arXiv:2304.00768v1 [math.PR] 3 Apr 2023

分布依赖随机微分方程在分数噪声驱动下的正则性*

范希良[a)]，黄星[b)]，凌泽伟[a)]， a)安徽师范大学数学与统计学院，芜湖 241002，中国 b)天津大学应用数学中心，天津 300072，中国
fanxiliang0515@163.com, xinghuang@tju.edu.cn, ling122099@163.com

2023年4月4日

摘要

本文研究由两个相互独立的分数噪声驱动的一类分布依赖随机微分方程的正则性，其中分数噪声的 Hurst 参数分别为 B^H 和 $\tilde{B}^{\tilde{H}}$，取值范围为 $(0,1)$ 和 $H \in (1/2, 1)$。我们针对这类含分布依赖噪声的方程，在非退化和退化情形下建立了对数哈纳克不等式以及 Lions 导数的 Bismut公式。证明中采用了耦合论证，具体而言是 F.-Y. Wang [29], 提出的反向耦合，并对分数阶导数算子进行了细致分析。

AMS主题分类：60H10，60G22 关键词：分布依赖随机微分方程；分数布朗运动；哈纳克不等式；Bismut公式；Lions导数

1 引言

令 $\mathscr{P}(\mathbb{R}^d)$ 为 $\mathbb{R}^d$ 上所有概率测度构成的空间，并赋予弱拓扑。对任意 $\theta \geq 1$，定义 $\mathscr{P}_\theta(\mathbb{R}^d) := \{\mu \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^d) : \mu(|\cdot|^\theta)^{1/\theta}\} < \infty$。本文关注如下形式的分布依赖随机微分方程（DDSDE）：

$$\mathrm{d}X_t = b_t(X_t, \mathscr{L}_{X_t})\mathrm{d}t + \sigma_t \mathrm{d}B_t^H + \tilde{\sigma}_t(\mathscr{L}_{X_t})\mathrm{d}\tilde{B}_t^{\tilde{H}}, \quad X_0 = \xi, \tag{1.1}$$

*X. Fan部分获得安徽省自然科学基金（编号：2008085MA10）资助。X. Huang部分获得国家自然科学基金（编号：12271398）资助。

其中， $\mathscr{L}_{X_t}$ 表示 X_t的分布， $b\colon [0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathscr{P}(\mathbb{R}^d)\to\mathbb{R}^d$， $\sigma\colon [0,T]\to\mathbb{R}^d\otimes\mathbb{R}^d$， $\tilde{\sigma}\colon [0,T]\times\mathscr{P}(\mathbb{R}^d)\to\mathbb{R}^d\otimes\mathbb{R}^d$， ξ是一个取值于 $\mathbb{R}^d$的随机变量，而 B^H和 $\tilde{B}^{\tilde{H}}$分别是两个相互独立的分数布朗运动（FBM），其赫斯特参数 $H\in$ 属于 $(0,1)$；它们还与 ξ相互独立，且 $H\in$ 属于 $(1/2,1)$。

分数布朗运动通常被视为描述时间相关噪声的最简单随机过程。具有 d 维的分数布朗运动 $(B_t^H)_{t\in[0,T]}=(B^{H,1}_t,\cdots,B^{H,d}_t)_{t\in[0,T]}$，其 Hurst 参数为 $H\in\in(0,1)$，是一个以零为均值、 H-自相似的高斯过程，其协方差函数为$\mathbb{E}(B^{H,i}_t B^{H,j}_s)=R_H(t,s)\delta_{i,j}$，其中

$$R_H(t,s):=\frac{1}{2}\left(t^{2H}+s^{2H}-|t-s|^{2H}\right),\quad t,s\in[0,T]. \tag{1.2}$$

这表明，分数布朗运动推广了标准维纳过程（$H=1/2$），并具有平稳增量。然而，其增量彼此相关，且相关性呈幂律衰减，这说明分数布朗运动是非马尔可夫过程，而这正是方程（1.1）的主要特征。这意味着基于 Itô 微积分的技巧并不适用，因此在这一情形下会出现许多新的困难。

分布依赖随机微分方程也称为麦基恩–弗拉索夫方程或平均场随机微分方程，最早由 [21] 在开创性工作中提出，用于描述等离子体动力学。分布依赖随机微分方程的重要性在于，它们描述了当粒子数量趋于无穷时，彼此以平均场意义相互作用的单个粒子的极限行为。分布依赖随机微分方程的另一个重要特征是，它们与非线性福克–普朗克方程有内在联系；后者刻画了分布依赖随机微分方程边缘分布的演化。基于这些原因，分布依赖随机微分方程广泛应用于流体动力学、平均场博弈、生物学和数理金融等领域，因此受到越来越多的关注，参见 [5, 8, 17, 18]及其中的参考文献。近年来，分布依赖随机微分方程已被用于 [6, 9, 19, 25] 研究相关偏微分方程的光滑性；该方程涉及 P.-L. Lions 在其讲座 [7]中引入的 Lions 导数。此外，关于 Lions 导数的 Bismut公式、Harnack型不等式、梯度估计和指数遍历性的研究也已开展，参见例如[4, 24, 28, 30]。

与前面提到的研究不同，我们旨在考察由两个相互独立的分数噪声扰动的方程（1.1）的正则性。也就是说，我们研究以下映射的正则性

$$\mu\mapsto P_t^*\mu,\quad t\in[0,T],$$

其中 $P_t^*\mu:=\mathscr{L}_{X_t}$ 对于满足初始分布 $\mathscr{L}_{X_0}=\mu\in\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$ 的方程（1.1）的解 X_t。注意，概率测度由 $f\in\mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d)$ 的积分确定； $f\in\mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d)$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上所有有界可测函数的集合，因此只需考察这些泛函的正则性

$$\mu\mapsto(P_tf)(\mu):=\int_{\mathbb{R}^d}f\mathrm{d}(P_t^*\mu),\quad f\in\mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d),t\in[0,T].$$

更确切地说 具体而言，针对方程（1.1），我们探讨以下问题 ：

（Q）在什么条件下，泛函 $P_t f$ 具有与维数无关的 Harnack不等式和Bismut公式?

我们这样做的主要原因如下。

(i) 正如 [3] 中所指出的，该文研究了期权价格对标的资产价格初值的敏感性；Bismut公式能对敏感性给出更好的近似。此外，哈纳克不等式可能蕴含梯度估计和熵估计。

(ii) 我们先前的工作 [11] 表明，对于分布无关噪声（方程（1.1）中的 $\tilde{\sigma} = 0$），可以利用 Malliavin演算建立 $P_t f$ 的 Bismut公式。然而，对于分布依赖噪声，由于技术上的困难，这些公式仍有待建立（原因见 [11] 第4节开头）。

与布朗运动情形相比，由分数布朗运动驱动的分布依赖随机微分方程研究得少得多。除上述 [11] 外，我们还建立了由分数布朗运动驱动的分布依赖随机微分方程的大偏差与中偏差原理（方程（1.1）中的 $\sigma = 0$ ）。另请参见文章 [14]：该文通过某些稳定性估计，证明了由分数布朗运动（方程（1.1）中的 $\sigma = 1$、$\tilde{\sigma} = 0$ ）驱动、具有不规则且可能为分布型漂移的分布依赖随机微分方程的适定性。据我们所知，对于方程（1.1）中具有分布依赖且可能退化的噪声的情形，迄今尚无人研究我们在此提出的问题。这些问题似乎需要一套全新的工具和思路。本文的策略建立在第二作者与 Wang [16], 的工作基础上；该工作处理了由标准布朗运动驱动的分布依赖随机微分方程

$$\mathrm{d}X_t = b_t(X_t, \mathscr{L}_{X_t})\mathrm{d}t + \sigma_t(\mathscr{L}_{X_t})\mathrm{d}B_t^{\frac{1}{2}}, \quad t \in [0, T]. \tag{1.3}$$

其中，作者将噪声分解论证引入方程，从而得到方程（1.3）的哈纳克不等式、Bismut公式和指数遍历性。本文首先证明方程（1.1）的适定性。随后，我们不借助 Malliavin演算，而是针对方程（1.1）在非退化和退化情形下建立了关于Lions导数的对数哈纳克不等式和Bismut公式；我们的证明完全基于耦合论证与对分数阶导数算子的细致分析。这里需要强调的是，在我们的证明中，对 σ 施加的可逆条件至关重要，而且所构造的耦合确实是反向耦合，这种耦合最早由 [29]引入。

最后，我们介绍本文的结构。第2节回顾分数阶微积分、分数布朗运动和Lions导数的一些著名结论。第3节给出由分数布朗运动驱动的分布依赖随机微分方程的适定性结果。第4节陈述并证明本文的主要结果，讨论具有分布依赖性且可能带有退化分数噪声的分布依赖随机微分方程的正则性。

2 预备知识

本节回顾分数阶微积分、分数布朗运动和Lions导数的一些基本内容。

2.1 分数阶微积分

设 $a,b\in\mathbb{R}$ 满足 $a<b$。对于 $f\in L^1([a,b],\mathbb{R})$和 $\alpha>0$， f 在 $[a,b]$ 上阶数为 α 的左侧（分别为右侧）黎曼-刘维尔分数阶积分定义为

$$I_{a+}^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{f(y)}{(x-y)^{1-\alpha}}\mathrm{d}y \tag{2.1}$$
$$\left(\text{respectively}\quad I_{b-}^{\alpha}f(x)=\frac{(-1)^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b\frac{f(y)}{(y-x)^{1-\alpha}}\mathrm{d}y\right).$$

此处 $x\in(a,b)$ 几乎处处成立，$(-1)^{-\alpha}=\mathrm{e}^{-i\alpha\pi}$，且 Γ 表示伽马函数。特别地，当 $\alpha=n\in\mathbb{N}$ 时，它们与通常的 n 阶迭代积分一致。

分数阶微分可以定义为一种逆运算。设 $\alpha\in(0,1)$ 且 $p\geq1$。若 $f\in I_{a+}^{\alpha}(L^p([a,b],\mathbb{R}))$（分别地，$I_{b-}^{\alpha}(L^p([a,b],\mathbb{R}))$），则满足 $I_{a+}^{\alpha}g=f$（分别地，$I_{b-}^{\alpha}g=f$）的函数 g 在 $L^p([a,b],\mathbb{R})$ 中唯一，并且它与 f 的 α 阶左侧（分别地，右侧）黎曼-刘维尔导数一致，其定义如下：

$$D_{a+}^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x\frac{f(y)}{(x-y)^{\alpha}}\mathrm{d}y$$
$$\left(\text{respectively}\ D_{b-}^{\alpha}f(x)=\frac{(-1)^{1+\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^b\frac{f(y)}{(y-x)^{\alpha}}\mathrm{d}y\right).$$

相应的韦伊表示形式为

$$D_{a+}^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{f(x)}{(x-a)^{\alpha}}+\alpha\int_a^x\frac{f(x)-f(y)}{(x-y)^{\alpha+1}}\mathrm{d}y\right) \tag{2.2}$$
$$\left(\text{respectively}\quad D_{b-}^{\alpha}f(x)=\frac{(-1)^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{f(x)}{(b-x)^{\alpha}}+\alpha\int_x^b\frac{f(x)-f(y)}{(y-x)^{\alpha+1}}\mathrm{d}y\right)\right),$$

其中，若 $p=1$，则积分在奇点 $y=x$ 处的收敛对几乎所有 x 都逐点成立；若 $p>1$，则在 L^p 意义下成立。有关深入讨论，请参阅[26]。

2.2 分数布朗运动

设 $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ 是一个概率空间，其上定义了区间 $[0,T]$ 上具有 Hurst 参数 $H\in(0,1)$ 的 d 维分数布朗运动 B^H。我们假设存在一个足够丰富的子-σ-代数 $\mathscr{F}_0\subset\mathscr{F}$，它与 B^H 独立，使得对于任意 $\mu\in\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$，都存在一个随机变量 $\xi\in L^p(\Omega\to\mathbb{R}^d,\mathscr{F}_0,\mathbb{P})$，其分布为 μ。令 $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ 为由 B^H 生成的滤过，并由 $\mathscr{F}_0$ 完备化和增广。

令 $\mathscr{E}$ 为定义在 $[0,T]$ 上的阶梯函数集合，并令 $\mathcal{H}$ 为关于内积 $\mathscr{E}$ 闭包后得到的希尔伯特空间

$$\left\langle(\mathbb{I}_{[0,t_1]},\cdots,\mathbb{I}_{[0,t_d]}),(\mathbb{I}_{[0,s_1]},\cdots,\mathbb{I}_{[0,s_d]})\right\rangle_{\mathcal{H}}=\sum_{i=1}^{d}R_H(t_i,s_i).$$

回顾一下， $R_H(\cdot,\cdot)$ 的定义见 (1.2)。映射 $(\mathbb{I}_{[0,t_1]},\cdots,\mathbb{I}_{[0,t_d]}) \mapsto \sum_{i=1}^d B^{H,\ t_i}{}^i$ 可以扩展为 $\mathcal{H}$ （也称为再生核希尔伯特空间）与和 B^H 相关联的高斯空间 $\mathcal{H}_1$ 之间的等距映射。将此等距映射记为 $\psi \mapsto B^H(\psi)$。此外，根据 [10]，我们知道 $R_H(t,s)$ 具有如下积分表示形式

$$R_H(t,s) = \int_0^{t\wedge s} K_H(t,r)K_H(s,r)\mathrm{d}r,$$

其中 K_H 是一个平方可积核，定义如下

$$K_H(t,s) = \Gamma\left(H+\frac{1}{2}\right)^{-1}(t-s)^{H-\frac{1}{2}}F\left(H-\frac{1}{2},\frac{1}{2}-H,H+\frac{1}{2},1-\frac{t}{s}\right),$$

其中 $F(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ 是高斯超几何函数。更多详情参见例如 [10, 22]。

接下来，我们定义线性算子 $K_H^*\colon \mathscr{E} \to L^2([0,T],\mathbb{R}^d)$ 如下

$$(K_H^*\psi)(s) = K_H(T,s)\psi(s) + \int_s^T (\psi(r)-\psi(s))\frac{\partial K_H}{\partial r}(r,s)\mathrm{d}r.$$

由于 [1],关系 $\langle K_H^*\psi, K_H^*\phi\rangle_{L^2([0,T],\mathbb{R}^d)} = \langle\psi,\phi\rangle_{\mathcal{H}}$ 对所有 $\psi,\phi\in\mathscr{E}$ 均成立，根据有界线性变换定理， K_H^* 可扩展为 $\mathcal{H}$ 与 $L^2([0,T],\mathbb{R}^d)$ 之间的等距映射。因此，再次根据 [1]，存在一个定义在 $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ 上的 d 维维纳过程 W，使得 B^H 具有如下沃尔泰拉型表示

$$B_t^H = \int_0^t K_H(t,s)\mathrm{d}W_s,\quad t\in[0,T]. \tag{2.3}$$

此外，定义算子 $K_H\colon L^2([0,T],\mathbb{R}^d) \to I_{0+}^{H+1/2}(L^2([0,T],\mathbb{R}^d))$ 如下

$$(K_Hf)(t) = \int_0^t K_H(t,s)f(s)\mathrm{d}s.$$

根据 o [10],我们得到， K_H 是一个同构，并且对于任意 $f\in L^2([0,T],\mathbb{R}^d$),

$$(K_Hf)(s) = \begin{cases} I_{0+}^1 s^{H-1/2}I_{0+}^{H-1/2}s^{1/2-H}f, & H\in(1/2,1),\\ I_{0+}^{2H}s^{1/2-H}I_{0+}^{1/2-H}s^{H-1/2}f, & H\in(0,1/2).\end{cases}$$

那么对于 r 每个 $h\in I_{0+}^{H+1/2}(L^2([0,T],\mathbb{R}^d))$，逆算子 K_H^{-1} 具有如下形式

$$(K_H^{-1}h)(s) = \begin{cases} s^{H-1/2}D_{0+}^{H-1/2}s^{1/2-H}h', & H\in(1/2,1),\\ s^{1/2-H}D_{0+}^{1/2-H}s^{H-1/2}D_{0+}^{2H}h, & H\in(0,1/2).\end{cases} \tag{2.4}$$

特别地，当 h 绝对连续时，我们得到

$$(K_H^{-1}h)(s) = s^{H-\frac{1}{2}}I_{0+}^{\frac{1}{2}-H}s^{\frac{1}{2}-H}h',\quad H\in(0,1/2). \tag{2.5}$$

2.3 Lions导数

对于 $p>1$，定义 $\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$ 上的 L^p-Wasserstein 距离如下

$$\mathbb{W}_p(\mu,\nu):=\inf_{\pi\in\mathscr{C}(\mu,\nu)}\left(\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}|x-y|^p\pi(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)\right)^{\frac{1}{p}},\quad \mu,\nu\in\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d),$$

其中，$\mathscr{C}(\mu,\nu)$表示 μ 和 ν的所有耦合构成的集合。众所周知，$(\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)\ \mathbb{W}_p)$是一个波兰空间。在本文中，分别用 $|\cdot|$ 和 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 表示欧几里得范数和内积；对于矩阵，则用 $\|\cdot\|$ 表示算子范数。$\|\cdot\|_{L^p_\mu}$表示空间 $L^p(\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d,\mu)$的范数；对于随机变量 η，$\mathscr{L}_\eta$ 表示其分布。

现在，我们给出Lions导数的定义，进一步的细节参见例如 [4, 7, 15] 。

定义2.1. 设 $p\in(1,\infty)$。

(1) 若 f 是 $\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$上的连续函数，则称其为内在可微的，如果对任意$\mu\in\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$。

$$L^p(\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d,\mu)\ni\phi\mapsto D^L_\phi f(\mu):=\lim_{\varepsilon\downarrow0}\frac{f(\mu\circ(\mathrm{Id}+\varepsilon\phi)^{-1})-f(\mu)}{\varepsilon}\in\mathbb{R}$$

