arXiv:2304.00751v1 [math.DS] 3 Apr 2023

二维圆盘上具有唯一奇点的流的结构

Alexandr Prishlyak 和 Serhii Stas

2023年4月4日

摘要

我们研究二维圆盘上具有一个奇点且没有闭轨道的流的拓扑性质。为对这类流进行分类，我们使用一种特殊的图，它是嵌入平面的双色有根树。我们构造了流的编码，并找出了分离轨不超过 7 条的流的所有可能结构。

引言

在闭流形上，如果我们考察处于一般位置的莫尔斯函数，那么每个指标的临界点数量都满足Morse不等式。例如，它不小于相应同调群的最小生成元数量。如果一个函数有两个临界点，那么该流形就是球面。在闭曲面上，存在具有三个临界点的函数（其中一个是退化的）。如果我们考察相应的梯度流，那么奇点数量也受到相应的限制。而对于任意流，则不存在这样的限制。特别地，存在一种只有一个奇点的流，其庞加莱旋转指数等于该流形的欧拉示性数。如果该流只有有限条闭轨线，那么可以在这些闭轨线上引入由相邻Morse指标的奇点组成的成对奇点，从而得到一个没有奇点的流。本文旨在研究二维圆盘上具有一个奇点且没有闭轨道的流的拓扑结构。显然，该点必须位于圆盘的边界上，否则边界就是一条闭轨道。

图论的使用是对二维和三维动力系统进行分类的典型方法 s.

闭二维流形上的流的拓扑分类见 [7, 16, 19, 20, 21, 38, 1, 27,30, 42, 28, 29, 36, 26], ，带边界的二维流形上的流的拓扑分类见 [5, 8, 17, 30, 27, 24, 35, 21, 36]。 [43, 45, 34, 23, 25, 10, 4, 3]中构造了三维流形上Morse-Smale流的完全拓扑不变量。

Morse流是处于一般位置的莫尔斯函数的梯度流。若固定奇点处的函数值，流便确定了函数的拓扑结构 [18, 41]。因此，Morse–Smale流的分类与莫尔斯函数的分类有关。

可定向二维流形上函数的拓扑不变量已在 [15] 和 [39] 中构造；对于不可定向二维流形，则在[18] 中构造；对于带边界流形，在 [9, 13, 14]中构造；对于非紧流形，在 [33] 中构造。

闭二维流形上光滑函数的拓扑不变量也已在 [6, 14, 13, 33, 32,37, 18, 23, 46, 44, 2, 40], 中研究；带边界二维流形上的情形在 [11, 14, 12] 中研究，闭三维和四维流形上的情形在 [31, 22]中研究。

我们考察二维圆盘 $D^2 = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2$ 上的流： $x^2 + y^2 \leq 1\}$。

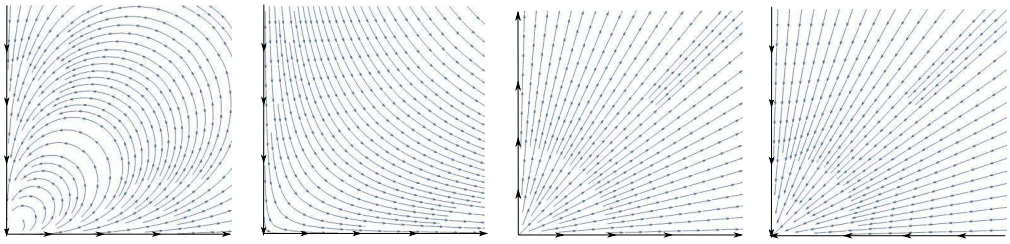
我们描述了边界上具有唯一奇点且分界线数量较少的流的所有可能拓扑结构。我们将这类流称为1-流。

