黏性液层上的表面重力波和内重力波：初值问题

Ramana Patibandla 和 Anubhab Roy*
Dept. Applied Mechanics, IIT Madras, India

Saswata Basak 和 Ratul Dasgupta†
Dept. Chemical Engg., IIT Bombay, India

arXiv:2304.00769v1 [physics.flu-dyn] 3 Apr 2023

我们研究一类初值问题（IVP），涉及密度分层、静止、带自由表面的黏性液层中的扰动。该几何构型为二维矩形，并考虑表面张力和重力。通过对自由表面扰动和涡旋初始扰动的初值问题进行解析求解，得到线性化预测。黏性谱由传播的表面模态和内模态构成的离散谱，以及衰减涡量模态组成。根据区域是否有界，也可能存在连续谱。研究表明，无论是否存在分层，谱中的涡量模态都发挥着重要作用。对于高黏度液体的无分层液池，涡量模态对自由表面处瞬态涡量层的时间演化有显著贡献。研究还表明，液池深处局域涡旋扰动的时间演化无法仅由表面模态（毛细重力模态）描述，还需要涡量模态的贡献。然而，深处局域涡旋扰动在自由表面产生的响应微乎其微。对于黏性液体的分层液池，此类涡旋初始扰动在涡量模态和内重力模态上都有显著投影。对于无分层液池的无限深度极限，本文分析了连续谱涡量模态的贡献，并将其与有限深度情况下相应离散谱模态的贡献进行了比较。我们将若干解析预测与直接数值模拟（DNS）进行比较，发现二者高度吻合。我们的结果拓展了[1–4] 的经典研究，并得到非线性模拟的支持。

I. 引言

自 Cauchy [5] 和 Poisson [6], 的经典分析以来，静止或剪切液层表面波的初值问题（IVP）求解一直是一个活跃的研究课题，参见 [7–12]。对于被建模为无限深的非分层静止液层，最初是在无黏无旋框架下对其进行研究的（也称为池中投石问题，参见 [1, 13, 14]）。对于给定的初始扰动，界面形状和扰动速度势在任意后续时刻都可以表示为关于初始条件的逆傅里叶（Hankel）积分，并以谐波时间依赖加权，其频率由色散关系 [13]决定。如今，这类积分已经可以通过数值方法相当常规地求解（参见使用 Mathematica[15]生成的图1a和1b）；不过，应用驻相法（参见 [16]中的第2.1.3节）可以揭示其物理内涵，并由此引出局部傅里叶模态的概念，其包络以群速度传播。

采用单色傅里叶模态将黏度纳入分析，最早由 Basset [17] 报道，随后 Lamb [1] 和 Harrison [18] 推导了无限深和有限深、静止且无分层液池中表面波的黏性频散关系。Lamb [1] 还论述了无限深黏性液池中特征模态的连续谱。Miles [19]给出了无限深圆柱形液池中局域表面变形的线性化黏性初值问题的显式解。Miles [19] 采用汉克尔变换（径向）和拉普拉斯变换（时间），求得了黏性（线性化）柯西–泊松问题的解，其中包含自由液面位移和表面冲量。在矩形几何中，Prosperetti 及其同事通过一系列研究 [3, 4, 20, 21]求解了纯表面变形（单个傅里叶模态）的初值问题，以及表面冲量与表面变形组合的初值问题。研究表明，驻波傅里叶模态的时间演化受一个带记忆项的阻尼谐振子方程支配。这类记忆项也出现在各种振荡问题中 [22, 23]，其物理起源是初始条件通过投影激发的涡量模态 [4]。近期的研究在不同的基态几何中考察了纯自由表面变形的黏性初值问题（回复力为毛细重力或仅为毛细作用），且初始涡量为零 [24, 25]；所得方程具有类似的记忆项。另一个值得关注的问题是，加入振荡驱动并由此导致参数失稳时，该项是否仍然存在。在黏性情形下，研究表明，在各种构型中，振荡驱动下的黏性驻波均受带记忆项的阻尼马修方程支配 [26–29]。

* anubhab@iitm.ac.in
† dasgupta.ratul@iitb.ac.in

. A free surface is also

e (sim. sol.). Experimen-

problem
y-Poisson problem
oint sources. Oscillations

extended source.
g and non-oscillating
ffect of viscosity.

finte spectrum of non-

-quiescent free-surface as

e depth
nfinite depth.
mplitude equation for the

ferential amplitude equa-

ro-differential amplitude
or a Dirac-delta vortical

ing rates of viscous grav-

waves on a free-surface
tiple superposed viscous



(a) $t = 0$ s (b) $t = 15$ s

图1：无黏流体中轴对称表面重力波的三维渲染，基于 Cauchy-Poisson 解。a）初始表面扰动 [19] is $\eta(r, 0) = 40\left(1 - r^2\right)\exp\left(-r^2\right)$，位于无限深度的静止液池中。b）在任意时刻 $t > 0$，界面形状表示为 [13] $\eta(r, t) = \int_0^\infty dk\, kJ_0(kr)\mathbb{H}(\eta(r, 0))\cos(\sqrt{gk}t)$，其中 $\mathbb{H}(f(r))$ 是 $f(r)$ 的零阶汉克尔变换。

对于分层流体，许多研究关注由点源或线源产生内波的初值问题；源可以是静止、移动或振荡的，也可以是偶极子；还包括移动或振荡的圆柱体和球体，以及地形和潮汐流。相关研究综述见 Sutherland [43]。对于假定在各个方向上均无限延伸（即没有自由表面）的无黏均匀分层流体，Lighthill [37] 使用驻相法求解了波数为 k 的初值问题，其中初始扰动任意，初始速度为无散分布。对于三维内重力波，他表明其振幅在大时间下按 $t^{-3/2}$ 衰减。Wu 和 Mei [30] 研究了脉冲点源（从 $t = 0$开始）产生的内波和表面波。通过对空间和时间分别进行傅里叶变换和拉普拉斯变换，他们求得了大时间、大距离下的稳态表面波解，并确定了内重力波的衰减率。Voisin [34] 采用格林函数方法研究了单色点源和脉冲启动点源产生的内波。他利用渐近理论研究了非Boussinesq点源情形下，格林函数在短时间和长时间的行为。随后，同一方法被应用于脉动球形源和移动点源的情形 [36]。Simakov [35] 随后将该方法推广至各种边界条件。Debnath 和 Guha [32]研究了无黏、轴对称、分层流体中带有自由表面的 Cauchy-Poisson 初值问题。对于初始自由表面扰动，他们发现长时间和大距离下仅有表面波和内波的贡献。同样，Rollins 和 Debnath [33] 发现，在加入旋转背景后，仅有表面波和内惯性波的贡献。之后，Ghosh 等人 [38] 报告了一项采用笛卡尔二维区域的类似研究，作者使用驻相法推导出描述界面在大时间下行为的方程。尽管该研究考虑的是无限深度区域，但在 $z \to -\infty$ 处实施无穿透边界条件（$w = 0$）时忽略了连续谱的存在。

对于无界的黏性分层液体，Thomas 和 Stevenson [31] 通过坐标变换，给出了振荡局部扰动的相似解。这些结果已通过实验测量得到的粒子位移，在远距离范围内得到验证。当流体被限制在两块平板之间时， [39] 从解析上证明，除内波模态外，还存在一组可数无穷多个非振荡正规模态。表 I 汇总了在线性近似下，针对分层和非分层情形的初值问题解析解（以及正规模态分析）的代表性文献。

本研究旨在对分层液池中表面波和内波的演化进行解析与数值研究，考察涡旋扰动和自由表面扰动的影响，并同时考虑重力和表面张力。通过考虑分层效应，我们的结果将 [1] 和[2–4] 的经典结果推广到了黏性分层液池中的涡旋扰动。我们允许自由表面发生变形，并假设其未被 [44]单分子层覆盖。因此，自由表面不具有弹性或黏性性质，排除了出现“纵向”或“横向”毛细波 [45, 46]的可能性。然而，我们的分析中确实出现的毛细重力波，对应于纯黏性液体自由表面上的毛细重力波，其表面张力为常数。这类波具有混合性质，不能被归类为纯横向波或纯纵向波。本文给出的理论结果显著扩展了 Cortelezzi 和 Prosperetti [21] 以及 Prosperetti 和 Cortelezzi [4], 的早期结果；后者提出了关于非分层黏性液层自由表面上涡量初始条件影响的线性理论。引入黏度，尤其是在非分层情形下十分重要，因为这使得能够在线性近似范围内研究涡量特征模态的时间演化。我们的解析结果也可视为对 Rednikov 等人 [47] 研究的补充；他们通过正规模态分析以及弱非线性分析，研究了由液层上方顶层受热空气层所引发的不稳定性导致的内波和膨胀表面波，其中液层具有有限深度。顺带一提，这些作者 [47] 没有

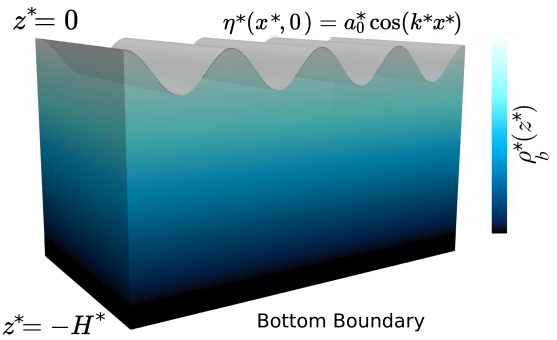


图 2：几何形状示意图。基态中，流体静止，且自由表面平坦。基态密度分布 $\rho_b^*(z^*)$ 随深度线性变化。

考虑自由表面的变形（ [47]中的第59页第2节）；因此，他们得到的毛细波是纯膨胀波，与我们在此报告的毛细波不同。本研究的组织结构如下：下一节中，我们将针对分层和非分层液池上的一系列初始条件，给出初值问题（IVP）的解析解。我们通过在所有情形下与时间谱进行比较，对这些预测进行合理性验证。随后，我们将这些预测与采用开源代码 Basilisk [48]进行的、包含密度分层的纳维–斯托克斯方程数值模拟结果进行对比检验。最后，我们讨论这些比较结果，并总结主要观察结果和未来的研究方向。

II. 分层液层上的扰动：初值问题

A. 控制方程：布辛涅斯克近似

如图 2 所示，考虑一个深度为 H^* 的水池，其中充满静止的密度分层流体（均匀分层）；水池顶部为自由表面，底部为壁面。假设密度是温度 T 的（线性）函数（且与盐度和压力等其他热力学变量无关），则可得到描述水池内部速度、压力和密度变化的布辛涅斯克方程组 [49, 50]，即：

$$\boldsymbol{\nabla^*} \cdot \tilde{\mathbf{u}}^* = 0, \qquad \frac{D\tilde{\mathbf{u}}^*}{Dt^*} = -\frac{1}{\rho_{\mathrm{ref}}}\boldsymbol{\nabla^*}\tilde{p}^* + \frac{\tilde{\rho}^*}{\rho_{\mathrm{ref}}}\mathbf{g} + \frac{\mu}{\rho_{\mathrm{ref}}}\nabla^{*2}\tilde{\mathbf{u}}^* \tag{1a,b}$$

$$\frac{D\tilde{\rho}^*}{Dt^*} = \kappa \nabla^{*2}\tilde{\rho}^* \tag{1c}$$

其中，$\tilde{\mathbf{u}}^* = (\tilde{u}^*, \tilde{w}^*)$，$\mathbf{g} = (0, -g)$，$\rho_{\mathrm{ref}}$ 为参考密度，κ 为热／质扩散率。所研究稳定性的基态由静止的黏性流体构成，其密度分布为 $\rho_b^*(z)$，黏度均匀，为 μ；压力场满足静水压平衡 $\frac{dp_b^*}{dz^*} = -\rho_b^*(z^*)g$。注意，所有基态量均以下标 ‘$b$’ 表示，而有量纲量带有星号。方程 1a 、 1b 和 1c 辅以自由表面处（ $z^* = \eta^*$ ）和壁面处（ $z^* = -H^*$ ）的边界条件。具体如下：

$$\frac{D\eta^*}{Dt^*} = (\tilde{\mathbf{u}}^* \cdot \mathbf{e}_z)_{z^*=\eta^*} \tag{2a}$$

$$\left(\mathbf{t} \cdot \underline{\tilde{\sigma}}^* \cdot \mathbf{n}\right)_{z^*=\eta^*} = 0 \tag{2b}$$

$$\left(\mathbf{n} \cdot \underline{\tilde{\sigma}}^* \cdot \mathbf{n}\right)_{z^*=\eta^*} = -\tau\left(\boldsymbol{\nabla^*} \cdot \mathbf{n}\right)_{z^*=\eta^*} \tag{2c}$$

$$\tilde{\rho}^*(x^*, z^* = \eta^*, t^*) = \rho_b^*(\eta^*) \tag{2d}$$

$$\tilde{\mathbf{u}}^*(x^*, z^* = -H^*, t^*) = 0 \tag{2e}$$

$$\tilde{\rho}^*(x^*, z^* = -H^*, t^*) = \rho_b^*(-H^*) \tag{2f}$$

其中，t 和 n 分别为受扰界面的单位切向量和单位法向量，$\underline{\tilde{\sigma}}^*$ 为应力张量，$\mathbf{e}_z$ 为沿 z 方向的单位法向量。方程 2a–2e 分别表示运动学边界条件、零剪切应力条件，以及

自由表面处由表面张力引起的法向应力跃变 τ、界面处的恒密度条件，以及底壁处的零速度条件。将所有因变量分解为基态变量与扰动变量之和，即

$$\tilde{\mathbf{u}}^* = \mathbf{0} + \mathbf{u}^*,\ \tilde{p}^*(\mathbf{x}^*, t^*) = p_b^*(z^*) + p^*(\mathbf{x}^*, t^*),\ \tilde{\rho}^*(\mathbf{x}^*, t^*) = \rho_b^*(z^*) + \rho^*(\mathbf{x}^*, t^*).$$

将方程 1a、b、c 代入 和 (2a–2e)，对扰动变量进行线性化（扰动相较于基态）后，我们以分量形式得到 分量形式

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0 \tag{3a}$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} = -\frac{1}{\rho_{\mathrm{ref}}}\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\mu}{\rho_{\mathrm{ref}}}\nabla^{*2}u^* \tag{3b}$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial t^*} = -\frac{1}{\rho_{\mathrm{ref}}}\frac{\partial p^*}{\partial z^*} - \frac{\rho^*}{\rho_{\mathrm{ref}}}g + \frac{\mu}{\rho_{\mathrm{ref}}}\nabla^{*2}w^* \tag{3c}$$

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \left(\frac{d\rho_b^*}{dz^*}\right)w^* = \kappa\nabla^{*2}\rho^* \tag{3d}$$

相应的线性化边界条件则通过在 $z^* = 0$ 处进行泰勒级数展开得到，

$$\frac{\partial \eta^*}{\partial t^*} = w^*(x^*, 0, t^*) \tag{4a}$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial z^*}(x^*, 0, t^*) + \frac{\partial w^*}{\partial x^*}(x^*, 0, t^*) = 0 \tag{4b}$$

$$\rho_b^*(0)g\eta^* - p^*(x^*, 0, t^*) + 2\mu\frac{\partial w^*}{\partial z^*}(x^*, 0, t^*) - \tau\left(\frac{\partial^2 \eta^*}{(\partial x^*)^2}\right) = 0 \tag{4c}$$

$$\rho^*(x^*, 0, t^*) = 0 \tag{4d}$$

$$u^*(x^*, -H^*, t^*) = w^*(x^*, -H^*, t^*) = \rho^*(x^*, -H^*, t^*) = 0 \tag{4e}$$

其中我们采用了牛顿型本构关系 $\underline{\underline{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}}^* = -\tilde{p}^*\,\mathrm{I} + \mu\left[\boldsymbol{\nabla}\tilde{\mathbf{u}}^* + (\boldsymbol{\nabla}\tilde{\mathbf{u}}^*)^{\mathsf{T}}\right]$。注意，我们在 4c 中使用了 $p_b^*(0) = 0$。

B. 无量纲方程

现在，我们使用长度、速度、时间、密度和压力尺度 L、 U、 L/U、 ρ_{ref} 和 $\rho_{ref}U^2$，分别对方程 (3a-3d) 和边界条件 (4a-4e) 进行无量纲化，得到（未加星号的变量为无量纲变量）

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{5a}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u \tag{5b}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)w - \left(\frac{gL}{U^2}\right)\rho \tag{5c}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\frac{d\rho_b}{dz}\right)w = \frac{1}{RePr}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\rho \tag{5d}$$