是一个定义良好的有界线性算子。在这种情况下，内在导数 $D^Lf(\mu)$的范数定义为

$$\|D^Lf(\mu)\|_{L^{p^*}_\mu}=\sup_{\|\phi\|_{L^p_\mu}\le1}|D^L_\phi f(\mu)|,$$

其中 $p^*=\frac{p-1}{p}$。

(2) 若 f 在 $\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$上内在可微，则称其为 L-可微，并且

$$\lim_{\|\phi\|_{L^p_\mu}\to0}\frac{|f(\mu\circ(\mathrm{Id}+\phi)^{-1})-f(\mu)-D^L_\phi f(\mu)|}{\|\phi\|_{L^p_\mu}}=0,\quad \mu\in\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d).$$

若 f 在 $\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$ 上 L-可微，且 $D^Lf(\mu)(x)$ 在 $(\mu,x)\in\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)\times\mathbb{R}^d$ 上有联合连续版本，则记为 $f\in C^{(1,0)}(\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d))$。

(3) 若对任意 $(x,\mu)\in\mathbb{R}^d\times\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$，$g(\cdot,\mu)$ 可微且 $g(x,\cdot)$ L-可微，则称 g 在 $\mathbb{R}^d\times\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$ 上可微。此外，若 $D^Lg(x,\cdot)(\mu)(y)$ 和$\nabla g(\cdot,\mu)(x)$ 关于 $(x,y,\mu)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$ 联合连续，则记作$g\in C^{1,(1,0)}(\mathbb{R}^d\times\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$。

对于分量具有L-可微性的向量值函数 $f = (f_i)$ 或矩阵值函数 $f = (f_{ij})$，我们简写为

$$D^L f(\mu) = (D^L f_i(\mu)) \text{ or } D^L f(\mu) = (D^L f_{ij}(\mu)).$$

最后，我们给出后续所需的 L 导数公式，以完成本部分。

引理 2.1.（*[4, 定理 2.1]*）设 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ 是一个无原子概率空间，且 $\xi, \eta \in L^p(\Omega \to \mathbb{R}^d, \mathbb{P})$，其中 $p \in (1, \infty)$。若 $f \in C^{(1,0)}(\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d))$，则

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{f(\mathscr{L}_{\xi+\varepsilon\eta}) - f(\mathscr{L}_\xi)}{\varepsilon} = \mathbb{E}\langle D^L f(\mathscr{L}_\xi)(\xi), \eta \rangle.$$

3 分数噪声驱动的分布依赖随机微分方程的适定性

本节中，固定 $H \in (0, 1)$ $H \in (1/2, 1)$，并考虑以下由分数布朗运动驱动的分布依赖随机微分方程:

$$\mathrm{d}X_t = b_t(X_t, \mathscr{L}_{X_t})\mathrm{d}t + \sigma_t \mathrm{d}B_t^H + \tilde{\sigma}_t(\mathscr{L}_{X_t})\mathrm{d}\tilde{B}_t^{\tilde{H}}, \quad X_0 = \xi, \tag{3.1}$$

其中，系数 $b\colon [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathscr{P}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^d, \sigma\colon [0,T] \to \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d, \tilde{\sigma}\colon [0,T] \times \mathscr{P}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$ 均为可测函数，$(B_t^H)_{t\in[0,T]}$ 和 $(\tilde{B}_t^{\tilde{H}})_{t\in[0,T]}$ 是两个相互独立的分数布朗运动，其赫斯特参数分别为 H 和 H，并且$\xi \in L^p(\Omega \to \mathbb{R}^d, \mathscr{F}_0, \mathbb{P})$，其中 $p \geq 1$。为了证明（3.1）的适定性，我们引入以下假设。

(H1) 存在一个非递减函数 $\kappa_\cdot$，使得对于每个 $t \in [0,T], x, y \in \mathbb{R}^d, \mu, \nu \in \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$,

$$|b_t(x,\mu) - b_t(y,\nu)| \leq \kappa_t(|x-y| + \mathbb{W}_p(\mu,\nu)), \quad \|\tilde{\sigma}_t(\mu) - \tilde{\sigma}_t(\nu)\| \leq \kappa_t \mathbb{W}_p(\mu,\nu),$$

and

$$|b_t(0,\delta_0)| + \|\sigma_t\| + \|\tilde{\sigma}_t(\delta_0)\| \leq \kappa_t.$$

现在，对于每个 $p \geq 1$，令 $\mathcal{S}^p([0,T])$ 表示由 $\mathbb{R}^d$ 值连续 $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$-适应过程 ψ 在 $[0,T]$ 上构成的空间，使得

$$\|\psi\|_{\mathcal{S}^p} := \left(\mathbb{E} \sup_{t\in[0,T]} |\psi_t|^p\right)^{1/p} < \infty,$$

并用字母 C （可带或不带下标）表示一般常数，其取值可能随行而变化。

定义 3.1. 若随机过程 $X=(X_t)_{0\le t\le T}$ 定义在 $\mathbb{R}^d$ 上，且满足 $X\in\mathcal{S}^p([0,T])$ 和 $\mathbb{P}$-几乎处处，则称其为方程 (3.1) 的解。

$$X_t=\xi+\int_0^t b_s(X_s,\mathscr{L}_{X_s})\mathrm{d}s+\int_0^t\sigma_s\mathrm{d}B_s^H+\int_0^t\tilde{\sigma}_s(\mathscr{L}_{X_s})\mathrm{d}\tilde{B}_s^{\tilde{H}},\quad t\in[0,T].$$

注 3.1. 注意到 $\sigma_\cdot$ 和 $\tilde{\sigma}_\cdot(\mathscr{L}_{X_\cdot})$ 均为确定性函数，因此 $\int_0^t\sigma_s\mathrm{d}B_s^H$和 $\int_0^t\tilde{\sigma}_s(\mathscr{L}_{X_s})\mathrm{d}\tilde{B}_s^{\tilde{H}}$可视为关于分数布朗运动的维纳积分。

定理 3.2. 假设 $\xi\in L^p(\Omega\to\mathbb{R}^d,\mathscr{F}_0,\mathbb{P})$ 满足 $p\ge1$，且以下条件之一成立：

(I) $H\in(1/2,1)$，$b,\sigma,\tilde{\sigma}$ 满足 (H1)，且 $p>\max\{1/H,1/H\}$；

(II) $H\in(0,1/2)$ $b,\tilde{\sigma}$ 满足 (H1)，σ_t 不依赖于 t 和 $p>1/H$.

那么方程 (3.1) 有唯一解 $X\in\mathcal{S}^p([0,T])$。此外，令 $(X_t^\mu)_{t\in[0,T]}$ 为方程 (3.1) 在 $\mathscr{L}_{X_0}=\mu\in\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$ 下的解，并记为 $P_t^*\mu=\mathscr{L}_{X_t^\mu},t\in[0,T]$。则有

$$\mathbb{W}_p(P_t^*\mu,P_t^*\nu)\le C_{p,T,\kappa,\tilde{H}}\mathbb{W}_p(\mu,\nu),\quad\mu,\nu\in\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d).\tag{3.2}$$

证明。由于 $H\in(0,1/2)$ 的情形较为简单，我们只处理 $H\in(1/2,1)$ 的情形，并给出一个证明概要。对于任意 $\mu\in C([0,T],\mathscr{P}_p)$，考虑

$$\mathrm{d}X_t=b_t(X_t,\mu_t)\mathrm{d}t+\sigma_t\mathrm{d}B_t^H+\tilde{\sigma}_t(\mu_t)\mathrm{d}\tilde{B}_t^{\tilde{H}},\quad t\in[0,T],X_0=\xi.$$

将其解记为 $X^{\mu,\xi}_{\cdot}$。我们首先断言 $\mathbb{E}\Big(\sup_{t\in[0,T]}|X^{\mu,\xi}_t|^p\Big)<\infty$，其中 $p>\tilde{}\max\{1/H,1/H\}$。事实上，由 (H1) 和 Hölder 不等式可推出

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Big(\sup_{t\in[0,T]}|X_t^{\mu,\xi}|^p\Big)\\&\le4^{p-1}\mathbb{E}|\xi|^p+12^{p-1}(T\kappa_T)^p\Big(1+\sup_{t\in[0,T]}\mu_t(|\cdot|^p)+\frac{1}{T}\mathbb{E}\int_0^T\sup_{s\in[0,t]}|X_s^{\mu,\xi}|^p\mathrm{d}t\Big)\\&+4^{p-1}\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t\sigma_s\mathrm{d}B_s^H\right|^p\right)+4^{p-1}\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t\tilde{\sigma}_s(\mu_s)\mathrm{d}\tilde{B}_s^{\tilde{H}}\right|^p\right).\end{aligned}\tag{3.3}$$

通过一个 si $\tilde{}$对 [11, 步骤 1], 进行类似分析后，我们推导出，对于任意 $p>\max\{1/H,1/H\}$,

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t\sigma_s\mathrm{d}B_s^H\right|^p\right)+\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t\tilde{\sigma}_s(\mu_s)\mathrm{d}\tilde{B}_s^{\tilde{H}}\right|^p\right)$$

$$\leq C_{p,T,\kappa,H,\tilde{H}}\left(1+\left(\sup_{t\in[0,T]}\mu_t(|\cdot|^p)\right)\right).$$

结合（3.3），可得 $\mathbb{E}\Big(\sup_{t\in[0,T]}|X^{\mu,\ \xi}_{t}|^p\Big)<\infty$。

现在，定义映射 $\Phi^\xi\colon C([0,T];\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d))\to C([0,T];\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d))$ 如下

$$\Phi^\xi_t(\mu)=\mathscr{L}_{X^{\mu,\xi}_t},\quad t\in[0,T].$$

由 (H1)，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|X^{\mu,\xi}_t-X^{\nu,\tilde{\xi}}_t|^p\leq&3^{p-1}\mathbb{E}|\xi-\tilde{\xi}|^p+3^{p-1}\mathbb{E}\left|\int_0^t(b_s(X^{\mu,\xi}_s,\mu_s)-b_s(X^{\nu,\tilde{\xi}}_s,\nu_s))\mathrm{d}s\right|^p\\&+3^{p-1}\mathbb{E}\left|\int_0^t(\tilde{\sigma}_s(\mu_s)-\tilde{\sigma}_s(\nu_s))\mathrm{d}\tilde{B}^{\tilde{H}}_s\right|^p\\\leq&3^{p-1}\mathbb{E}|\xi-\tilde{\xi}|^p+(6t)^{p-1}\kappa_t^p\int_0^t\left(\mathbb{E}|X^{\mu,\xi}_s-X^{\nu,\tilde{\xi}}_s|^p+\mathbb{W}_p(\mu_s,\nu_s)^p\right)\mathrm{d}s\\&+3^{p-1}C_{p,\tilde{H}}\kappa_t^p t^{p\tilde{H}-1}\int_0^t\mathbb{W}_p(\mu_s,\nu_s)^p\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

其中，我们在定理 3.1] 的证明中使用了 [11, (3.8)，并在最后一个不等式中使用了 $p>1/H$。于是，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|X^{\mu,\xi}_t-X^{\nu,\tilde{\xi}}_t|^p\leq&3^{p-1}\mathbb{E}|\xi-\tilde{\xi}|^p+C_{p,T,\kappa,\tilde{H}}\int_0^t\mathbb{E}|X^{\mu,\xi}_s-X^{\nu,\tilde{\xi}}_s|^p\mathrm{d}s\\&+C_{p,T,\kappa,\tilde{H}}\int_0^t\mathbb{W}_p(\mu_s,\nu_s)^p\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

由此结合格朗沃尔引理可得

$$\mathbb{E}|X^{\mu,\xi}_t-X^{\nu,\tilde{\xi}}_t|^p\leq C_{p,T,\kappa,\tilde{H}}\mathbb{E}|\xi-\tilde{\xi}|^p+C_{p,T,\kappa,\tilde{H}}\int_0^t\mathbb{W}_p(\mu_s,\nu_s)^p\mathrm{d}s.\tag{3.4}$$

因此，对于任意 $\lambda>0$，我们有

$$\sup_{t\in[0,T]}\mathrm{e}^{-\lambda pt}\mathbb{W}_p(\Phi^\xi_t(\mu),\Phi^\xi_t(\nu))^p\leq\frac{C_{p,T,\kappa,\tilde{H}}}{\lambda}\sup_{t\in[0,T]}\mathrm{e}^{-\lambda pt}\mathbb{W}_p(\mu_t,\nu_t)^p.$$

取满足 $\lambda_0\frac{C_{p,T,\kappa,\tilde{H}}}{\lambda}<\frac{1}{2^p}$ 的对象，并令 $E^\xi:=\{\mu\in C([0,T];\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d))\colon\mu_0=\mathscr{L}_\xi\}$，其配备完备度量

$$\rho_{\lambda_0}(\nu,\mu):=\sup_{t\in[0,T]}\mathrm{e}^{-\lambda_0 t}\mathbb{W}_p(\nu_t,\mu_t),\quad\mu,\nu\in E^\xi.$$

因此，有

$$\rho_{\lambda_0}(\Phi^\xi(\mu),\Phi^\xi(\nu))<\frac{1}{2}\rho_{\lambda_0}(\mu,\nu),\quad \mu,\nu\in E^\xi.$$

利用巴拿赫不动点定理，我们得出

$$\Phi_t^\xi(\mu)=\mu_t,\quad t\in[0,T]$$

存在唯一的解 $\mu\in E^\xi$，这意味着方程 (3.1) 在$[0,T]$上具有唯一的强解，其初始值为 ξ。

˜接下来，将 (3.4) 应用于 $\mu_t=P_t^*\mu,\nu_t=P_t^*\nu$，并取满足 $\mathscr{L}_\xi=\mu,\mathscr{L}_{\tilde{\xi}}=\nu$˜和 $\mathbb{E}|\xi-\xi|^p=\mathbb{W}_p(\mu,\nu)^p$ 的 ξ,ξ，则存在常数 $C_{p,T,\kappa,\tilde{H}}>0$，使得

$$\sup_{s\in[0,t]}\mathbb{W}_p(P_s^*\mu,P_s^*\nu)^p\le C_{p,T,\kappa,\tilde{H}}\mathbb{W}_p(\mu,\nu)^p+C_{p,T,\kappa,\tilde{H}}\int_0^t\mathbb{W}_p(P_s^*\mu,P_s^*\nu)^p\mathrm{d}s,\quad t\in[0,T].$$

因此，由格朗沃尔不等式可知，证明完毕。 □

注 3.3. 在与定理 3.2 相同的条件下，我们得到，对于任意 $t\in[0,T]$ ，

$$\mathbb{E}\bigg(\sup_{s\in[0,t]}|\varrho_s^\mu-\varrho_s^\nu|^p\bigg)\le C_{p,T,\kappa,\tilde{H}}t^{p\tilde{H}}\mathbb{W}_p(\mu,\nu)^p.$$

这里，对所有 $s\in[0,T]$ 和 $\mu\in\mathscr{P}(\mathbb{R}^d)$，我们有 $\varrho_s^\mu:=\int_0^s\tilde{\sigma}_r(P_r^*\mu)\mathrm{d}\tilde{B}_r^{\tilde{H}}$。事实上，将定理 3.*1]* 的证明中的 *[11,* (3.8)与 (3.2) 结合可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\bigg(\sup_{s\in[0,t]}|\varrho_s^\mu-\varrho_s^\nu|^p\bigg)&=\mathbb{E}\bigg(\sup_{s\in[0,t]}\bigg|\int_0^s(\tilde{\sigma}_r(P_r^*\mu)-\tilde{\sigma}_r(P_r^*\nu))\mathrm{d}\tilde{B}_r^{\tilde{H}}\bigg|^p\bigg)\\ \le&C_{p,\tilde{H}}\kappa_t^p t^{p\tilde{H}-1}\int_0^t\mathbb{W}_p(P_r^*\mu,P_r^*\nu)^p\mathrm{d}r\le C_{p,T,\kappa,\tilde{H}}t^{p\tilde{H}}\mathbb{W}_p(\mu,\nu)^p.\end{aligned}$$

4 分数噪声驱动的分布依赖随机微分方程的正则性

本节主要讨论 (3.1) 的正则性。更确切地说，对于任意 $t\in[0,T]$、$\mu\in\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$ 和 $f\in\mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d)$，令

$$(P_tf)(\mu)=\int_{\mathbb{R}^d}f\mathrm{d}(P_t^*\mu)\tag{4.1}$$

其中 $P_t^*\mu:=\mathscr{L}_{X_t^\mu}$，对于 X_t^μ，其是初始分布为 μ、满足 (3.1) 的解，接着引入如下泛函

$$\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)\ni\mu\mapsto(P_tf)(\mu),\quad t\in[0,T],\ f\in\mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d).$$

基于耦合论证以及对分数阶导数算子的细致分析，我们将为这些泛函在非退化情形和退化情形下分别建立对数哈纳克不等式和Bismut公式。

4.1 非退化情形

本部分致力于研究（3.1）中非退化情形的正则性。我们先作出以下假设。

(H1') 对每个 $t \in [0,T]$, $b_t(\cdot,\cdot) \in C^{1,\,(1,0)}(\mathbb{R}^d \times \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d))$。此外，存在一个非递减函数 $\kappa_\cdot$，使得对任意 $t \in [0,T]$, $x,y \in \mathbb{R}^d$, $\mu,\nu \in \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$,

$$\|\nabla b_t(\cdot,\mu)(x)\| + |D^L b_t(x,\cdot)(\mu)(y)| \le \kappa_t, \quad \|\tilde{\sigma}_t(\mu) - \tilde{\sigma}_t(\nu)\| \le \kappa_t \mathbb{W}_p(\mu,\nu),$$

以及 $|b_t(0,\delta_0)| + \|\sigma_t\| + \|\tilde{\sigma}_t(\delta_0)\| \le \kappa_t$。

注意到，借助 Bochner 积分的基本定理（例如，参见 [20, 命题 A.2.3]）以及 L-导数和 Wasserstein 距离的定义，**(H1')** 蕴含：对每个 $p \ge 1$,

$$|b_t(x,\mu) - b_t(y,\nu)| \le \kappa_t(|x-y| + \mathbb{W}_p(\mu,\nu)), \quad t \in [0,T],\ x,y \in \mathbb{R}^d,\ \mu,\nu \in \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d).$$

因此，根据定理 3.2，(3.1) 存在唯一解。为研究其正则性，除 **(H1')** 外，我们还需要以下条件。

(H2) 存在一个常数 $\tilde{\kappa} > 0$，使得

(i) for any $t,s \in [0,T]$, $x,y,z_1,z_2 \in \mathbb{R}^d$, $\mu,\nu \in \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned}&\|\nabla b_t(\cdot,\mu)(x) - \nabla b_s(\cdot,\nu)(y)\| + |D^L b_t(x,\cdot)(\mu)(z_1) - D^L b_s(y,\cdot)(\nu)(z_2)| \\ &\le \tilde{\kappa}(|t-s|^\alpha + |x-y|^\beta + |z_1-z_2|^\gamma + \mathbb{W}_p(\mu,\nu)),\end{aligned}$$

where $\alpha \in (H-1/2,1]$ and $\beta,\gamma \in (1-1/(2H),1]$.

