{q}}\cdot\boldsymbol{\kappa}^{(\omega)}\boldsymbol{B}^{(\omega)}\boldsymbol{L}^{(\omega)}\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \kappa_e^{11}}\right)\\ &= -\sum_{\omega\in\Omega_{obj}}\left(\hat{\boldsymbol{q}}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\kappa}^{(\omega)}}{\partial \kappa_e^{11}}\nabla \boldsymbol{T}^{(\omega)}\right) + \sum_{\omega\in\Omega_{obj}}\left(\hat{\boldsymbol{q}}\cdot\boldsymbol{\kappa}^{(\omega)}\boldsymbol{B}^{(\omega)}\boldsymbol{L}^{(\omega)}\boldsymbol{K}_T^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{K}_T}{\partial \kappa_e^{11}}\boldsymbol{T}\right)\end{aligned} \tag{52}$$

4.4. 多种热功能

为同时实现多种热功能，式（23）中目标函数关于 κ_e^{11} 的灵敏度写作:

$$\frac{\partial\left[\xi_{ck}\frac{J_{ck}}{J_{ck}^0} + \xi_{ct}\frac{(J_{ct}-100\%)^2}{(J_{ct}^0-100\%)^2} + \xi_{ri}\frac{J_{ri}}{J_{ri}^0}\right]}{\partial \kappa_e^{11}} = \frac{\xi_{ck}}{J_{ck}^0}\frac{\partial J_{ck}^{\mathcal{L}}}{\partial \kappa_e^{11}} + \frac{\xi_{ct}}{(J_{ct}^0-100\%)^2}\frac{\partial J_{ct}^{\mathcal{L}}}{\partial \kappa_e^{11}} + \frac{\xi_{ri}}{J_{ri}^0}\frac{\partial J_{ri}^{\mathcal{L}}}{\partial \kappa_e^{11}} \tag{53}$$

其中 $\partial J_{ck}^{\mathcal{L}}/\partial \kappa_e^{11}$、$\partial J_{ct}^{\mathcal{L}}/\partial \kappa_e^{11}$ 和 $\partial J_{ri}^{\mathcal{L}}/\partial \kappa_e^{11}$分别由式（33）、（46）和（52）计算得到。

5. 双尺度热属性设计算例

本节给出多个数值算例，以验证所提出的数据驱动性能设计框架在不同热功能方面的有效性。在所有测试中，假设各向同性材料具有单位热导率，以便直接利用第3节构建的数据库。在较高尺度的结构有限元分析中，采用由四边形双线性单元构成的规则网格。所有温度均以摄氏度为单位。

5.1. 热斗篷

我们首先考虑图 7 (a) 所示具有热边界条件和温度分布的区域，其中整个左边界为温度为 100 ℃的热源，整个右边界为温度为 0 ℃的冷源。假设整个区域由具有 50% 中心圆孔的代表性体积单元（较低尺度）组成，由此得到温度分布。如果我们

仅使用一个代表性体积单元填充较高尺度上的结构单元，则整个结构可表示为图 7 (b)。换言之，在初始设计中，假设设计域（两个白色圆之间的环形区域）和非设计域（其余区域）均由相同的代表性体积单元组成。该代表性体积单元的有效导热性能为

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{bmatrix} 0.3162 & 0 \\ 0 & 0.3162 \end{bmatrix} \tag{54}$$

在较高结构尺度上，使用 75×50 个方形单元，以单元尺寸对整个区域进行离散。在结构分析过程中，采用上述均匀化有效热导率。

反映温度分布的另一种有效方法是使用等温线。如图 7 (c) 所示，每条黑色竖线都是一条等温线，其上温度值相同。对于这类边界条件，可以观察到均匀的热梯度。请注意，图 7 (a) 和 (c) 均展示了较高结构尺度上的温度分布，并且 RVE 与结构之间存在尺度分离，即它们并非图 7 (b) 所示结构的温度分布。除非另有说明，本文展示的所有温度分布均为尺度分离情形下的结果。随后，图 7 (d) 展示了在相同边界条件下、内部含有孔洞（绝热体）时的温度分布。图 7 (e) 展示了设计域外区域中图 7 (a) 与 (c) 的温度差。

设计优化后，两个设计变量或热导率分量的优化分布如图8(a)和(b)所示。优化后第一分量的最小值和最大值 κ^{11} 分别为0.3250和0.7753，第二分量的最小值和最大值 κ^{22}分别为0.0812和0.8404。这些数值均在数据库范围内，数据库中的数值范围为0至1。请注意，设计域外区域的热导率分量保持不变， κ^{11} 和 κ^{22}均为0.3162。因此，采用优化后的热传导性质得到的新温度分布如图8(c)所示。我们观察到，设计域外区域的等温线完全相同。图8(d)显示了图7(c)与图8(c)之间的温度差，该差值几乎处处为0。图7(c)所示温度分布的目标函数(16)值低至5.5e-4。

实现热隐身行为的一项挑战，是参考温度分布呈现“非均匀”或不均匀状态时的情形。如图9 (a)所示，热源不再像图7 (a)那样覆盖整个左边界，而仅位于中部的一小段区域，横跨10个结构单元。整个右边界仍为冷源。等温线上的数字表示精确的温度值。图9 (b)展示了物体内部有孔洞时的温度分布和等温线。可以看到，等温线再次发生了严重扭曲。图9 (c)展示了设计域以外区域中图9 (a)与(d)之间的直接温度差，该温度差相当大。经过设计优化后，两个设计分量的优化后温度分布如图9 (d)所示。请注意，非设计域区域的热传导性质仍与式(54)相同。在此情况下，优化后第一分量的最小值和最大值分别为0.3705和0.7134，优化后第二分量的最小值和最大值分别为0.2455和0.7748。同样，这些值均处于我们构建的数据库范围内。采用设计区域中优化后的热导率后，新的温度分布如图9 (e)所示。我们观察到

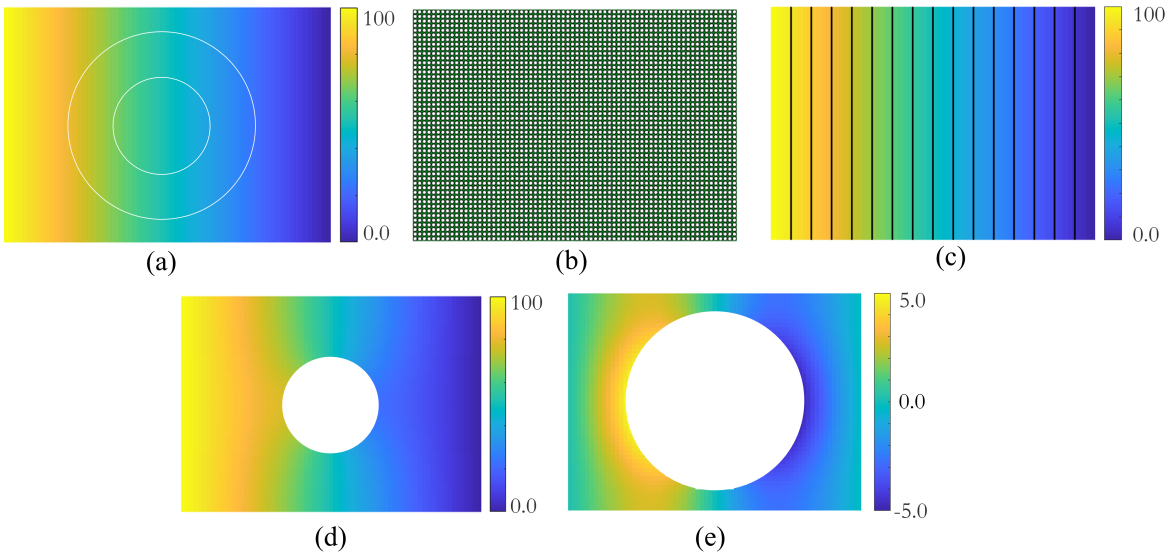


图7：（a）无孔洞时的参考温度分布，并标示设计域（两个白色圆圈之间的区域）；（b）通过在每个结构单元中仅指定一个单元，由带有中心圆孔的方形代表性体积单元组成的原始结构；（c）标示等温线的参考温度分布；（d）带有一个中心孔洞时的温度分布；（d）设计域外区域中（a）与（d）的温度差。