第一节给出 1-流的基本定义和拓扑性质。第二节介绍分离轨图和区分图的性质，其中区分图是分离轨集合的对偶。第三节介绍用于对 1-流进行分类的编码。

1 1-流的拓扑性质

下面介绍 1-流的拓扑性质。

分界线将二维圆盘划分为若干区域，我们称之为胞腔。每个胞腔都是一个曲边多边形，其顶点为奇点。由于胞腔内部没有奇点，因此每条轨线都始于并终于奇点。顶点角有 4 种类型：1）椭圆型；2）双曲型；3）源点；4）汇点。在椭圆型点的邻域内，向量场在拓扑上等价于向量场$\{x^3-3xy^2, 3x^2y-y^3\}$，$x \geq 0$，$y \geq 0$；在双曲型点的邻域内，它等价于 $\{x, -y\}$，$x \geq 0$，$y \geq 0$；在源点处等价于 $\{x, y\}$，$x \geq 0$，$y \geq 0$；在汇点处等价于 $\{-x, -y\}$，$x \geq 0$，$y \geq 0$，见图 1。



1)　　2)　　3)　　4)

图 1：顶点角的类型：1）椭圆型，2）双曲型，3）源点，4）汇点

所有胞腔分为两种类型：1）一个角是源点，另一个角是汇点，其余角均为双曲型（极性胞腔）；2）一个角为椭圆型，其余角均为双曲型（循环胞腔）。在极性胞腔中，轨迹始于一点并终于另一点；在循环胞腔中，轨迹始于一点并终于同一点。循环胞腔的边界构成一个环，而极性胞腔的边界构成两条从源点出发并终止于汇点的定向路径。

2 1-流的分界线图和区分图

众所周知，二维球面上的流可以使用分界线图进行拓扑分类。二维圆盘可以看作球面上的一个区域，因此我们可以使用分界线图对这类流进行分类。在我们的情形中，分界线图由嵌入二维圆盘中的一个图构成，其唯一的顶点是一个奇点，而边则是分界线。此外，每条边都有定向，并且从奇点附近的各扇区中选出抛物扇区。图 2 展示了一个 1-流及其分界线图的示例。

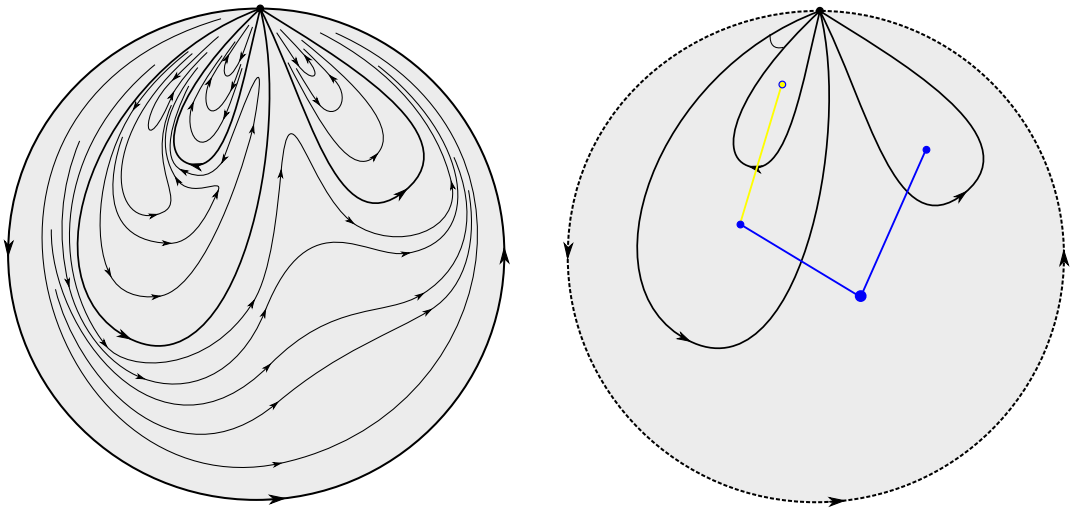


图 2：编码为 2100 的流、分界线图和区分图

因此，1-流的分界线图是在二维圆盘中嵌套的一组带有特定角点的定向圆。为方便起见，我们用对偶图替代分界线图。图中突出显示的顶点对应于邻接边界的区域。

Le引理 1 分界线图的对偶图是在平面上嵌入的有根树 $e.$

证明。 考虑一个胞腔复形的结构，其中奇点是 0-胞腔，而边界的其余部分和分界线都是 1-胞腔。对偶图作为 1-骨架，定义了二维圆盘上的胞腔复形的对偶结构。由于带边界曲面的 1-骨架与其同伦等价，因此对偶图与一个点同伦等价，也就是说，它是一棵树。