以及边界条件

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = w(x, 0, t) \tag{6a}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}(x, 0, t) + \frac{\partial w}{\partial x}(x, 0, t) = 0 \tag{6b}$$

$$\rho_b(0)\eta - \left(\frac{U^2}{gL}\right)p(x, 0, t) + \frac{2}{Re}\left(\frac{U^2}{gL}\right)\frac{\partial w}{\partial z}(x, 0, t) - \frac{1}{Bo}\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right) = 0 \tag{6c}$$

$$\rho(x, 0, t) = 0 \tag{6d}$$

$$u(x, -H, t) = w(x, -H, t) = \rho(x, -H, t) = 0 \tag{6e}$$

这些无量纲数包括雷诺数 $Re \equiv \frac{\rho_{\rm ref} L U}{\mu}$、邦德数 $Bo \equiv \frac{\rho_{\rm ref} g L^2}{\tau}$、理查森数 $Ri \equiv \frac{-\frac{g}{\rho_{\rm ref}}\left(\frac{d\rho_0}{dz^*}\right)L^2}{U^2}$、普朗特数 $Pr \equiv \frac{\mu}{\rho_{\rm ref}\,\kappa}$以及比值 $H \equiv H^*/L$。我们分别将长度尺度和速度尺度 L 与 U 选为 $1/k$ 和 $\sqrt{g/k}$，即表面重力波的长度尺度和相速度。因此，出现在方程 (6c) 中的比值 $\frac{gL}{U^2}$（可定义为弗劳德数平方的倒数）结果为 1。此外，此处的理查森数 Ri 变为 N^2/ω^2，即以深水表面波频率无量纲化的浮力频率。

所有方程和边界条件分别对 x 和 t 进行傅里叶变换和拉普拉斯变换。由于 k 用于无量纲化长度，傅里叶-拉普拉斯变换后的变量（用上横线表示）因此与 $\bar{}\,k$无关。通过交叉求导消去压力 $\bar{p}(z,s)$，并定义扰动流函数 $\psi(z,s)$，经过一些代数运算后，我们得到以下方程。

$$\begin{aligned}\Big[(D^2-1)-sRePr\Big]\Big[(D^2-1)-sRe\Big](D^2-1)\bar{\psi}(z,s) - Ri\;Re^2 Pr\bar{\psi}(z,s)\\ = \mathbf{i}Re^2 Pr\hat{\rho}(z,t=0) + Re\Big[(D^2-1)-sRePr\Big]\hat{\omega}(z,t=0)\end{aligned} \tag{7}$$

其中 $D \equiv \partial/\partial z$为微分算子，且 $\mathbf{i} \equiv \sqrt{-1}$。方程 7 是我们需要求解的初边值问题，以确定扰动流函数 $\psi(s,z)$ 的演化。还需满足以下边界条件；在傅里叶-拉普拉斯域中，这些条件为：

$$(D^2+1)\bar{\psi}(s,z=0) = 0 \tag{8a}$$

$$s\Big((D^2-3)-sRe\Big)D\bar{\psi}(s,z=0) - Re(1+Bo^{-1})\bar{\psi}(s,z=0) = Re(1+Bo^{-1})\mathbf{i}\hat{\eta}(t=0) - sReD\hat{\psi}(t=0,z=0) \tag{8b}$$

$$\Big[s-\frac{1}{Re}(D^2-1)\Big](D^2-1)\bar{\psi}(s,z=0) = -\hat{\omega}(z=0,t=0) \tag{8c}$$

$$\bar{\psi}(s,-H)=0,\quad D\psi(s,-H)=0,\quad \Big[s-\frac{1}{Re}(D^2-1)\Big](D^2-1)\bar{\psi}(s,-H) = -\hat{\omega}(z=-H,t=0) \tag{8d,e,f}$$

提醒读者，方程 8a 表示线性化自由表面 $z=0$处的零剪切应力条件。方程 8b 是 $z=0$处的法向应力边界条件，同时考虑了运动学边界条件。方程 8c 和 8f 分别要求自由表面和底壁处的密度扰动消失（深度有限时）。方程 8d 和 8e 是壁面处的不可穿透条件和无滑移条件。分层与非分层（$Ri=0, Pr\to\infty$ 和 $\hat{}\,\rho=0$）情形中，控制 $_\psi(s,z)$ 的方程阶数不同。前一种情形下，方程 7 是六阶方程（参见第 II 章中的方程 104，那里有一个类似的六阶方程）；而后一种情形下，它是四阶方程。因此，求解方程 7 时应相应选择边界条件。例如，对于无限深分层流层，我们选择在 $z=0^-$处施加条件 8a、8b 和 8c，同时要求 $\psi\to$在 $z\to-\infty$时有限。另一方面，对于非分层有限深流层，我们在 $z=0$ 处施加边界条件 8a 和 8b，在 $z=-H$ 处施加 8d 和 8e，依此类推。

求解分层情形下的方程 7 时，解的齐次部分可取为 $\sim C_i e^{\lambda_i z}$，并使用参数变易法，可将通解写为

$$\bar{\psi}(s,z) = \sum_{i=1}^{6}\exp(\lambda_i z)\left[C_i(s) + \int^z \frac{Adj(\mathscr{W})_{i,6}(s,z')\mathscr{R}(s,z')}{|\mathscr{W}(s,z')|}dz'\right] \tag{9}$$

这里，$\mathscr{R}(s,z)$ 是方程 7 的右端项，$|\mathscr{W}(s,z)|$ 是由解的齐次部分构造的六阶朗斯基行列式（见补充材料），而 $\mathrm{Adj}(\mathscr{W})$ 表示朗斯基矩阵的伴随矩阵，下标表示该矩阵的元素。补充材料中证明，表达式 9 可改写为（Riley 等人，[52], 第 510 页）：

$$\bar{\psi}(s,z) = \sum_{i=1}^{6}\exp(\lambda_i z)\Big[C_i(s) + \mathscr{E}_i(s)I_i(s,z)\Big],\ \text{with}\ \mathscr{E}_i(s) \equiv \frac{1}{\prod_{j=1,j\neq i}^{6}(\lambda_i-\lambda_j)},\ I_i(s,z) \equiv \int \exp(-\lambda_i z)\mathscr{R}(s,z)dz. \tag{10}$$

在接下来的小节中，我们针对分层或非分层液层，以及有限深度或无限深度等特定极限情形，求出满足各种初始条件的 $C_i(s)$ 表达式。随后，通过拉普拉斯反演，得到扰动 $\psi(z,t)$ 的显式表达式。

C. 线性化解析预测

首先考虑液层为分层且深度有限的情形。将方程 10 代入方程 8a-8d,e,f 给出的边界条件，可得到关于 $C_i(s)$（$i = 1, 2 \ldots 6$）的一组线性方程。这些方程可符号化地表示为：

$$\sum_{i=1}^{6} \mathscr{D}_{ji}(s) C_i(s) = \mathscr{R}_j(s), \quad j = 1, 2 \ldots 6 \tag{11}$$

其中，$\mathscr{D}_{ji}(s)$ 是系数矩阵（即通过正规模态分析可得到色散关系的矩阵）。$C_i(s)$ 是方程 10 中的系数，而 $\mathscr{R}_j(s)$ 是由边界条件 8a-8d、e、f 中移至右侧的其余项组成的列矩阵。对方程 11 求解 $C_i(s)$，可得：

$$C_i(s) = \frac{1}{|\mathscr{D}(s)|} \sum_{j=1}^{6} Adj(\mathscr{D}(s))_{ij} \mathscr{R}_j(s). \tag{12}$$

将表达式 12 代入 10，并从拉普拉斯域变换至时域，可形式化地得到

$$\hat{\psi}(t, z) = \frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \int_{\gamma - \mathbf{i}\infty}^{\gamma + \mathbf{i}\infty} \exp(st) ds \sum_{i=1}^{6} \exp(\lambda_i(s) z) \left[\sum_{j=1}^{6} \frac{1}{|\mathscr{D}(s)|} Adj(\mathscr{D}(s))_{ij} \mathscr{R}_j(s) + \mathscr{E}_i(s) I_i(s, z) \right]. \tag{13}$$

从这里开始，我们通过选取明确的初始条件，并利用柯西留数定理计算相应的布 romwich围道积分，依据方程 13 得到扰动流函数 $\hat{\psi}(z, t)$ 的显式表达式。同理，也可以得到自由表面扰动 $\hat{\eta}(t)$ 和密度扰动 $\hat{\rho}(z, t)$ 的相应表达式。为了说明方程 13 显式依赖于初始条件，注意其右侧含有 $I_i(s, z)$，后者又依赖于 $\mathscr{R}(s, z)$（见表达式 10）；而后者显式依赖于初始密度扰动和涡量扰动，即分别为 $\hat{\rho}(z, t = 0)$ 和 $\hat{\omega}(z, t = 0)$。此外，方程 13 中的 $\mathscr{R}_j(s)$ 也包含初始条件。在接下来的小节中，我们针对涡量扰动和自由表面扰动选取相应的初始条件，使方程 13 得到精确解。接下来的两个小节分别讨论分层流层和非分层液层情况下的这些解析解，并将其与该问题的离散时间谱进行比较。

1. 有限深度: 的分层流层（理查森数 $\neq 0$）{vorticity}与自由表面扰动

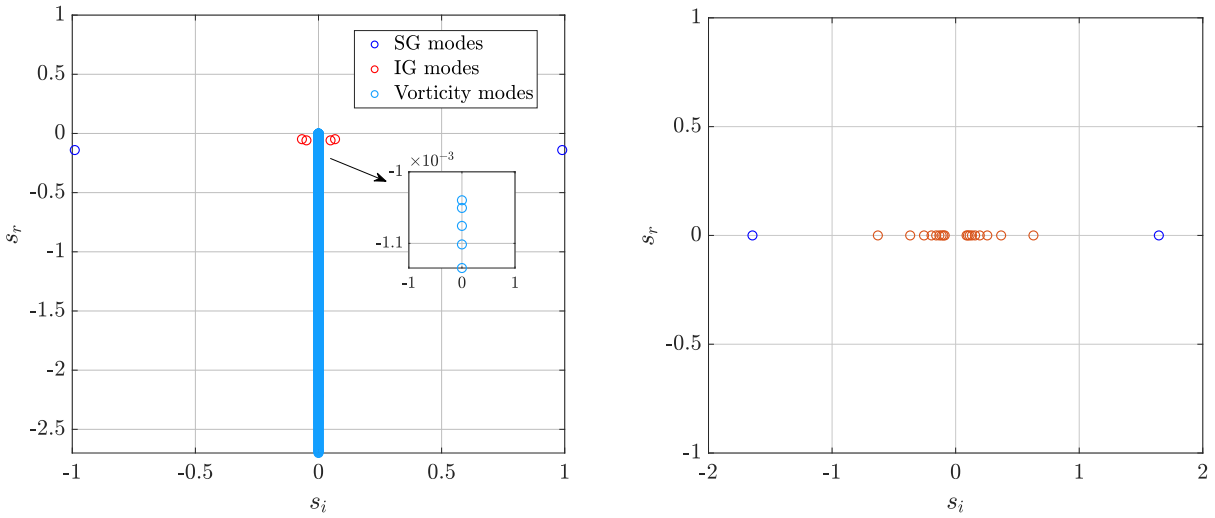
针对特定初始条件的代数推导较为冗长，但并不复杂；具体推导可参阅随附的补充材料，其中给出了精确表达式。此处我们重点讨论有限深度分层液池中涡旋初始扰动这一具体情形。假设初始局部化涡量扰动的形式为 $\hat{\omega}(z, t = 0) = \Omega \exp\left(-(z - z_d)^2 / d^2\right)$，其中 $z_d \in (-H, 0)$，且不存在初始密度（$\hat{\rho}(z, t = 0) = 0$）或自由表面扰动（$\hat{\eta}(t = 0) = 0$）），我们希望根据方程 13 获得该初始条件下 $\psi(t, z)$ 的表达式。方程 13 可转换为复 s 平面上的围道积分，并利用柯西留数定理求得该积分。最终表达式可写成色散矩阵（$|\mathscr{D}(s)|$）所有零点处留数之和，即

$$\hat{\psi}(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\mathscr{D}(s_n)|'} \exp(s_n t) \sum_{i=1}^{6} \exp(\lambda_i(s_n) z) \left[\sum_{j=1}^{6} Adj(\mathscr{D}(s_n))_{ij} \mathscr{R}_j(s_n) \right]. \tag{14}$$

需要指出的是，表达式 13 右侧的第二项没有极点，因此该项不会出现在方程 14 中。类似地，受扰动自由表面的表达式为

$$\frac{\hat{\eta}(t)}{\hat{\eta}(0)} = 1 - \frac{\mathbf{i}}{\hat{\eta}(0)} \sum_{n=1}^{\infty} \exp(s_n t) \sum_{i=1}^{6} \left[\frac{1}{s_n |\mathscr{D}(s_n)|'} \sum_{j=1}^{6} Adj(\mathscr{D}(s_n))_{ij} \mathscr{R}_j(s_n) \right] - \frac{\mathbf{i}}{\hat{\eta}(0)} \sum_{i=1}^{6} \left[\frac{1}{|\mathscr{D}(0)|} \sum_{j=1}^{6} Adj(\mathscr{D}(0))_{ij} \mathscr{R}_j(0) \right]. \tag{15}$$

同样也可以得到密度演化方程，不过此处未给出（见补充材料）。为定性理解方程 14 和 15 所预测的时间演化，绘制该情形下的时间特征值谱会很有帮助。图 3(a) 绘出了在 Mathematica [53] 中数值计算得到的 $\mathscr{D}(s)$（方程 12）的根，位于复 s 平面上（注意，纵轴为实部，横轴为虚部）。该图的物理参数选取为表 II 中情形 (c) 对应的参数。如图所示，有两个欠阻尼表面重力（SG）模态（深蓝色圆圈），它们源于无黏、无旋毛细重力波的黏性修正，其色散关系为 $\omega^2 = \left(gk + \frac{\tau k^3}{\rho}\right)\tanh(kH)$。需要指出的是，尽管考虑了表面张力，我们仍将表面模态称为 SG（表面重力）模态，而非毛细重力模态。此外，图 3a 中还有一组可数无穷多个纯阻尼模态（天蓝色圆圈，另见插图），我们称之为涡量模态，因为它们并非源于自由表面的存在。图中还显示了内重力模态（红色圆圈）。方程 14 和 15 中的无限求和反映了图 3(a) 所示这些离散模态的贡献。作为参考，同一图中的面板 (b) 给出了无黏情形下的谱。可以看到，涡量模态不复存在，而内重力模态则变为可数无穷多个，这与 [2] 的无黏预测一致。



(a) 黏性谱　　(b) 无黏谱

图 3：有限深度分层水池的时间特征值谱：面板 (a) 通过数值求解行列式方程 $\mathcal{D}(s) = 0$（见方程 33）得到的黏性离散谱模态。请注意，虚轴s_i 被水平绘制，而非垂直绘制。深蓝色圆圈表示欠阻尼表面重力（SG）模态。红色圆圈表示衰减内重力（IG）模态。天蓝色圆圈（插图中亦如此）表示衰减涡量模态。面板 (b) 中绘出了相应的无黏谱。在无黏极限下，面板 (a) 中的所有涡量模态（天蓝色圆圈）都塌缩到面板 (b) 的原点。在此极限下，IG 模态为可数无穷多个 [2], ，其中仅有部分显示在面板 (b) 中。在面板 (a) 的黏性情形下，我们通过数值方法只能找到四个 IG 模态。绘图参数对应于表 II 中的情形 c。

分层、深水极限：$H \to \infty$

这里我们考察分层黏性液体水池的深水极限。在此极限下，控制方程 7 保持不变，而方程 8a、8b 和 8c 中的自由表面边界条件在此极限下也仍然成立。然而，边界条件 8d、e、f 需要替换为适当的有限性条件，正如 $z \to -\infty$ 所述。补充材料表明，在此极限下 $H \to \infty$，扰动流函数可以写成与方程 14 相同的形式，不过此时 $C_i(s)$ 的表达式与方程 12 中有限水深情形的表达式不同。值得探讨的是，图 4b 中谱的无限水深对应情形具有什么特征。我们注意到，Yih 早先研究过这一问题 [2], ，并指出在无黏、分层的无限深度极限下，如果区域内不存在密度不连续，则不存在离散谱，只有连续谱（参见 [2], 第 496 页第二段的讨论。）