温度为68.75 ₀C的等温线现在回到了左侧边界区域，而非像图9 (b)中那样位于底部边界。图9 (f)展示了图9 (a)与(e)之间的温度差，该差值再次几乎处处为0。

然而，如图10（a）所示，如果我们绘制图9（a）（即参考解）与图9（e）（即优化解）之间的温度差，并将区域不仅包括设计域外部，还包括设计域内部，仍然会发现设计域内部存在巨大的差异。对于目标函数（16）而言，这是合理的，因为设计域本身并未被归类为需要隐身的区域。为解决这一问题——使用其他方法将面临重大挑战——我们随后将式（17）定义为新的目标函数，将“屏蔽区”纳入“隐身”区域。需要注意的是，设计域保持不变，其环形区域与之前相同。经过类似的设计优化过程后，两个设计变量（分量）的优化分布如图10（b）所示。第一个和第二个优化分量的最大值分别为0.927和0.9890，最小值分别为0.0485和0.2471。高尺度结构的几何形状提取方法将在下一节详细介绍。对于新的目标函数，图10（a）对应的结果值为0.536，而图10（c）对应的结果值仅为0.097。这一差异源于图10（b）所示的两个设计分量分布与图9（d）所示的优化分量分布完全不同。需要注意的是，根据图9（b）中的温度分布（即优化前的温度分布）计算得到的目标函数（17）值为5.14。

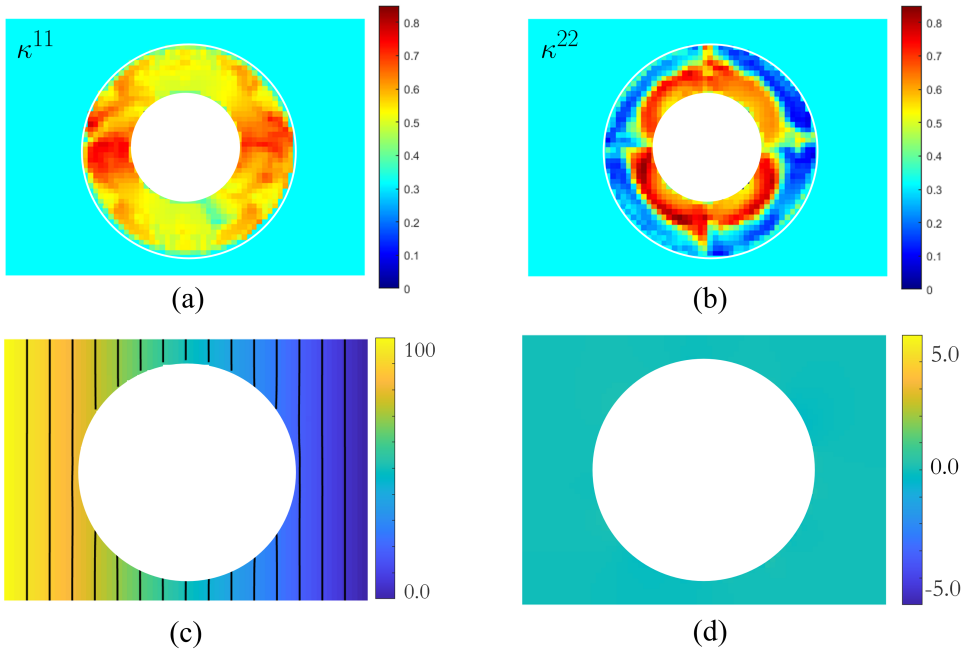


图 8: （a）热导率第一分量的优化分布 κ^{11}; （b）热导率第二分量的优化分布 κ^{22}; （c）采用优化后的热导率分布得到的温度分布及等温线; （d）设计域外区域中（c）与图 7（c）的温度差。

5.2. 热聚集器

在本小节中，我们针对热聚集的第二种功能，研究数据驱动的双尺度性能设计。使用式（18）中描述的指标来衡量热聚集程度，其值越接近1，表示热集中器的性能越好。在未进行任何设计的情况下，图7（a）所示情形的参考解指标值为0.7551。本小节中，图7（a）大白圆内部的区域作为设计域。在设计域内调整两个设计分量后，两个分量的优化分布如图11（a）所示，相应的温度分布如图11（b）所示。从图11（b）可以看出，热量高度集中在整个域的中部。此时指标值为0.9653。第一个和第二个分量的最大值分别为0.9910和0.9043，最小值分别为2.5e−9 和5.0e−9。

对于图9 (a)中非均匀分布的参考解，指标值为 0.5238，浓度较差。经过设计优化后，优化后的设计变量及其对应的温度分布分别如图 12 (a) 和 (b) 所示。第一和第二个分量的最大值分别为 0.9954 和 0.9542，最小值分别为 2.5e−9 和 5.0e−9。极值和整体分布与前一种情况惊人地相似：较大的 κ^{11} 主要分布在两侧，而较大的 κ^{22} 分布在中间。从图 12 (b) 可以看出，指标值为 0.9591，

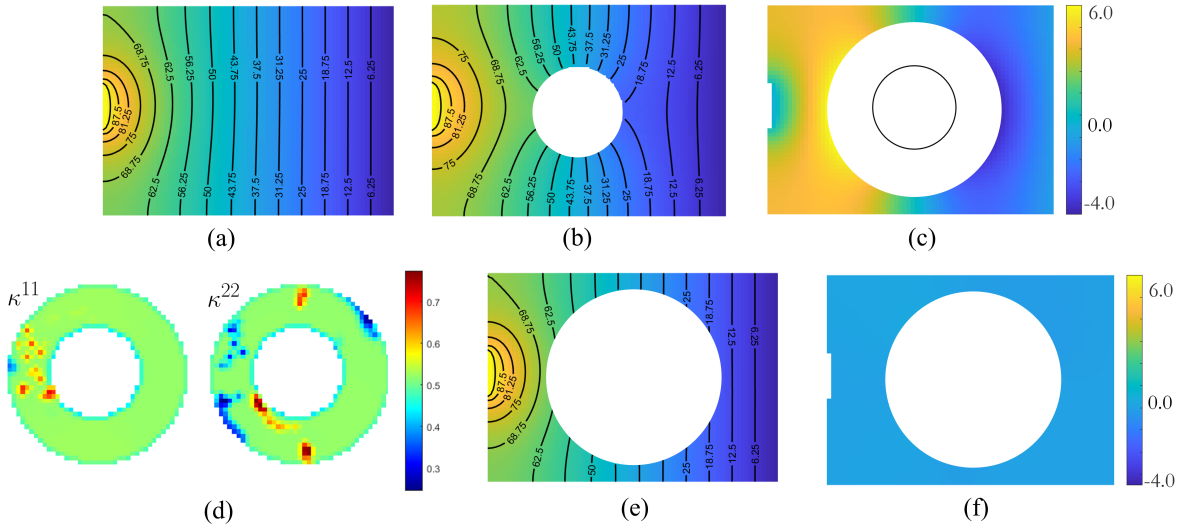


图9：（a）“非均匀”热梯度情况下的参考温度分布和等温线；（b）存在孔洞时“非均匀”热梯度的温度分布和等温线；（c）设计域外区域中（a）与（b）的温度差；（d）设计域内两个优化的导热组件；（e）设计域内存在孔洞和优化的导热组件时“非均匀”热梯度的温度分布和等温线；（f）设计域外区域中（a）与（e）的温度差。