(ii) σ 可逆，且 σ^{-1} 是 $\delta \in$ 阶 Hölder 连续的（$H-1/2,1$]:

$$\|\sigma^{-1}(t) - \sigma^{-1}(s)\| \le \tilde{\kappa}|t-s|^\delta, \quad t,s \in [0,T].$$

4.1.1 对数 Harnack 不等式

本部分的主要目标是证明以下对数 Harnack 不等式。定理 4.1。考虑方程 (3.1)。若以下两个假设之一成立：

(I) $H \in (1/2,1)$, b、σ、$\tilde{\sigma}$ 满足 **(H1')**、**(H2)**，且 $p \ge 2(1+\beta)$;

(II) $H \in (0,1/2)$ b, $\tilde{\sigma}$ 满足 **(H1)**, σ_t 不依赖于 t 和 $p \ge 2$。

那么，对于任意的 $t \in (0,T]$, $\mu,\nu \in \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$ 和 $0 < f \in \mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d)$,

$$(P_t \log f)(\nu) \le \log(P_t f)(\mu) + \varpi(H), \tag{4.2}$$

其中

$$\varpi(H) = \begin{cases} C_{T,\kappa,\tilde{\kappa},H,\tilde{H}}\left(1 + \mathbb{W}_p(\mu,\nu)^{2\beta} + \frac{1}{t^{2H}}\right)\mathbb{W}_p(\mu,\nu)^2, & H \in (1/2,1), \\ C_{T,\kappa,H,\tilde{H}}\left(1 + \frac{1}{t^{2H}}\right)\mathbb{W}_p(\mu,\nu)^2, & H \in (0,1/2). \end{cases}$$

注 4.2。上面得到的对数 Harnack 不等式等价于以下熵-代价估计

$$\mathrm{Ent}(P_t^*\nu|P_t^*\mu) \le \varpi(H), \quad t \in (0,T], \mu, \nu \in \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d),$$

其中，$\mathrm{Ent}(P_t^*\nu|P_t^*\mu)$ 是 $P_t^*\nu$ 关于 $P_t^*\mu$ 的相对熵，且 p 如定理 4.1 中所述。

定理 4.1 的证明。对任意 μ、$\nu \in \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$，选取 $\mathscr{F}_0$-可测的 X_0^μ 和 X_0^ν，使得 $\mathscr{L}_{X_0^\mu} = \mu$、$\mathscr{L}_{X_0^\nu} = \nu$，并且

$$\mathbb{E}|X_0^\mu - X_0^\nu|^p = \mathbb{W}_p(\mu,\nu)^p. \tag{4.3}$$

设 X_t^μ 和 X_t^ν 是方程 (3.1) 的两个解，分别满足 $\mathscr{L}_{X_0^\mu} = \mu$ 和 $\mathscr{L}_{X_0^\nu} = \nu$，由此可得 $\mathscr{L}_{X_t^\mu} = P_t^*\mu$ 和 $\mathscr{L}_{X_t^\nu} = P_t^*\nu$。

对固定的 $t_0 \in (0,T]$，我们首先考虑以下耦合分布依赖随机微分方程：

$$\begin{aligned} \mathrm{d}Y_t = &\left[b_t(X_t^\mu, P_t^*\mu) + \frac{1}{t_0}(X_0^\mu - X_0^\nu + \varrho_{t_0}^\mu - \varrho_{t_0}^\nu)\right]\mathrm{d}t \\ &+ \sigma_t \mathrm{d}B_t^H + \tilde{\sigma}_t(P_t^*\nu)\mathrm{d}\tilde{B}_t^{\tilde{H}}, \quad t \in [0,t_0] \end{aligned} \tag{4.4}$$

其中 $Y_0 = X_0^\nu$。回顾一下，$\varrho_s^\mu = \int_0^s \tilde{\sigma}_r(P_r^*\mu)\mathrm{d}\tilde{B}_r^{\tilde{H}}$、$(s,\mu) \in [0,T]\times\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$ 的定义见注 3.3。考虑到这一点，并将 (3.1) 中的 $(X_t, \mathscr{L}_{X_t})$ 替换为 $(X_t^\mu, P_t^*\mu)$，可得

$$Y_t - X_t^\mu = \frac{t-t_0}{t_0}(X_0^\mu - X_0^\nu) + \frac{t}{t_0}(\varrho_{t_0}^\mu - \varrho_{t_0}^\nu) + \varrho_t^\nu - \varrho_t^\mu, \quad t \in [0,t_0]. \tag{4.5}$$

特别地，有 $Y_{t_0} = X_{t_0}^\mu$。

接下来，我们打算用 Y_{t_0} 表示 $P_{t_0}f(\nu)$。为此，我们首先将式 (4.4) 改写为

$$\mathrm{d}Y_t = b_t(Y_t, P_t^*\nu)\mathrm{d}t + \sigma_t\mathrm{d}\bar{B}_t^H + \tilde{\sigma}_t(P_t^*\nu)\mathrm{d}\tilde{B}_t^{\tilde{H}}, \quad t \in [0,t_0], \tag{4.6}$$

其中

$$\bar{B}_t^H := B_t^H - \int_0^t \sigma_s^{-1}\zeta_s\mathrm{d}s = \int_0^t K_H(t,s)\left(\mathrm{d}W_s - K_H^{-1}\left(\int_0^\cdot \sigma_r^{-1}\zeta_r\mathrm{d}r\right)(s)\mathrm{d}s\right)$$

with

$$\zeta_s := b_s(Y_s, P_s^*\nu) - b_s(X_s^\mu, P_s^*\mu) - \frac{1}{t_0}(X_0^\mu - X_0^\nu + \varrho_{t_0}^\mu - \varrho_{t_0}^\nu).$$

Set

$$R^{\tilde{H},0} := \exp\left[\int_0^{t_0}\left\langle K_H^{-1}\left(\int_0^\cdot \sigma_r^{-1}\zeta_r\mathrm{d}r\right)(s), \mathrm{d}W_s\right\rangle - \frac{1}{2}\int_0^{t_0}\left|K_H^{-1}\left(\int_0^\cdot \sigma_r^{-1}\zeta_r\mathrm{d}r\right)(s)\right|^2\mathrm{d}s\right].$$

一方面，借助下文的注记 4.4 (i) 以及分数 Girsanov 定理（例如参见 [10, 定理 4.9] 或 [23, 定理 2]），我们知道，在条件概率 $R^{H,0}\mathrm{d}\mathbb{P}^{H,0}$ 下，$(\bar{B}_t^H)_{t\in[0,t_0]}$ 是一个 d 维分数布朗运动。在本文及下文中，我们使用 $\mathbb{P}^{H,0}$ 和 $\mathbb{E}^{H,0}$ 分别表示给定 $\tilde{B}^{\tilde{H}}$ 和 $\mathscr{F}_0$ 后的条件概率和条件期望，即

$$\mathbb{P}^{\tilde{H},0}=\mathbb{P}(\,\cdot\,|\tilde{B}^{\tilde{H}},\mathscr{F}_0),\quad \mathbb{E}^{\tilde{H},0}=\mathbb{E}(\,\cdot\,|\tilde{B}^{\tilde{H}},\mathscr{F}_0).$$

另一方面，令 $\bar{Y}_t=Y_t-\varrho_t^\nu$，则 (4.6) 可写为

$$\mathrm{d}\bar{Y}_t=b_t(\bar{Y}_t+\varrho_t^\nu,P_t^*\nu)\mathrm{d}t+\sigma_t\mathrm{d}\bar{B}_t^H,\quad t\in[0,t_0],\quad \bar{Y}_0=Y_0=X_0^\nu.$$

注意到 $X_\cdot^\nu:=X_\cdot^\nu-\varrho_\cdot^\nu$ 满足相同形式的随机微分方程

$$\mathrm{d}\bar{X}_t^\nu=b_t(\bar{X}_t^\nu+\varrho_t^\nu,P_t^*\nu)\mathrm{d}t+\sigma_t\mathrm{d}B_t^H,\quad t\in[0,t_0],\quad \bar{X}_0^\nu=X_0^\nu.$$

因此，根据解的弱唯一性，我们得到，在 $R^{H,0}\mathrm{d}\mathbb{P}^{H,0}$ 下，Y_{t_0} 的分布与在 $\mathbb{P}^{H,0}$下的 $\bar{X}_{t_0}^\nu$ 的分布相同。因此，由于给定 $\tilde{B}^{\tilde{H}}$ 时 $\varrho_{t_0}^\nu$ 是确定的，我们得出，在 $R^{H,0}\mathrm{d}\mathbb{P}^{H,0}$ 下，$Y_{t_0}=\bar{Y}_{t_0}+\varrho_{t_0}^\nu$ 的分布也与在 $\mathbb{P}^{H,0}$下的 $X_{t_0}^\nu=\bar{X}_{t_0}^\nu+\varrho_{t_0}^\nu$ 的分布相同。结合 $Y_{t_0}=X_{t_0}^\mu$，可知对于任意 $f\in\mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d)$，

$$(P_{t_0}^{\tilde{H},0}f)(X_0^\nu):=\mathbb{E}^{\tilde{H},0}f(X_{t_0}^\nu)=\mathbb{E}_{R^{\tilde{H},0}\mathbb{P}^{\tilde{H},0}}f(Y_{t_0})=\mathbb{E}_{R^{\tilde{H},0}\mathbb{P}^{\tilde{H},0}}f(X_{t_0}^\mu).\tag{4.7}$$

现在，由 (4.1) 和 (4.7)，我们推得，对于每个 $0<f\in\mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d)$，

$$\begin{aligned}
&(P_{t_0}\log f)(\nu)=\mathbb{E}\left[\mathbb{E}^{\tilde{H},0}(\log f(X_{t_0}^\nu))\right]=\mathbb{E}\left[(P_{t_0}^{\tilde{H},0}\log f)(X_0^\nu)\right]\\
=&\mathbb{E}\left[\mathbb{E}_{R^{\tilde{H},0}\mathbb{P}^{\tilde{H},0}}\log f(X_{t_0}^\mu)\right]=\mathbb{E}\left[\mathbb{E}^{\tilde{H},0}\left(R^{\tilde{H},0}\log f(X_{t_0}^\mu)\right)\right]\\
\le&\mathbb{E}\left[\log\mathbb{E}^{\tilde{H},0}f(X_{t_0}^\mu)+\mathbb{E}^{\tilde{H},0}\left(R^{\tilde{H},0}\log R^{\tilde{H},0}\right)\right]\\
=&\mathbb{E}\left[\log(P_{t_0}^{\tilde{H},0}f)(X_0^\mu)\right]+\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\mathbb{E}^{\tilde{H},0}\left(\int_0^{t_0}\left|K_H^{-1}\left(\int_0^\cdot\sigma_r^{-1}\zeta_r\mathrm{d}r\right)(s)\right|^2\mathrm{d}s\right)\right],
\end{aligned}\tag{4.8}$$

其中不等式中用到了杨氏不等式（例如，参见 [2, 引理 2.4]）。利用詹森不等式和下文的引理 4.3，我们得到

$$\begin{aligned}
(P_{t_0}\log f)(\nu)&\le\log\mathbb{E}\left((P_{t_0}^{\tilde{H},0}f)(X_0^\mu)\right)+\frac{1}{2}\mathbb{E}\vartheta(H)\\
&=\log(P_{t_0}f)(\mu)+\frac{1}{2}\mathbb{E}\vartheta(H),\quad t_0\in(0,T],\mu,\nu\in\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d).
\end{aligned}\tag{4.9}$$

因此，利用注记 4.4 (ii)，我们得到了所需的关系。证明至此完成。

□

下面的引理和注记 4.4 包含了关于函数 $K_H^{-1}\left(\int_0^{\cdot}\sigma_r^{-1}\zeta_r\mathrm{d}r\right)(s)$ 的估计，这些估计有助于研究分数布朗运动情形下的 Girsanov 变换，进而研究对数 Harnack 不等式 (4.2)。在继续之前，对于任意给定的连续函数 $f\colon [0,T]\to\mathbb{R}^d$ 以及阶数为 $\alpha\in(0,1)$ 的 H¨older 连续函数$g\colon [0,T]\to\mathbb{R}^d$，我们定义

$$\|f\|_\infty := \sup_{t\in[0,T]}|f(t)|,\quad \|g\|_\alpha := \sup_{0\le s<t\le T}\frac{|g(t)-g(s)|}{(t-s)^\alpha}.$$

引理 4.3. 设定理 4.1 中的假设成立，则对于任意 $\mu,\nu\in\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$，若$p\ge 2(1+\beta)$ 且 $H\in(1/2,1)$，或 $p\ge 2$ 若 $H\in(0,1/2)$，

$$\mathbb{E}^{\tilde H,0}\left(\int_0^{t_0}\left|K_H^{-1}\left(\int_0^{\cdot}\sigma_r^{-1}\zeta_r\mathrm{d}r\right)(s)\right|^2\mathrm{d}s\right)\le\vartheta(H),$$

其中

$$\vartheta(H)=\begin{cases} C_{T,\kappa,\tilde\kappa,H,\tilde H}\Bigg[\mathbb{W}_p(\mu,\nu)^2+\left(\frac{1}{t_0^{2H}}+\|\varrho_\cdot^\mu\|_{\tilde H-\varsigma_1}^{2\beta}+\|\varrho_\cdot^\nu\|_{\tilde H-\varsigma_2}^{2\beta}+\psi^{2\beta}(X_0,\varrho)\right)\psi^2(X_0,\varrho)\\ \qquad+\left(1+|X_0^\mu|^{2\beta}+\|\varrho_\cdot^\mu\|_\infty^{2\beta}+\|\varrho_\cdot^\mu\|_{\tilde H-\varsigma_1}^{2\beta}\right)\left(\mathbb{W}_p(\mu,\nu)^2+\psi^2(X_0,\varrho)\right)\\ \qquad+\int_0^{t_0}s^{2H-1}\left(\int_0^s\frac{|\varrho_s^\nu-\varrho_s^\mu-(\varrho_r^\nu-\varrho_r^\mu)|}{(s-r)^{\frac12+H}}r^{\frac12-H}\mathrm{d}r\right)^2\mathrm{d}s\Bigg], & H\in(1/2,1),\\ C_{T,\kappa,H,\tilde H}\left(\frac{\psi^2(X_0,\varrho)}{t_0^{2H}}+\mathbb{W}_p(\mu,\nu)^2\right), & H\in(0,1/2),\end{cases}$$

满足 $\psi(X_0,\varrho):=|X_0^\mu-X_0^\nu|+\sup_{s\in[0,t_0]}|\varrho_s^\mu-\varrho_s^\nu|$ 且 $\varsigma_i\in(0,1/2)$ $i=1,2,3$.