对于每个非根顶点，都有一条关联边属于从根到该顶点的简单路径。这条边称为相对于给定顶点的下边。其他关联边称为上边。在根处，所有关联边都是顶边。绘制有根树时，顶边画在更高的位置，而底边画在下方。

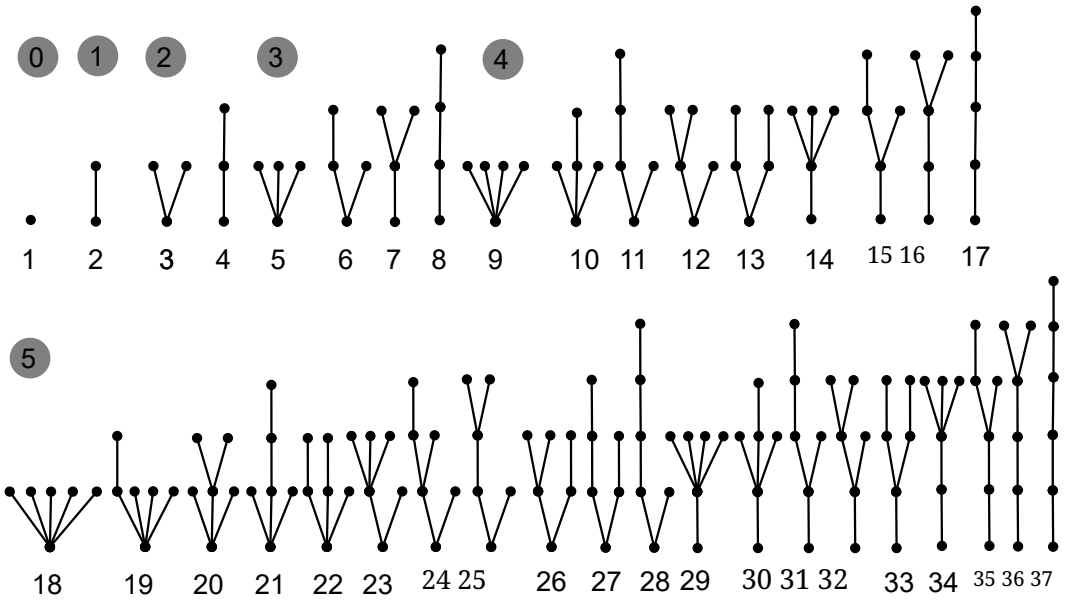


图3：至多含五条边的有根树

对于其底边，顶点是上端；对于每条顶边，顶点是下端。

图3展示了所有顶点数不超过六个的有根树。

每棵树的边都有一个典范定向，由从下端向上端的运动方向给出。固定平面的定向（二维圆盘），使其在边界上诱导出流的定向。对于树的每条边，在相应的回路上有两种定向——一种与流的方向一致，另一种由平面的定向诱导到该回路上。如果这两种定向一致，则将该边标为黑色（1）；如果不一致，则标为红色（-1）。

如果对于某个顶点，所有顶边的颜色都与下方顶点的颜色相反，则相应的区域将是循环的。其中的流由指定椭圆角来确定。为此，只需指出进入该角的回路即可。如果树上的相应边是顶边，就在其上加上标签；如果是底边，则保持不变。对于每个顶点，在顶边集合上，按照沿典范定向遍历相应区域边界的次序，从下方回路开始固定其次序。