2. 有限深度非分层液层（理查森数 Ri $=0$）：涡量与自由表面扰动

讨论完分层情形的谱后，我们现在转向非分层极限，此时理查森数 Ri 为 $=0$。我们回顾一下，对于非分层情形，方程 7 是一个四阶方程。与前面的 ˆ 节类似，经过拉普拉斯反演后扰动流函数的表达式，即 $\psi(z,t)$，可写为（请注意，此处非分层情形是对四个根求和，而非六个）

$$\hat{\psi}(z,t)=\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\gamma-\mathbf{i}\infty}^{\gamma+\mathbf{i}\infty}\exp(st)ds\sum_{i=1}^{4}\exp(\lambda_i(s)z)\left[\sum_{j=1}^{4}\frac{1}{|\mathscr{D}(s)|}Adj(\mathscr{D}(s))_{ij}\mathscr{R}_j(s)+\mathscr{F}_i(s)I_i(s,z)\right]. \tag{16}$$

与前文类似，对于局部化涡旋初始条件（没有自由表面扰动）$\hat{\omega}(z,t=0)=\Omega\exp(-(z-z_d)^2/d^2)$，其中 $z_d\in(-H,0)$，我们使用柯西留数定理计算式 16 的布 romwich围道积分，从而得到扰动流函数。结果为

$$\hat{\psi}(z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{4}\exp(\lambda_i(s_n)z)\left[\frac{1}{|\mathscr{D}(s_n)|'}\sum_{j=1}^{4}Adj(\mathscr{D}(s_n))_{ij}\mathscr{R}_j(s_n)\right]\exp(s_nt). \tag{17}$$

另一方面，对于自由表面初始扰动 $\hat{\eta}(0)$ 且涡量初始条件为零的情形，之后时间 t 的自由表面可预测为

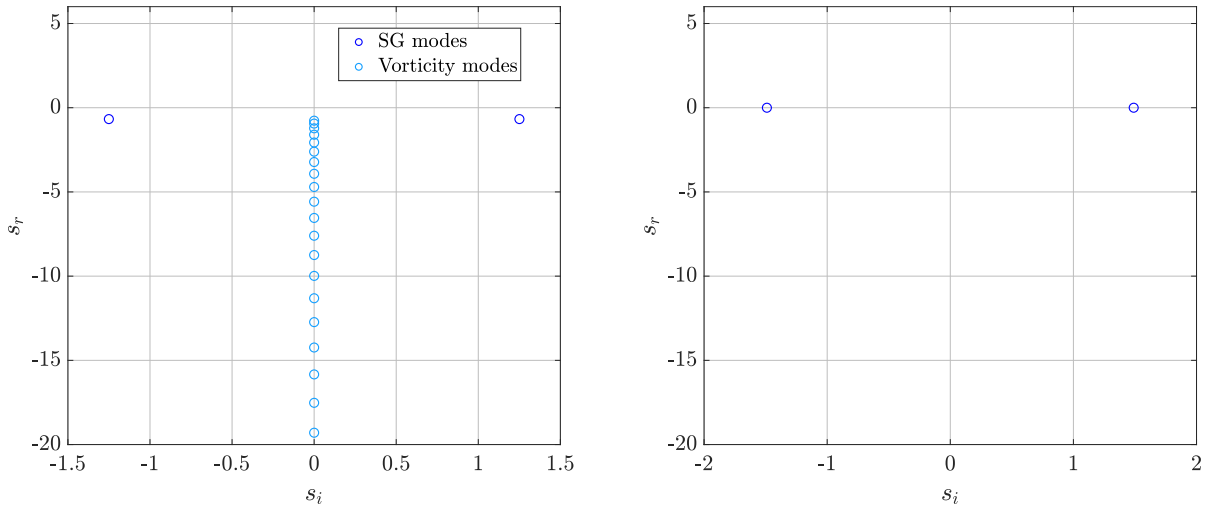
$$\frac{\hat{\eta}(t)}{\hat{\eta}(0)}=1-\frac{\mathbf{i}}{\hat{\eta}(0)}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{4}\left[\frac{1}{s|\mathscr{D}(s_n)|'}Adj(\mathscr{D}(s_n))_{ij}\mathscr{R}_j(s_n)\right]\exp(s_nt)-\frac{\mathbf{i}}{\hat{\eta}(0)}\sum_{i=1}^{4}\left[\frac{1}{|\mathscr{D}(0)|}Adj(\mathscr{D}(0))_{ij}\mathscr{R}_j(0)\right] \tag{18}$$

这里，n 遍历 $\mathscr{D}(s)$ 的所有（简单）根，撇号表示求导。为了理解这些解析预测，再次可以通过色散关系 $\mathscr{D}(s)=0$ 来直观地观察复数 s 平面上的时间谱。图 4a 展示了当前情形（非分层、有限深度水池）的结果。两个深蓝色圆圈表示表面重力模态，与前文一样，它们因黏性阻尼而略微偏离虚轴。浅蓝色圆圈再次表示纯阻尼涡量模态。图 4b 描绘了该谱的无黏极限，其中仅有两个深蓝色圆圈，而涡量模态则如下面所述塌缩至原点。

为了更好地理解涡量模态，我们注意到，在没有背景流且处于非分层、线性化极限的情况下，扰动涡量仅通过扩散输运。这可从控制扰动涡量方程的扩散方程看出：$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla}\times\hat{\boldsymbol{u}})=-\nu\boldsymbol{\nabla}^2(\boldsymbol{\nabla}\times\hat{\boldsymbol{u}})$。如图 4a 中的黏性谱所示，存在可数无穷多个纯衰减的涡量模态，它们在这一扩散过程中发挥着重要作用。然而，当取无黏（$\nu\to0$）极限时，扰动涡量方程变为平凡方程，预言 $\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla}\times\hat{\boldsymbol{u}})=0$。这意味着图 4a 中的这些涡量模态（天蓝色圆圈）在无黏极限下的频率均为零，这也解释了它们为何在图 4b 中消失。从物理上说，在无黏极限下，任意扰动涡量的初始分布都会冻结不变，只有将黏度纳入模型后才会演化。已有研究 [24], 指出，对于涡量初始条件为零、同时存在自由表面变形，即 $\hat{\eta}(t=0)$，且液体黏度较小的情形，这些涡量模态的贡献在数值上相当小。与此相反，我们在此采用局域化的涡量初始扰动，即 $\hat{\omega}(z,t=0)=\Omega\exp\left(-\frac{(z-z_d)^2}{d^2}\right)$，其设置方式将使该扰动在图 4a 的涡量模态上的投影相对较大。下一节将通过数值计算检验这一预言，此外还将考察自由表面初始扰动的情形。

非分层深水极限：$\boldsymbol{H\to\infty}$

与前一节类似，非分层、黏性、深水极限也颇值得关注。先前的研究指出，除了离散谱之外，还存在黏性连续谱 [1, 3] 。值得注意的是，这个连续谱由涡量模态构成；这些模态在有限水深情形中也存在，但在那里属于离散谱。对于仅有自由表面扰动的情形（初始涡量扰动为零），[3] 证明（见 [3] 中的方程33，取 $u_0=0$），连续谱的存在可以通过色散关系的多值性来理解。在有量纲的（拉普拉斯）变量中，点 $s=-\nu k^2$ 实际上是黏性无限深度色散关系的分支点，因此拉普拉斯域中必须有一条支割线，以便进行围道积分。Lamb [1] 早已指出这一点（见{



(a) 黏性谱　　(b) 无黏谱

图 4：通过数值求解 $\mathcal{D}(s) = 0$ 获得的非分层液层离散谱模态，对应表 II 中的情形 (a)。这些符号表示复拉普拉斯域 s 中 $\mathscr{D}(s)$ 的根。(a) 深蓝色圆圈表示的两个模态对应欠阻尼毛细重力模态，天蓝色圆圈表示的则是纯阻尼涡量模态。(b) 在无黏极限下，深蓝色圆圈对应毛细重力色散关系 $\omega^2 = \left(gk + \frac{\tau k^3}{\rho}\right)\tanh(kH)$ 的两个根

在 [1], 第349节中的方程26附近的讨论）：在无限深度极限下，连续谱（CS）模态不会随深度增加而衰减，而是具有正弦振荡特征，并一直持续到 $z \to -\infty$。根据初始涡量分布集中的深度，一般的涡旋初始条件在这些连续谱模态上的投影可能很大。下一节中，我们将比较模拟结果与解析预测，并重新讨论这一点。

III. 数值模拟

本节简要介绍密度分层黏性液层自由表面的数值模拟。如前所述，我们施加小振幅的初始涡量扰动和自由表面扰动，并追踪它们的时空演化。模拟采用开源代码 Basilisk [48] 进行。该代码通过数值方法求解纳维–斯托克斯方程，并已针对广泛的界面流动问题进行了充分的基准测试，例如 [54–58]。Basilisk 用于求解以下方程

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho_{\mathrm{ref}}}\boldsymbol{\nabla}p + \frac{\mu}{\rho_{\mathrm{ref}}}\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{F}_b + \frac{T}{\rho_{\mathrm{ref}}}\kappa\delta_s\mathbf{n} \tag{19}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(f\mathbf{u}) = 0 \tag{20}$$

在方程 19 和 20 中，$\mathbf{u}$、p 和 f 分别表示速度、压力和体积分数字段，$\mathbf{F}_b$ 表示与浮力有关的体力（见下文）。T 为表面张力系数，κ 为界面上某一点处的曲率，$\mathbf{n}$ 为该点处的单位法向量；ρ_{ref} 和 μ 则分别表示计算域中流体的参考密度和动力黏度，其表达式为

$$\rho_{\mathrm{ref}} = f\rho_{\mathrm{ref}}^{(\mathcal{L})} + (1-f)\rho^{(\mathcal{G})} \tag{21}$$

$$\mu = f\mu^{(\mathcal{L})} + (1-f)\mu^{(\mathcal{G})} \tag{22}$$

其中，上标 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{G}$ 分别表示液相和气相中的值。f 在液相中为 1，在气相中为 0，而包含界面的单元满足 $0 < f < 1$（理论中将界面近似为自由表面）。在

表 II：模拟参数（以厘米-克-秒单位制表示）。

Case	Grid	H^*	k	N	τ	$\mu^{(\mathcal{L})}$	$\mu^{(\mathcal{G})}$	$\rho_{ref}^{(\mathcal{L})}$	$\rho^{(\mathcal{G})}$	ν_T	Ri	Re	Pr	Bo	a_0	Ω	z_d	d	初始扰动
(a)	1024×1024	2	2π	-	30	2	0.000185	1	0.001	-	-	0.9943	-	0.8283	0.0079	0	-	-	仅自由表面
(b)	1024×1024	2	2π	-	30	2	0.000185	1	0.001	-	-	0.9943	-	0.8283	0.0079	0.05	-1.3	0.1	自由表面和涡量
(c)	1024×1024	10	$\frac{2\pi}{5}$	3	30	2	0.000185	1	0.001	0.001	0.0073	11.1171	2000	20.7075	0	0.0079	-5	1	仅涡量
(d)	1024×1024	10	$\frac{2\pi}{5}$	10	30	2	0.000185	1	0.001	0.001	0.0811	11.1171	2000	20.7075	0	0.0079	-5	1	仅涡量

表 III：直接数值模拟中的边界条件。

Wall	$\mathbf{u}$		p	f	b
	u_x	u_z			
Top	N	D	N	N	$-g$
底部	D	D	N	N	$-g - N^2 H$
Left	D	N	N	N	N
右	D	N	N	N	N

狄利克雷：狄利克雷　　诺伊曼：诺伊曼

为了将液体中的密度分层纳入考虑，在动量方程 19 中加入体力项 F_b，并采用布辛涅斯克近似，即

$$\mathbf{F}_b = b\hat{\mathbf{e}}_z = \left[f\left(-\frac{\rho}{\rho_{\mathrm{ref}}} \right) g + (1-f)(-g) \right] \hat{\mathbf{e}}_z. \tag{23}$$

密度场 ρ 在每个时间步通过数值求解示踪物扩散方程进行更新，遵循 [59],

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \mathbf{u}) = \nu_T \nabla^2 \rho \tag{24}$$

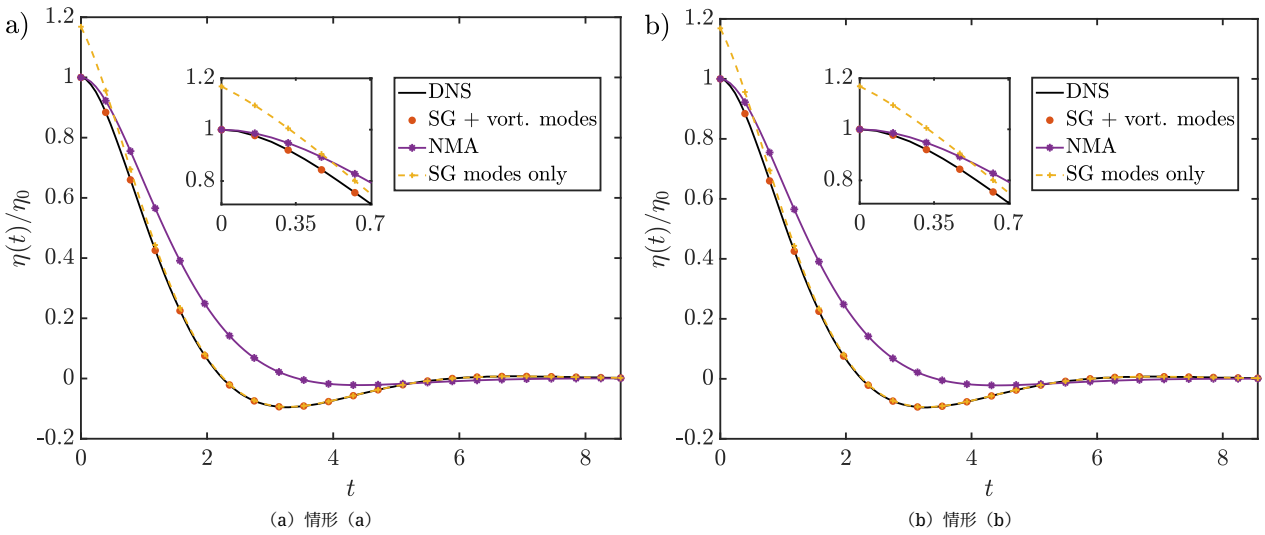
其中，ν_T 是流体的热扩散率。由于代码采用流体体积法算法的单流体形式，因此必然同时求解气相和液相。不过，在解析计算中，我们忽略气相。为便于与理论比较，在数值模拟中，我们保持液相与气相之间较高的密度比（即 $\rho^{(\mathcal{L})}{}_{\text{参考}} / \rho^{(\mathcal{G})} = 1000$）。计算域四面壁上施加的场变量边界条件详见表 II。

IV. 结果与理论比较

本节将第 2 节的解析结果与直接数值模拟（DNS）的结果进行比较。在第一小节中，我们展示界面受到扰动的非分层液层的结果，分别讨论有无初始涡量的情况（分别为表 I 中的情形 a 和 b）。在下一小节中，我们讨论分层液层（界面未受扰动）的模拟结果，其中初始扰动涡量对应两个不同的布伦特–魏萨拉频率值（分别参见表 I 中的情形 c 和 d）。表 2 列出了 DNS 计算中不同参数所采用的边界条件。表 II 中的热力学参数和模拟参数经过选择，使密度比与气水体系相当。这样做对于使模拟中的空气动力效应可以忽略至关重要，从而能够将结果与无应力界面（自由表面）的解析预测进行比较。不过，液体的动力黏度特意选得显著高于水（即我们选取 $\mu^{\mathcal{L}} = 2$ dyn-s/cm^2，而水在相同单位下为 10^{-3}）。这部分是因为我们在 [24] 中观察到，提高液体黏度会增加涡量模态的数值贡献。波长 $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ 选取得较小，情形 (a)、(b) 分别为 1 cm 和 5 cm，情形 (c)、(d) 亦分别为 1 cm 和 5 cm；表面张力则选得低于气水体系。所有模拟中的重力均设为 $g = 981\,\mathrm{cm/s}^2$。对于所选参数，毛细长度尺度为 ≈ 1.7 mm。

讨论

图 5a 和图 5b 展示了表 II 中情形 (a) 和 (b) 的自由表面扰动随时间的演变（以其初始峰值归一化）。两项模拟均针对无分层液池，其自由表面呈波数为 $k = 2\pi$ 的傅里叶模态变形（即波长为 1 cm）。不过，这两种情形的区别在于液池主体中是否存在初始扰动涡量：情形 (a) 中不存在，情形 (b) 中存在。这两幅图最显著的一点是