证明。我们先处理 $H\in(1/2,1)$ 的情形。由 (2.4) 和 (2.2)，可得

$$\begin{aligned}&K_H^{-1}\left(\int_0^{\cdot}\sigma_r^{-1}\zeta_r\mathrm{d}r\right)(s)=s^{H-\frac12}D_{0+}^{H-\frac12}\left[\cdot^{\frac12-H}\sigma_\cdot^{-1}\zeta_\cdot\right](s)\\ =&\frac{H-\frac12}{\Gamma(\frac32-H)}\Bigg[\frac{s^{\frac12-H}\sigma_s^{-1}\zeta_s}{H-\frac12}+s^{H-\frac12}\sigma_s^{-1}\zeta_s\int_0^s\frac{s^{\frac12-H}-r^{\frac12-H}}{(s-r)^{\frac12+H}}\mathrm{d}r\\ &\qquad+s^{H-\frac12}\zeta_s\int_0^s\frac{\sigma_s^{-1}-\sigma_r^{-1}}{(s-r)^{\frac12+H}}r^{\frac12-H}\mathrm{d}r\\ &\qquad+s^{H-\frac12}\int_0^s\frac{\zeta_s-\zeta_r}{(s-r)^{\frac12+H}}\sigma_r^{-1}r^{\frac12-H}\mathrm{d}r\Bigg]\\ =:&\frac{H-\frac12}{\Gamma(\frac32-H)}[I_1(s)+I_2(s)+I_3(s)+I_4(s)].\end{aligned}\tag{4.10}$$

由 (H1)、(4.5) 和定理 3.2，可得

$$
\begin{aligned}
|\zeta_s| \leq & \frac{\kappa_s(t_0-s)+1}{t_0}|X_0^\mu - X_0^\nu| + \frac{\kappa_s s+1}{t_0}|\varrho_{t_0}^\mu - \varrho_{t_0}^\nu| \\
& + \kappa_s\left(|\varrho_s^\mu - \varrho_s^\nu| + C_{T,\tilde{H}}\mathbb{W}_p(\mu,\nu)\right).
\end{aligned} \tag{4.11}
$$

此外，我们有

$$
\int_0^s \frac{r^{\frac{1}{2}-H} - s^{\frac{1}{2}-H}}{(s-r)^{\frac{1}{2}+H}}\mathrm{d}r = s^{1-2H}\int_0^1 \frac{r^{\frac{1}{2}-H}-1}{(1-r)^{\frac{1}{2}+H}}\mathrm{d}r < \infty.
$$

这些连同 (H2)(ii) 可推出

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^3 |I_i(s)|^2 \leq & C_{T,\tilde{\kappa},H}(s^{1-2H}+s^{2\delta-2H+1})|\zeta_s|^2 \\
\leq & C_{T,\kappa,\tilde{\kappa},H,\tilde{H}}(s^{1-2H}+s^{2\delta-2H+1})\left(\frac{\psi^2(X_0,\varrho)}{t_0^2} + \mathbb{W}_p(\mu,\nu)^2\right),
\end{aligned}
$$

其中，为简便起见，我们令 $\psi(X_0,\varrho) := |X_0^\mu - X_0^\nu| + \sup_{s\in[0,t_0]}|\varrho_s^\mu - \varrho_s^\nu|$。于是，我们得到

$$
\sum_{i=1}^3 \int_0^{t_0} |I_i(s)|^2 \mathrm{d}s \leq C_{T,\kappa,\tilde{\kappa},H,\tilde{H}}\left(\frac{\psi^2(X_0,\varrho)}{t_0^{2H}} + \mathbb{W}_p(\mu,\nu)^2\right). \tag{4.12}
$$

关于 I_4，利用 (H1') 和引理 2.1，我们推得对任意 $s\in[0,T]$,

$$
\begin{aligned}
& b_s(Y_s, P_s^*\nu) - b_s(X_s^\mu, P_s^*\mu) \\
= & \int_0^1 \frac{d}{\mathrm{d}\theta} b_s(X_s^\mu + \theta(Y_s - X_s^\mu), P_s^*\nu)\mathrm{d}\theta + \int_0^1 \frac{d}{\mathrm{d}\theta} b_s(X_s^\mu, \mathscr{L}_{X_s^\mu+\theta(X_s^\nu - X_s^\mu)})\mathrm{d}\theta \\
= & \int_0^1 \nabla b_s(\cdot, P_s^*\nu)(X_s^\mu + \theta(Y_s - X_s^\mu))(Y_s - X_s^\mu)\mathrm{d}\theta \\
& + \int_0^1 \left(\mathbb{E}\langle D^L b_s(x,\cdot)(\mathscr{L}_{X_s^{\mu,\nu}(\theta)})(X_s^{\mu,\nu}(\theta)), X_s^\nu - X_s^\mu\rangle\right)|_{x=X_s^\mu}\mathrm{d}\theta,
\end{aligned}
$$

其中，对任意 $\theta\in[0,1]$, $X_s^{\mu,\nu}(\theta) := X_s^\mu + \theta(X_s^\nu - X_s^\mu)$。
由 (H1')、(H2)(i) 和 (4.5)，我们得到

$$
\begin{aligned}
& |\zeta_s - \zeta_r| = |b_s(Y_s, P_s^*\nu) - b_s(X_s^\mu, P_s^*\mu) - (b_r(Y_r, P_r^*\nu) - b_r(X_r^\mu, P_r^*\mu))| \\
\leq & C_{T,\kappa,\tilde{\kappa},H,\tilde{H}}\Bigg\{\Bigg[(s-r)^\alpha + \frac{s-r}{t_0} + \mathbb{W}_p(P_s^*\nu, P_r^*\nu) + \frac{(s-r)^\beta}{t_0^\beta}\psi^\beta(X_0,\varrho) \\
& + |\varrho_s^\nu - \varrho_s^\mu - (\varrho_r^\nu - \varrho_r^\mu)|^\beta + |X_s^\mu - X_r^\mu|^\beta\Bigg]\psi(X_0,\varrho)
\end{aligned}
$$

$$+\Big[(s-r)^{\alpha}+(\mathbb{E}|X_s^{\mu}-X_r^{\mu}|^p)^{\frac{\gamma}{p}}+(\mathbb{E}|X_s^{\nu}-X_r^{\nu}|^p)^{\frac{\gamma}{p}}$$
$$+(\mathbb{E}|X_s^{\mu}-X_r^{\mu}|^p)^{\frac{1}{p}}+(\mathbb{E}|X_s^{\nu}-X_r^{\nu}|^p)^{\frac{1}{p}}+|X_s^{\mu}-X_r^{\mu}|^{\beta}\Big](\mathbb{E}|X_s^{\mu}-X_s^{\nu}|^p)^{\frac{1}{p}}$$
$$+|\varrho_s^{\nu}-\varrho_s^{\mu}-(\varrho_r^{\nu}-\varrho_r^{\mu})|+\mathbb{E}|(X_s^{\mu}-X_r^{\mu})-(X_s^{\nu}-X_r^{\nu})|\Big\}.$$

分别沿用定理 3.2 中的相同论证，我们可得，对于任意 $s,r\in[0,T]$ 和 $\mu,\nu\in\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$，满足 $p>\max\{1/H,1/\tilde{H}\}$,

$$\mathbb{E}|X_s^{\mu}-X_r^{\mu}|^p\le C_{T,\kappa,\tilde{\kappa},H,\tilde{H}}|s-r|^{p(H\wedge\tilde{H})}$$

and

$$\mathbb{E}|(X_s^{\mu}-X_r^{\mu})-(X_s^{\nu}-X_r^{\nu})|^p\le C_{T,\kappa,\tilde{\kappa},\tilde{H}}(s-r)^{p\tilde{H}}\mathbb{W}_p(\mu,\nu)^p.$$

因此，将这些结果与 (3.4) 结合可得

$$\begin{aligned}
&|I_4(s)|^2\\
\le&C_{T,\kappa,\tilde{\kappa},H,\tilde{H}}\Bigg[\left(s^{2(\alpha-H)+1}+s^{2(H\wedge\tilde{H}-H)+1}+s^{2((H\wedge\tilde{H})\gamma-H)+1}\right)\mathbb{W}_p(\mu,\nu)^2\\
&\quad+\left(s^{2(\alpha-H)+1}+s^{2(H\wedge\tilde{H}-H)+1}+\frac{s^{3-2H}}{t_0^2}+\frac{s^{2(\beta-H)+1}}{t_0^{2\beta}}\psi^{2\beta}(X_0,\varrho)\right)\psi^2(X_0,\varrho)\\
&\quad+s^{2H-1}\left(\int_0^s\frac{|\varrho_s^{\nu}-\varrho_s^{\mu}-(\varrho_r^{\nu}-\varrho_r^{\mu})|}{(s-r)^{\frac{1}{2}+H}}r^{\frac{1}{2}-H}\mathrm{d}r\right)^2\\
&\quad+s^{2H-1}\left(\int_0^s\frac{|\varrho_s^{\nu}-\varrho_s^{\mu}-(\varrho_r^{\nu}-\varrho_r^{\mu})|^{\beta}}{(s-r)^{\frac{1}{2}+H}}r^{\frac{1}{2}-H}\mathrm{d}r\right)^2\psi^2(X_0,\varrho)\\
&\quad+s^{2H-1}\left(\int_0^s\frac{|X_s^{\mu}-X_r^{\mu}|^{\beta}}{(s-r)^{\frac{1}{2}+H}}r^{\frac{1}{2}-H}\mathrm{d}r\right)^2(\mathbb{W}_p(\mu,\nu)^2+\psi^2(X_0,\varrho))\Bigg]\\
\le&C_{T,\kappa,\tilde{\kappa},H,\tilde{H}}\Bigg[\left(s^{2(\alpha-H)+1}+s^{2(H\wedge\tilde{H}-H)+1}+s^{2((H\wedge\tilde{H})\gamma-H)+1}\right)\mathbb{W}_p(\mu,\nu)^2\\
&\quad+\Bigg(s^{2(\alpha-H)+1}+s^{2(H\wedge\tilde{H}-H)+1}+\frac{s^{3-2H}}{t_0^2}+\|\varrho_{\cdot}^{\mu}\|_{\tilde{H}-\varsigma_1}^{2\beta}s^{1+2(\tilde{H}-\varsigma_1)\beta-2\tilde{H}}\\
&\qquad+\|\varrho_{\cdot}^{\nu}\|_{\tilde{H}-\varsigma_2}^{2\beta}s^{1+2(\tilde{H}-\varsigma_2)\beta-2\tilde{H}}+\frac{s^{2(\beta-H)+1}}{t_0^{2\beta}}\psi^{2\beta}(X_0,\varrho)\Bigg)\psi^2(X_0,\varrho)\\
&\quad+s^{2H-1}\left(\int_0^s\frac{|\varrho_s^{\nu}-\varrho_s^{\mu}-(\varrho_r^{\nu}-\varrho_r^{\mu})|}{(s-r)^{\frac{1}{2}+H}}r^{\frac{1}{2}-H}\mathrm{d}r\right)^2
\end{aligned}$$

(4.13)

$$+ s^{2H-1}\left(\int_0^s \frac{|X_s^\mu - X_r^\mu|^\beta}{(s-r)^{\frac{1}{2}+H}} r^{\frac{1}{2}-H}\mathrm{d}r\right)^2 (\mathbb{W}_p(\mu,\nu)^2 + \psi^2(X_0,\varrho))\Bigg],$$

~其中，最后一个不等式是由 $\varrho_\cdot^\mu$ 和 $\varrho_\cdot^\nu$ 分别具有阶数为 $H-\varsigma_1$ 和 ~$H-\varsigma_2$、取值于 $\varsigma_i \in (0,1/2)$ $i=1$、2 的 H¨older 连续性得到的。Ob serve t hat there hold

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T]}|X_t^\mu| \leq & C_{T,\kappa,H,\tilde{H}}\left(1+(\mathbb{E}|X_0^\mu|^p)^{\frac{1}{p}}+|X_0^\mu|+\left\|\int_0^\cdot \sigma_t \mathrm{d}B_t^H\right\|_\infty + \|\varrho_\cdot^\mu\|_\infty\right)\\ =: & C_{T,\kappa,H,\tilde{H}}\Upsilon_\mu\end{aligned}$$

and

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}|X_t^\mu|^p\right) \leq C_{T,\kappa,H,\tilde{H}}\left(1+\mathbb{E}|X_0^\mu|^p\right).$$

于是，由 (H1') 可得

$$\begin{aligned}\left|\int_r^s b_t(X_t^\mu,\mathscr{L}_{X_t^\mu})\mathrm{d}t\right| \leq & \kappa(T)\left[1+\sup_{t\in[0,T]}|X_t^\mu|+\left(\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}|X_t^\mu|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right](s-r)\\ \leq & C_{T,\kappa,H,\tilde{H}}\Upsilon_\mu(s-r).\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}&s^{2H-1}\left(\int_0^s \frac{|X_s^\mu - X_r^\mu|^\beta}{(s-r)^{\frac{1}{2}+H}} r^{\frac{1}{2}-H}\mathrm{d}r\right)^2\\ \leq & 3s^{2H-1}\left(\int_0^s \frac{|\int_r^s b_t(X_t^\mu,\mathscr{L}_{X_t^\mu})\mathrm{d}t|^\beta}{(s-r)^{\frac{1}{2}+H}} r^{\frac{1}{2}-H}\mathrm{d}r\right)^2 + 3s^{2H-1}\left(\int_0^s \frac{|\int_r^s \sigma_t \mathrm{d}B_t^H|^\beta}{(s-r)^{\frac{1}{2}+H}} r^{\frac{1}{2}-H}\mathrm{d}r\right)^2\\ &+ 3s^{2H-1}\left(\int_0^s \frac{|\varrho_s^\mu - \varrho_r^\mu|^\beta}{(s-r)^{\frac{1}{2}+H}} r^{\frac{1}{2}-H}\mathrm{d}r\right)^2\\ \leq & C_{T,\kappa,H,\tilde{H}}\Upsilon_\mu^{2\beta} s^{1+2(\beta-H)} + C_H\left\|\int_0^\cdot \sigma_t \mathrm{d}B_t^H\right\|_{H-\varsigma_3}^{2\beta} s^{1+2(H-\varsigma_3)\beta-2H}\\ &+ C_{\tilde{H}}\|\varrho_\cdot^\mu\|_{\tilde{H}-\varsigma_1}^{2\beta} s^{1+2(\tilde{H}-\varsigma_1)\beta-2\tilde{H}}.\end{aligned}$$

这里我们用到了 $\int_0^\cdot \sigma_t \mathrm{d}B_t^H$ 的 H¨older 连续性，其阶数为 $H-\varsigma_3$，其中 $\varsigma_3 \in (0,1/2)$。将其代入 (4.13)，并在区间 $[0,t_0]$ 上积分，得到

$$\int_0^{t_0} |I_4(s)|^2 \mathrm{d}s$$

$$
\begin{aligned}
\leq & C_{T,\kappa,\tilde{\kappa},H,\tilde{H}}\Bigg[\left(t_0^{2(\alpha-H+1)}+t_0^{2(H\wedge\tilde{H}-H+1)}+t_0^{2((H\wedge\tilde{H})\gamma-H+1)}\right)\mathbb{W}_p(\mu,\nu)^2 \\
& +\Bigg(t_0^{2(\alpha-H+1)}+t_0^{2(H\wedge\tilde{H}-H+1)}+t_0^{2(1-H)}+\|\varrho_\cdot^\mu\|_{\tilde{H}-\varsigma_1}^{2\beta}t_0^{2(1+(\tilde{H}-\varsigma_1)\beta-\tilde{H})} \\
& \quad +\|\varrho_\cdot^\nu\|_{\tilde{H}-\varsigma_2}^{2\beta}t_0^{2(1+(\tilde{H}-\varsigma_2)\beta-\tilde{H})}+t_0^{2(1-H)}\psi^{2\beta}(X_0,\varrho)\Bigg)\psi^2(X_0,\varrho) \\
& +\int_0^{t_0}s^{2H-1}\left(\int_0^s\frac{|\varrho_s^\nu-\varrho_s^\mu-(\varrho_r^\nu-\varrho_r^\mu)|}{(s-r)^{\frac{1}{2}+H}}r^{\frac{1}{2}-H}\mathrm{d}r\right)^2\mathrm{d}s \\
& +\Bigg(\Upsilon_\mu^{2\beta}t_0^{2(1+\beta-H)}+\left\|\int_0^\cdot\sigma_t\mathrm{d}B_t^H\right\|_{H-\varsigma_3}^{2\beta}t_0^{2(1+(H-\varsigma_3)\beta-H)} \\
& \quad +\|\varrho_\cdot^\mu\|_{\tilde{H}-\varsigma_1}^{2\beta}t_0^{2(1+(\tilde{H}-\varsigma_1)\beta-\tilde{H})}\Bigg)(\mathbb{W}_p(\mu,\nu)^2+\psi^2(X_0,\varrho))\Bigg]. \qquad (4.14)
\end{aligned}
$$

结合 (4.12) 和 (4.10)，可得

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}^{\tilde{H},0}\int_0^{t_0}\left|K_H^{-1}\left(\int_0^\cdot\sigma_r^{-1}\zeta_r\mathrm{d}r\right)(s)\right|^2\mathrm{d}s \\
\leq & C_{T,\kappa,\tilde{\kappa},H,\tilde{H}}\Bigg[\left(1+t_0^{2(\alpha-H+1)}+t_0^{2(H\wedge\tilde{H}-H+1)}+t_0^{2((H\wedge\tilde{H})\gamma-H+1)}\right)\mathbb{W}_p(\mu,\nu)^2 \\
& +\Bigg(\frac{1}{t_0^{2H}}+t_0^{2(\alpha-H+1)}+t_0^{2(H\wedge\tilde{H}-H+1)}+t_0^{2(1-H)}+\|\varrho_\cdot^\mu\|_{\tilde{H}-\varsigma_1}^{2\beta}t_0^{2(1+(\tilde{H}-\varsigma_1)\beta-\tilde{H})} \\
& \quad +\|\varrho_\cdot^\nu\|_{\tilde{H}-\varsigma_2}^{2\beta}t_0^{2(1+(\tilde{H}-\varsigma_2)\beta-\tilde{H})}+t_0^{2(1-H)}\psi^{2\beta}(X_0,\varrho)\Bigg)\psi^2(X_0,\varrho) \\
& +\int_0^{t_0}s^{2H-1}\left(\int_0^s\frac{|\varrho_s^\nu-\varrho_s^\mu-(\varrho_r^\nu-\varrho_r^\mu)|}{(s-r)^{\frac{1}{2}+H}}r^{\frac{1}{2}-H}\mathrm{d}r\right)^2\mathrm{d}s \\
& +\Bigg(\left(1+|X_0^\mu|^{2\beta}+\|\varrho_\cdot^\mu\|_\infty^{2\beta}\right)t_0^{2(1+\beta-H)}+t_0^{2(1+(H-\varsigma_3)\beta-H)} \\
& \quad +\|\varrho_\cdot^\mu\|_{\tilde{H}-\varsigma_1}^{2\beta}t_0^{2(1+(\tilde{H}-\varsigma_1)\beta-\tilde{H})}\Bigg)(\mathbb{W}_p(\mu,\nu)^2+\psi^2(X_0,\varrho))\Bigg] \\
\leq & C_{T,\kappa,\tilde{\kappa},H,\tilde{H}}\Bigg[\mathbb{W}_p(\mu,\nu)^2+\left(\frac{1}{t_0^{2H}}+\|\varrho_\cdot^\mu\|_{\tilde{H}-\varsigma_1}^{2\beta}+\|\varrho_\cdot^\nu\|_{\tilde{H}-\varsigma_2}^{2\beta}+\psi^{2\beta}(X_0,\varrho)\right)\psi^2(X_0,\varrho) \\
& +\left(1+|X_0^\mu|^{2\beta}+\|\varrho_\cdot^\mu\|_\infty^{2\beta}+\|\varrho_\cdot^\mu\|_{\tilde{H}-\varsigma_1}^{2\beta}\right)(\mathbb{W}_p(\mu,\nu)^2+\psi^2(X_0,\varrho)) \\
& +\int_0^{t_0}s^{2H-1}\left(\int_0^s\frac{|\varrho_s^\nu-\varrho_s^\mu-(\varrho_r^\nu-\varrho_r^\mu)|}{(s-r)^{\frac{1}{2}+H}}r^{\frac{1}{2}-H}\mathrm{d}r\right)^2\mathrm{d}s\Bigg]
\end{aligned}
$$