区分流图是带有边标签和上边次序的双色有根树。如果两个区分图之间存在一个保持颜色、标签和上边次序不变，并将树的根映射到根的同构，则称这两个区分图等价。

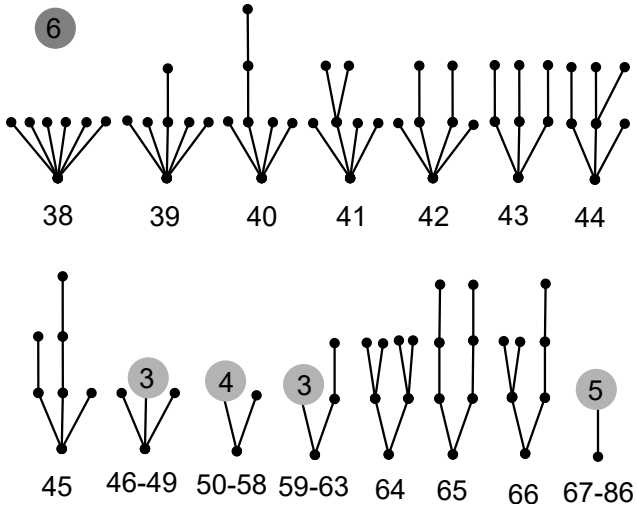


图 4：具有六条边的有根树

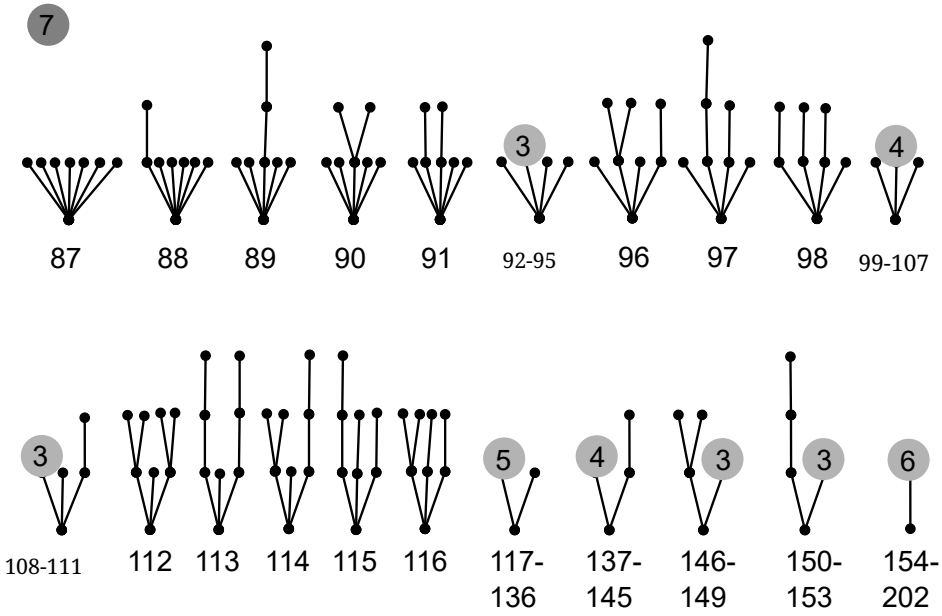


图 5：具有七条边的有根树

定理1 二维圆盘上的两个*1*-流拓扑等价，当且仅当它们的区分图等价。

证明。 必要性由构造可得。下面证明充分性。上边集合上的次序定义了图上的旋转系统。于是，根据拓扑图论，存在一个具有该旋转系统的平面图嵌入，且在同胚意义下唯一。接下来构造对偶图。它定义了一组分界线。分界线的定向由树中对应边的颜色给出，而椭圆角的选择则由标签给出。

3 1-流编码

为构造编码，我们使用区分性1-流图。顶点的层级是该顶点与根之间路径上的边数。在层级0，只有一个顶点，即根。让我们组成一个整数序列

其中的整数分别等于各顶点的顶边数，从层级0的顶点开始，然后依次为层级1、2、3.....每个层级的顶点都按照它们在嵌套图中的位置从左到右排列。如果顶点的下边颜色为-1，则在相应数字上方加一条上划线，例如3。如果顶点的下边带有标签，则在相应数字后加一条横线，例如。由此，1-流编码是一组整数，其中一些整数可能带有上划线或横线，或者同时带有横线和横线。请注意，编码中的第一个数字既没有上划线，也没有横线。