（a）情形（a）　　（b）情形（b）

图 5：情形（a）和（b）中自由液面振幅随时间的变化，分别如图所示。插图为初始时间处曲线的放大图。横轴为无量纲时间（$t^*\sqrt{g^*k^*}$），纵轴为无量纲振幅。

尽管涡量方面的初始条件不同，但两者看起来无法区分。我们将在本节稍后讨论这一重要问题。

图 5a 和图 5b 中黄色曲线（“仅 SG 模态”）表示仅由两个 SG 模态贡献的自由液面演化（即图 4a 中所示的深蓝色圆点）。两幅图中的一个共同现象是，这一近似（“仅 SG 模态”）无法满足自由表面的初始条件，即 $a(0) = a_0$ 和 $\dot{a}(0) = 0$；请见它们与 $t = 0$ 处直接数值模拟信号之间的不匹配。其原因如下：自由液面位移的贡献不仅来自两个 SG 模态——根据定义，它们是“表面模态”——还来自涡量模态。无论是在情形（a）中施加零涡量初始条件，还是在情形（b）中施加初始的局域涡量扰动，这些涡量模态在两种情形下都会被激发。因此，为满足条件 $a(0) = a_0$ 和 $\dot{a}(0) = 0$，必须计入这些涡量模态的贡献（以及 SG 模态的贡献）。这一点在图 5a 和图 5b 中表现得十分清楚：标记为“SG + 涡量模态”的曲线（即同时考虑两种贡献）满足两个初始条件，并且与直接数值模拟信号高度一致。然而，在稍大的时间处，涡量模态的贡献变得微不足道，仅由 SG 模态产生的表面响应便与直接数值模拟响应相同。

正如涡量模态会影响自由液面位移一样，图 4a 中的两个 SG 模态也伴有涡量。该涡量场沿水池深度方向（负 z 方向）呈指数衰减。该涡量场的穿透深度可由 $\left(k^2 + \tilde{s}/\nu^{(\mathcal{L})}\right)^{-1/2}$ 的实部估算（考虑有量纲变量时，$s = \frac{\tilde{s}}{\sqrt{gk}}$）；对于表 II 中情形 (a) 和 (b) 对应的参数，该值约为 0.10 cm。请注意，计算时我们将 s 取为图 4a 中两个共轭复数对（SG 模态）之一。显然，该涡量穿透深度远小于自由表面处傅里叶模态的波长；本情形下，波长为 1 cm。因此，直观上可以看出，仅将两个 SG 模态线性叠加，既无法产生零涡量初始场（情形 (a)），也无法满足前文讨论的自由表面初始条件。这一点在图 6a 中得到了验证：图中绘出了 $x = 3.2$ 处、 $t = 0.079$ 时刻的涡量分布，并以深度坐标 z 为自变量。可以看到，图中标注为“仅涡量模态”的曲线无法准确描述直接数值模拟得到的涡量分布（黑色曲线）。顺带一提，仅使用涡量模态（或等价地，仅使用 SG 模态）无法满足初始条件，这与我们此前在 [25] 中研究中空圆柱形细丝上的方位扰动时得到的结果一致；当涡量初始条件为零时，我们也报告了类似结论。

对于表 II 中的情形（b），所选的高斯形初始涡量扰动以 $z_d = 1.3$ cm 为中心，厚度为 0.1 cm。在此深度（$z_d = 1.3$ cm）处，SG 模态的涡量实际上为零（见图 6b 中的灰色曲线），因此，图 4a 中可数无穷多个涡量模态的贡献对于表达这一初始涡量斑块至关重要。图 6b 验证了这一点：我们注意到，直接数值模拟信号在 $z \approx -8$ 处出现了由初始扰动引起的小“隆起”。可以看到，SG 模态的涡量为零

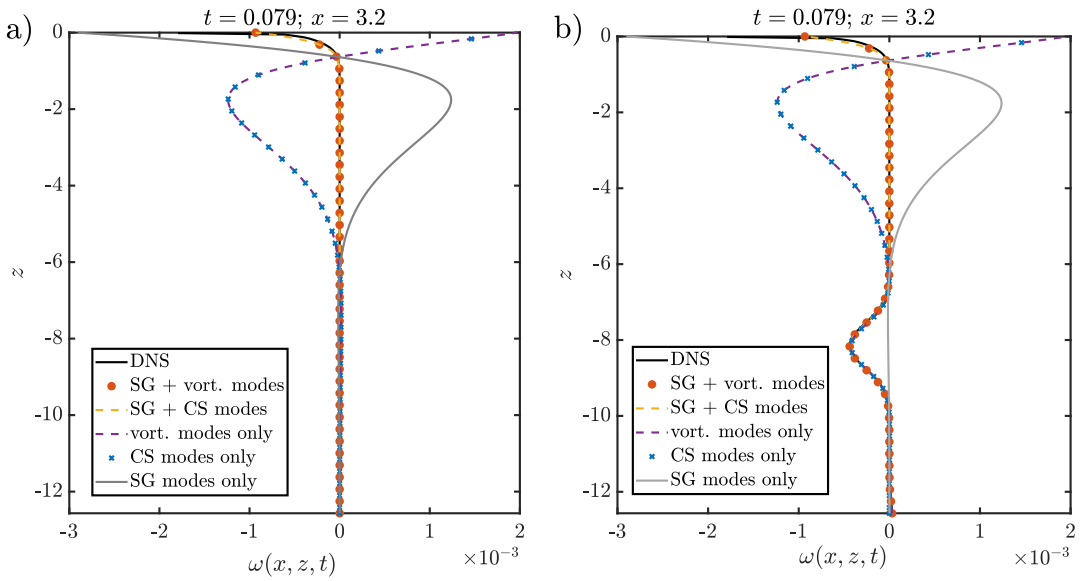
在此深度处，而涡量模态的贡献则不为零。有趣的是，尽管图中标记为“仅涡量模态”的曲线对直接数值模拟中大深度处的扰动涡量场给出了很好的近似，但在靠近自由表面 $z = 0$ 处，这种近似会变得相当不准确。在此处的早期时间 $t > 0$，SG 模态和涡量模态的贡献几乎（但并非完全）相互抵消，从而在自由表面附近形成一个（边界）涡量层（见黑色的直接数值模拟信号）。总的结论是，要使自由表面附近的直接数值模拟涡量场与结果吻合良好，需要同时考虑这两组模态的贡献。当我们回到表 II 中对应于零涡量初始条件的情形（a）时，这些结论仍然成立。观察图 6a 中的直接数值模拟信号可知，在这种情形下，扰动涡量场仅位于自由表面附近（液体主体中为零）。要准确表达自由表面附近的这一涡量场，需要同时考虑涡量模态和 SG 模态的贡献，这与 [3] 的观察一致。

我们前面曾提到，[1, 3] 在非分层无限深度极限下，谱还包含一个额外的连续部分，而这些连续谱（CS）模态沿 z 方向呈振荡变化。如下文所述，在有限水深情形中，离散谱模态的一个子集也可能表现出这种行为。在有量纲变量下，控制扰动涡量场的扩散方程存在如下形式的解：$\exp\left[z\left(k^2+\tilde{s}/\nu^{(\mathcal{L})}\right)^{1/2}\right]$，其中 $\mathrm{Re}\left(k^2+\tilde{s}/\nu^{(\mathcal{L})}\right)^{1/2} > 0$，$z < 0$。对于图 4a 中可数无穷多个涡量模态，若其 $\tilde{s}$ 为实数且为负，并且还满足 $|\tilde{s}| >> \nu^{(\mathcal{L})}k^2$，则扩散方程的这类解会成为关于 z 的振荡函数，其行为为 $\sim\exp\left(z\sqrt{\tilde{s}/\nu^{(\mathcal{L})}}\right)$，其中 $\tilde{s}$ 为实数且为负。作为比较，图 6a 和 6b 还绘出了无限深度情形中连续谱（由支割产生的）的贡献。我们观察到，这些贡献与有限水深情形中涡量模态的贡献无法区分。请注意，表 II 中情形 (a) 和 (b) 的无量纲深度 H 虽为有限值，但数值较大。

图 5a 和 5b 中的缩写 NMA 表示我们所称的正规模近似（方程 3.3，前文在 [24] 中也使用过）。这一近似基于这样一种观察：谱中只有两个 SG 模态。利用这一近似，可以满足自由表面的初始条件 $a(0) = a_0$ 和 $\dot{a}(0) = 0$，从而得到自由表面演化的预测表达式，即 $a_{(t)} = \frac{1}{s_1-s_2}(s_1 \exp s_2 t - s_2 \exp s_1 t)$，其中 s_1, s_2 是图 4a 中一对互为复共轭的 SG 模态。需要指出的是，按构造，NMA 满足自由表面的初始条件；但在中间时刻，它与图 5a 和 5b 中的直接数值模拟信号存在较大偏差。这些图中标注为“SG + 涡量模态”的曲线表示完整初值问题的解，并计入了两组模态的贡献。不出所料，我们发现该解与直接数值模拟吻合极佳。回到图 5a 和 5b 完全相同这一观察，我们指出，这是因为涡量扰动放置得足够深。因此，深处的这一扰动涡量（仅用涡量模态的线性叠加即可很好地描述）几乎不受自由表面产生的瞬态涡量层演化影响，呈纯扩散演化。这种行为与 [4] 中的观察形成对比：该文通过解析方法研究了浸没涡丝（沿 y 方向延伸）产生的表面波，初始时自由表面平坦。与本研究不同，本研究沿 x 方向激发了一个波数为 k 的单一傅里叶模态（表 II 中的情形（a）和情形（b）均如此）；而 [4] 的初始条件则在 $t = 0$ 处激发了一个波数 k 连续谱。随后观察到，水池底部存在涡丝会引发自由表面波（见 [4] 中的图 1 和图 2 ）。该研究中涡丝的浸没深度分别为 0.1 cm 和 0.01 cm，二者都远小于其系统中激发的最慢毛细重力表面波的波长。相比之下，本研究中情形（b）的高斯斑块浸没深度（1.3 cm）大于 $t = 0$ 处激发的表面波波长。

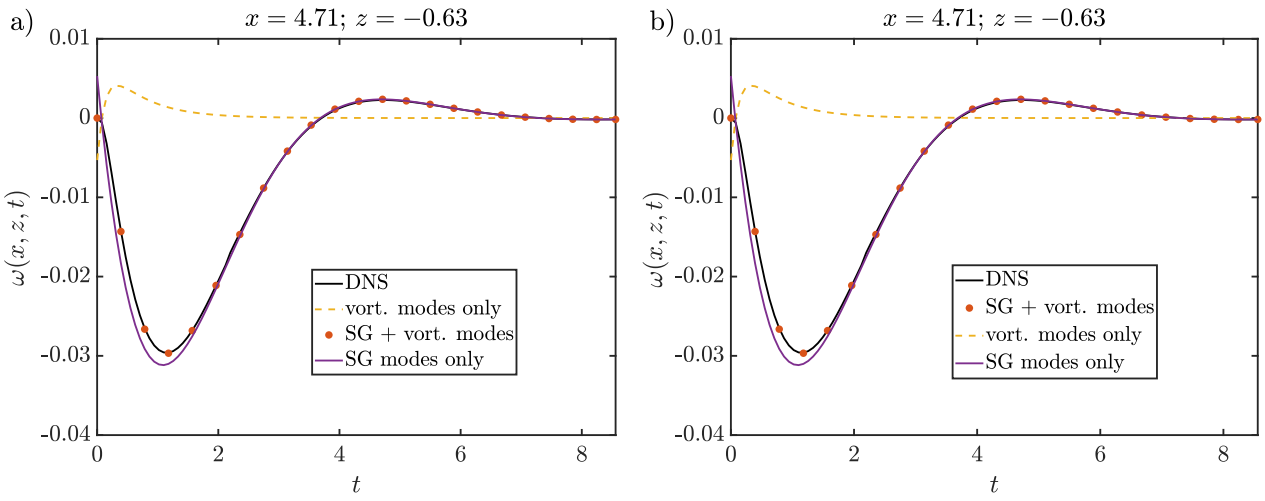
图7a和图7b分别展示了表 II 中情形（a）和情形（b）下，特定空间位置 $x(= 4.71)$ 和 $z(= -0.63)$ 处的涡量随时间的变化。请注意，该位置的垂直坐标非常接近自由表面，因此我们预期情形（a）和情形（b）中的涡量场看起来相似；从这两幅图中很容易验证这一点。再次考虑 SG 模态的贡献，会导致初始时刻的结果略有误差。当深度选在离自由表面较远处时，如图8a和图8b所示，扰动涡量的时间演化呈现出明显差异。对于图8a所述的情形（a），在 $z = -8.17$ 处，扰动涡量场在所有时刻实际上都为零；只有将 SG 模态（黄色）和涡量模态（紫色）的贡献相互抵消，才能在解析上得到这一结果。相比之下，对于图8b中的情形（b），该深度处的扰动涡量场明显不为零（这是初始高斯涡量扰动所致）。正如预期的那样，这一涡量随时间的变化完全由涡量模态描述，SG 模态没有任何贡献。

图9的面板(a)–(d)和图10的面板(a)–(d)分别展示了表 II 中情形（a）和情形（b）在早期时间 $t(= 0.079)$ 的扰动涡量及流场的整体图像。图中，横轴跨越一个波长，纵轴跨越两个波长（按无量纲意义计）。图9的面板(a)和(b)表明，DNS结果与初值问题预测吻合良好。同一图中的面板(c)和(d)分别展示了由 SG 模态和涡量模态贡献形成的流动结构，



(a) 情形（a） (b) 情形（b）

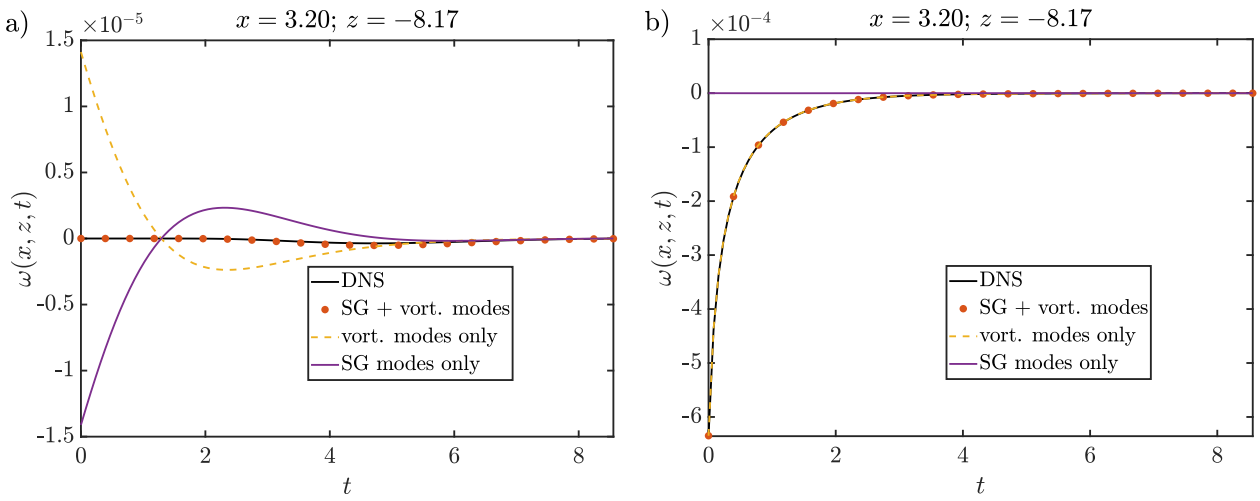
图 6：分别针对情形（a）和情形（b），绘出特定时间 t（$= 0.079$）和水平坐标 x（$= 3.2$）处的涡量随垂直坐标变化的曲线。横轴为无量纲涡量（$\omega^*/\sqrt{g^*k^*}$），纵轴为无量纲垂直坐标（z^*k^*）。



(a) 情形（a） (b) 情形（b）

图 7：分别针对情形（a）和情形（b），绘出空间中靠近界面的位置（$x = 4.71$，$z = -0.63$）处的涡量随时间变化的曲线。纵轴为无量纲涡量（$\omega^*/\sqrt{g^*k^*}$），横轴为无量纲时间（$t^*\sqrt{g^*k^*}$）。