于是得到所需结论。

现在转而讨论 $H \in (0, 1/2)$ 的情形。由 (2.5) 和 (2.1)，可得

$$\begin{aligned}
&\left| K_H^{-1}\left(\int_0^{\cdot} \sigma_r^{-1}\zeta_r \mathrm{d}r\right)(s)\right| = \left| s^{H-\frac{1}{2}} I_{0+}^{\frac{1}{2}-H}\left[\cdot^{\frac{1}{2}-H}\sigma^{-1}\zeta_{\cdot}\right](s)\right| \\
=&\left| \frac{\sigma^{-1}s^{H-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}-H)}\int_0^s \frac{r^{\frac{1}{2}-H}\zeta_r}{(s-r)^{\frac{1}{2}+H}}\mathrm{d}r\right| \\
\leq& C_{T,\kappa,H,\tilde{H}} s^{\frac{1}{2}-H}\left(\frac{\psi(X_0,\varrho)}{t_0} + \mathbb{W}_p(\mu,\nu)\right), \qquad (4.15)
\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式由 (4.11) 得出。

于是得到

$$\mathbb{E}^{\tilde{H},0}\int_0^{t_0}\left| K_H^{-1}\left(\int_0^{\cdot}\sigma_r^{-1}\zeta_r\mathrm{d}r\right)(s)\right|^2 \mathrm{d}s \leq C_{T,\kappa,H,\tilde{H}}\left(\frac{\psi^2(X_0,\varrho)}{t_0^{2H}} + \mathbb{W}_p(\mu,\nu)^2\right),$$

这就是所需关系。证明至此完成。 □

注记 4.4. (i) 借助费尔尼克定理（例如，参见 *[13,* 定理 1.3.*2]*或*[27,* 引理 *8]*），由 (4.12)、(4.14) 和 (4.15) 可得

$$\mathbb{E}^{\tilde{H},0}\left(\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^{t_0}\left| K_H^{-1}\left(\int_0^{\cdot}\sigma_r^{-1}\zeta_r\mathrm{d}r\right)(s)\right|^2\mathrm{d}s\right\}\right) < \infty.$$

(ii) 在引理 4.3 的假设下，我们有

$$\mathbb{E}\vartheta(H) \leq \begin{cases} C_{T,\kappa,\tilde{\kappa},H,\tilde{H}}\left(1+\mathbb{W}_p(\mu,\nu)^{2\beta}+\frac{1}{t_0^{2H}}\right)\mathbb{W}_p(\mu,\nu)^2, & H\in(1/2,1), \\ C_{T,\kappa,H,\tilde{H}}\left(1+\frac{1}{t_0^{2H}}\right)\mathbb{W}_p(\mu,\nu)^2, & H\in(0,1/2). \end{cases}$$

事实上，首先注意到，根据注 3.3 和 (4.3)，我们可得，对任意 $1 \leq q \leq p$,

$$\mathbb{E}\psi^q(X_0,\varrho) \leq C_{T,\kappa,\tilde{H}}\left(1+{t_0}^{q\tilde{H}}\right)\mathbb{W}_p(\mu,\nu)^q \leq C_{T,\kappa,\tilde{H}}\mathbb{W}_p(\mu,\nu)^q. \qquad (4.16)$$

若 $H \in (0, 1/2)$，则容易看出，对任意 $p \geq 2$,

$$\mathbb{E}\vartheta(H) \leq C_{T,\kappa,H,\tilde{H}}\left(1+\frac{1}{t_0^{2H}}\right)\mathbb{W}_p(\mu,\nu)^2.$$

若 $H \in (1/2, 1)$ 在第二个不等式中采用与注（3.3）相同的推导步骤，可得

$$\mathbb{E}\int_0^{t_0} s^{2H-1}\left(\int_0^s \frac{|\varrho_s^\nu - \varrho_s^\mu - (\varrho_r^\nu - \varrho_r^\mu)|}{(s-r)^{\frac{1}{2}+H}} r^{\frac{1}{2}-H}\mathrm{d}r\right)^2 \mathrm{d}s$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_0^{t_0} s^{2H-1}\left(\int_0^s \frac{r^{1-2H}}{(s-r)^{1+2H-2\lambda_0}}\mathrm{d}r\right)\cdot\left(\int_0^s \frac{\mathbb{E}|\varrho_s^\nu-\varrho_s^\mu-(\varrho_r^\nu-\varrho_r^\mu)|^2}{(s-r)^{2\lambda_0}}\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s\\
&\leq C_{\lambda_0,T,\kappa,H,\tilde{H}}\int_0^{t_0} s^{2(\lambda_0-H)}\left(\int_0^s (s-r)^{2(\tilde{H}-\lambda_0)}\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s\cdot\mathbb{W}_p(\mu,\nu)^2\\
&\leq C_{\lambda_0,\ T,\ \kappa,\ H,\ \tilde{H}}\mathbb{W}_p(\mu,\nu)^2,
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

其中，我们取满足 $H<\lambda_0<H+1/2$ 的 λ_0，并注意到，通过选择适当的 λ_0，上面的 $C_{\lambda_0,T,\kappa,H,\tilde{H}}$ 可能仅依赖于 T、κ、H、H。
于是，由 (4.16) 和 (4.17) 可验证，对任意 $p\geq 2(1+\beta)$，

$$
\mathbb{E}\vartheta(H)\leq C_{T,\kappa,\tilde{\kappa},H,\tilde{H}}\left(1+\mathbb{W}_p(\mu,\nu)^{2\beta}+\frac{1}{t_0^{2H}}\right)\mathbb{W}_p(\mu,\nu)^2.
$$

4.1.2 Bismut公式

本节中，我们着重建立 (3.1) 关于 L 的导数的 Bismut公式。也就是说，对每个 $t\in(0,T]$，$\mu\in\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$ 和 $\phi\in L^p(\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d,\mu)$，我们要找到一个可积随机变量 $M_t(\mu,\phi)$，使得

$$
D_\phi^L(P_tf)(\mu)=\mathbb{E}\left(f(X_t^\mu)M_t(\mu,\phi)\right),\quad f\in\mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d).
$$

回顾一下，对任意 $\mu\in\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$，令 $(X_t^\mu)_{t\in[0,T]}$ 为满足 $\mathscr{L}_{X_0^\mu}=\mu$ 和对每个 $t\in[0,T]$ 均有 $P_t^*\mu=\mathscr{L}_{X_t^\mu}$ 的 (3.1) 的解。对任意 $\varepsilon\in[0,1]$ 和 $\phi\in L^p(\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d,\mu)$，令 $X_{\cdot}^{\mu_{\varepsilon,\phi}}$ 表示满足 $X_{\cdot}^{\mu_{\varepsilon,\phi}}=(\mathrm{Id}+\varepsilon\phi)(X_0^\mu)$ 的 (3.1) 的解。为简化记号，我们简记为 $\mu_{\varepsilon,\phi}=\mathscr{L}_{(\mathrm{Id}+\varepsilon\phi)(X_0^\mu)}$。

接下来，我们先考虑 X_t^μ 沿着 ϕ的空间导数：

$$
\nabla_\phi X_t^\mu:=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{X_t^{\mu_{\varepsilon,\phi}}-X_t^\mu}{\varepsilon},\quad t\in[0,T],\ \phi\in L^p(\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d,\mu).
$$

为此，我们作出以下假设。

(H3) 存在一个非递减函数 $\kappa_\cdot$，使得

$$
|D^L\tilde{\sigma}_t(\mu)(x)|\leq\kappa_t,\quad t\in[0,T],\ x\in\mathbb{R}^d,\mu\in\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d).
$$

引理 4.5. 假设 (H1')、(H3) 成立，且当 $H\in(0,1/2)$时，σ_t 不依赖于 t。对于任意 $\mu\in\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$以及满足 $p>\max\{1/H,1/\tilde{H}\}$（若 $H\in(1/2,1)$）或 $p>1/H$（若 $H\in(0,1/2)$）的 $\phi\in L^p(\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d,\mu)$，以下结论成立。

(i) 存在于 $L^p(\Omega\to C([0,T];\mathbb{R}^d)\ \mathbb{P})$ 中，使得 $\nabla_\phi X_\cdot^\mu$ 是以下线性随机微分方程的唯一解

$$
\mathrm{d}G_t^\phi=\left[\nabla_{G_t^\phi}b_t(\cdot,\mathscr{L}_{X_t^\mu})(X_t^\mu)+\left(\mathbb{E}\langle D^Lb_t(y,\cdot)(\mathscr{L}_{X_t^\mu})(X_t^\mu),G_t^\phi\rangle\right)|_{y=X_t^\mu}\right]\mathrm{d}t
$$

$$+\mathbb{E}\langle D^L\tilde{\sigma}_t(\mathscr{L}_{X_t^\mu})(X_t^\mu),G_t^\phi\rangle \mathrm{d}\tilde{B}_t^{\tilde{H}},\quad G_0^\phi=\phi(X_0^\mu), \tag{4.18}$$

and

$$\mathbb{E}\bigg(\sup_{t\in[0,T]}|\nabla_\phi X_t^\mu|^p\bigg)\le C_{p,T,\kappa,H,\tilde{H}}\|\phi\|_{L^p(\mu)}^p.$$

(ii) 成立

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathbb{E}\bigg(\sup_{s\in[0,t]}\bigg|\frac{\varrho_s^{\mu_{\varepsilon,\phi}}-\varrho_s^\mu}{\varepsilon}-\Lambda_s\bigg|^p\bigg)=0,$$

其中， $\Lambda_\cdot$ 定义为

$$\Lambda_s:=\int_0^s\Big\langle\mathbb{E}[\langle D^L\tilde{\sigma}_r(P_r^*\mu)(X_r^\mu),\nabla_\phi X_r^\mu\rangle],\mathrm{d}\tilde{B}_r^{\tilde{H}}\Big\rangle,\quad s\in[0,T].$$

证明。 (i) 我们首先设

$$\Pi_t^\varepsilon:=\frac{X_t^{\mu_{\varepsilon,\phi}}-X_t^\mu}{\varepsilon},\quad t\in[0,T],\varepsilon>0.$$

由引理 **2.1** 可得，对于任意 $t\in[0,T]$,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\Pi_t^\varepsilon=&\frac{b_t(X_t^{\mu_{\varepsilon,\phi}},\mathscr{L}_{X_t^{\mu_{\varepsilon,\phi}}})-b_t(X_t^\mu,\mathscr{L}_{X_t^\mu})}{\varepsilon}\mathrm{d}t+\frac{\tilde{\sigma}_t(\mathscr{L}_{X_t^{\mu_{\varepsilon,\phi}}})-\tilde{\sigma}_t(\mathscr{L}_{X_t^\mu})}{\varepsilon}\mathrm{d}\tilde{B}_t^{\tilde{H}}\\
=&\bigg[\int_0^1\Big(\nabla_{\Pi_t^\varepsilon}b_t(\cdot,\mathscr{L}_{X_t^{\mu_{\varepsilon,\phi}}})(X_t^\varepsilon(\theta))\\
&\qquad+(\mathbb{E}\langle D^Lb_t(x,\cdot)(\mathscr{L}_{X_t^\varepsilon(\theta)})(X_t^\varepsilon(\theta)),\Pi_t^\varepsilon\rangle)|_{x=X_t^\mu}\Big)\mathrm{d}\theta\bigg]\mathrm{d}t\\
&+\bigg[\int_0^1\mathbb{E}\langle D^L\tilde{\sigma}_t(\mathscr{L}_{X_t^\varepsilon(\theta)})(X_t^\varepsilon(\theta)),\Pi_t^\varepsilon\rangle\mathrm{d}\theta\bigg]\mathrm{d}\tilde{B}_t^{\tilde{H}},\quad \Pi_0^\varepsilon=\phi(X_0^\mu),\end{aligned}\tag{4.19}$$

其中， $X_t^\varepsilon(\theta):=X_t^\mu+\theta(X_{\cdot,t}^{\mu_{\varepsilon,\ \phi}}-X_t^\mu)$ $\theta\in[0,1]$。

另一方面，容易看出，在 **(H1')** 条件下，**(4.18)** 有唯一解。结合 **(4.18)** 和 **(4.19)** 可得，对于任意 $t\in[0,T]$,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\Pi_t^\varepsilon-G_t^\phi)=&\Big(\nabla_{\Pi_t^\varepsilon-G_t^\phi}b_t(\cdot,\mathscr{L}_{X_t^\mu})(X_t^\mu)+\Psi_1^\varepsilon(t)\Big)\mathrm{d}t\\
&+\bigg[\Big(\mathbb{E}\langle D^Lb_t(x,\cdot)(\mathscr{L}_{X_t^\mu})(X_t^\mu),\Pi_t^\varepsilon-G_t^\phi\rangle\Big)\big|_{x=X_t^\mu}+\Psi_2^\varepsilon(t)\bigg]\mathrm{d}t\\
&+\Big(\mathbb{E}\langle D^L\tilde{\sigma}_t(\mathscr{L}_{X_t^\mu})(X_t^\mu),\Pi_t^\varepsilon-G_t^\phi\rangle+\Psi_3^\varepsilon(t)\Big)\mathrm{d}\tilde{B}_t^{\tilde{H}},\quad \Pi_0^\varepsilon-G_0^\phi=0,\end{aligned}$$

其中

$$\Psi_1^\varepsilon(t):=\int_0^1\Big(\nabla_{\Pi_t^\varepsilon}b_t(\cdot,\mathscr{L}_{X_t^{\mu_{\varepsilon,\phi}}})(X_t^\varepsilon(\theta))-\nabla_{\Pi_t^\varepsilon}b_t(\cdot,\mathscr{L}_{X_t^\mu})(X_t^\mu)\Big)\mathrm{d}\theta,$$

$$\Psi_2^\varepsilon(t) := \int_0^1 \left(\mathbb{E}\langle D^L b_t(x,\cdot)(\mathscr{L}_{X_t^{\tilde{\varepsilon}}(\theta)})(X_t^\varepsilon(\theta)) - D^L b_t(x,\cdot)(\mathscr{L}_{X_t^\mu})(X_t^\mu), \Pi_t^\varepsilon\rangle\right)|_{x=X_t^\mu}\mathrm{d}\theta,$$
$$\Psi_3^\varepsilon(t) := \int_0^1 \mathbb{E}\langle D^L \tilde{\sigma}_t(\mathscr{L}_{X_t^{\tilde{\varepsilon}}(\theta)})(X_t^\varepsilon(\theta)) - D^L \tilde{\sigma}_t(\mathscr{L}_{X_t^\mu})(X_t^\mu), \Pi_t^\varepsilon\rangle\mathrm{d}\theta.$$

然后，利用 (H1')，我们得到

$$\begin{aligned}
&|\Pi_t^\varepsilon - G_t^\phi|^p \\
\leq& C_{p,T,\kappa}\Bigg[\int_0^t (|\Psi_1^\varepsilon(s)|^p + |\Psi_2^\varepsilon(s)|^p)\mathrm{d}s + \int_0^t \left(|\Pi_s^\varepsilon - G_s^\phi|^p + \mathbb{E}|\Pi_s^\varepsilon - G_s^\phi|^p\right)\mathrm{d}s \\
&+ \left|\int_0^t \left(\mathbb{E}\langle D^L\tilde{\sigma}_s(\mathscr{L}_{X_s^\mu})(X_s^\mu), \Pi_s^\varepsilon - G_s^\phi\rangle + \Psi_3^\varepsilon(s)\right)\mathrm{d}\tilde{B}_s^{\tilde{H}}\right|^p\Bigg]. \qquad (4.20)
\end{aligned}$$

由定理 3.1] 的证明中的 [11, (3.5) 以及 (H3)，可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t \left(\mathbb{E}\langle D^L\tilde{\sigma}_s(\mathscr{L}_{X_s^\mu})(X_s^\mu), \Pi_s^\varepsilon - G_s^\phi\rangle + \Psi_3^\varepsilon(s)\right)\mathrm{d}\tilde{B}_s^{\tilde{H}}\right|^p\right) \\
\leq& C_{p,T,\tilde{H}}\int_0^T \left(\|\mathbb{E}\langle D^L\tilde{\sigma}_s(\mathscr{L}_{X_s^\mu})(X_s^\mu), \Pi_s^\varepsilon - G_s^\phi\rangle\|^p + \|\Psi_3^\varepsilon(s)\|^p\right)\mathrm{d}s \\
\leq& C_{p,T,\kappa,\tilde{H}}\int_0^T \left(\mathbb{E}|\Pi_s^\varepsilon - G_s^\phi|^p + \|\Psi_3^\varepsilon(s)\|^p\right)\mathrm{d}s. \qquad (4.21)
\end{aligned}$$