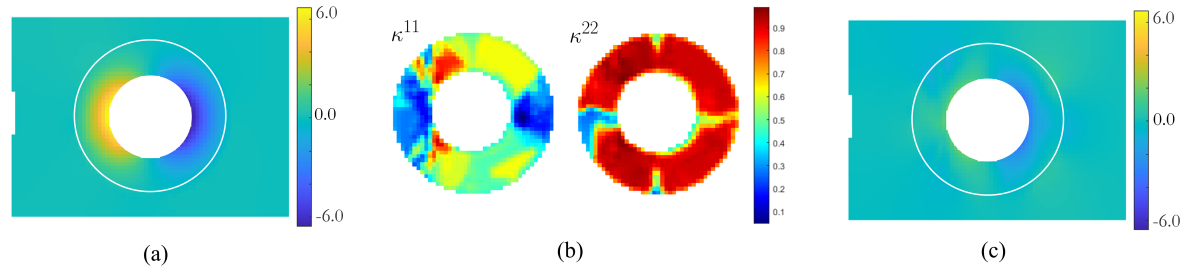


图10：（a）设计域内外区域中图9（a）与（e）的温度差；（b）设计域内两个优化的导热组件，可实现全域隐身；（c）设计优化后的温度差。

浓度良好。图 13 显示了均匀和非均匀参考分布两种情况下沿直线$y = 25$ 的温度分布。

此外，对于图9 (b)所示的情形，其中包含均匀热源和内部孔洞/绝热体，指标值已达到0.7910。此时，设计域仅为两个圆之间的环形区域。两个设计组件的优化值如图14 (a)所示，其最大值分别为0.9710和0.8465，最小值分别为0.0445和5.0e−9。对于优化后的温度分布图14 (b)，指标值提高至0.9849。

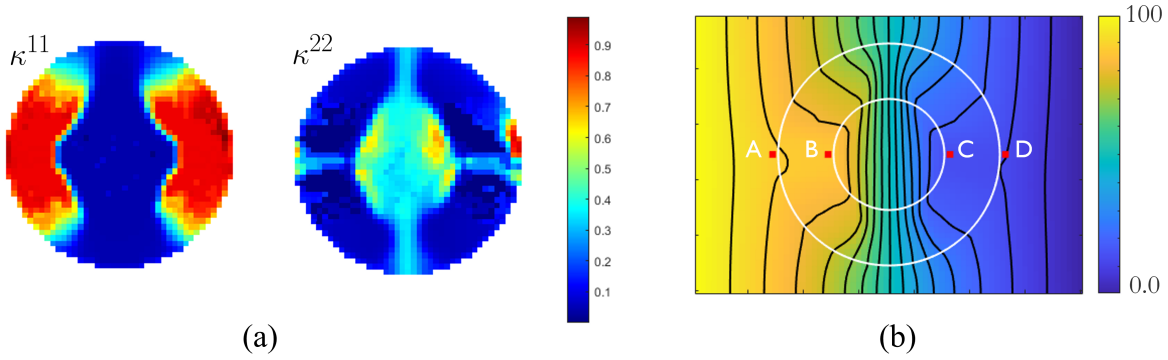


图11：初始分布图7(a)对应的两个设计组件的优化分布；(b)采用优化设计组件(a)得到的相应温度分布。

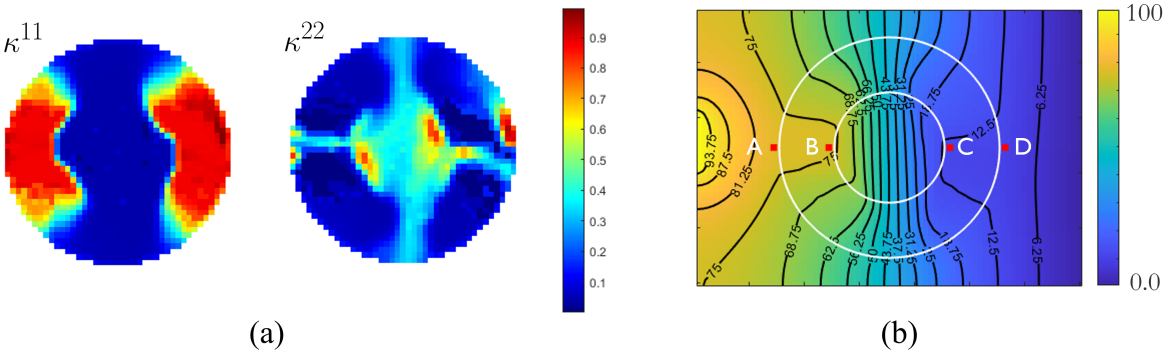


图12：初始分布图9(a)对应的两个设计组件的优化分布；(b)采用优化设计组件(a)得到的相应温度分布。

5.3. 热旋转器/逆变器

本节讨论热旋转的设计目标。参考温度分布图7 (a)的热流分布如图15 (a)所示，即热流从左向右流经整个区域。图15 (b)所示的放大区域是用于旋转热流的目标区域 Ω_{obj} （见式（21））。目标区域位于中心，长20个结构单元，宽4个结构单元。在该目标区域内，式（21）的初始计算结果为36.1371。请注意，该值为正，因为单位向量 $\hat{\boldsymbol{q}}$ 与目标区域内的热流方向相同。图15 (c)重新绘制了图7 (a)中的温度分布，并标出了50 $^{\circ}$C等温线，以便与优化后的温度分布进行比较。图15 (a)中两个黑色圆形之间的环形区域用作设计域。

经过多轮设计迭代后，优化后的热流如图 16 (a) 所示。同一放大区域内的热流如图 16 (b) 所示，其中热流方向完全反转。式 (21) 的计算结果为 -20.4483，该值为负是因为热反转器的作用。这同样是因为环形设计域中的热导率分布经过了优化，如图 16 (c) 所示。两个优化分量的最大值均为 1.0，而最小值