二者几乎相互抵消，从而形成上方各面板所示的结果。图10的面板(a)–(d)展示了表 II 中情形（b），呈现出类似的行为。请注意，与图9不同，此图中的面板(c)和(d)明显不对称，而且涡量模态的贡献几乎完全还原了初始扰动涡量。现在转向表 II 中的情形（c），它代表仅具有涡量初始扰动的分层情形（布伦特–魏萨拉频率 $N = 3\mathrm{s}^{-1}$）。图11展示了特定位置 $x = 2\pi, z = -2\pi$ 处的涡量。从图中可以看出，初始涡量扰动在涡量模态和内重力模态（IG）上都有投影。请注意，在此情形下，我们不施加任何自由表面扰动，因此 SG 模态不会被激发。可以看到，该位置处的涡量会改变符号，并在较长时间后趋于零。为了获得



(a) 情形 (a)　　(b) 情形 (a)

图 8：分别针对情形 (a) 和 (b)，绘出了水池深处空间位置 ($x = 4.71, z = -8.17$) 处的涡量随时间的变化。这里，纵轴为无量纲涡量 ($\omega^*/\sqrt{g^*k^*}$)，横轴为无量纲时间 ($t^*\sqrt{g^*k^*}$)。

对于直接数值模拟中观察到的涡量信号，发现 SG 模态和内重力模态的贡献同样重要。图 11b 和图 11c 分别展示了 $t = 0$ 和 $t = 3.91$ 时的扰动涡量场。我们再次观察到与图 11a 相同的定性特征，即为了准确匹配直接数值模拟得到的涡量分布，必须同时考虑内重力模态和涡量模态的贡献。最后，图 12 展示了分层增强（情形 (d) 与情形（c）相比）对涡量扰动随时间演化的影响。由于情形 (d) 中的分层增强，其局部涡量值呈现出显著的振荡响应。

V. 结论

本研究求解了黏性液体分层液池的线性化初值问题（IVP），对应于自由表面、涡量和密度初始条件。我们仔细研究了不同极限情形下的时间谱（黏性与无黏、分层与非分层、有限深度与无限深度），并将其与解析解所预测的初值问题响应联系起来。我们使用开源代码 Basilisk [48], 将部分解析预测与直接数值模拟进行了比较，所有情形均取得了极好的一致性。解析解使我们能够分别考察谱的不同部分及其各自的贡献。在非分层、有限深度极限下，我们发现，可数无穷多个涡量模态对于满足初始条件以及描述施加于一定深度处的扰动涡量都至关重要；在该深度处，表面重力模态（SG）的贡献实际上为零。然而，当将这一扰动涡量场（高斯）置于足够深的位置时，它的演化几乎独立于自由表面产生的瞬态涡量场。因此，我们发现，扰动涡量场若在较大深度处引入，其表面响应可以忽略不计，但仍需借助涡量模态来描述其时间演化。相比之下，自由表面的涡量几乎同等地由表面重力模态（SG）和涡量模态贡献，忽略其中任何一类都会导致较大误差。在无限深度极限下，连续谱模态对涡量场时间演化的贡献，在数值上与有限但较大深度情形中的可数无穷多个涡量模态的贡献无法区分。对于没有初始表面扰动、但具有初始高斯形局域涡量扰动斑块的黏性分层液池，我们发现，该斑块的时间演化几乎同等地由涡量模态和内重力模态贡献。通过将各情形下的时间谱与初值问题响应仔细比较，本研究拓展了关于非分层液池的先前结果（ [3, 4] ），以及关于分层液池黏性情形的先前结果（ [2]）。我们将多项解析预测与全非线性数值模拟进行了检验，所有情形均取得了极好的一致性。本研究将在液层热毛细失稳研究中具有多方面应用。

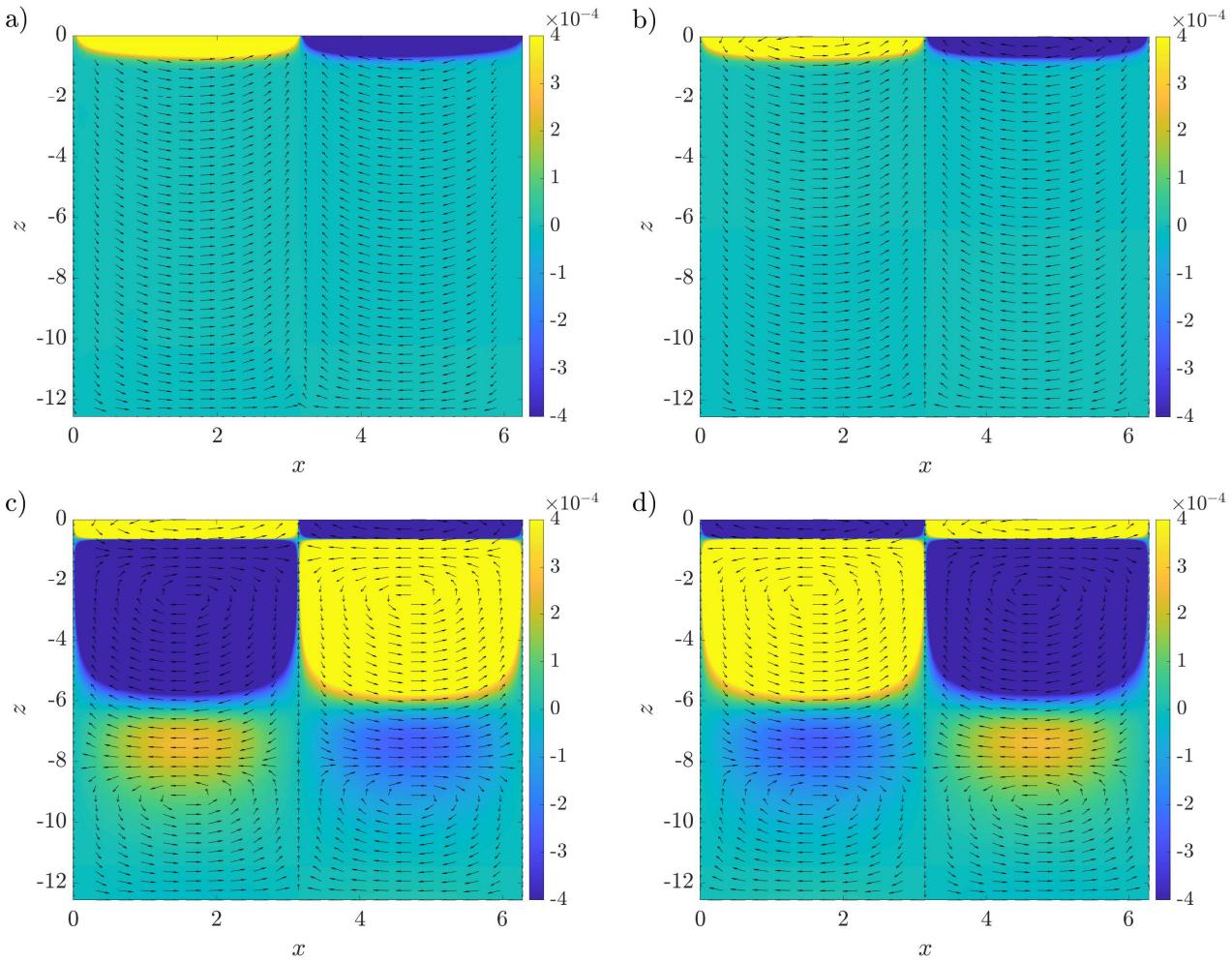


图 9：情形 (a) 在时间 $t = 0.079$ 时的涡量等值线：a) 直接数值模拟；b) 总初值问题（SG $+$ 黏性模态）；c) 仅含 SG 模态的初值问题；d) 仅含涡量模态的初值问题。不同位置的箭头表示这些位置处的瞬时速度。水平轴和垂直轴分别为无量纲 x $(= x^*k^*)$ 坐标和 $z(= z^*k^*)$ 坐标

致谢：

我们感谢 Palas Kumar Farsoiya博士在本研究早期阶段参与讨论。谨此致谢印度科学与工程研究委员会（印度政府）提供的资助，项目编号为 #MTR/2019/001240、#MTR/2021/000706 和 #SPR/2021/000536。SB 在印度理工学院孟买分校任职期间获得了总理研究奖学金的支持，谨此致谢。我们感谢印度理工学院马德拉斯分校在卓越学院框架下支持“地球物理流动实验室”研究计划。

[1] H. Lamb, *Hydrodynamics*（剑桥大学出版社，1932年）。[2] C.-S. Yih, 《分层流体中的重力波》，《流体力学杂志》8, 481（1960）。[3] A. Prosperetti, 《黏性效应对小振幅表面波的影响》，《流体物理》（1958—1988）19，195（1976）。[4] A. Prosperetti 和 L. Cortelezzi, 《浸没涡量分布在黏性液体表面产生的小振幅波》，《流体物理》25，2188（1982）。[5] A. Cauchy, 《有重流体表面波传播理论（深度无限）：关于倒数函数的第十九篇札记》，法国科学院院士呈交的论文集，奉命印行。数学与物理科学 1（1827）。

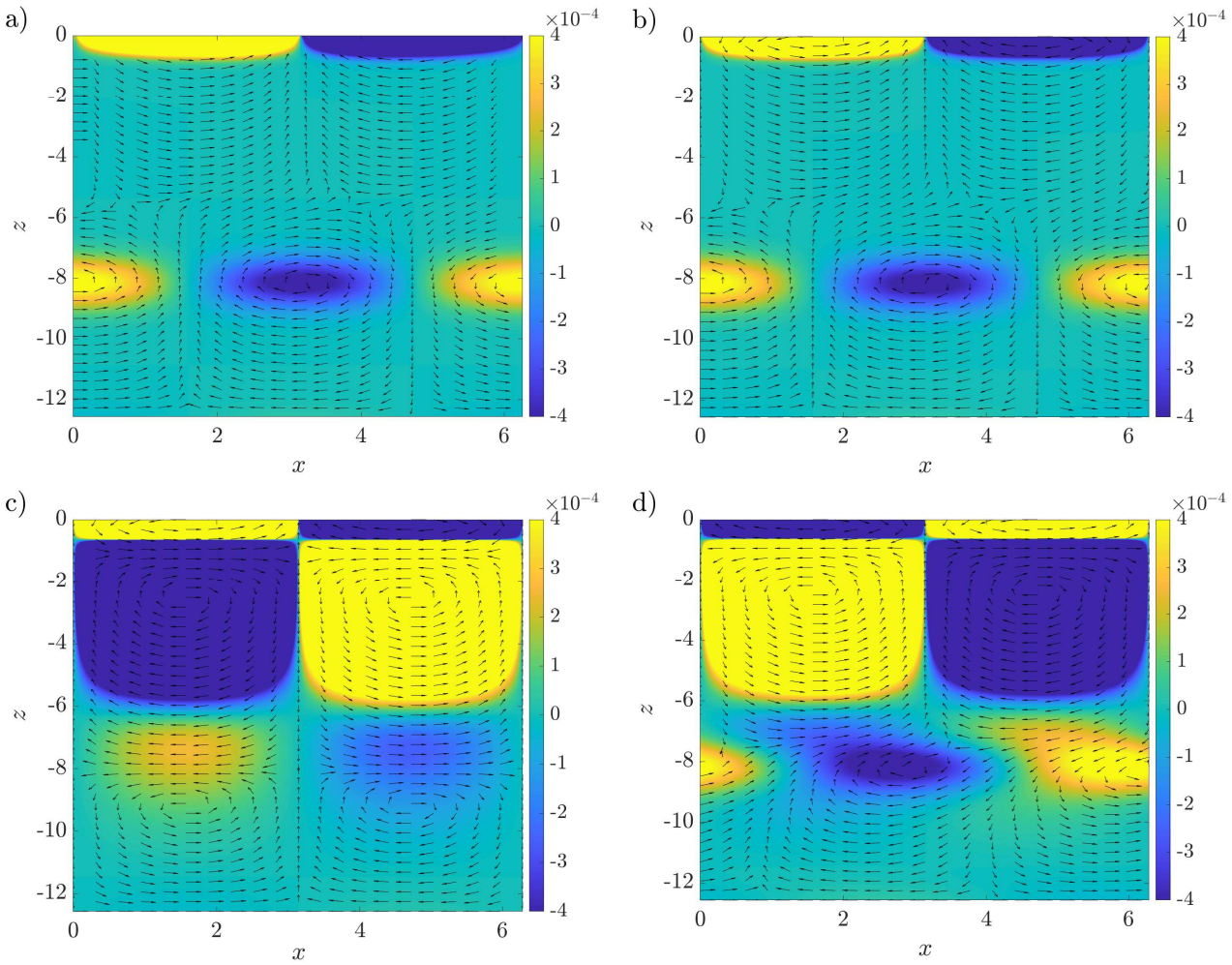
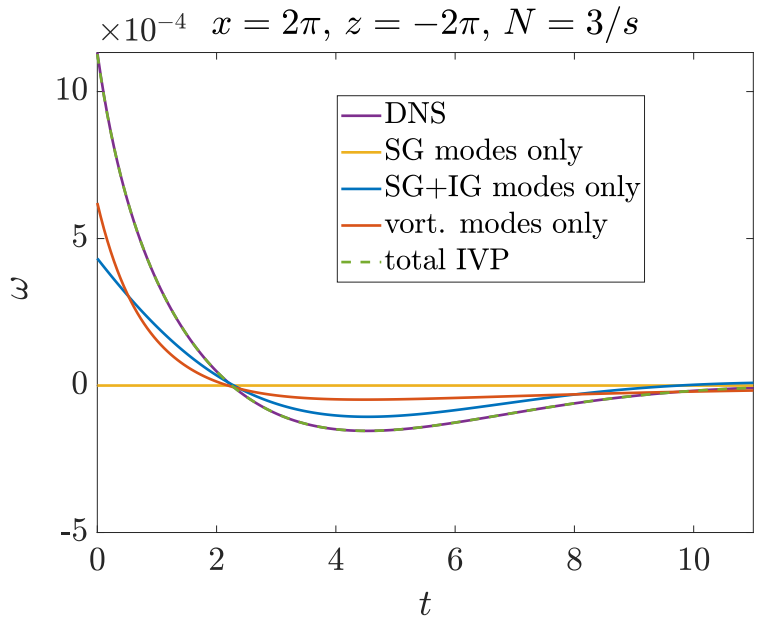
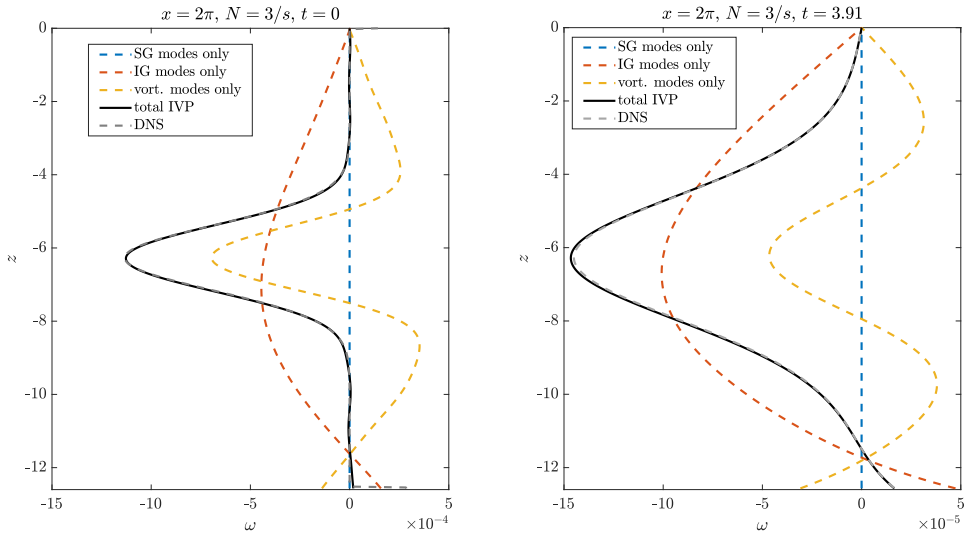


图10：情形（b）在时间 $t = 0.079$ 时的涡量等值线：a）直接数值模拟；b）完整初值问题（SG ＋黏性模态）；c）初值问题（仅 SG 模态）；d）初值问题（仅涡量模态）。水平轴和垂直轴的无量纲化方式与图9相同。