我们给出所有至多有3条分界线的可能流的编码：1）0；2）10，10，$10'$；3）200，200，200，200，$20'0$，$200'$；4）110，110，$110'$，110，$11'0$，110，$11'0$，$110'$，$11'0'$。对于图3所示的树（所有边均带有典范定向且未标注），其1-流编码列于表格第二列。

– – — – – – – –

Theorem 2 两个*1*-流拓扑等价，当且仅当它们的编码相同。

证明。 由定理1可知，只需证明区分图等价。必要性源于根据区分树构造编码的唯一性。下面证明充分性。为此，只需给出一种从编码构造区分图的算法。我们从下到上逐层依次构造树。从最底部的根顶点向上画出与编码中的第一个数字所示数量相同的边。随后，从这些已画出边的上端由左至右，按照编码中指定的数量向上画边。从新画出的边的末端继续向上画新边，直至编码中的数字用尽。边的定向和着色（分界线的定向以及抛物角的选取）由上方的线条和笔画确定。因此，可以从编码中唯一恢复流结构。

除编码中的第一个数外，每个数都有一个根，即对应底部胞腔的数；相应的边作为顶边进入该胞腔。如果两个数对应的边是同一胞腔的顶边，我们就称这两个数相连。不带上划线的数与其对应的带上划线的数称为反向数。

定理3 具有 *n* 条分界线的 *1*-流编码具有以下性质：

1. 所有编码数之和等于 n。所有数的个数等于 $n+1$。*2.* 第一个数不带上划线，也不带撇号。*3.* 对任意不超过 n 的 k，前 k 个数之和不小于 k。*4.* 如果某个数带有撇号，那么所有与它相连的数都不带撇号，且这些数要么都带上划线，要么都不带上划线。此外，它们的根带或不带上划线的情况与上方的数相反。

证明。 1. 根据定义，所有数字之和等于上边的数量。由于每条边只会是一个顶点的最上边，因此这个和等于边的数量，即 n。每个编码数都对应一个顶点，因此它们的总数为 $n+1$。

2. 第一个数字上方是否有上划线，取决于区域边界的定向。由于定向始终相同（逆时针），第一个数字上方没有上划线。第一个数字旁边也没有撇号，因为外弧不可能是椭圆区域中的上弧。

3. 这一性质源于这样一个事实：位于给定顶点下方或左侧的顶点数量，小于位于该顶点下方的边的数量（两者之差等于与该顶点处于同一层级且位于其右侧的顶点数量）。

4. 这一性质　　由椭圆区域边界中边定向的一致性可得。

定理4 （实现定理）如果给定一个由 $n+1$ 个数构成的有序集，其中一些数带有上划线和/或撇号，并且该集合满足前一定理的性质*1–4*，那么它就是二维圆盘上某个*1*-流的编码。

tree	code	流的数量	树嵌入	总数
1	0	1	1	1
2	10	3	1	3
3	200	6	1	6
4	110	9	1	9
5	3000	10	1	10
6	2100	18	2	36
7	1200	18	1	18
8	1110	27	1	27
9	40000	15	1	15
10	30100	30	3	90
11	21010	54	2	108
12	22000	36	2	72
13	21100	54	1	54
14	13000	30	1	30
15	12100	54	2	108
16	11200	54	1	54
17	11110	81	1	81
18	500000	21	1	21
19	410000	45	4	180
20	302000	60	3	180
21	301010	90	3	270
22	311000	90	3	270
23	230000	60	2	120
24	220100	108	4	432
25	210200	108	2	216
26	221000	108	2	216
27	211100	162	2	324
28	210110	162	2	324
29	140000	45	1	45
30	130100	90	3	270
31	121010	162	2	324
32	122000	108	2	216
33	121100	162	1	162
34	113000	90	1	90
35	112100	162	2	324
36	111200	162	1	162
37	111110	243	1	243