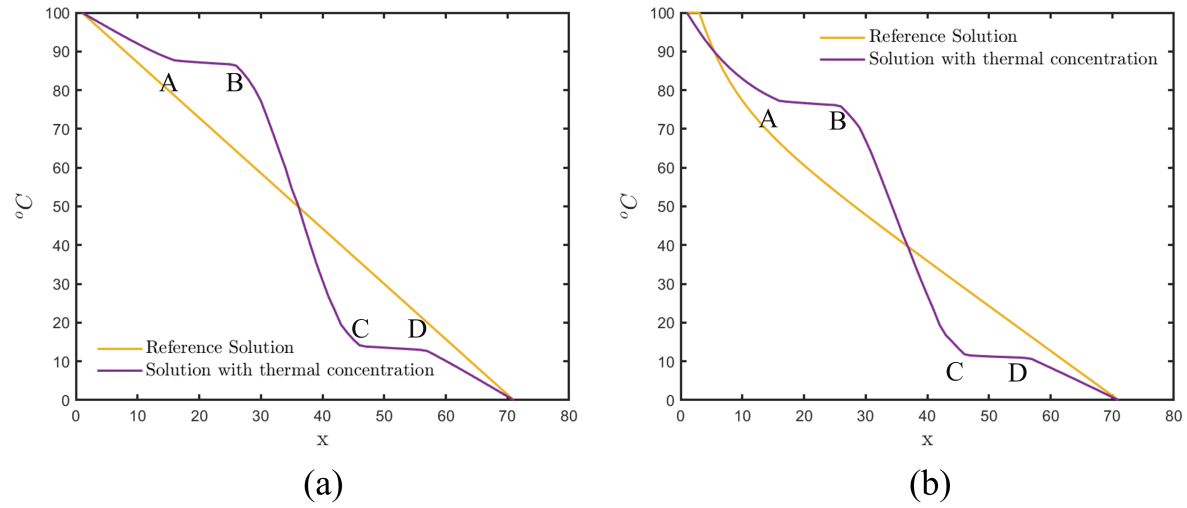


图13： (a) 图11中沿直线$y = 25$ 的温度分布；(b) 图12中沿直线$y = 25$ 的温度分布。

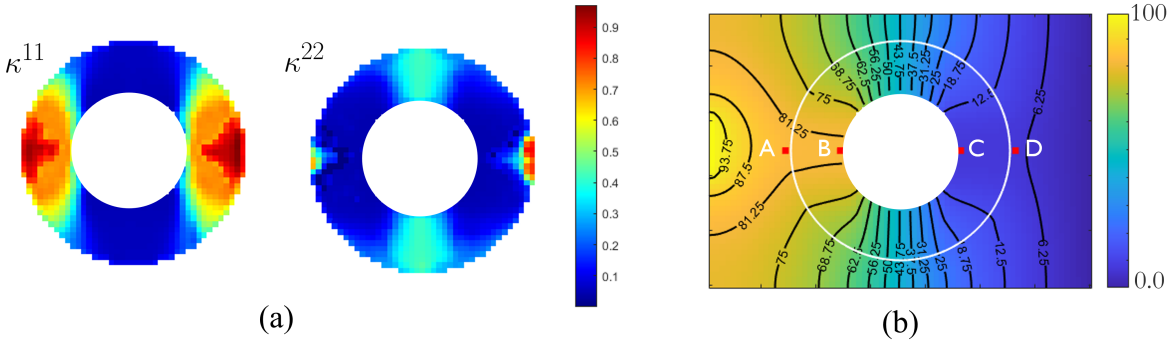


图14： (a) 针对初始分布图9(b)优化后的两个设计组件的分布；(b) 采用优化设计组件(a)得到的相应温度分布。

第一分量（κ^{11}）和第二分量（κ^{22}）的最小值分别为 1.7e−9 和 2.3e−9。图 16 (c) 显示了对应的温度分布。与图 15 (c) 相比，50 ₀C 处的等温线严重扭曲，可以清楚地看出，局部右侧区域的温度高于左侧区域。

我们不再将小黑色圆形内部的热导率设为与大圆形外部的导热率相同（例如，见图 15 (a)），而是将小圆内部的导热率设为弱 10 倍，即 $\kappa = 0.0316$。旋转热流的设计域和目标区域与之前相同。经过类似的优化过程后，优化后的热流分布如图 17 (a) 所示，同一放大区域内的热流如图 17 (b) 所示。在这种情况下，目标函数从正值 (6.3168) 降至负值 (-7.7632)。尽管图 16 (b) 和图 17 (b) 中可以看到类似的热流分布，但值得注意的是，在图 16 (b) 中，热流首先从左向右流经环形区域上方

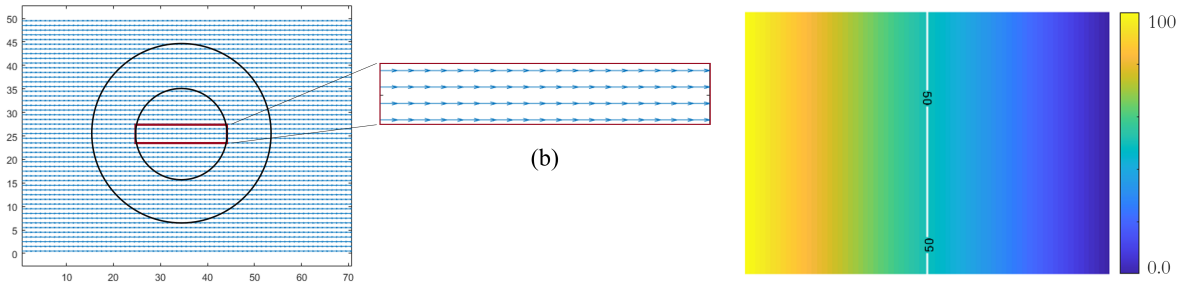


图15：（a）温度分布图7（a）的初始热通量分布；（b）目标区域中待旋转的热流；（c）对应的温度分布及温度为 50 ºC时的等温线。

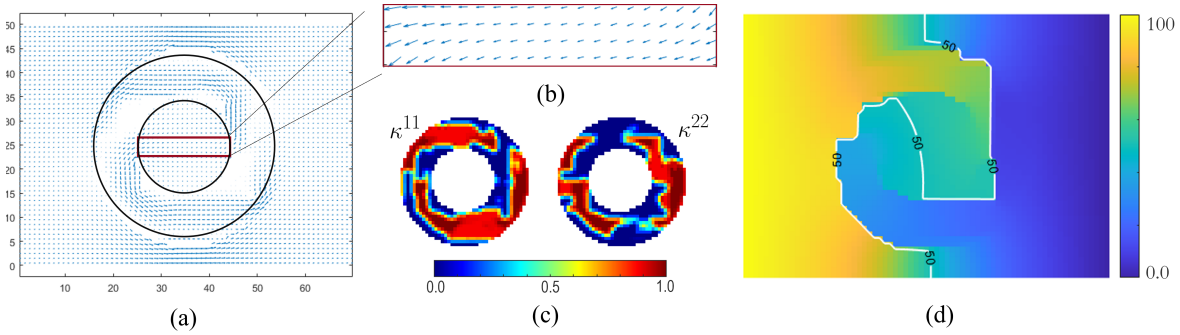


图16：（a）从整个区域热导率均相同的初始分布（图7（a））出发得到的优化热通量分布；（b）目标区域中的热流；（c）优化后的温度分布及温度为 50 ºC时的等温线。

然后在放大区域内从右向左流动。相比之下，在图 17 (b) 中，热流首先从左向右流经环形区域下方，然后在放大区域内从右向左流动。两种旋转方向都能实现局部区域内的热流反转效果。图 17 (c) 和 (d) 进一步说明了这一发现。在图 17 (c) 中，左下部分存在大量高热导率分布。两个优化分量的最大值均达到 1.0，最小值也再次接近 0。在图 17 (d) 中，环的底部温度明显高于顶部。