[6] S. Poisson, 《关于波的理论回忆录》, 《法国皇家科学院回忆录》（第2辑）1，16（1818）。[7] S. ˚A. Ellingsen, 《剪切流上的初始表面扰动：一个有所变化的柯西–泊松问题》, 《流体物理》26，082104（2014）。[8] O. Shardt、H. Masoud 和 H. A. Stone, 《具有惯性的振荡马兰戈尼流》, 《流体力学杂志》803，94（2016）。[9] L. Shen、F. Denner、N. Morgan、B. van Wachem 和 D. Dini, 《马兰戈尼效应对黏性流体中小振幅毛细波的影响》, 《物理评论 E》96，053110（2017）。[10] L. Shen、F. Denner、N. Morgan、B. van Wachem 和 D. Dini, 《具有表面黏度的毛细波》, 《流体力学杂志》847，644（2018）。[11] P. A. Tyvand、C. Mulstad 和 M. Bestehorn, 《非线性脉冲柯西–泊松问题：第1部分，欧拉描述》, 《流体力学杂志》906（2021）。[12] P. A. Tyvand、C. Mulstad 和 M. Bestehorn, 《非线性脉冲柯西–泊松问题：第2部分，拉格朗日描述》, 《流体力学杂志》906（2021）。[13] L. Debnath, *Nonlinear Water Waves*（学术出版社，1994）。[14] A. D. D. Craik, 《流体力学年度评论》36，1（2004）。[15] S. Wolfram, Wolfram Research, Inc., Mathematica, 第8版，23（2013）。[16] R. S. Johnson, *A modern introduction to the mathematical theory of water waves*，19（剑桥大学出版社，1997）。[17] A. B. Basset, *A treatise on hydrodynamics: with numerous examples*，第2卷（Deighton, Bell and Company, 1888）。[18] W. Harrison, 《黏度对叠置流体振荡的影响》, 《伦敦数学会会刊》2，396（1908）。[19] J. W. Miles, 《黏性液体的柯西–泊松问题》, 《流体力学杂志》34，359（1968）。[20] A. Prosperetti, 《两种叠置黏性流体的运动》, 《流体物理》（1958–1988）24，1217（1981）。



(a) 涡量 $\omega(x, z, t)$



(b) $t = 0$ (c) $t = 3.91$

图11：情形 II 表中情形（c）在 $t = 0$ 处的涡量图，比较直接数值模拟与解析预测：(a) 涡量随时间的变化，(b) 和 (c) 分别为 $t = 0$ 和 $t = 3.91$处涡量随 z 的变化。

[21] L. Cortelezzi 和 A. Prosperetti，《黏性液体层表面上的小振幅波》，《应用数学季刊》38，375（1981）。[22] A. Prosperetti，《不互溶液体中的黏性液滴振荡的正规模态分析》，《力学杂志》19，149（1980）。S. Berger，《液体射流的初值稳定性分析》，《应用数学学会数学杂志》48，973（1988）。[23] P. K. Farsoiya、Y. Mayya 和 R. Dasgupta，《轴对称黏性界面振荡：理论与模拟》，《流体力学杂志》826，797（2017）。[24] P. K. Farsoiya、A. Roy 和 R. Dasgupta，《中空细丝上的方位毛细波——离散谱与连续谱》，《流体力学杂志》883（2020）。[25] J. Beyer 和 R. Friedrich，《法拉第不稳定性：黏性流体的线性分析》，《物理评论 E》51，1162（1995）。[26] E. Cerda 和 E. Tirapegui，《黏性流体中的法拉第不稳定性》，《物理评论快报》78，859（1997）。[27] E. Cerda 和 E. Tirapegui，《黏性流体中的法拉第不稳定性》，《流体力学杂志》368，195（1998）。

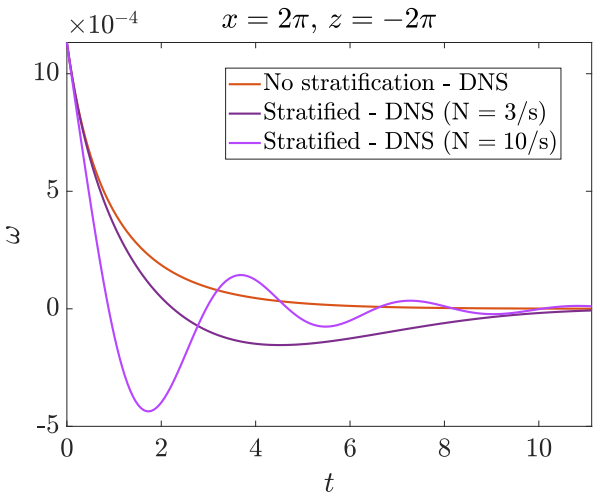


图 12：直接数值模拟中对应表 II 的情形 (c) 和 (d) 的涡量随时间变化。

[29] S. Patankar、S. Basak 和 R. Dasgupta，《液柱上瑞利–普拉托模态的动态稳定化》，《流体力学杂志》946，A2（2022）。[30] T. Y.-T. Wu 和 C. Mei，《分层海洋中的二维重力波》，《流体物理》10，482（1967年）。[31] N. Thomas 和 T. Stevenson，《黏性内波的相似解》，《流体力学杂志》54，495（1972年）。[32] L. Debnath 和 U. B. Guha，《无黏分层液体中的柯西–泊松问题》，《应用数学快报》2，337（1989）。[33] D. Rollins 和 L. Debnath，《无黏旋转分层液体中的柯西–泊松波》，《国际非线性力学杂志》27，405（1992）。[34] B. Voisin，《均匀分层流体中的内波生成。第一部分：格林函数与点源》，《流体力学杂志》231，439（1991）。[35] S. T. Simakov，《内重力波的初边值问题》，《流体力学杂志》248，55（1993）。[36] B. Voisin，《均匀分层流体中的内波生成。第二部分：移动点源》，《流体力学杂志》261，333（1994）。[37] J. Lighthill，《内波及相关初值问题》，《大气与海洋动力学》23，3（1996）。[38] P. Ghosh、U. Basu 和 B. Mandal，《有限深度分层流体中惯性表面初始扰动引起的波》，《国际数学与数学科学杂志》24，265（2000）。[39] K. F. Gurski、R. Koll´ar 和 R. Pego，《稳定分层流体中内波的缓慢阻尼》，《伦敦皇家学会会刊》。A辑：数学、物理与工程科学 460，977（2004）。[40] M. Antuono 和 A. Colagrossi，《黏性重力波的阻尼》，《波动》50，197（2013）。[41] F. Denner，《黏性流体中小振幅毛细波的频率色散》，《物理评论 E》94，023110（2016）。[42] M. Vartdal 和 A. N. Osnes，《多层叠置黏性流体的线性运动》，《物理评论 E》99，043104（2019）。[43] B. R. Sutherland，*Internal gravity waves*（剑桥大学出版社，2010）。[44] E. Lucassen-Reynders 和 J. Lucassen，《毛细波的性质》，《胶体与界面科学进展》2，347（1970）。[45] J. Lucassen，《纵向毛细波。第一部分：理论》，《法拉第学会会刊》64，2221（1968）。[46] B. Felderhof，《两种流体间带有吸附层的界面动力学》，《流体物理》18，112103（2006）。[47] A. Y. Rednikov、P. Colinet、M. G. Velarde 和 J. C. Legros，《从上方加热的水平液层中的瑞利–马兰戈尼振荡不稳定性：内波与表面扩张波的耦合和模态混合》，《流体力学杂志》405，57（2000）。[48] S. Popinet，Basilisk，http://basilisk.fr（2014）。[49] G. K. Vallis，*Atmospheric and oceanic fluid dynamics*（剑桥大学出版社，2017年）。[50] M. Foster 和 P. Saffman，《受限分层流体中横向运动物体的阻力》，《流体力学杂志》43，407（1970）。[51] S. Chandrasekhar，《流体动力学与流体磁动力稳定性》，Dover，纽约，1981。[52] K. F. Riley、M. P. Hobson 和 S. J. Bence，《物理学与工程学数学方法》第三版平装套装，《物理学与工程学数学方法》第三版，1362（2006）。[53] W. R. Inc.，Mathematica，13.2 版，伊利诺伊州尚佩恩，2022。[54] P. K. Farsoiya、Q. Magdelaine、A. Antkowiak、S. Popinet 和 L. Deike，《静止与湍流中的气泡介导气体传递和溶解的直接数值模拟》，《流体力学杂志》954，A29（2023）。[55] V. Sanjay、U. Sen、P. Kant 和 D. Lohse，《泰勒–卡利克回缩及周围环境的影响》，《流体力学杂志》948，A14（2022）。

[56] L. Kayal、S. Basak 和 R. Dasgupta，《非线性毛细波中的凹坑、射流与自相似性》，《流体力学杂志》951，A26（2022）。
[57] M. Singh、P. K. Farsoiya 和 R. Dasgupta，《用于比较两种界面求解器的测试案例》，《国际多相流》115，75（2019）。
[58] S. Basak、P. K. Farsoiya 和 R. Dasgupta，《有限振幅自由毛细重力波中的射流现象》，《流体力学杂志》909，A3（2021）。[59] Antoon van Hooft，J.，《分层流体中的内波阻尼》，http://basilisk.fr/sandbox/Antoonvh/internalwacesMGdamping.c（2018）。

arXiv:2304.00769v1 [physics.flu-dyn] 3 Apr 2023

黏性液层上的表面重力波和内重力波：初值问题

Patibandla B. L. V. Ramana[1] 和 Anubhab Roy[1]†和 Saswata Basak[2] 和 Ratul Dasgupta[2]‡

[1]印度金奈印度理工学院应用力学系，金奈 600036，印度[2]印度孟买印度理工学院化学工程系，波瓦伊，孟买 400 076，印度

（收到日期 xx；修订日期 xx；接受日期 xx）

1. 分层水层上的扰动

1.1. 控制方程：布辛涅斯克近似

考虑一个深度为 H 的水池，其中盛有静止的密度分层流体（均匀分层），顶部为自由表面，底部由壁面围住。假设密度是温度 T 的（线性）函数（且不依赖盐度和压力等其他热力学变量），即可得到描述水池内速度、压力和密度变化的布辛涅斯克方程组，即（？）

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\tilde{\mathbf{u}}^*=0 \tag{1.1}$$

$$\frac{D\tilde{\mathbf{u}}^*}{Dt^*}=-\frac{1}{\rho_{\mathrm{ref}}}\boldsymbol{\nabla}\tilde{p}^*+\frac{\tilde{\rho}^*}{\rho_{\mathrm{ref}}}\mathbf{g}+\frac{\mu}{\rho_{\mathrm{ref}}}\nabla^2\tilde{\mathbf{u}}^* \tag{1.2}$$

$$\frac{D\tilde{\rho}^*}{Dt^*}=\kappa\nabla^2\tilde{\rho}^* \tag{1.3}$$

其中 $\tilde{\mathbf{u}}^*=(\tilde{u}^*,\tilde{w}^*)$，$\mathbf{g}=(0,-g)$，$\rho_{\mathrm{ref}}$ 是参考温度 T_{ref} 下的参考密度，κ 是热扩散率。我们将研究其稳定性的基态由静止的黏性流体构成，其密度分布为 $\rho_b^*(z)$，黏度均匀，为 μ；压力场满足静水压平衡 $\frac{dp_b^*}{dz^*}=-\rho_b^*(z^*)g$。请注意，所有基态量均以下标“$b$”标示，而有量纲的量带有星号。方程 1.1–1.3 还需满足自由表面（$z^*=\eta^*$）和壁面（$z^*=-H^*$）处的边界条件。这些条件为

$$\frac{D\eta^*}{Dt^*}=\left(\tilde{\mathbf{u}}^*\cdot\mathbf{e}_z\right)_{z^*=\eta^*} \tag{1.4}$$

$$\left(\mathbf{t}\cdot\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^*\cdot\mathbf{n}\right)_{z^*=\eta^*}=0 \tag{1.5}$$

$$\left(\mathbf{n}\cdot\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^*\cdot\mathbf{n}\right)_{z^*=\eta^*}=-\tau\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{n}\right)_{z^*=\eta^*} \tag{1.6}$$

$$\tilde{\rho}^*(x^*,z^*=\eta^*,t^*)=\rho_b^*(\eta^*) \tag{1.7}$$

$$\tilde{\mathbf{u}}^*(x^*,z^*=-H^*,t^*)=0 \tag{1.8}$$

其中，t 和 n 分别为受扰界面的单位切向量和法向量。（1.4–1.8）式依次为运动学边界条件、零剪切应力条件、法向应力跃变

† 通讯邮箱：anubhab@iitm.ac.in ‡ 通讯邮箱：dasgupta.ratul@iitb.ac.in

（由自由表面处的表面张力 τ 引起）、界面处的恒密度条件以及底壁处的零速度条件。将所有因变量分解为基态变量与扰动变量之和，即

$$\tilde{\mathbf{u}}^* = \mathbf{0} + \mathbf{u}^*,\ \tilde{p}^*(\mathbf{x}^*, t^*) = p_b^*(z^*) + p^*(\mathbf{x}^*, t^*),\ \tilde{\rho}^*(\mathbf{x}^*, t^*) = \rho_b^*(z^*) + \rho^*(\mathbf{x}^*, t^*),\ z^* = 0 + \eta^*(x^*, t^*). \tag{1.9}$$

将其代入方程 (1.1-1.3) 和 (1.4-1.8)，并在 $z^* = 0$ 附近利用泰勒级数展开对扰动变量进行线性化，以分量形式可得

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0 \tag{1.10}$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} = -\frac{1}{\rho_{\text{ref}}}\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\mu}{\rho_{\text{ref}}}\nabla^2 u^* \tag{1.11}$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial t^*} = -\frac{1}{\rho_{\text{ref}}}\frac{\partial p^*}{\partial z^*} - \frac{\rho^*}{\rho_{\text{ref}}}g + \frac{\mu}{\rho_{\text{ref}}}\nabla^2 w^* \tag{1.12}$$

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \left(\frac{d\rho_b^*}{dz^*}\right) w^* = \kappa \nabla^2 \rho^* \tag{1.13}$$

相应的线性化边界条件为

$$\frac{\partial \eta^*}{\partial t^*} = w^*(x^*, 0, t^*) \tag{1.14}$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial z^*}(x^*, 0, t^*) + \frac{\partial w^*}{\partial x^*}(x^*, 0, t^*) = 0 \tag{1.15}$$

$$\rho_b^*(0) g \eta^* - p^*(x^*, 0, t^*) + 2\mu \frac{\partial w^*}{\partial z^*}(x^*, 0, t^*) - \tau\left(\frac{\partial^2 \eta^*}{\partial (x^*)^2}\right) = 0 \tag{1.16}$$

$$\rho^*(x^*, 0, t^*) = 0 \tag{1.17}$$

$$u^*(x^*, -H^*, t^*) = w^*(x^*, -H^*, t^*) = \rho^*(x^*, -H, t^*) = 0 \tag{1.18}$$

其中我们采用了牛顿型本构关系 $\tilde{\underline{\underline{\sigma}}} = -\tilde{p}\,\mathrm{I} + \mu\,(\boldsymbol{\nabla}\tilde{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\nabla}\tilde{\mathbf{u}}^{\mathrm{T}})$。注意，在 1.16 中我们使用了 $p_b^*(0) = 0$。

现在，我们分别使用长度、速度和时间尺度 L、U、L/U、$\rho_{ref}U^2$ 和 ρ_{ref}对方程（1.10–1.13）及边界条件（1.14–1.18）进行无量纲化，得到

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{1.19}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) u \tag{1.20}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) w - \frac{gL}{U^2}\rho \tag{1.21}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \mathrm{Ri} w = \frac{1}{\mathrm{RePr}}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \rho \tag{1.22}$$