表1：1-流结构的数量

证明。 我们在二维圆盘的边界上固定顶点。根据给定的编码，依次考察其中的各个数：首先，在给定顶点处绘制与其相邻的环路，数量等于第一个数；然后，在第一个环路内部绘制数量等于第二个数的环路，在第二个环路内部绘制数量等于第三个数的环路，依此类推。我们按照顶行设置所绘制环路的方向。在椭圆区域中，根据撇号选取椭圆角。这样，我们便唯一构造出了定义该流的分界线图。

为计算拓扑非等价流的数量，我们求出底边定向给定时每个胞腔中的此类流的数量。设胞腔包含 n 条上边。如果它们的定向都与底边的定向相反，那么该胞腔就是循环胞腔，且每个角都可以是椭圆型。总共有 $n+1$ 个这样的流。如果至少一条上分离线的定向与

下分离线的定向一致，那么该胞腔就是极型。源角有 n 种选取方式。选定源角后，汇角可以位于从源角到下分离线终点角的上边路径上的任意顶点。因此，这样的构型共有 $1+2+3+$ ...+n 种。再考虑循环胞腔的 n $+1$ 种构型，可得对于下分离线定向给定的胞腔，

$$1 + 2 + \ldots + n + n + 1 = n(n + 1)/2$$

其中可能存在不同的流结构。胞腔中的每一种流结构都会在上分离线上定义一种结构。由于这些分离线对于更高层级胞腔而言是下边，因此在这个新胞腔上，我们可以假设下边的定向已给定。由此，给定图（树）的线束数量等于每个胞腔中线束数量的乘积。

对 t 求和　　表格最后一列中的相应数字相加，我们得到以下结果：

定理5 圆盘*2*上没有分界线的拓扑不等价的*1*-流数量为*1*条，有一条分界线的为*3*条，有两条分界线的为*15*条，有三条分界线的为*91*条，有四条分界线的为*612*条，有五条分界线的为*4389*条。

注。 对具有六条分界线的流进行类似计算后，我们得到31630种不同的结构。对于具有七条分界线的流，则有162900种不同的结构（参见图4和图5中的相应树）。

结论

本文的结果证明了所提出的不变量（区分图和编码）在分类二维圆盘上具有一个奇点的流方面的有效性。我们希望，这些不变量也可用于为其他曲面上具有大量奇点的流构造类似的不变量。

参考文献

[1] O. Akchurin、S. Bilun 和 A. Prishlyak. 三色图作为2-球面三角剖分的1-骨架。*arXiv*预印本 *arXiv:2209.05737*，2022。doi:10.48550/ARXIV.2209.05737。[2] S. Bilun 和 A. Prishlyak. 闭曲面上的闭莫尔斯1-形式。*Visn., Mat. Mekh., Kyv. Univ.Im. Tarasa Shevchenka*，2002(8):77–81，2002。[3] S. Bilun 和 A. Prishlyak. 3-球面图中具有两个鞍点的莫尔斯流的可视化。*arXiv*预印本 *arXiv:2209.12174*，2022。doi:10.48550/ARXIV.2209.12174。[4] S. Bilun、A. Prishlyak 和 A. Prus. 3-流形边界上具有不动点的莫尔斯流。*arXiv*预印本 *arXiv:2209.04019*，2022。doi:10.48550/arXiv.2209.04019。[5] S. Bilun、M. Hrechko、O. Myshnova、A. Prishlyak. 曲面上具有一个或两个临界胞腔的最优离散梯度向量场的结构 *arXiv*预印本 *arXiv:2303.07258*，2023。doi:10.48550/arXiv. 2303.07258。[6] S. Bilun、A. Prishlyak、S. Stas、A. Vlasenko. 射影平面上莫尔斯函数的拓扑结构 *arXiv*预印本 *arXiv:2303.03850*，2023。doi:10.48550/arXiv.2303.03850。[7] S. Bilun、B. Hladysh、A. Prishlyak、V Sinitsyn. 2-球面上至多具有十个奇点的余维一梯度向量场 *arXiv*预印本 *arXiv:2303.10929*，2023。doi:10.48550/arXiv.2303. 10929。[8] S. Bilun、M. Loseva、O. Myshnova、A. Prishlyak. 带孔2-球面上至多具有六个奇点的梯度流的典型单参数分岔 *arXiv*预印本 *arXiv:2303.14975*，2023。doi:10.48550/arXiv.2303.14975。