5.4. 多种功能

在建立上述设计优化模型后，我们可以方便地在一次设计中同时实现多种热功能，如式 23 所述。首先研究热隐身和热集中，我们选取 $\xi_{ck} = 1.5$、$\xi_{ct} = 0.5$ 和 $\xi_{ri} = 0$。与图 17 的问题设定类似，内部小圆填充了导热率为 $\kappa = 0.0316$ 的材料。设计域仍为环形区域。经过设计优化后，得到的物性分布如图 18 所示。优化后的两个分量（κ^{11} 和 κ^{22}）的最大值分别为 0.9813 和 0.9076，最小值则分别为 0.0031 和 1.1e−9。热斗篷的目标函数从原始

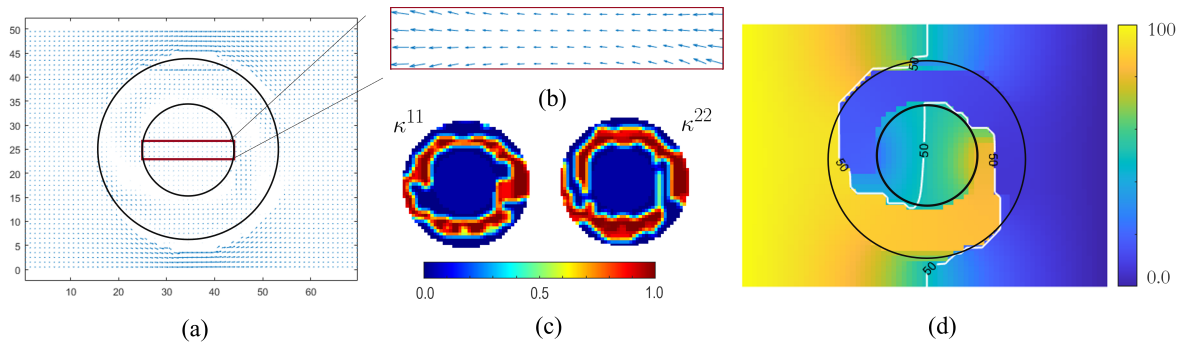


图17：（a）从初始分布开始优化得到的热流分布，其中小黑色圆形内部的热导率比外部低10倍；（b）目标区域内的热流；（c）优化后的温度分布及其在 50 ºC处的等温线。

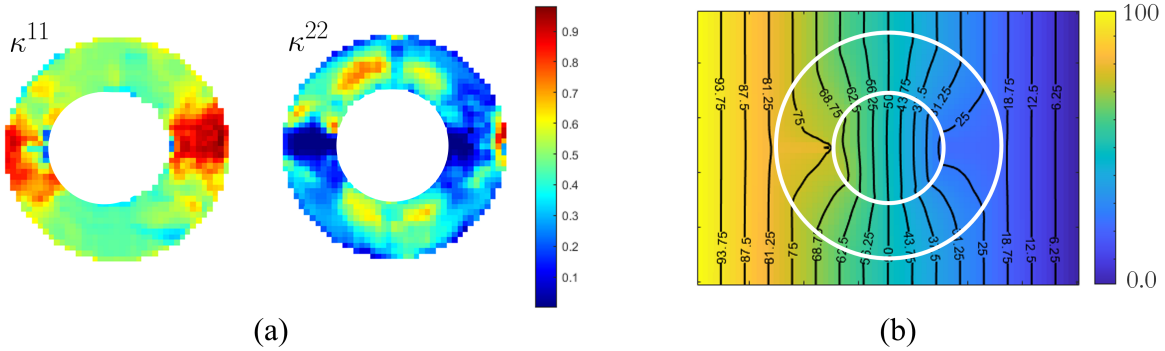


图18：（a）用于同时实现热斗篷和浓度功能的两个设计组件的优化分布；（b）采用优化设计组件（a）得到的相应温度分布。

值 88.17 降至 0.26，而热集中指数从 0.9372 增至 0.9996，展现出优异的热集中和隐身现象。

对于同时实现隐身和旋转，初始条件与上述相同，并选择 ξ_{ck} = 1.5、 ξ_{ct} = 0和 ξ_{ri} = 5。经过设计优化后，所得物性分布如图19所示。热斗篷的目标函数从原来的88.17降至最终的24.40，而热旋转的目标函数则从6.3168降至-3.0463。优化后两个分量的最大值均为1，最小值分别为5.0e−9 和3.1e−9。再次，经过性能 设计后，所需功能对应的两个目标函数均得到同时改善。

6. 提取单元胞和结构

获得优化后的物性分布后，下一步是寻找单胞并组装最终的异质结构。我们将热导率（κ^{11} 和κ^{22}）与代表性体积单元架构建立映射，以识别单胞并组装最终的异质结构。在映射和组装过程中，通常需要考虑两个标准。第一，

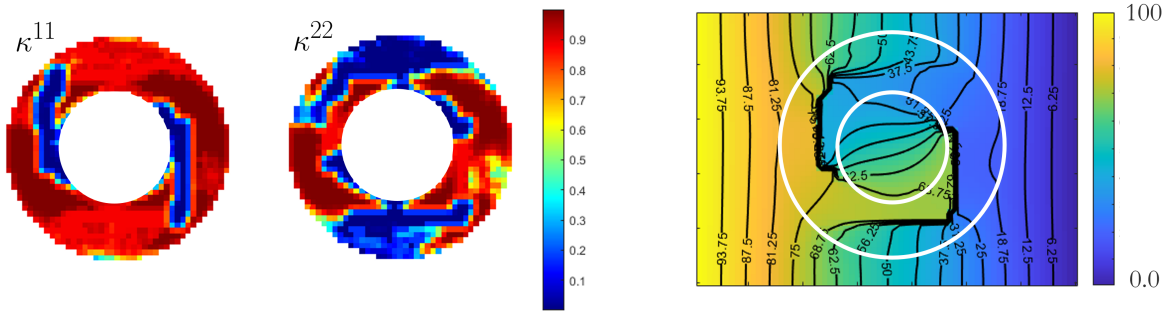


图19：（a）热斗篷与旋转/逆变换同时实现时两个设计组件的优化分布；（b）采用优化设计组件（a）后对应的温度分布。

找到的代表性体积单元需要具有优化后的热导率。第二，相邻代表性体积单元之间应具有良好的连通性。采用的数据库自动满足第二项标准，因此我们只需考虑第一项。换言之，我们需要搜索数据库，为不同的局部单元找到具有相应优化热导率的不同代表性体积单元。请注意，出于说明目的，每个结构单元仅使用一个代表性体积单元填充。

根据图8、图9和图10中的优化物性分布，需要组装三种结构来实现热斗篷。对于图8，图20（a）中以紫色显示了优化后的两个分量 κ^{11}和 κ^{22} 的散点图。通过搜索数据库，我们为每个紫色点找到最接近的结构，并在图20（a）中以绿色显示。我们通过计算每个结构单元的两个最优值与整个数据库中相应值之间的差，取绝对值后求和，再将总和最小的结构指定为替代结构。计算均方误差（*MSE*）和决定系数（R^2），以衡量数据库替代的质量。均方误差（*MSE*）的计算公式为：

$$MSE = \frac{1}{N_e}\sum_{e=1}^{N_e}(\kappa_e^{Opt} - \kappa_e^{Sub})^2 \tag{55}$$