以及边界条件

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = w(x, 0, t) \tag{1.23}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}(x,0,t) + \frac{\partial w}{\partial x}(x,0,t) = 0 \tag{1.24}$$

$$\rho_b(0g\eta - \left(\frac{U^2}{gL}\right) p(x,0,t) + \left(\frac{U^2}{gL}\right)\frac{2}{Re}\frac{\partial w}{\partial z}(x,0,t) - \frac{1}{Bo}\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right) = 0 \tag{1.25}$$

$$\rho(x, 0, t) = 0 \tag{1.26}$$

$$u(x,-H,t) = w(x,-H,t) = \rho(x,-H,t) = 0 \tag{1.27}$$

无量纲数定义为 $\mathrm{Re} \equiv \frac{\rho_{ref} LU}{\mu}$、$\mathrm{Bo} \equiv \frac{\rho_{ref} g L^2}{\tau}$、$\mathrm{Ri} \equiv \frac{\frac{-g}{\rho_{ref}}\frac{d\rho_b^*}{dz^*}L^2}{U^2}$和 $\mathrm{Pr} \equiv \frac{\mu}{\rho_{ref}\kappa}$。我们分别将 L和 U取为 $1/k$和 $\sqrt{g/k}$，即表面重力波的长度尺度和相速度。注意，gL/U^2 是弗劳德数平方的倒数；由于尺度的选取，这里其值为 1。沿 x 和 t 分别进行傅里叶变换和拉普拉斯变换

$$\begin{aligned}&\Big[\bar{u}(k,z,s), \bar{w}(k,z,s), \bar{p}(k,z,s), \bar{\eta}(k,s), \bar{\rho}(k,z,s)\Big]^{\mathsf{T}} \\ &\equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty dt \exp[-st]\int_{-\infty}^{\infty} dk \exp[-ikx]\Big[u(x,z,t), w(x,z,t), p(x,z,t), \eta(x,t), \rho(x,z,t)\Big]^{\mathsf{T}}\end{aligned} \tag{1.28}$$

通过交叉求导消去 $\bar{p}(k,z,s)$，并利用连续性方程，我们得到关于 $\bar{w}(k,z,s)$的方程，即：

$$\begin{aligned}&\Big[s - \frac{1}{\mathrm{RePr}}(D^2-k^2)\Big]\Big[s - \frac{1}{\mathrm{Re}}(D^2-k^2)\Big](D^2-k^2)\bar{w}(k,z,s) - k^2 \mathrm{Ri}\bar{w}(k,z,s) \\ &\quad = k^2\left(\frac{gL}{U^2}\right)\hat{\rho}(k,z,t=0) + \Big[s - \frac{1}{\mathrm{RePr}}(D^2-k^2)\Big](D^2-k^2)\hat{w}(k,z,t=0)\end{aligned}$$

其中 $D = d/dz$，$\mathrm{Ri} = N^2L^2/U^2$为理查森数。使用扰动流函数 ψ 和面外（z）方向的涡量分量 $\hat{}\omega$重写上述方程$\bar{}$，

$$\begin{aligned}&\Big[(D^2-1) - s\mathrm{RePr}\Big]\Big[(D^2-1) - s\mathrm{Re}\Big](D^2-1)\bar{\psi}(s,z) - \mathrm{Ri}\ \mathrm{Re}^2\mathrm{Pr}\bar{\psi}(s,z) \\ &\qquad = \mathbf{i}\mathrm{Re}^2\mathrm{Pr}\hat{\rho}(z,t=0) + \mathrm{Re}\Big[(D^2-1) - s\mathrm{RePr}\Big]\hat{\omega}(z,t=0)\end{aligned} \tag{1.29}$$

注意，由于我们采用某个参考波数k对方程进行无量纲化，以下方程中的所有 k 均设为 1。根据流函数和涡量公式以及方程 1.20，可得 $\bar{u}$、 $\bar{w}$ 和 $\bar{p}$ 的表达式：

$$\bar{u} = D\bar{\psi}, \qquad \bar{w} = -\mathbf{i}\bar{\psi},$$

$$\bar{p} = -\mathbf{i}\Big[Re^{-1}(D^2-1) - s\Big]D\bar{\psi} - \mathbf{i}D\hat{\psi}(z,t=0)$$

1.2. 六阶方程的解

方程 1.29 的齐次解形式为 $\sim C_i e^{\lambda_i z}$。使用参数变易法，可将方程 1.29 的通解写为（？）

$$\bar{\psi}(s,z) = \sum_{i=1}^{6} \exp(\lambda_i z) \left[C_i(s) + \int^z \frac{Adj(\mathscr{W})_{i,6}(s,z')\mathscr{R}(s,z')}{|\mathscr{W}(s,z')|} dz' \right] \tag{1.30}$$

这里， $\mathscr{R}(s,z)$ 是方程 1.29 的右端项， $|\mathscr{W}(s,z)|$ 是由方程 1.29 的齐次解构造的六阶朗斯基行列式。朗斯基矩阵为

$$\mathscr{W}_{j,i} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 z} & e^{\lambda_2 z} & e^{\lambda_3 z} & e^{\lambda_4 z} & e^{\lambda_5 z} & e^{\lambda_6 z} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 z} & \lambda_2 e^{\lambda_2 z} & \lambda_3 e^{\lambda_3 z} & \lambda_4 e^{\lambda_4 z} & \lambda_5 e^{\lambda_5 z} & \lambda_6 e^{\lambda_6 z} \\ \lambda_1^2 e^{\lambda_1 z} & \lambda_2^2 e^{\lambda_2 z} & \lambda_3^2 e^{\lambda_3 z} & \lambda_4^2 e^{\lambda_4 z} & \lambda_5^2 e^{\lambda_5 z} & \lambda_6^2 e^{\lambda_6 z} \\ \lambda_1^3 e^{\lambda_1 z} & \lambda_2^3 e^{\lambda_2 z} & \lambda_3^3 e^{\lambda_3 z} & \lambda_4^3 e^{\lambda_4 z} & \lambda_5^3 e^{\lambda_5 z} & \lambda_6^3 e^{\lambda_6 z} \\ \lambda_1^4 e^{\lambda_1 z} & \lambda_2^4 e^{\lambda_2 z} & \lambda_3^4 e^{\lambda_3 z} & \lambda_4^4 e^{\lambda_4 z} & \lambda_5^4 e^{\lambda_5 z} & \lambda_6^4 e^{\lambda_6 z} \\ \lambda_1^5 e^{\lambda_1 z} & \lambda_2^5 e^{\lambda_2 z} & \lambda_3^5 e^{\lambda_3 z} & \lambda_4^5 e^{\lambda_4 z} & \lambda_5^5 e^{\lambda_5 z} & \lambda_6^5 e^{\lambda_6 z} \end{bmatrix}$$

and 其行列式为 $|\mathscr{W}(s,z)|$。朗斯基行列式可写为 :

$$|\mathscr{W}(s,z)| = \exp\left(\sum_{i=1}^{6} \lambda_i z\right) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 & \lambda_6 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 & \lambda_5^2 & \lambda_6^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 & \lambda_5^3 & \lambda_6^3 \\ \lambda_1^4 & \lambda_2^4 & \lambda_3^4 & \lambda_4^4 & \lambda_5^4 & \lambda_6^4 \\ \lambda_1^5 & \lambda_2^5 & \lambda_3^5 & \lambda_4^5 & \lambda_5^5 & \lambda_6^5 \end{vmatrix} = \exp\left(\sum_{i=1}^{6} \lambda_i z\right) \mathscr{E}_\lambda(s)$$

同样， $\mathscr{W}_{i,j}$ 的伴随矩阵最后一列的每个元素由 $Adj(\mathscr{W})_{i,6}(s,z)$ 给出。它们是:

$$Adj(\mathscr{W})_{1,6} = -\exp\left(\sum_{i=1}^{6} \lambda_i - \lambda_1\right) z \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 & \lambda_6 \\ \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 & \lambda_5^2 & \lambda_6^2 \\ \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 & \lambda_5^3 & \lambda_6^3 \\ \lambda_2^4 & \lambda_3^4 & \lambda_4^4 & \lambda_5^4 & \lambda_6^4 \end{vmatrix} = \exp\left(\sum_{i=1}^{6} \lambda_i - \lambda_1 z\right) \mathscr{E}_{\lambda,1}(s)$$

$$Adj(\mathscr{W})_{2,6} = e^{\left(\sum_{i=1}^{6} \lambda_i - \lambda_2\right) z} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 & \lambda_6 \\ \lambda_1^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 & \lambda_5^2 & \lambda_6^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 & \lambda_5^3 & \lambda_6^3 \\ \lambda_1^4 & \lambda_3^4 & \lambda_4^4 & \lambda_5^4 & \lambda_6^4 \end{vmatrix} = e^{\left(\sum_{i=1}^{6} \lambda_i - \lambda_2\right) z} \mathscr{E}_{\lambda,2}(s)$$

$$Adj(\mathscr{W})_{3,6} = -e^{\left(\sum_{i=1}^{6} \lambda_i - \lambda_3\right) z} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_4 & \lambda_5 & \lambda_6 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_4^2 & \lambda_5^2 & \lambda_6^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_4^3 & \lambda_5^3 & \lambda_6^3 \\ \lambda_1^4 & \lambda_2^4 & \lambda_4^4 & \lambda_5^4 & \lambda_6^4 \end{vmatrix} = e^{\left(\sum_{i=1}^{6} \lambda_i - \lambda_3\right) z} \mathscr{E}_{\lambda,3}(s)$$

$$Adj(\mathscr{W})_{4,6} = e^{\left(\sum_{i=1}^{6} \lambda_i - \lambda_4\right) z} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_5 & \lambda_6 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_5^2 & \lambda_6^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \lambda_5^3 & \lambda_6^3 \\ \lambda_1^4 & \lambda_2^4 & \lambda_3^4 & \lambda_5^4 & \lambda_6^4 \end{vmatrix} = e^{\left(\sum_{i=1}^{6} \lambda_i - \lambda_4\right) z} \mathscr{E}_{\lambda,4}(s)$$

$$Adj(\mathscr{W})_{5,6} = -e^{\left(\sum_{i=1}^{6}\lambda_i-\lambda_5\right)z}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_6 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 & \lambda_6^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 & \lambda_6^3 \\ \lambda_1^4 & \lambda_2^4 & \lambda_3^4 & \lambda_4^4 & \lambda_6^4 \end{vmatrix} = e^{\left(\sum_{i=1}^{6}\lambda_i-\lambda_5\right)z}\mathscr{E}_{\lambda,5}(s)$$

$$Adj(\mathscr{W})_{6,6} = e^{\left(\sum_{i=1}^{6}\lambda_i-\lambda_6\right)z}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 & \lambda_5^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 & \lambda_5^3 \\ \lambda_1^4 & \lambda_2^4 & \lambda_3^4 & \lambda_4^4 & \lambda_5^4 \end{vmatrix} = e^{\left(\sum_{i=1}^{6}\lambda_i-\lambda_6\right)z}\mathscr{E}_{\lambda,6}(s)$$

这里， $\mathscr{E}_\lambda$ 和 $\mathscr{E}_{\lambda,i}$ 是上述各项中的行列式。因此，方程 1.30 可改写为:

$$\begin{aligned}\bar{\psi}(s,z) &= \sum_{i=1}^{6}\exp\left(\lambda_i z\right)\left[C_i(s) + \frac{\mathscr{E}_{\lambda,i}(s)}{\mathscr{E}_\lambda(s)}\int\exp(-\lambda_i z)\mathscr{R}(s,z)dz\right] \\ &= \sum_{i=1}^{6}\exp\left(\lambda_i z\right)\left[C_i(s) + \mathscr{E}_i(s)I_i(s,z)\right]\end{aligned} \tag{1.31}$$

这里， $I_i(s,z)$ 是积分， $\mathscr{E}_i$ 是行列式之比。通过因式分解可以证明:

$$\mathscr{E}_i(s) = \frac{1}{\prod_{j=1,j\neq i}^{6}(\lambda_i-\lambda_j)}, \qquad I_i(s,z) = \int\exp(-\lambda_i z)\mathscr{R}(s,z)dz$$

如果不存在分层， $Ri = 0$，并且我们也假设不存在密度扰动。因此，控制方程 1.29 修改为:

$$\Big[(D^2-1)-sRe\Big](D^2-1)\bar{\psi}(z) = Re\hat{\omega}(z,t=0) \tag{1.32}$$

因此，假设解的形式为 $\sim\exp(\lambda_i z)$，我们可以将方程 1.31 修改为:

$$\bar{\psi}(s,z) = \sum_{i=1}^{4}\exp\left(\lambda_i z\right)\left[C_i(s) + \mathscr{F}_i(s)I_i(s,z)\right] \tag{1.33}$$

其中,

$$\mathscr{F}_i(s) = \frac{1}{\prod_{j=1,j\neq i}^{4}(\lambda_i-\lambda_j)}, \qquad I_i(s,z) = Re\int_0^z\exp(-\lambda_i z)\hat{\omega}(z,t=0)dz$$

1.3. 边界条件

应用傅里叶变换和拉普拉斯变换，并取$\sqrt{g/k}$ 作为速度尺度U ，以波数的倒数 $1/k$ 作为长度尺度 L

$$s\bar{\eta}(s) = \bar{w}(s,z=0) + \hat{\eta}(t=0)$$

$$(D^2+1)\bar{w}(s,z=0) = 0$$

$$\frac{2}{Re}D\bar{w}(s,z=0) + (1+Bo^{-1})\bar{\eta}(s) = \frac{1}{Re}\Big(D^2-1-sRe\Big)D\bar{w}(s,z=0) + D\hat{w}(z=0,t=0)$$

$$\Big[s-\frac{1}{Re}(D^2-1)\Big](D^2-1)\bar{w}(s,z=0)=(D^2-1)\hat{w}(z=0,t=0)$$

这里， Bo^{-1}是由 $Bo=\rho_{ref}g/\tau k^2$定义的邦德数的倒数。在流函数与涡量表述中，这些方程可改写为

$$(D^2+1)\bar{\psi}(s,0)=0 \tag{1.34}$$

$$\begin{aligned} s\Big((D^2-3)-sRe\Big)D\bar{\psi}(s,0)-Re(1+Bo^{-1})\bar{\psi}(s,0) \\ =Re(1+Bo^{-1})\mathbf{i}\hat{\eta}(t=0)-sReD\hat{\psi}(t=0,z=0) \end{aligned} \tag{1.35}$$

$$\Big[s-\frac{1}{Re}(D^2-1)\Big](D^2-1)\bar{\psi}(s,0)=-\hat{\omega}(z=0,t=0) \tag{1.36}$$

类似地，在壁面（$z=-H$）处，应用无滑移和不可穿透边界条件:

$$\bar{w}=0, \qquad \frac{\partial\bar{w}}{\partial z}=0, \qquad \bar{\rho}=0$$

上文关于 $\bar{w}$ 的诺伊曼边界条件来自连续性方程。z方向动量方程中含有一个 $\bar{\rho}$ 项。因此，将 $\bar{\rho}=0$ 代入z方向动量方程可得到关于 $\bar{w}$的边界条件。由此，进行上述代入、应用拉普拉斯变换并转换为流函数与涡量表述，可得

$$\bar{\psi}(s,-H)=0, \quad \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial z}(s,-H)=0, \quad \Big[s-\frac{1}{Re}(D^2-1)\Big](D^2-1)\bar{\psi}(s,-H)=-\hat{\omega}(z=-H,t=0) \tag{1.37}$$

¯对于无限深情形，我们在 $z=0$ 处选用条件1.34、1.35和1.36，并将 $\psi\to$处的有限条件设为 $z\to-\infty$。对于无分层情形，我们在$z=0$ 处选用条件1.34和1.35，并在 $z=-H$处选用条件1.37a和1.37b。

2. 黏性 - 有限深度 - 分层情形

将方程 1.31 中给出的解的形式代入边界条件 1.34- 1.37。切向应力条件为:

$$\sum_{i=1}^{6}(\lambda_i^2+1)C_i(s)=-\sum_{i=1}^{6}\mathscr{E}_i(s)((D+\lambda_i)^2+1)I_i(s,z=0) \tag{2.1}$$

类似地，法向应力边界条件为

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{6}\Big[s\lambda_i^3-s\lambda_i(sRe+3)-Re(1+Bo^{-1})\Big]C_i(s)= \\ &-\sum_{i=1}^{6}\mathscr{E}_i(s)\Big[s(D+\lambda_i)^3-s(sRe+3)(D+\lambda_i)-Re(1+Bo^{-1})\Big]I_i(s,z=0) \\ &+Re(1+Bo^{-1})\mathbf{i}\hat{\eta}(t=0)-sReD\hat{\psi}(t=0,z=0) \end{aligned} \tag{2.2}$$

密度扰动边界条件取为零，表示为:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{6}\Big[\lambda_i^4-\lambda_i^2(sRe+2)+(1+sRe)\Big]C_i(s)=-\sum_{i=1}^{6}\mathscr{E}_i(s)\Big[(D+\lambda_i)^4 \\ -(sRe+2)(D+\lambda_i)^2+(1+sRe)\Big]I_i(s,z=0)+Re\hat{\omega}(z=0,t=0) \end{aligned} \tag{2.3}$$

底面上的无穿透边界条件表示为:

$$\sum_{i=1}^{6} e^{-\lambda_i H} C_i(s) = -\sum_{i=1}^{6} e^{-\lambda_i H} \mathscr{E}_i(s) I_i(s, z=-H) \tag{2.4}$$