[9] A.V. Bolsinov 和 A.T. Fomenko. 可积哈密顿系统。几何、拓扑、分类。CRC出版社公司，博卡拉顿、伦敦、纽约、华盛顿哥伦比亚特区，2004。724页。[10]C. Hatamian 和 A. Prishlyak. 亏格1和亏格2不可定向3-流形上的海加德图与最优莫尔斯流。《国际几何中心论文集》，13(3):33–48，2020。doi:10.15673/tmgc.v13i3.1779。[11] B. I. Hladysh 和 A. O. Pryshlyak. 曲面边界上具有非退化临界点的函数。《乌克兰数学杂志》，68(1):29–41，2016。doi:10.1007/s11253-016-1206-5。[12] B. I. Hladysh 和 A. O. Pryshlyak. 带边界定向曲面上最优函数的一般位置变形。《乌克兰数学杂志》，71(8):1173–1185，2020。doi: 10.1007/s11253-019-01706-8。[13] B.I. Hladysh 和 A.O. Prishlyak. 二维流形边界上具有孤立临界点的函数的拓扑。《SIGMA. 对称性、可积性与几何：方法与应用》，13:050，2017。doi:0.3842/SIGMA.2017.050。[14] B.I. Hladysh 和 A.O. Prishlyak. 带边界定向曲面上的简单莫尔斯函数。《数学物理、分析与几何杂志》，15(3):354–368，2019。doi:10.15407/mag15.03.354。[15] A.S. Kronrod. 二元函数。《俄罗斯数学调查》，5:24–134，1950年。[16] Z. Kybalko、A. Prishlyak 和 R. Shchurko. 闭曲面上最优莫尔斯流的轨道等价。《国际几何中心论文集》，11(1):12–26，2018。doi:10.15673/tmgc.v11i1.916。[17] M. Losieva 和 A. Prishlyak. 二维圆盘边界上具有奇点的莫尔斯–斯梅尔流的拓扑。《国际几何中心论文集》，9(2):32–41，2016。doi:10.15673/tmgc.v9i2.279。[18] D.P. Lychak 和 A.O. Prishlyak. 不可定向曲面上的莫尔斯函数与流。《泛函分析与拓扑方法》，15(03):251–258，2009。[19] A.A. Oshemkov 和 V.V. Sharko. 二维流形上莫尔斯–斯梅尔流的分类。《数学文集》，189(8):93–140，1998年。[20] M.M. Peixoto. 关于二维流形上流的分类。《动力系统》（巴西萨尔瓦多巴伊亚大学讨论会论文集，1971），第389–419页，1973年。[21] A.O. Prishlyak. 关于嵌入曲面的图。《俄罗斯数学调查》，52(4):844，1997年。doi:10.1070/RM1997v052n04ABEH002074。[22] A.O. Prishlyak. 四维流形上莫尔斯函数的共轭。《俄罗斯数学调查》，56(1):170，2001。[23] A.O. Prishlyak. 流形上不存在闭轨线的莫尔斯–斯梅尔向量场。《数学札记》，71(1-2):230–235，2002。doi:10.1023/A:1013963315626。[24] A.O. Prishlyak. 分层集上具有孤立不动点的流的指标和。《数学物理、分析与几何杂志》 /《数学物理、分析与几何杂志》/,10(1):106–115，2003年。[25] A.O. Prishlyak. 莫尔斯–斯梅尔流的完全拓扑不变量与3-流形的把手分解。《数学科学杂志》，144:4492–4499，2007。[26] A. Prishlyak 和 L. Di Beo. 博伊曲面上具有最少奇点数的流。《国际几何中心论文集》，15(1):32–49，2020。[27] A. Prishlyak 和 M. Loseva. 女孩曲面上最优流的拓扑结构。《国际几何中心论文集》，15(3-4):184–202，2022。