其中，N_e 表示环形设计域中结构单元的数量。 κ_e^{Opt}是一个列向量，包含优化后的 κ^{11} 和 κ^{22}；κ_e^{Sub}是从构建的数据库中替换为κ^{11} 和 κ^{22} 后得到的对应向量。对于图 20 (a)，结果值为 4.0e−5，表明这两者匹配得非常出色。

决定系数（R^2）的计算公式为：

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{e=1}^{N_e}(\kappa_e^{Opt} - \kappa_e^{Sub})^2}{\sum_{e=1}^{N_e}(\kappa_e^{Opt} - \bar{\kappa}_e^{Opt})^2} \tag{56}$$

其中，$\bar{\kappa}_e^{Opt}$是优化数据的均值。在最佳情况下，建模值与观测值完全吻合，因此$R^2 = 1$。不出所料，对于图 20(a)，我们的R^2 值为 0.9986。图 20(b) 展示了每个设计单元填入

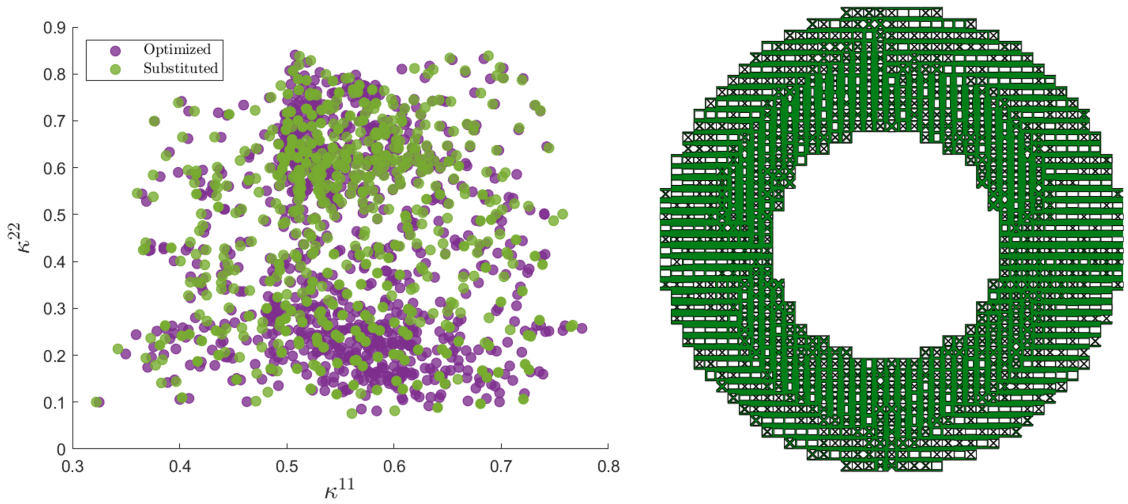


图20：（a）图8中优化属性与构建的数据库中替代属性的散点图；（b）每个结构单元中各有一个替代单元的组装结构。

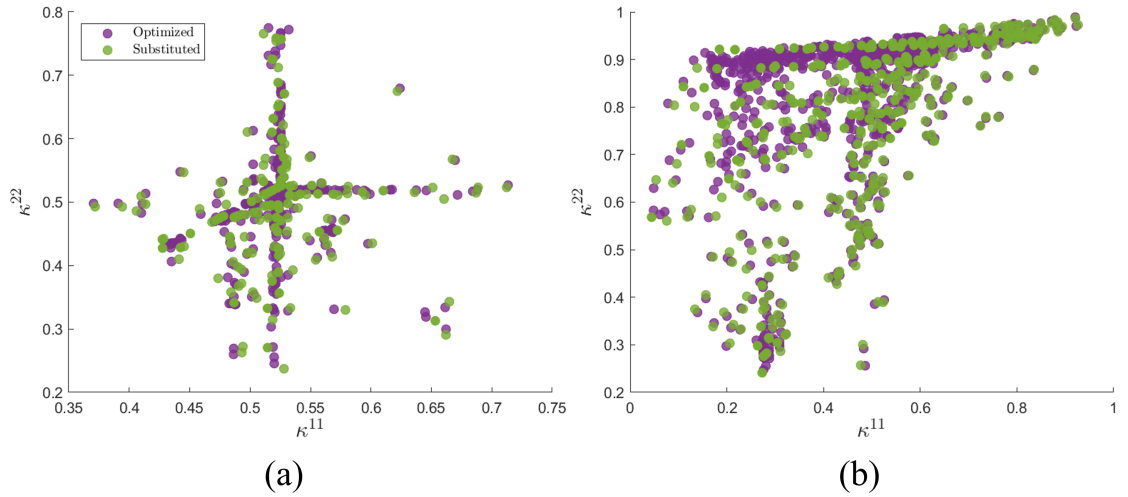


图21：（a）图9中优化属性与构建的数据库中替代属性的散点图；（b）图10中优化属性与构建的数据库中替代属性的散点图。

一个替代单元后的组装结构几何形状。请注意，在数据库中，热传导属性与代表性体积单元架构之间存在一一映射关系，因此，确定替代属性后，结构几何形状也就唯一确定了。诚然，不同的代表性体积单元架构可能具有相同的等效热导率。在这种情况下，我们只需选取数据库中排名第一的结构几何形状。这种处理方式的前提是数据库中的所有结构都良好连通。

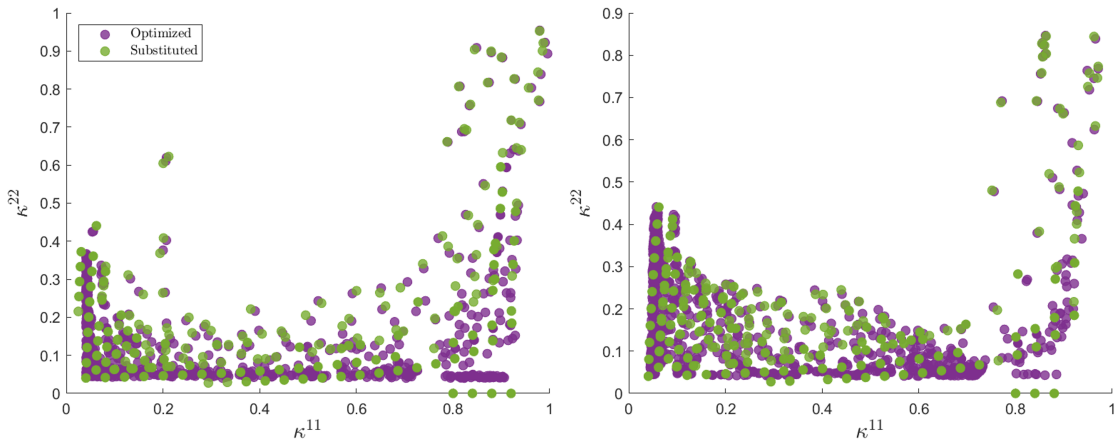


图 22：（a）图 12 中优化属性与构建的数据库中的替代属性的散点图；（b）图 14 中优化属性与构建的数据库中的替代属性的散点图。

图 21（a）和（b）分别展示了图 9 和图 10 中优化案例的优化值与替代值散点图。图 21（a）案例的均方误差 和 R^2 分别为 9.3e−6和 0.9947，图 21（b）案例的对应值分别为 7.7e−5 和 0.9987。这些结果均表明替代效果出色。