此外，类似于 [11, 引理 4.1 和 (4.9)]，可得

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1]}\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}|\Pi_t^\varepsilon|^p\right) + \mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}|G_t^\phi|^p\right) \leq C_{p,T,\kappa,H,\tilde{H}}\|\phi\|^p_{L^p(\mu)}.$$

因此，结合 (4.20)-(4.21) 并应用格朗沃尔引理，我们得到

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}|\Pi_t^\varepsilon - G_t^\phi|^p\right) \leq C_{p,T,\kappa,\tilde{H}}\int_0^T \mathbb{E}\left(|\Psi_1^\varepsilon(s)|^p + |\Psi_2^\varepsilon(s)|^p + \|\Psi_3^\varepsilon(s)\|^p\right)\mathrm{d}s.$$

然后，按照在命题 4.2], 的证明中由 [11,(4.10) 推导命题 4.2] 的结论的论证，我们得出

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}|\Pi_t^\varepsilon - G_t^\phi|^p\right) = 0,$$

这正是第一个断言。

（ii）再次由定理 3.1] 的证明中的 [11, (3.5)，可得

$$\mathbb{E}\left(\sup_{s\in[0,t]}\left|\frac{\varrho_s^{\mu_{\varepsilon,\phi}} - \varrho_s^\mu}{\varepsilon} - \Lambda_s\right|^p\right)$$

$$\leq C_{p,\tilde{H}} t^{p\tilde{H}-1} \int_0^t \left| \frac{\tilde{\sigma}_r(P_r^*\mu_{\varepsilon,\phi}) - \tilde{\sigma}_r(P_r^*\mu)}{\varepsilon} - \mathbb{E}[\langle D^L \tilde{\sigma}_r(P_r^*\mu)(X_r^\mu), \nabla_\phi X_r^\mu \rangle] \right|^p \mathrm{d}r.$$

注意到，根据 (H1') 和定理 3.2，我们得到

$$|\tilde{\sigma}_r(P_r^*\mu_{\varepsilon,\phi}) - \tilde{\sigma}_r(P_r^*\mu)| \leq \kappa_r \mathbb{W}_\theta(P_r^*\mu_{\varepsilon,\phi}, P_r^*\mu) \leq C_{p,T,\kappa,\tilde{H}} \mathbb{W}_p(\mu_{\varepsilon,\phi}, \mu) \leq C_{p,T,\kappa,\tilde{H}} \varepsilon \|\phi\|_{L^p(\mu)}.$$

然后，利用 (H3) 和断言 (i)，并应用控制收敛定理和引理 2.1，我们得出第二个结论。 □

本部分的主要结果如下。

定理 4.6. 考虑方程 (3.1)。如果满足以下两个假设之一 *s:*

(I) $H \in (1/2, 1)$, $b, \sigma, \tilde{\sigma}$ *satisfy* **(H1')**, **(H2)** *and* **(H3)**;

(II) $H \in (0, 1/2)$ $b, \tilde{\sigma}$ 满足 (H1')、(H3)，且 σ_t 不依赖于 t,

那么，对于任意 $t \in (0, T], f \in \mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d)$ $\mu \in \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$ 和 $\phi \in L^p(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, \mu)$，若 $p \geq 2(1+\beta)$，且当 $H \in (1/2, 1)$ 或 $p \geq 2$ 当 $H \in (0, 1/2)$ 时，$D_\phi^L(P_t f)(\mu)$ 存在并满足

$$D_\phi^L(P_t f)(\mu) = \mathbb{E}\left(f(X_t^\mu) \int_0^t \left\langle K_H^{-1} \left(\int_0^\cdot \sigma_r^{-1} \Upsilon_{r,t} \mathrm{d}r \right)(s), \mathrm{d}W_s \right\rangle \right), \tag{4.22}$$

其中$\Upsilon_{\cdot,\cdot}$ 由下式给出

$$\begin{aligned} \Upsilon_{r,t} =& \frac{\phi(X_0^\mu) + \Lambda_t}{t} + \nabla b_r(\cdot, P_r^*\mu)(X_r^\mu) \left(\frac{t-r}{t} \phi(X_0^\mu) - \frac{r}{t} \Lambda_t + \Lambda_r \right) \\ &+ \mathbb{E}[\langle D^L b_r(x, \cdot)(P_r^*\mu)(X_r^\mu), \nabla_\phi X_r^\mu \rangle]|_{x=X_r^\mu}, \quad 0 \leq r < t \leq T \end{aligned}$$

其中 $\Lambda_\cdot$ 在引理 4.5 中定义。

证明. 设 $t_0 \in (0, T]$ 固定。对于 $\varepsilon \in (0, 1],$, 令 Y^ε 满足方程 (4.4)，其中 $\nu = \mu_{\varepsilon,\phi}$ 并且 $Y_0 = Y_0^\varepsilon = (\mathrm{Id} + \varepsilon\phi)(X_0^\mu)$。相应地，(4.5)变为

$$Y_t^\varepsilon - X_t^\mu = -\varepsilon \frac{t - t_0}{t_0} \phi(X_0^\mu) + \frac{t}{t_0} (\varrho_{t_0}^\mu - \varrho_{t_0}^{\mu_{\varepsilon,\phi}}) + \varrho_t^{\mu_{\varepsilon,\phi}} - \varrho_t^\mu, \quad t \in [0, t_0], \tag{4.23}$$

这意味着 $Y_{t_0}^\varepsilon = X_{t_0}^\mu$。令

$$R_\varepsilon^{\tilde{H},0} := \exp\left[\int_0^{t_0} \left\langle K_H^{-1} \left(\int_0^\cdot \sigma_r^{-1} \zeta_r^\varepsilon \mathrm{d}r \right)(s), \mathrm{d}W_s \right\rangle - \frac{1}{2} \int_0^{t_0} \left| K_H^{-1} \left(\int_0^\cdot \sigma_r^{-1} \zeta_r^\varepsilon \mathrm{d}r \right)(s) \right|^2 \mathrm{d}s \right]$$

with

$$\zeta_s^\varepsilon := b_s(Y_s^\varepsilon, P_s^*\mu_{\varepsilon,\phi}) - b_s(X_s^\mu, P_s^*\mu) + \frac{1}{t_0}(\varepsilon\phi(X_0^\mu) + \varrho_{t_0}^{\mu_{\varepsilon,\phi}} - \varrho_{t_0}^\mu).$$

与 (4.7) 类似，有

$$(P_{t_0}^{\tilde{H},0}f)(X_0^{\mu_{\varepsilon,\phi}}) = \mathbb{E}^{\tilde{H},0}\left(R_\varepsilon^{\tilde{H},0}f(X_{t_0}^{\mu})\right).$$

于是，我们得到

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{(P_{t_0}^{\tilde{H},0}f)(X_0^{\mu_{\varepsilon,\phi}}) - (P_{t_0}^{\tilde{H},0}f)(X_0^{\mu})}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathbb{E}^{\tilde{H},0}\left(f(X_{t_0}^{\mu})\frac{R_\varepsilon^{\tilde{H},0}-1}{\varepsilon}\right). \tag{4.24}$$

注意到

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathbb{E}^{\tilde{H},0}\frac{R_\varepsilon^{\tilde{H},0}-1}{\varepsilon}\\
=&\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathbb{E}^{\tilde{H},0}\frac{\int_0^{t_0}\left\langle K_H^{-1}\left(\int_0^{\cdot}\sigma_r^{-1}\zeta_r^{\varepsilon}\mathrm{d}r\right)(s),\mathrm{d}W_s\right\rangle - \frac{1}{2}\int_0^{t_0}\left|K_H^{-1}\left(\int_0^{\cdot}\sigma_r^{-1}\zeta_r^{\varepsilon}\mathrm{d}r\right)(s)\right|^2\mathrm{d}s}{\varepsilon}\\
=&\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathbb{E}^{\tilde{H},0}\frac{\int_0^{t_0}\left\langle K_H^{-1}\left(\int_0^{\cdot}\sigma_r^{-1}\zeta_r^{\varepsilon}\mathrm{d}r\right)(s),\mathrm{d}W_s\right\rangle}{\varepsilon}, \qquad (4.25)
\end{aligned}$$

其中，最后一个等号由注记 4.4 (ii) 得出，适用于 $\mu_{\varepsilon,\phi}$ 替换 ν 以及以下事实：$\mathbb{W}_p(\mu,\mu_{\varepsilon,\phi}) \le \varepsilon\|\phi\|_{L^p(\mu)}$.

接下来，我们稍微处理一下 $H\in(1/2,1)$ 和 $H\in(0,1/2)$ 的情形。

The case $H\in(1/2,1)$。由 (2.4) 和 (2.2)，可得

$$\begin{aligned}
&\int_0^{t_0}\left\langle K_H^{-1}\left(\int_0^{\cdot}\sigma_r^{-1}\zeta_r^{\varepsilon}\mathrm{d}r\right)(s),\mathrm{d}W_s\right\rangle\\
=&\frac{H-\frac{1}{2}}{\Gamma(\frac{3}{2}-H)}\Bigg[\int_0^{t_0}\left\langle\frac{s^{\frac{1}{2}-H}\sigma_s^{-1}\zeta_s^{\varepsilon}}{H-\frac{1}{2}},\mathrm{d}W_s\right\rangle\\
&\qquad+\int_0^{t_0}\left\langle s^{H-\frac{1}{2}}\sigma_s^{-1}\zeta_s^{\varepsilon}\int_0^{s}\frac{s^{\frac{1}{2}-H}-r^{\frac{1}{2}-H}}{(s-r)^{\frac{1}{2}+H}}\mathrm{d}r,\mathrm{d}W_s\right\rangle\\
&\qquad+\int_0^{t_0}\left\langle s^{H-\frac{1}{2}}\zeta_s^{\varepsilon}\int_0^{s}\frac{\sigma_s^{-1}-\sigma_r^{-1}}{(s-r)^{\frac{1}{2}+H}}r^{\frac{1}{2}-H}\mathrm{d}r,\mathrm{d}W_s\right\rangle\\
&\qquad+\int_0^{t_0}\left\langle s^{H-\frac{1}{2}}\int_0^{s}\frac{\zeta_s^{\varepsilon}-\zeta_r^{\varepsilon}}{(s-r)^{\frac{1}{2}+H}}\sigma_r^{-1}r^{\frac{1}{2}-H}\mathrm{d}r,\mathrm{d}W_s\right\rangle\Bigg]\\
=:&\frac{H-\frac{1}{2}}{\Gamma(\frac{3}{2}-H)}[J_1(t_0)+J_2(t_0)+J_3(t_0)+J_4(t_0)]. \qquad (4.26)
\end{aligned}$$

注意到，根据我们的假设、(4.23) 和引理 4.5，很容易验证，对于任意$r,s\in[0,t_0]$,

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{\zeta_s^{\varepsilon}}{\varepsilon} = \frac{\phi(X_0^{\mu})+\Lambda_{t_0}}{t_0} + \nabla b_s(\cdot,P_s^*\mu)(X_s^{\mu})\left(\frac{t_0-s}{t_0}\phi(X_0^{\mu}) - \frac{s}{t_0}\Lambda_{t_0}+\Lambda_s\right)$$

$$+\mathbb{E}[\langle D^L b_s(x,\cdot)(P_s^*\mu)(X_s^\mu),\nabla_\phi X_s^\mu\rangle]|_{x=X_s^\mu}=:\Upsilon_{s,t_0} \tag{4.27}$$

and

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{\zeta_s^\varepsilon-\zeta_r^\varepsilon}{\varepsilon}=&\nabla b_s(\cdot,P_s^*\mu)(X_s^\mu)\left(\frac{t_0-s}{t_0}\phi(X_0^\mu)-\frac{s}{t_0}\Lambda_{t_0}+\Lambda_s\right)\\&-\nabla b_r(\cdot,P_r^*\mu)(X_r^\mu)\left(\frac{t_0-r}{t_0}\phi(X_0^\mu)-\frac{r}{t_0}\Lambda_{t_0}+\Lambda_r\right)\\&+E[\langle D^L b_s(x,\cdot)(P_s^*\mu)(X_s^\mu),\nabla_\phi X_s^\mu\rangle]|_{x=X_s^\mu}\\&-E[\langle D^L b_r(y,\cdot)(P_r^*\mu)(X_r^\mu),\nabla_\phi X_r^\mu\rangle]|_{y=X_r^\mu}\\=&\Upsilon_{s,t_0}-\Upsilon_{r,t_0}.\end{aligned} \tag{4.28}$$

然后，应用控制收敛定理，我们得到，当 $\varepsilon\downarrow 0$, $J_i(t_0)/\varepsilon, i=1,\cdots,4$ 收敛到

$$\int_0^{t_0}\left\langle\frac{s^{\frac12-H}\sigma_s^{-1}\Upsilon_{s,t_0}}{H-\frac12},\mathrm{d}W_s\right\rangle,$$
$$\int_0^{t_0}\left\langle s^{H-\frac12}\sigma_s^{-1}\Upsilon_{s,t_0}\int_0^s\frac{s^{\frac12-H}-r^{\frac12-H}}{(s-r)^{\frac12+H}}\mathrm{d}r,\mathrm{d}W_s\right\rangle,$$
$$\int_0^{t_0}\left\langle s^{H-\frac12}\Upsilon_{s,t_0}\int_0^s\frac{\sigma_s^{-1}-\sigma_r^{-1}}{(s-r)^{\frac12+H}}r^{\frac12-H}\mathrm{d}r,\mathrm{d}W_s\right\rangle$$

and

$$\int_0^{t_0}\left\langle s^{H-\frac12}\int_0^s\frac{\Upsilon_{s,t_0}-\Upsilon_{r,t_0}}{(s-r)^{\frac12+H}}\sigma_r^{-1}r^{\frac12-H}\mathrm{d}r,\mathrm{d}W_s\right\rangle.$$

˜分别在 $L^1(\mathbb{P}^H,{}^0)$ 中。因此，结合 (4.24)、(4.25) 和 (4.26)，我们得出

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{(P_{t_0}^{\tilde H,0}f)(X_0^{\mu_{\varepsilon,\phi}})-(P_{t_0}^{\tilde H,0}f)(X_0^\mu)}{\varepsilon}\\=&\mathbb{E}^{\tilde H,0}\Bigg(f(X_{t_0}^\mu)\cdot\frac{H-\frac12}{\Gamma(\frac32-H)}\Bigg[\int_0^{t_0}\left\langle\frac{s^{\frac12-H}\sigma_s^{-1}\Upsilon_{s,t_0}}{H-\frac12},\mathrm{d}W_s\right\rangle\\&\qquad+\int_0^{t_0}\left\langle s^{H-\frac12}\sigma_s^{-1}\Upsilon_{s,t_0}\int_0^s\frac{s^{\frac12-H}-r^{\frac12-H}}{(s-r)^{\frac12+H}}\mathrm{d}r,\mathrm{d}W_s\right\rangle\\&\qquad+\int_0^{t_0}\left\langle s^{H-\frac12}\Upsilon_{s,t_0}\int_0^s\frac{\sigma_s^{-1}-\sigma_r^{-1}}{(s-r)^{\frac12+H}}r^{\frac12-H}\mathrm{d}r,\mathrm{d}W_s\right\rangle\end{aligned}$$

$$+\int_0^{t_0}\left\langle s^{H-\frac{1}{2}}\int_0^s\frac{\Upsilon_{s,t_0}-\Upsilon_{r,t_0}}{(s-r)^{\frac{1}{2}+H}}\sigma_r^{-1}r^{\frac{1}{2}-H}\mathrm{d}r,\mathrm{d}W_s\right\rangle\Bigg]\Bigg)$$

$$=\mathbb{E}^{\tilde{H},0}\left(f(X_{t_0}^{\mu})\int_0^{t_0}\left\langle K_H^{-1}\left(\int_0^{\cdot}\sigma_r^{-1}\Upsilon_{r,t_0}\mathrm{d}r\right)(s),\mathrm{d}W_s\right\rangle\right). \tag{4.29}$$

在最后一个等式中，我们使用了 (2.4) 和 (2.2)。

现在，令$\mathscr{L}_{Y|\mathbb{P}^{\tilde{H},0}_{H,}}$为随机变量 Y在 $\mathbb{P}$条件下的条件分布。根据Pinsker不等式，我们有

$$\begin{aligned}\sup_{\|f\|_\infty\le1}\left|(P_{t_0}^{\tilde{H},0}f)(X_0^{\mu_{\varepsilon,\phi}})-(P_{t_0}^{\tilde{H},0}f)(X_0^{\mu})\right|^2&=\sup_{\|f\|_\infty\le1}\left|\mathscr{L}_{X_{t_0}^{\mu_{\varepsilon,\phi}}|\mathbb{P}^{\tilde{H},0}}(f)-\mathscr{L}_{X_{t_0}^{\mu}|\mathbb{P}^{\tilde{H},0}}(f)\right|^2\\&\le2\mathrm{Ent}\left(\mathscr{L}_{X_{t_0}^{\mu_{\varepsilon,\phi}}|\mathbb{P}^{\tilde{H},0}}|\mathscr{L}_{X_{t_0}^{\mu}|\mathbb{P}^{\tilde{H},0}}\right).\end{aligned}$$

然后，利用对数 Harnack 不等式与熵-代价估计之间的等价性（见注记 4.2），由(4.8)和引理 4.3可得

$$\sup_{\|f\|_\infty\le1}\left|(P_{t_0}^{\tilde{H},0}f)(X_0^{\mu_{\varepsilon,\phi}})-(P_{t_0}^{\tilde{H},0}f)(X_0^{\mu})\right|^2\le2\vartheta(H),$$