[28] A. Prishlyak、A. Prus 和 S. Huraka。《球面上具有集体动力学的流》。《国际几何中心论文集》，14(1):61–80，2021年。doi:10.15673/tmgc.v14i1.1902。[29] A. Prishlyak 和 M. Loseva。《闭可定向曲面上具有集体动力学的最优流的拓扑》。《国际几何中心论文集》，13(2):50–67，2020年。doi:10.15673/tmgc. v13i2.1731。[30] A. Prishlyak 和 A. Prus。《带孔环面上的莫尔斯–斯梅尔流》。《国际几何中心论文集》，10(1):47–58，2017年。doi:10.15673/tmgc.v1i10.549。[31] A.O. Prishlyak。《3-流形上莫尔斯函数的等价性》。《泛函分析与拓扑方法》，5(3):49–53，1999年。[32] A.O. Prishlyak。《取值于直线和圆的曲面上莫尔斯函数的共轭》。《乌克兰数学杂志》，52(10):1623–1627，2000年。doi:10.1023/A:1010461319703。[33] A.O. Prishlyak。《平面上具有有限个奇点的莫尔斯函数》。《泛函分析与拓扑方法》，8:75–78，2002。[34] A.O. Prishlyak。《三维流形上具有 beh2 性质的莫尔斯–斯梅尔向量场的拓扑等价》。《乌克兰数学杂志》，54(4):603–612，2002。[35]A.O. Prishlyak。《带边界的二维和三维流形上的 m-场的拓扑分类》。《乌克兰数学杂志》，55(6):966–973，2003年。[36] A.O. Prishlyak 和 M.V. Loseva。《曲面边界上具有奇点的最优莫尔斯–斯梅尔流》。《数学科学杂志》，243:279–286，2019年。[37] A.O. Prishlyak 和 K.I. Mischenko。《带边界的非紧曲面的分类》。《泛函分析与拓扑方法》，13(01):62–66，2007年。[38] A.O. Prishlyak 和 A.A. Prus。《带边界紧曲面上莫尔斯流的三色图》。《数学科学杂志》，249(4):661–672，2020年。doi:10.1007/s10958-020-04964-1。[39] G. Reeb。《关于完全可积的 Pfaff 形式或数值函数的奇点》。C.R.A.S. Paris，222:847—849，1946年。[40] V.V. Sharko。《流形上的函数：代数与拓扑方面》，《数学专著译丛》第131卷。美国数学会，普罗维登斯，罗德岛州，1993年。[41] S. Smale。《关于梯度动力系统》。《数学年刊》，74:199–206，1961年。[42] В.М. Кузаконь、В.Ф. Кириченко 和 О.О. Пришляк。《光滑流形：几何与拓扑方面》。《乌克兰国家科学院数学研究所论文集》，2013年，第97卷，500页。[43]А.О. Пришляк。《三维流形上具有有限条奇异轨道的莫尔斯–斯梅尔向量场》。《乌克兰国家科学院通报》，(6):43–47，1998年。[44]А.О. Пришляк。《莫尔斯函数的共轭》。现代数学若干问题。乌克兰科学院数学研究所，基辅，1998年。[45] А.О. Пришляк。《三维流形上莫尔斯–斯梅尔函数与向量场的拓扑等价》。拓扑学与几何。《乌克兰数学大会论文集》，第29–38页，2001年。[46] О.О. Пришляк。《流形拓扑学》。基辅大学，2015年。基辅塔拉斯·舍甫琴科国立大学

Alexandr Prishlyak 电子邮箱地址： prishlyak@knu.ua *ORCID* 标识符： 0000-0002-7164-807X
Serhii Stas 电子邮箱： stasserhiy380@gmail.com *ORCID* 标识符： 0009-0006-1241-7497