对于热聚集器，图 22（a）和（b）分别展示了图 12 和图 14 中优化案例的优化值与替代值散点图。图 22（a）的均方误差 和 R^2 分别为 1.2e−3 和 0.9989，图 22（b）的对应值分别为 1.1e−4 和 0.9984。

相应地，图 16 和图 17 中热旋转案例的散点图分别如图 23 (a) 和 (b) 所示。图 23 (a) 的均方误差 和R^2 分别为 1.1e−4和 0.9984，图 23 (b) 的则分别为 3.7e−5 和 0.9998。这些结果再次表明替代效果出色。

对于两个具有多个目标函数的案例研究，散点图如图 24 (a) 和 (b) 所示。对于 (a) 中的热斗篷和浓度，均方误差 和R^2 分别为 7.1e−5 和 0.9981。对于 (b) 中的热斗篷和旋转功能，均方误差 和R^2 分别为 7.0e−5 和 0.9995，表明在优化多个目标函数时，优化结果与替代结果高度匹配。

7. 结论

本研究提出了一种新颖的多尺度数据驱动设计方法，可在结构尺度上实现多种热功能，包括热隐身斗篷、热聚集器、热旋转器/热反演器及其组合。通过构建一个包含多种胞元结构及其对应均匀化热导率的综合数据库，我们只需调整底层单元胞

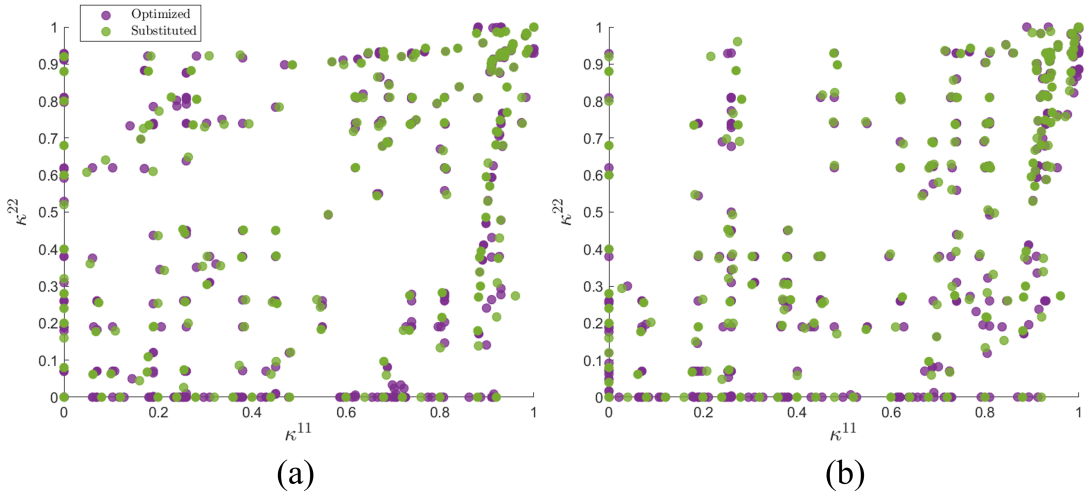


图 23：（a）图 16 中优化属性与构建的数据库中的替代属性的散点图；（b）图 17 中优化属性与构建的数据库中的替代属性的散点图。

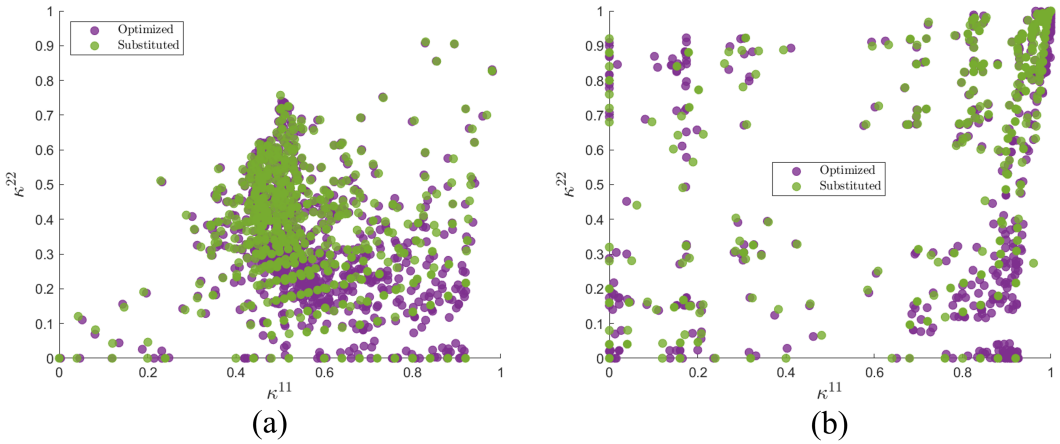


图 24：（a）热斗篷与浓度的优化属性和替代属性散点图；（b）热斗篷与旋转的优化属性和替代属性散点图。

结构和导热率，并使用单一各向同性材料，即可实现多种宏观热功能。该设计优化框架使我们能够应对其他策略难以解决的挑战，例如对“屏蔽区”进行隐身，以及调控非均匀温度分布。此外，与优化各单元胞对应的拓扑结构相比，通过优化均匀化热导率的各个分量，可显著降低设计维度。

通过几何提取，对比了单一功能和单个设计中多种功能情况下优化后的均匀化导热率与从构建的数据库中提取的导热率。结果显示，两者高度吻合，均方误差低至

9.3e-6，决定系数高达0.9998。这些先进的热超材料为具有广泛传热应用的多尺度组件铺平了道路。总之，本研究展示了所提出的多尺度数据驱动设计方法的有效性，以及其在打造具有定制功能的先进热超材料方面的潜力。