其中， $\vartheta(H)$中的 ν 被$\mu_{\varepsilon,\phi}$替代。

因此，结合 $\vartheta(H)$的表达式和定理 3.2，可得

$$\begin{aligned}&\frac{|(P_{t_0}^{\tilde{H},0}f)(X_0^{\mu_{\varepsilon,\phi}})-(P_{t_0}^{\tilde{H},0}f)(X_0^{\mu})|}{\varepsilon}\\\le&C_{T,\kappa,\tilde{\kappa},H,\tilde{H}}\|f\|_\infty\Bigg[\|\phi\|_{L^p(\mu)}+\left(\frac{1}{t_0^H}+\|\varrho_\cdot^{\mu}\|_{\tilde{H}-\varsigma_1}^{\beta}+\|\varrho_\cdot^{\mu_{\varepsilon,\phi}}\|_{\tilde{H}-\varsigma_2}^{\beta}+\psi^{\beta}(X_0,\varrho)\right)\tilde{\psi}(X_0,\varrho)\\&\quad+\left(1+|X_0^{\mu}|^{\beta}+\|\varrho_\cdot^{\mu}\|_{\infty}^{\beta}+\|\varrho_\cdot^{\mu}\|_{\tilde{H}-\varsigma_1}^{\beta}\right)\left(\|\phi\|_{L^p(\mu)}+\tilde{\psi}(X_0,\varrho)\right)\\&\quad+\left(\int_0^{t_0}s^{2H-1}\left(\int_0^s\frac{|\varrho_s^{\mu_{\varepsilon,\phi}}-\varrho_s^{\mu}-(\varrho_r^{\mu_{\varepsilon,\phi}}-\varrho_r^{\mu})|}{(s-r)^{\frac{1}{2}+H}}r^{\frac{1}{2}-H}\mathrm{d}r\right)^2\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}\Bigg]\end{aligned} \tag{4.30}$$

其中 $\tilde{\psi}(X_0,\varrho):=|\phi(X_0^{\mu})|+\sup_{s\in[0,t_0]}|\varrho_s^{\mu}-\varrho^{\mu_\varepsilon,\ s\ \ \phi}|/\varepsilon$。因此，考虑到 (4.29) 和注 3.3，应用控制收敛定理可得

$$\begin{aligned}D_\phi^L(P_{t_0}f)(\mu)=&\lim_{\varepsilon\downarrow0}\mathbb{E}\frac{(P_{t_0}^{\tilde{H},0}f)(X_0^{\mu_{\varepsilon,\phi}})-(P_{t_0}^{\tilde{H},0}f)(X_0^{\mu})}{\varepsilon}\\=&\mathbb{E}\left(\lim_{\varepsilon\downarrow0}\frac{(P_{t_0}^{\tilde{H},0}f)(X_0^{\mu_{\varepsilon,\phi}})-(P_{t_0}^{\tilde{H},0}f)(X_0^{\mu})}{\varepsilon}\right)\\=&\mathbb{E}\left(f(X_{t_0}^{\mu})\int_0^{t_0}\left\langle K_H^{-1}\left(\int_0^{\cdot}\sigma_r^{-1}\Upsilon_{r,t_0}\mathrm{d}r\right)(s),\mathrm{d}W_s\right\rangle\right).\end{aligned} \tag{4.31}$$

The case $H \in (0, 1/2)$。利用 (2.5) 和 (2.1)，我们首先得到

$$\int_0^{t_0} \left\langle K_H^{-1}\left(\int_0^{\cdot} \sigma_r^{-1}\zeta_r^{\varepsilon}\mathrm{d}r\right)(s), \mathrm{d}W_s\right\rangle = \int_0^{t_0} \left\langle \frac{\sigma^{-1}s^{H-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}-H)}\int_0^s \frac{r^{\frac{1}{2}-H}\zeta_r^{\varepsilon}}{(s-r)^{\frac{1}{2}+H}}\mathrm{d}r, \mathrm{d}W_s\right\rangle.$$

仿照 (4.29) 和 (4.30) 中的推理，可以证明

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{(P_{t_0}^{\tilde{H},0}f)(X_0^{\mu_{\varepsilon,\phi}}) - (P_{t_0}^{\tilde{H},0}f)(X_0^{\mu})}{\varepsilon}\\
=&\mathbb{E}^{\tilde{H},0}\left(f(X_{t_0}^{\mu})\cdot\int_0^{t_0}\left\langle \frac{\sigma^{-1}s^{H-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}-H)}\int_0^s \frac{r^{\frac{1}{2}-H}\Upsilon_{r,t_0}}{(s-r)^{\frac{1}{2}+H}}\mathrm{d}r, \mathrm{d}W_s\right\rangle\right.\\
=&\mathbb{E}^{\tilde{H},0}\left(f(X_{t_0}^{\mu})\int_0^{t_0}\left\langle K_H^{-1}\left(\int_0^{\cdot}\sigma_r^{-1}\Upsilon_{r,t_0}\mathrm{d}r\right)(s), \mathrm{d}W_s\right\rangle\right). \qquad (4.32)
\end{aligned}$$

and

$$\frac{|(P_{t_0}^{\tilde{H},0}f)(X_0^{\mu_{\varepsilon,\phi}}) - (P_{t_0}^{\tilde{H},0}f)(X_0^{\mu})|}{\varepsilon} \le C_{T,\kappa,H,\tilde{H}}\|f\|_{\infty}\left(\frac{\tilde{\psi}(X_0,\varrho)}{t_0^H} + \|\phi\|_{L^p(\mu)}\right).$$

因此，再次由注 3.3 和控制收敛定理可得

$$\begin{aligned}
D_{\phi}^L(P_{t_0}f)(\mu) =&\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathbb{E}\frac{(P_{t_0}^{\tilde{H},0}f)(X_0^{\mu_{\varepsilon,\phi}}) - (P_{t_0}^{\tilde{H},0}f)(X_0^{\mu})}{\varepsilon}\\
=&\mathbb{E}\left(f(X_{t_0}^{\mu})\int_0^{t_0}\left\langle K_H^{-1}\left(\int_0^{\cdot}\sigma_r^{-1}\Upsilon_{r,t_0}\mathrm{d}r\right)(s), \mathrm{d}W_s\right\rangle\right). \qquad (4.33)
\end{aligned}$$

我们的证明到此完成。 □

注4.7. (i) 由于 (2.4) 和 (2.5)，我们可以将 (4.22) 右侧的项 $K_H^{-1}\left(\int_0^{\cdot}\sigma_r^{-1}\Upsilon_{r,t}\mathrm{d}r\right)(s)$ 重写如下

$$\begin{aligned}
&K_H^{-1}\left(\int_0^{\cdot}\sigma_r^{-1}\Upsilon_{r,t}\mathrm{d}r\right)(s)\\
=&\begin{cases}
\frac{(H-\frac{1}{2})s^{H-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2}-H)}\left[\frac{s^{1-2H}\sigma_s^{-1}\Upsilon_{s,t}}{H-\frac{1}{2}} + \sigma_s^{-1}\Upsilon_{s,t}\int_0^s\frac{s^{\frac{1}{2}-H}-r^{\frac{1}{2}-H}}{(s-r)^{\frac{1}{2}+H}}\mathrm{d}r + \right.\\
\left.\Upsilon_{s,t}\int_0^s\frac{(\sigma_s^{-1}-\sigma_r^{-1})r^{\frac{1}{2}-H}}{(s-r)^{\frac{1}{2}+H}}\mathrm{d}r + \int_0^s\frac{(\Upsilon_{s,t}-\Upsilon_{r,t})\sigma_r^{-1}r^{\frac{1}{2}-H}}{(s-r)^{\frac{1}{2}+H}}\mathrm{d}r\right], & H\in(\frac{1}{2},1),\\
\frac{\sigma^{-1}s^{H-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}-H)}\int_0^s\frac{r^{\frac{1}{2}-H}\Upsilon_{r,t}}{(s-r)^{\frac{1}{2}+H}}\mathrm{d}r, & H\in(0,\frac{1}{2}).
\end{cases}
\end{aligned}$$

(ii) 利用定理 4.6 和 H ¨older 不等式，并按照引理 4.3 中的类似论证，我们得到

$$\|D^L(P_t f)(\mu)\|_{L_\mu^{p^*}} \le C_{T,\kappa,\tilde{\kappa},H,\tilde{H}} \left(1+\frac{1}{t^H}\right)\left((P_t|f|^{p^*})(\mu)\right)^{\frac{1}{p^*}}$$

对任意 $t\in(0,T], f\in\mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d)$ 和 $\mu\in\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$，其中 $C_{T,\ \kappa,\ \tilde{\kappa},\ H,\ \tilde{H}}$ 是一个正的常数，当 $H\in(0,1/2)$ 时与 $\tilde{\kappa}$ 无关；若 $H\in(1/2,1)$，则为 $p\ge 2(1+\beta)$，若 $H\in(0,1/2)$，则为 $p\ge 2$。

4.2 退化情形

设 A 和 B 是阶数分别为 $m\times m$ 和 $m\times l$ 的两个矩阵，现考虑以下分布依赖的退化随机微分方程：

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t^{(1)} = (AX_t^{(1)} + BX_t^{(2)})\mathrm{d}t, \\ \mathrm{d}X_t^{(2)} = b_t(X_t,\mathscr{L}_{X_t})\mathrm{d}t + \sigma_t \mathrm{d}B_t^H + \tilde{\sigma}_t(\mathscr{L}_{X_t})\mathrm{d}\tilde{B}_t^{\tilde{H}}, \end{cases} \tag{4.34}$$

其中 $X_t=(X_t^{(1)},X_t^{(2)})$ $b:\ [0,T]\times\mathbb{R}^{m+l}\times\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^{m+l})\to\mathbb{R}^l$，$\sigma(t)$ 对每个 $t\in[0,T]$ 都是可逆的 $l\times l$ 阶矩阵，$\tilde{\sigma}:\ [0,T]\times\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^{m+l})\to\mathbb{R}^l\otimes\mathbb{R}^l$ 是可测的。值得指出的是，与布朗运动情形一样（例如参见 [4, 24]），上述模型是一个带分数噪声的分布依赖随机哈密顿系统。

4.2.1 对数 Harnack 不等式

为建立对数 Harnack 不等式，令

$$U_t = \int_0^t \frac{s(t-s)}{t^2}\mathrm{e}^{-sA}BB^*\mathrm{e}^{-sA^*}\mathrm{d}s \ge \ell(t)\mathrm{I}_{m\times m},\ t\in(0,T], \tag{4.35}$$

其中 $\ell\in C([0,T])$ 满足 $\ell(t)>0$ 对任意 $t\in(0,T]$，且 $\mathrm{I}_{m\times m}$ 是 $m\times m$ 单位矩阵。显然，U_t 可逆，且对每个 $t\in(0,T]$，都有 $\|U_t^{-1}\|\le 1/\ell(t)$。于是，本部分的主要结果可表述为以下定理。

定理 4.8。考虑方程 (4.34)。假设 (4.35) 成立，且以下两个假设之一成立：

(I) $H\in(1/2,1)$、b、σ、$\tilde{\sigma}$ 满足 (H1') 和 (H2)，其中 $d=m+l$，且 $p\ge 2(1+\beta)$；

(II) $H\in(0,1/2)$ b，$\tilde{\sigma}$ 满足 (H1)，其中 $d=m+l$，σ_t 不依赖于 t 和 $p\ge 2$。

那么，对于任意 $t\in(0,T], \mu,\nu\in\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^{m+l})$ 和 $0<f\in\mathscr{B}_b(\mathbb{R}^{m+l})$，

$$(P_t\log f)(\nu)\le\log(P_t f)(\mu)+\chi(H),$$

其中

$$\chi(H)=\begin{cases} C_{T,\kappa,\tilde{\kappa},H,\tilde{H}}\left(1+\mathbb{W}_p(\mu,\nu)^{2\beta}+\frac{1}{t^{2H}}+\frac{1}{\ell^2(t)}+\frac{1}{t^{2H}\ell^2(t)}\right)\mathbb{W}_p(\mu,\nu)^2, & H\in(1/2,1),\\ C_{T,\kappa,H,\tilde{H}}\left(1+\frac{1}{t^{2H}}+\frac{1}{\ell^2(t)}+\frac{1}{t^{2H}\ell^2(t)}\right)\mathbb{W}_p(\mu,\nu)^2, & H\in(0,1/2).\end{cases}$$

证明。对于任意 $\mu,\nu\in\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$，设 X_0^μ 和 X_0^ν 为 $\mathscr{F}_0$-可测的，且满足 $\mathscr{L}_{X_0^\mu}=\mu$，$\mathscr{L}_{X_0^\nu}=\nu$ 和

$$\mathbb{E}|X_0^\mu-X_0^\nu|^p=\mathbb{W}_p(\mu,\nu)^p, \tag{4.36}$$

并设 X_t^μ 和 X_t^ν 分别是满足 (4.34) 的解，其中 $\mathscr{L}_{X_0^\mu}=\mu$ 和 $\mathscr{L}_{X_0^\nu}=\nu$，这意味着 $\mathscr{L}_{X_t^\mu}=P_t^*\mu$ 和 $\mathscr{L}_{X_t^\nu}=P_t^*\nu$。

固定 $t_0\in(0,T]$。我们首先引入如下耦合分布依赖随机微分方程：对于 $t\in[0,t_0]$，

$$\begin{cases}\mathrm{d}Y_t^{(1)}=(AY_t^{(1)}+BY_t^{(2)})\mathrm{d}t,\\ \mathrm{d}Y_t^{(2)}=(b_t(X_t,P_t^*\mu)+g'(t))\mathrm{d}t+\sigma_t\mathrm{d}B_t^H+\tilde{\sigma}_t(P_t^*\nu)\mathrm{d}\tilde{B}_t^{\tilde{H}},\end{cases} \tag{4.37}$$

其中 $Y_0=X_0^\nu$，可微函数 $g\colon[0,t_0]\to\mathbb{R}$ 将在下文确定。结合 (4.34) 和 (4.37)，可得对每个 $t\in[0,t_0]$，

$$\begin{cases}Y_t^{(1)}-X_t^{\mu,(1)}=\mathrm{e}^{tA}Z_0^{(1)}+\int_0^t\mathrm{e}^{(t-s)A}B(Z_0^{(2)}+g(s)-g(0)+\varrho_s^\nu-\varrho_s^\mu)\mathrm{d}s,\\ Y_t^{(2)}-X_t^{\mu,(2)}=Z_0^{(2)}+g(t)-g(0)+\varrho_t^\nu-\varrho_t^\mu,\end{cases} \tag{4.38}$$

其中 $Z_0=(Z_0^{(1)},Z_0^{(2)}):=Y_0-X_0^\mu=(Y_{(1)\,0}\quad-X^\mu_{\cdot,0\ (1)},Y_{(2)\,0}\quad-X^\mu_{\cdot,0\ (2)})$。

为了通过测度变换为它们构造耦合 (X_t^μ,Y_t)，使得 $X_{t_0}^\mu=Y_{t_0}$，我们按如下方式取 g：

$$\begin{aligned}g(t)=&-\frac{t}{t_0}(Z_0^{(2)}+\varrho_{t_0}^\nu-\varrho_{t_0}^\mu)-\frac{t(t_0-t)}{t_0^2}B^*\mathrm{e}^{-tA^*}U_{t_0}^{-1}Z_0^{(1)}\\ &-\frac{t(t_0-t)}{t_0^2}B^*\mathrm{e}^{-tA^*}U_{t_0}^{-1}\int_0^{t_0}\mathrm{e}^{-sA}B\left[\frac{t_0-s}{t_0}Z_0^{(2)}-\frac{s}{t_0}(\varrho_{t_0}^\nu-\varrho_{t_0}^\mu)+\varrho_s^\nu-\varrho_s^\mu\right]\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{4.39}$$

接下来，我们将 (4.37) 改写为

$$\begin{cases}\mathrm{d}Y_t^{(1)}=(AY_t^{(1)}+BY_t^{(2)})\mathrm{d}t,\\ \mathrm{d}Y_t^{(2)}=b_t(Y_t,P_t^*\nu)\mathrm{d}t+\sigma_t\mathrm{d}\hat{B}_t^H+\tilde{\sigma}_t(P_t^*\nu)\mathrm{d}\tilde{B}_t^{\tilde{H}},\quad t\in[0,t_0],\end{cases} \tag{4.40}$$

其中

$$\hat{B}_t^H:=B_t^H-\int_0^t\sigma_s^{-1}\hat{\zeta}_s\mathrm{d}s=\int_0^t K_H(t,s)\left(\mathrm{d}W_s-K_H^{-1}\left(\int_0^\cdot\sigma_r^{-1}\hat{\zeta}_r\mathrm{d}r\right)(s)\mathrm{d}s\right)$$

with

$$\hat{\zeta}_s = b_s(Y_s, P_s^*\nu) - b_s(X_s, P_s^*\mu) - g'(s).$$

Put

$$\hat{R}^{\tilde{H},0} := \exp\left[\int_0^{t_0} \left\langle K_H^{-1}\left(\int_0^{\cdot} \sigma_r^{-1}\hat{\zeta}_r \mathrm{d}r\right)(s), \mathrm{d}W_s\right\rangle - \frac{1}{2}\int_0^{t_0} \left|K_H^{-1}\left(\int_0^{\cdot} \sigma_r^{-1}\hat{\zeta}_r \mathrm{d}r\right)(s)\right|^2 \mathrm{d}s\right].$$

通过直接计算，我们可以得到

$$|Y_t - X_t^\mu| \le \frac{C_{T,\kappa}}{\ell(t_0)}\Big(|Z_0| + \sup_{s\in[0,t_0]}|\varrho_s^\mu - \varrho_s^\nu|\Big)$$

and

$$|\hat{\zeta}_t| \le C_{T,\kappa,\tilde{H}}\left[\mathbb{W}_p(\mu,\nu) + \left(\frac{1}{t_0} + \frac{1}{\ell(t_0)} + \frac{1}{t_0\ell(t_0)}\right)\Big(|Z_0| + \sup_{s\in[0,t_0]}|\varrho_s^\mu - \varrho_s^\nu|\Big)\right].$$

于是，仿照引理 4.3 和注记 4.4 的证明，我们得出，在条件概率 $\hat{}R^{\tilde{H},\,0}\mathrm{d}\mathbb{P}^{\tilde{H},\,0}$ 下，$(\hat{}B_t^H)_{t\in[0,t_0]}$ 是一个 l 维分数布朗运动，并且有

$$\mathbb{E}\left(\int_0^{t_0}\left|K_H^{-1}\left(\int_0^{\cdot}\sigma_r^{-1}\hat{\zeta}_r\mathrm{d}r\right)(s)\right|^2\mathrm{d}s\right) \le \chi(H)$$

with

$$\chi(H) = \begin{cases} C_{T,\kappa,\tilde{\kappa},H,\tilde{H}}\left(1 + \mathbb{W}_p(\mu,\nu)^{2\beta} + \frac{1}{t_0^{2H}} + \frac{1}{\ell^2(t_0)} + \frac{1}{t_0^{2H}\ell^2(t_0)}\right)\mathbb{W}_p(\mu,\nu)^2, & H\in(1/2,1), \\ C_{T,\kappa,H,\tilde{H}}\left(1 + \frac{1}{t_0^{2H}} + \frac{1}{\ell^2(t_0)} + \frac{1}{t_0^{2H}\ell^2(t_0)}\right)\mathbb{W}_p(\mu,\nu)^2, & H\in(0,1/2). \end{cases}$$

$\hat{}\,\hat{}$ 现在，令 $Y_t = Y_t - (0,\varrho_t^\nu)$，那么很容易看出 $Y_\cdot$ 满足

$$\begin{cases} \mathrm{d}\hat{Y}_t^{(1)} = (A\hat{Y}_t^{(1)} + B\hat{Y}_t^{(2)} + B\varrho_t^\nu)\mathrm{d}t, \\ \mathrm{d}\hat{Y}_t^{(2)} = b_t(\hat{Y}_t + (0,\varrho_t^\nu), P_t^*\nu)\mathrm{d}t + \sigma_t\mathrm{d}\hat{B}_t^H, \quad t\in[0,t_0],\ \hat{Y}_0 = Y_0. \end{cases} \tag{4.41}$$

注意到，$\hat{}X = X^\nu - (0,\varrho^\nu)$满足与 (4.41) 同形式的随机微分方程，只是将 $\hat{}B^H$ 替换为B^H。因此，沿用 (4.7)、(4.8) 和 (4.9) 中的相同步骤，即可得到所需结论。 □

4.2.2 Bismut公式

在本节中，我们旨在建立 (4.34) 关于 L 的导数的 Bismut公式。对于每个 $\mu \in \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^{m+l})$，令 X_0^μ 为满足 $\mathscr{L}_{X_0^\mu} = \mu$ 的 $\mathscr{F}_0$-可测函数，并令 $(X_t^\mu)_{t\in[0,T]}$为初值 X_0^μ 下方程 (4.34) 的解。对于任意 $\varepsilon \in [0,1]$ 和 $\phi \in L^p(\mathbb{R}^{m+l} \to \mathbb{R}^{m+l}, \mu)$，记 $X^{\mu_\varepsilon}_{\cdot,t}{}^{\phi}$为满足 $X^{\mu_\varepsilon}_{\cdot,0}{}^{\phi} = (\mathrm{Id} + \varepsilon\phi)(X_0^\mu)$ 的方程 (4.34) 的解，并记$P_t^*\mu_{\varepsilon,\phi} = \mathscr{L}_{X^{\mu_\varepsilon}_{\cdot,t}{}^{\phi}}$对每个 $t \in [0,T]$。对于每个 $0 \le s < t \le T$，置

$$\hbar_{s,t} := \left(\mathrm{e}^{sA}\phi^{(1)}(X_0^\mu) + \int_0^s \mathrm{e}^{(s-r)A} B \left(\phi^{(2)}(X_0^\mu) + \Xi_t(r) + \Lambda_r \right) \mathrm{d}r, \phi^{(2)}(X_0^\mu) + \Xi_t(s) + \Lambda_s \right),$$

其中

$$\begin{aligned} \Xi_t(s) := & -\frac{s}{t_0}(\phi^{(2)}(X_0^\mu) + \Lambda_t) - \frac{s(t-s)}{t^2} B^* \mathrm{e}^{-sA^*} U_t^{-1} \phi^{(1)}(X_0^\mu) \\ & - \frac{s(t-s)}{t^2} B^* \mathrm{e}^{-sA^*} U_t^{-1} \int_0^{t_0} \mathrm{e}^{-rA} B \left[\frac{t-r}{t_0} \phi^{(2)}(X_0^\mu) - \frac{r}{t_0}\Lambda_t + \Lambda_r \right] \mathrm{d}r. \end{aligned}$$

定理 4.9。考虑方程 (4.34)。假设 (4.35) 成立，且以下两个假设之一成立：

(I) $H \in (1/2, 1)$、 b、 σ、 $\tilde{\sigma}$ 满足 (H1')、(H2) 和 (H3)；

(II) $H \in (0, 1/2)$ b、 $\tilde{\sigma}$ 满足 (H1')、(H3)，且 $d = m + l$、 σ_t 不依赖于 t，

那么，对于任意 $t \in (0, T], f \in \mathscr{B}_b(\mathbb{R}^{m+l})$ $\phi \in L^p(\mathbb{R}^{m+l} \to \mathbb{R}^{m+l}, \mu)$ 和 $\mu \in \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^{m+l})$，若 $p \ge 2(1+\beta)$，则当 $H \in (1/2, 1)$ 或 $p \ge 2$ 且 $H \in (0, 1/2)$ 时，$D_\phi^L(P_T f)(\mu)$ 存在且满足

$$D_\phi^L(P_t f)(\mu) = \mathbb{E}\left(f(X_t^\mu) \int_0^t \left\langle K_H^{-1} \left(\int_0^\cdot \sigma_r^{-1} \Theta_{r,t} \mathrm{d}r \right)(s), \mathrm{d}W_s \right\rangle \right),$$

其中 $\Theta_{\cdot,\cdot}$ 定义为

$$\Theta_{s,t} = \nabla b_s(\cdot, P_s^*\mu)(X_s^\mu)\hbar_{s,t} + \mathbb{E}[\langle D^L b_s(x,\cdot)(P_s^*\mu)(X_s^\mu), \nabla_\phi X_s^\mu \rangle]|_{x=X_s^\mu} - (\Xi_t)'(s).$$

证明。令 $t_0 \in (0, T]$ 固定。对于 $\varepsilon \in (0, 1],$，令 Y^ε 满足方程 (4.37)，其中 $\nu = \mu_{\varepsilon,\phi}$，且$Y_0 = Y_0^\varepsilon = (\mathrm{Id} + \varepsilon\phi)(X_0^\mu)$。于是，(4.38)变为

$$\begin{cases} Y_t^{\varepsilon,(1)} - X_t^{\mu,(1)} = \varepsilon \mathrm{e}^{tA}\phi^{(1)}(X_0^\mu) + \int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)A} B(\varepsilon\phi^{(2)}(X_0^\mu) + g(s) + \varrho_s^{\mu_{\varepsilon,\phi}} - \varrho_s^\mu)\mathrm{d}s, \\ Y_t^{\varepsilon,(2)} - X_t^{\mu,(2)} = \varepsilon\phi^{(2)}(X_0^\mu) + g(t) + \varrho_t^{\mu_{\varepsilon,\phi}} - \varrho_t^\mu. \end{cases}$$

这里回顾一下，由于 (4.39)，有 $g(0) = 0$，其中 ν，而 $(Z_0^{(1)}, Z_0^{(2)})$ 分别替换为 $\mu_{\varepsilon,\ \phi}$ 和 $(\varepsilon\phi^{(1)}(X_0^\mu)\ \varepsilon\phi^{(2)}(X_0^\mu))$。特别地，有 $Y_{t_0}^\varepsilon = X_{t_0}^\mu$。

Set

$$\hat{R}_\varepsilon^{\tilde{H},0} := \exp\left[\int_0^{t_0} \left\langle K_H^{-1} \left(\int_0^\cdot \sigma_r^{-1} \hat{\zeta}_r^\varepsilon \mathrm{d}r \right)(s), \mathrm{d}W_s \right\rangle - \frac{1}{2} \int_0^{t_0} \left| K_H^{-1} \left(\int_0^\cdot \sigma_r^{-1} \hat{\zeta}_r^\varepsilon \mathrm{d}r \right)(s) \right|^2 \mathrm{d}s \right]$$

with

$$\hat{\zeta}^{\varepsilon}_s = b_s(Y^{\varepsilon}_s, P^*_s\mu_{\varepsilon,\phi}) - b_s(X^{\mu}_s, P^*_s\mu) - g'(s).$$

注意，与 (4.27) 和 (4.28) 中一样，我们得到对于每个 $r, s \in [0, t_0]$,

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{\hat{\zeta}^{\varepsilon}_s}{\varepsilon} =& \nabla b_s(\cdot, P^*_s\mu)(X^{\mu}_s)\hbar_{s,t_0} + \mathbb{E}[\langle D^L b_s(x,\cdot)(P^*_s\mu)(X^{\mu}_s), \nabla_{\phi} X^{\mu}_s\rangle]|_{x=X^{\mu}_s} \\ & - (\Xi_{t_0})'(s) =: \Theta_{s,t_0}\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{\hat{\zeta}^{\varepsilon}_s - \hat{\zeta}^{\varepsilon}_r}{\varepsilon} =& \nabla b_s(\cdot, P^*_s\mu)(X^{\mu}_s)\hbar_{s,t_0} - \nabla b_r(\cdot, P^*_r\mu)(X^{\mu}_r)\hbar_{r,t_0} \\ & + \mathbb{E}[\langle D^L b_s(x,\cdot)(P^*_s\mu)(X^{\mu}_s), \nabla_{\phi} X^{\mu}_s\rangle]|_{x=X^{\mu}_s} \\ & - \mathbb{E}[\langle D^L b_r(y,\cdot)(P^*_r\mu)(X^{\mu}_r), \nabla_{\phi} X^{\mu}_r\rangle]|_{y=X^{\mu}_r} \\ & - [(\Xi_{t_0})'(s) - (\Xi_{t_0})'(r)] \\ =& \Theta_{s,t_0} - \Theta_{r,t_0}.\end{aligned}$$

然后，借助 (4.29)、(4.31) 以及 (4.32)、(4.33) 中的相同技巧，我们可以推出，对于每个 $H \in (1/2, 1) \cup (0, 1/2)$,

$$D^L_{\phi}(P_{t_0} f)(\mu) = \mathbb{E}\left(f(X^{\mu}_{t_0}) \int_0^{t_0} \left\langle K_H^{-1}\left(\int_0^{\cdot} \sigma_r^{-1}\Theta_{r,t_0}\mathrm{d}r\right)(s), \mathrm{d}W_s \right\rangle \right).$$

□

我们以一条备注结束本部分。

备注 4.10. 与备注 4.2 和 4.7(ii) 类似，由定理 4.8 和 4.9 可知，以下熵-代价估计和内在导数估计

$$\mathrm{Ent}(P^*_t\nu | P^*_t\mu) \le \chi(H)$$

and

$$\|D^L(P_t f)(\mu)\|_{L^{p^*}_{\mu}} \le C_{T,\kappa,\tilde{\kappa},H,\tilde{H}} \left(1 + \frac{1}{t^H} + \frac{1}{\ell(t)} + \frac{1}{t^H \ell(t)}\right) \left((P_t |f|^{p^*})(\mu)\right)^{\frac{1}{p^*}}$$

对任意 $t \in (0, T], \mu, \nu \in \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$ 和 $f \in \mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d)$ 均成立，其中 $C_{T,\ \kappa,\ \tilde{\kappa},\ H,\ \tilde{H}}$ 是一个正的常数，当 $H \in (0, 1/2)$ 时与 $\tilde{\kappa}$ 无关；若 $H \in (1/2, 1)$，则该常数为 $p \ge 2(1+\beta)$；若 $H \in (0, 1/2)$，则该常数为 $p \ge 2$。此外，为保证 (4.35) 成立，需要对矩阵 B 施加某种非退化条件。例如，假设满足以下卡尔曼秩条件：

$$\mathrm{Rank}[B, AB, \cdots, A^k B] = m \tag{4.42}$$

对某个整数 $k \in [0, m-1]$ 成立（特别是，如果 $k = 0$，则 (4.42) 化简为 $\mathrm{Rank}[B] = m$），那么对于正数常数 C，(4.35) 满足 $\ell(t) = C(t \wedge 1)^{2k+1}$（例如，参见 *[31,* 定理 4.*2]* 的证明）。

参考文献

[1] E. Al`os、O. Mazet 和 D. Nualart，高斯过程的随机微积分，《概率年刊》29（2001年），766–801。[2] M. Arnaudon、A. Thalmaier 和 F.-Y. Wang，非紧黎曼流形上的梯度估计与 Harnack 不等式，《随机过程及其应用》119（2009年），3653–3670。[3]D. Ba˜nos，平均场随机微分方程的 Bismut-Elworthy-Li公式，《亨利·庞加莱研究所概率与统计年刊》54（2018年），220–233。[4] J. Bao、P. Ren 和 F.-Y. Wang，分布路径依赖随机微分方程的 Lions 导数的 Bismut公式，《微分方程杂志》282（2021年），285–329。[5] M. Bossy 和 D. Talay，针对麦基恩–弗拉索夫方程和 Burgers方程的随机粒子方法，《数学计算》66（1997年），157–192。[6] R. Buckdahn、J. Li、S. Peng 和 C. Rainer，平均场随机微分方程及其相关偏微分方程，《概率年刊》2（2017年），824–878。[7] P. Cardaliaguet，平均场博弈讲义，P.-L. Lions 在法兰西学院的讲座，https://www.ceremade.dauphine.fr/cardaliaguet/MFG20130420.pdf，2013年。[8] R. Carmona 和 F. Delarue，平均场博弈的概率分析，《SIAM控制与优化杂志》51（2013年），2705–2734。[9] D. Crisan 和 E. McMurray，麦基恩–弗拉索夫随机微分方程的平滑性质，《概率论及相关领域》171（2018年），97–148。.[10] L. Decreusefond 和 A. S. Ust¨unel，分数布朗运动的随机分析，《势分析》10（1998年），177–214。[11] X. Fan、X. Huang、Y. Suo 和 C. Yuan，由分数布朗运动驱动的分布依赖随机微分方程，《随机过程及其应用》151（2022年），23–67。[12] X. Fan、T. Yu 和 C. Yuan，由分数布朗运动驱动的分布依赖随机微分方程的渐近行为，arXiv:2207.01525..[13] X. Fernique，高斯随机函数轨迹的正则性。载于：圣弗卢尔概率暑期学校，IV-1974，《数学讲义》480（1975年），1–96。[14] L. Galeati、F. A. Harang 和 A. Mayorcas，由加性分数布朗运动驱动的分布依赖随机微分方程，《概率论及相关领域》185（2023年），251–309。

[15] X. Huang 和 F.-Y. Wang, 《McKean-Vlasov随机微分方程分布的导数估计》, 《电子概率学报》26（2021年）, 1–12页。[16] X. Huang 和 F.-Y. Wang, 《分布依赖噪声驱动的随机微分方程的正则性与熵中的指数遍历性》, arXiv:2209.14619。[17] P. E. Jabin 和 Z. Wang, 《随机粒子系统的平均场极限》, 载于《活性粒子》第1卷, 第379–402页。施普林格, 2017年。[18] J. Lasry 和 P. Lions, 《平均场博弈》, 《日本数学杂志》2（2007年）, 229–260页。[19] J. Li, 《带跳跃的平均场前向与后向随机微分方程及相关非局部拟线性积分偏微分方程》, 《随机过程及其应用》128（2018年）, 3118–3180页。[20] W. Liu 和 M. R¨ockner, 《随机偏微分方程：导论》, Universitext, 施普林格, 2015年。[21] H. P. McKean, 《与非线性抛物方程相关的一类马尔可夫过程》, 《美国国家科学院院刊》56（1966年）, 1907–1911页。[22] A. F. Nikiforov 和 V. B. Uvarov, 《数理物理中的特殊函数》, Birkh¨auser, 波士顿, 1988年。[23] D. Nualart 和 Y. Ouknine, 《分数噪声对微分方程的正则化》, 《随机过程及其应用》102（2002年）, 103–116页。[24] P. Ren 和 F.-Y. Wang, 《分布依赖随机微分方程的Lions导数Bismut公式及其应用》, 《微分方程杂志》267（2019年）, 4745–4777页。[25] P. Ren 和 F.-Y. Wang, 《McKean-Vlasov随机微分方程路径无关加性泛函的空间—分布偏微分方程》, 《无限维分析、量子概率及相关主题》23（2020年）, 2050018。[26] S. G. Samko、A. A. Kilbas 和 O. I. Marichev, 《分数阶积分与导数：理论与应用》, Gordon and Breach Science Publishers, Yvendon, 1993年。[27] B. Saussereau, 《分数布朗运动驱动的随机微分方程的输运不等式》, 《伯努利》18（2012年）, 1–23页。[28] Y. Song, 《带跳跃的平均场随机微分方程的梯度估计与指数遍历性》, 《理论概率学杂志》33（2020年）, 201–238页。[29] F.-Y. Wang, 《随机方程的分部积分公式与平移Harnack不等式》, 《概率年刊》42（2014年）, 994–1019页。[30] F.-Y. Wang, 《Landau型方程的分布依赖随机微分方程》, 《随机过程及其应用》128（2018年）, 595–621页。

[31] F.-Y. Wang 和 X. Zhang，退化扩散半群的导数公式及其应用，《纯粹数学与应用数学杂志》99 (2013年),726–740。