致谢

本研究得到 NSF CSSI 计划的资助（资助编号：OAC 1835782）。

参考文献

[1] R. V. Woldseth、N. Aage、J. A. Bærentzen、O. Sigmund，关于人工神经网络在拓扑优化中的应用，Structural and Multidisciplinary Optimization 65 (10) (2022) 1–36。[2] D. Lee、W. W. Chen、L. Wang、Y.-C. Chan、D. Da、T. Dolar、W. Chen，超材料与多尺度优化的数据驱动设计：综述，待投稿。[3] J. Panetta、Q. Zhou、L. Malomo、N. Pietroni、P. Cignoni、D. Zorin，用于增材制造的弹性纹理，ACM Transactions on Graphics (TOG) 34 (4) (2015) 1–12。[4] L. Wang、Y.-C. Chan、F. Ahmed、Z. Liu、P. Zhu、W. Chen，用于超材料系统机理驱动学习与设计的深度生成建模，Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 372 (2020) 113377。[5] D. Li、N. Dai、Y. Tang、G. Dong、Y. F. Zhao，基于三周期等值面的拓扑形状的梯度胞元结构设计与优化，Journal of Mechanical Design 141 (7) (2019)。[6] L. Zheng、S. Kumar、D. M. Kochmann，具有连续可调各向异性的旋节线状超材料数据驱动拓扑优化，Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 383 (2021) 113894。[7] J. Wang、W. W. Chen、D. Da、M. Fuge、R. Rai，IH-GAN：一种用于胞元结构隐式曲面逆向设计的条件生成模型，Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 396 (2022) 115060。[8] B. Zhu、M. Skouras、D. Chen、W. Matusik，采用微结构的双尺度拓扑优化，ACM Transactions on Graphics (TOG) 36 (4) (2017) 1。[9] D. Da、Y.-C. Chan、L. Wang、W. Chen，面向抗断裂结构超材料的数据驱动与拓扑设计，Extreme Mechanics Letters 50 (2022) 101528。[10] L. Wang、Z. Liu、D. Da、Y.-C. Chan、W. Chen、P. Zhu，基于锯齿函数映射的广义去均匀化及其在数据驱动频率响应优化中的应用，Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 395 (2022) 114967。[11] T. Han、T. Yuan、B. Li、C.-W. Qiu，具有恒定导热率和可调热局域的均匀热斗篷，Scientific Reports 3 (1) (2013) 1–5。[12] R. Schittny、M. Kadic、S. Guenneau、M. Wegener，变换热力学实验：塑造热流，Physical Review Letters 110 (19) (2013) 195901。[13] T. Han、X. Bai、J. T. Thong、B. Li、C.-W. Qiu，对热特征的全面控制与操控：隐身、伪装与热超材料，Advanced Materials 26 (11) (2014) 1731–1734。[14] H. Xu、X. Shi、F. Gao、H. Sun、B. Zhang，超薄三维热斗篷，Physical Review Letters 112 (5) (2014) 054301。[15] S. Guenneau、C. Amra、D. Veynante，变换热力学：热流隐身与集中，Optics Express 20 (7) (2012) 8207–8218。[16] F. Chen、D. Yuan Lei，易于制造的热超材料实现极端热流集中，Scientific Reports 5 (1) (2015) 1–8。[17] K. P. Vemuri、F. Canbazoglu、P. R. Bandaru，通过热超材料引导传导热流密度，Applied Physics Letters 105 (19) (2014) 193904。[18] U. Leonhardt，光学保角映射，Science 312 (5781) (2006) 1777–1780。[19] J. B. Pendry、D. Schurig、D. R. Smith，控制电磁场，Science 312 (5781) (2006) 1780–1782。

[20] J.-P. Huang，理论热学：变换热学及热超材料扩展理论，Springer Nature，2019年。[21] C. Fan、Y. Gao、J. Huang，具有表观负热导率的成形梯度材料，Applied Physics Letters 92 (25) (2008) 251907。[22] I. Peralta、V. D. Fachinotti，基于优化的热流操控器件设计，重点关注可制造性，Scientific Reports 7 (1) (2017) 1–8。[23] L. Zhou、S. Huang、M. Wang、R. Hu、X. Luo，旋转时同时实现隐身，Physics Letters A 383 (8) (2019) 759–763。[24] S. Narayana、Y. Sato，利用工程化热材料操控热流，Physical Review Letters 108 (21) (2012) 214303。[25] E. M. Dede、T. Nomura、P. Schmalenberg、J. Seung Lee，考虑导热-对流效应的超薄复合材料热流隐身、聚焦与反转，Applied Physics Letters 103 (6) (2013) 063501。[26] T. Han、X. Bai、D. Gao、J. T. Thong、B. Li、C.-W. Qiu，双层热隐身斗篷的实验演示，Physical Review Letters 112 (5) (2014) 054302。[27] J. Wang、G. Dai、J. Huang，热超材料：基础、应用与展望，iScience 23 (10) (2020) 101637。[28] M. Moccia、G. Castaldi、S. Savo、Y. Sato、V. Galdi，通过双功能超材料独立操控热量与电流，Physical Review X 4 (2) (2014) 021025。[29] Y. Ma、Y. Liu、M. Raza、Y. Wang、S. He，多物理场隐身斗篷的实验演示：同时操控热流与电流，Physical Review Letters 113 (20) (2014) 205501。[30] E. M. Dede、F. Zhou、P. Schmalenberg、T. Nomura，用于电子学热流控制的热超材料，Journal of Electronic Packaging 140 (1) (2018)。[31] G. Fujii、Y. Akimoto、M. Takahashi，利用协方差矩阵自适应进化策略探索热隐身斗篷的最优拓扑结构，Applied Physics Letters 112 (6) (2018) 061108。[32] G. Fujii、Y. Akimoto，优化双功能隐身斗篷的结构拓扑以操控热流与直流电，Applied Physics Letters 115 (17) (2019) 174101。[33] W. Sha、M. Xiao、J. Zhang、X. Ren、Z. Zhu、Y. Zhang、G. Xu、H. Li、X. Liu、X. Chen 等，稳健可打印的自由形态热超材料，Nature Communications 12 (1) (2021) 1–8。[34] W. Sha、R. Hu、M. Xiao、S. Chu、Z. Zhu、C.-W. Qiu、L. Gao，跨越全参数各向异性空间的拓扑优化热超材料，npj Computational Materials 8 (1) (2022) 1–10。[35] W. Sha、M. Xiao、M. Huang、L. Gao，用于全向隐身传感器的拓扑优化自由形态热超材料，Materials Today Physics 28 (2022) 100880。[36] X. Xu、S. Chen，基于水平集的热隐身斗篷形状与拓扑优化，载于：国际设计工程技术会议与计算机和工程信息会议，卷86229，美国机械工程师学会，2022年，页码 V03AT03A050。[37] X. Xu、X. D. Gu、S. Chen，使用扩展水平集方法在欧几里得空间与流形中对热斗篷进行拓扑优化，International Journal of Heat and Mass Transfer 202 (2023) 123720。[38] E. M. Dede、T. Nomura、J. Lee，用于热流屏蔽、聚焦与反转的热复合材料设计优化，Structural and Multidisciplinary Optimization 49 (1) (2014) 59–68。[39] G. Fujii、Y. Akimoto，通过协方差矩阵自适应进化策略，利用浸入边界水平集方法表达的拓扑优化热地毯隐身斗篷，International Journal of Heat and Mass Transfer 137 (2019) 1312–1322。[40] X. Shen、Y. Li、C. Jiang、Y. Ni、J. Huang，热隐身-聚集器，Applied Physics Letters 109 (3) (2016) 031907。[41] G. Fujii、Y. Akimoto，通过拓扑优化实现热传导中的热集中器隐身，International Journal of Heat and Mass Transfer 159 (2020) 120082。[42] M. Seo、H. Park、S. Min，采用单变量形式化多尺度拓扑优化方法操控热流，International Communications in Heat and Mass Transfer 118 (2020) 104873。[43] B. Hassani、E. Hinton，均匀化与拓扑优化综述 I——周期结构介质的均匀化理论，Computers & Structures 69 (6) (1998) 707–717。[44] B. Hassani、E. Hinton，均匀化与拓扑优化综述 II——解析与数值

均匀化方程的求解，Computers & Structures 69 (6) (1998年) 719–738。[45] J. Yvonnet，《非均质材料的有限元计算均匀化》，第258卷，Springer，2019年。[46] E. Andreassen、C. S. Andreasen，如何使用数值均匀化确定复合材料性能，Computational Materials Science 83 (2014年) 488–495。[47] Z.Liu、L. Xia、Q.Xia、T.Shi，针对具有多种晶格构型的分层混合结构的数据驱动设计方法，Structural and Multidisciplinary Optimization 61 (6) (2020年) 2227–2235。