无滑移边界条件如下:

$$\sum_{i=1}^{6} \lambda_i e^{-\lambda_i H} C_i(s) = -\sum_{i=1}^{6} \mathscr{E}_i(s) e^{-\lambda_i H} (D+\lambda_i) I_i(s, z=-H) \tag{2.5}$$

密度扰动边界条件如下:

$$\sum_{i=1}^{6} e^{-\lambda_i H}\left[\lambda_i^4 - (sRe+2)\lambda_i^2\right] C_i(s) = -\sum_{i=1}^{6} e^{-\lambda_i H} \mathscr{E}_i(s)\Big[(D+\lambda_i)^4 - (sRe+2)(D+\lambda_i)^2\Big] I_i(s, z=-H) + Re\hat{\omega}(z=-H, t=0) \tag{2.6}$$

方程 2.1–2.6 可写为

$$\begin{bmatrix} (\lambda_1^2+1) & (\lambda_2^2+1) & (\lambda_3^2+1) & (\lambda_4^2+1) & (\lambda_5^2+1) & (\lambda_6^2+1) \\ L_1 & L_2 & L_3 & L_4 & L_5 & L_6 \\ M_1 & M_2 & M_3 & M_4 & M_5 & M_6 \\ e^{-\lambda_1 H} & e^{-\lambda_2 H} & e^{-\lambda_3 H} & e^{-\lambda_4 H} & e^{-\lambda_5 H} & e^{-\lambda_6 H} \\ \lambda_1 e^{-\lambda_1 H} & \lambda_2 e^{-\lambda_2 H} & \lambda_3 e^{-\lambda_3 H} & \lambda_4 e^{-\lambda_4 H} & \lambda_5 e^{-\lambda_5 H} & \lambda_6 e^{-\lambda_6 H} \\ O_1 & O_2 & O_3 & O_4 & O_5 & O_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathscr{R}_1 \\ \mathscr{R}_2 \\ \mathscr{R}_3 \\ \mathscr{R}_4 \\ \mathscr{R}_5 \\ \mathscr{R}_6 \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

其中，$L_i(s)$、$M_i(s)$ 和 $O_i(s)$ 分别是方程 2.2、2.3 和 2.6 中 $C_i(s)$ 的系数，而 $\mathscr{R}_i(s)$ 是这六个方程的右端项。我们注意到，乘以 $C_i(s)$ 的矩阵正是正规模态分析中色散关系所用的矩阵，记为 $\mathscr{D}(s)$。因此，系数可写为:

$$C_i(s) = \frac{1}{|\mathscr{D}(s)|} \sum_{j=1}^{6} Adj(\mathscr{D}(s))_{ij} \mathscr{R}_j(s) \tag{2.8}$$

其中，$Adj(\mathscr{D}(s))$ 表示矩阵 $\mathscr{D}(s)$ 的伴随矩阵。总解的拉普拉斯逆变换可写为:

$$\hat{\psi}(t,z) = \frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \int_{\gamma-\mathbf{i}\infty}^{\gamma+\mathbf{i}\infty} ds \exp(st) \sum_{i=1}^{6} \exp(\lambda_i(s) z) \left[\frac{1}{|\mathscr{D}(s)|} \sum_{j=1}^{6} Adj(\mathscr{D}(s))_{ij} \mathscr{R}_j(s) + \mathscr{E}_i(s) I_i(s,z) \right] \tag{2.9}$$

注意，初始条件 $\hat{\rho}(z, t=0)$ 和 $\hat{\omega}(z, t=0)$ 包含在表达式 2.9 中的 $\mathscr{R}_j(s)$ 和 $I_i(s, z)$ 里。

2.1. 涡量扰动

假设除涡量外的所有扰动均为零，我们求解泊松方程，根据初始涡量求得初始流函数。沿 x 方向进行傅里叶变换后，流函数的泊松方程为:

$$(D^2 - 1)\hat{\psi}(z, t=0) = -\hat{\omega}(z, t=0) \tag{2.10}$$

我们使用参数变易法求解:

$$\hat{\psi}(z,t=0) = B_1 e^z + B_2 e^{-z} + e^z \int \frac{e^{-z'}\hat{\omega}(z',0)}{|\mathscr{W}|}dz' - e^{-z}\int \frac{e^{z'}\hat{\omega}(z',0)}{|\mathscr{W}|}dz'$$
$$= \sum_{i=1}^{2} e^{(-1)^{i+1}z}\left[B_i + \frac{(-1)^i}{2}J_i(z)\right] \tag{2.11}$$

这里，朗斯基行列式 $|\mathscr{W}| = -2$ 和 $J_i(z) \equiv \int^z dz'\omega(z',0)\exp[(-1)^i z]$。为求出常数 B_1 和 B_2，我们使用底平面处的不可穿透边界条件，以及自由表面处的切向应力边界条件。它们表示为:

$$\hat{\psi}(z=-H,t=0)=0; \qquad (D^2+1)\hat{\psi}(z=0,t=0)=0.$$

常数 B_1 和 B_2 可求得如下:

$$B_1 = \frac{e^H \mathrm{csch} H}{8}\Big(2J_1(0)-2J_2(0)+2J_2(-H)-2J_1(-H)e^{-2H}+2J_1'(0)+2J_2'(0)+J_1''(0)-J_2''(0)\Big)$$

$$B_2 = \frac{e^{-H}\mathrm{csch} H}{8}\Big(-2J_1(0)+2J_2(0)-2J_2(-H)e^{2H}+2J_1(-H)-2J_1'(0)-2J_2'(0)-J_1''(0)+J_2''(0)\Big)$$

对于情形 $\hat{\omega}(z,t=0) = \Omega\exp\left(-\frac{(z-z_d)^2}{d^2}\right)$，其中 $z_d \in (-H,0)$，为得到 2.11 中的流函数表达式，我们要求

$$J_1(z) = \frac{\Omega}{2}d\sqrt{\pi}\exp\left(\frac{d^2}{4}-z_d\right)\mathrm{Erf}\left(\frac{d}{2}+\frac{z-z_d}{d}\right)$$

$$J_2(z) = \frac{\Omega}{2}d\sqrt{\pi}\exp\left(\frac{d^2}{4}+z_d\right)\mathrm{Erf}\left(-\frac{d}{2}+\frac{z-z_d}{d}\right)$$

对于无限域情形，应以 $z\to-\infty$处的有限性条件取代 $z=-H$ 处的不可穿透条件。在方程 2.11 中，我们忽略随 $z\to-\infty$ 发散的项，只考虑有界项。我们要求以下积分:

$$K_i(s,z) = \int \exp\left(\frac{-(z-z_d)^2}{d^2}\right)\exp(-\lambda_i z)dz = \frac{1}{2}d\sqrt{\pi}\exp\left(d^2\lambda_i^2/4-\lambda_i z_d\right)\mathrm{Erf}\left(\frac{d\lambda_i}{2}+\frac{z-z_d}{d}\right) \tag{2.12}$$

其中，Erf（·）是误差函数。最后，初始条件为:

$$D\hat{\psi}(z=0,t=0) = -\frac{1}{2}(J_1(0)+J_2(0)) \tag{2.13}$$

假设没有初始密度扰动，右端项为:

$$\mathscr{R}(s,z) = Re[(D^2-1)-sRePr]\hat{\omega}(z,t=0)$$

主要积分为:

$$I_i(s,z) = \frac{Re\Omega}{d^2}\left[(d^2\lambda_i - 2(z-z_d))\exp\left(-\lambda_i z - \frac{(z-z_d)^2}{d^2}\right) - (1-\lambda^2+sRePr)d^2K_i(s,z)\right] \tag{2.14}$$

其导数由下式给出:

$$DI_i(s,z) = -\frac{Re\Omega}{d^4}\left(d^4(1+sRePr)+2d^2-4(z-z_d)^2\right)\exp\left(-\lambda_i z - \frac{(z-z_d)^2}{d^2}\right)$$

$$D^2 I_i(s,z) = \frac{Re\Omega}{d^6}\Big(d^6\lambda_i(1+sRePr)+2d^4((1+sRePr)(z-z_d)+\lambda_i) - 4d^2(z-z_d)(\lambda_i(z-z_d)-3)-8(z-z_d)^3\Big)\exp\Big(-\lambda_i z-\frac{(z-z_d)^2}{d^2}\Big)$$

$$D^3 I_i(s,z) = \frac{Re\Omega}{d^8}\Big(-d^8(1+sRePr)\lambda_i^2+d^6\Big((1+sRePr)(2-4(z-z_d)\lambda_i)-2\lambda_i^2\Big) + 4d^4\Big(3+(z-z_d)[(z-z_d)\lambda_i^2-6\lambda_i-(1+sRePr)(z-z_d)]\Big) + 16d^2(z-z_d)^2(\lambda_i(z-z_d)-3)+16(z-z_d)^4\Big)\exp\Big(-\lambda_i z-\frac{(z-z_d)^2}{d^2}\Big)$$

$$D^4 I_i(s,z) = \frac{Re\Omega}{d^{10}}\Big(d^{10}(1+sRePr)\lambda_i^3+2d^8\lambda_i\Big(\lambda_i^2+3\lambda_i(1+sRePr)(z-z_d)-3(1+sRePr)\Big) + 4d^6\Big(-9\lambda_i-3(z-z_d)(1+sRePr-3\lambda_i^2)+(z-z_d)^2\lambda_i(3(1+sRePr)-\lambda_i^2)\Big) + 8d^4(z-z_d)\Big(-15+18\lambda_i(z-z_d)+(z-z_d)^2(1+sRePr-3\lambda_i^2)\Big) + 16d^2(z-z_d)^3(10-3\lambda_i(z-z_d))-32(z-z_d)^5\Big)\exp\Big(-\lambda_i z-\frac{(z-z_d)^2}{d^2}\Big)$$

利用这些导数，我们可以通过代入求得矩阵 $\mathscr{R}_i(s)$ 的右端项。由于已知这些导数，我们可以通过直接代入轻松求得右端矩阵 $\mathscr{R}_i(s)$。

2.2. 自由表面扰动

假设初始密度扰动 $\hat{}\rho(z,0)$ 和涡量扰动 $\hat{}\omega(z,0)$ 均为零，且初始自由表面变形 $\hat{}\eta(t=0)$ 非零，则式 1.31 中的解可简化为

$$\bar{\psi}(s,z) = \frac{1}{|\mathscr{D}(s)|}\sum_{i=1}^{6}\exp(\lambda_i z)\sum_{j=1}^{6}Adj(\mathscr{D}(s))_{ij}\mathscr{R}_j(s) \tag{2.15}$$

对于 t his 初始条件，右端矩阵 $\mathscr{R}_j(s)$ 与 s 无关，即 $\mathscr{R}_j$

$$\begin{bmatrix}0 & Re(1+Bo^{-1})\mathbf{i}\hat{\eta}(t=0) & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\intercal} \tag{2.16}$$

然后，拉普拉斯逆变换可写为:

$$\hat{\psi}(t,z) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\exp(st)ds\sum_{i=1}^{6}\exp(\lambda_i(s)z)\left[\sum_{j=1}^{6}\frac{1}{|\mathscr{D}(s)|}Adj(\mathscr{D}(s))_{ij}\mathscr{R}_j(s)\right] \tag{2.17}$$

假设 2.17 中唯一的极点来自分母 $\mathscr{D}(s)$，且这些都是简单极点（$n=1$、2、.....），根据柯西留数定理，我们可以写成

$$\hat{\psi}(t,z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|\mathscr{D}(s_n)|'}\exp(s_n t)\sum_{i=1}^{6}\exp(\lambda_i(s_n)z)\left[\sum_{j=1}^{6}Adj(\mathscr{D}(s_n))_{ij}\mathscr{R}_j(s_n)\right] \tag{2.18}$$

其中，撇号表示对 s 求导。然后，我们可以利用在傅里叶-拉普拉斯域中写出的运动学边界条件来表示表面演化，即:

$_s\bar{\eta}(s) - \hat{}\eta(0) = -\mathbf{i}\psi(z=0,s)$，并利用表达式 2.18 得到

$$\frac{\hat{\eta}(t)}{\hat{\eta}(0)} = 1 - \frac{\mathbf{i}}{\hat{\eta}(0)} \sum_{n=1}^{\infty} \exp(s_n t) \sum_{i=1}^{6} \left[\frac{1}{s_n |\mathscr{D}(s_n)|'} \sum_{j=1}^{6} Adj(\mathscr{D}(s_n))_{ij} \mathscr{R}_j(s_n) \right] - \frac{\mathbf{i}}{\hat{\eta}(0)} \sum_{i=1}^{6} \left[\frac{1}{|\mathscr{D}(0)|} \sum_{j=1}^{6} Adj(\mathscr{D}(0))_{ij} \mathscr{R}_j(0) \right] \tag{2.19}$$

2.3. 密度扰动

初始密度扰动剖面应满足两侧边界上的狄利克雷边界条件。假设不存在其他扰动，我们可得：

$$\mathscr{R}(z) = \mathbf{i} Re^2 Pr \hat{\rho}(z, t=0) \tag{2.20}$$

对于 $\hat{}\rho(z, t = 0) = R\exp(-(z - z_d)^2/d^2)$，其中 $z_d \in (-H, 0)$，我们采用以下积分：

$$K_i(s,z) = \int \exp\left(\frac{-(z-z_d)^2}{d^2}\right) \exp(-\lambda_i z) dz = \frac{1}{2} d\sqrt{\pi} \exp\left(d^2\lambda_i^2/4 - \lambda_i z_d\right) \mathrm{Erf}\left(\frac{d\lambda_i}{2} + \frac{z-z_d}{d}\right)$$

其中，Erf (·) 是误差函数。假设不存在其他初始条件，主要积分为：

$$I_i(s,z) = \mathbf{i} Re^2 Pr R K_i(s,z)$$

其导数如下：

$$DI_i(s,z) = \mathbf{i} Re^2 Pr R \exp\left(\frac{-(z-z_d)^2}{d^2}\right) \exp(-\lambda_i z)$$

$$D^2 I_i(s,z) = -\mathbf{i} Re^2 Pr R \left(\frac{2(z-z_d)}{d^2} + \lambda_i\right) \exp\left(\frac{-(z-z_d)^2}{d^2}\right) \exp(-\lambda_i z)$$

$$D^3 I_i(s,z) = \mathbf{i} Re^2 Pr R \left[\left(\frac{2(z-z_d)}{d^2} + \lambda_i\right)^2 - \frac{2}{d^2}\right] \exp\left(\frac{-(z-z_d)^2}{d^2}\right) \exp(-\lambda_i z)$$

$$D^4 I_i(s,z) = -\mathbf{i} Re^2 Pr R \left[\left(\frac{2(z-z_d)}{d^2} + \lambda_i\right)^3 - \frac{6}{d^2}\left(\frac{2(z-z_d)}{d^2} + \lambda_i\right)\right] \exp\left(\frac{-(z-z_d)^2}{d^2}\right) \exp(-\lambda_i z)$$

右端项 矩阵 $\mathscr{R}_i(s)$ 现在可以通过直接代入上述导数求得 .

3. 无限深度分层

控制方程 1.31 以及自由表面边界条件 1.34、1.35 和 1.36 对无限深和有限深情形均相同。对于无限深度区域，应在 $z \to -\infty$ 处应用有界性条件；而对于有限水深情形，则使用壁面边界条件 1.37。

3.1. 涡量扰动

我们假设 $\hat{}\omega(z, t = 0) = \Omega \exp(-(z - z_d)^2/d^2)$，其中 $z_d \in (-\infty, 0)$，并忽略所有其他初始条件。如果根 $\lambda_i > 0$ 的实部为.....，则对于三个根，方程 1.31 中的解项会随着 $z \to -\infty$ 趋近于零。可以看到

对于无限深度情形，有三个实部为负的 λ_i，即 $\mathscr{R}(\lambda_i) < 0$。对于这些根，解会随着 $z \to -\infty$ 指数发散，因为对于此处研究的高斯初始条件，积分 $I_i(z)$ 在 $z \to -\infty$ 处有界，不论 $\mathscr{R}(\lambda_i)$ 的符号如何。因此，为避免这种发散，我们对这三个 λ_i设定：

$$C_i(s) = -\mathscr{E}_i(s) I_i(s, z = -\infty)$$

由此得到关于这些 C_i（即 $i = 4$、5、6）的三个方程。其余三个常数（即 C_i（其中 $i = 1$、2、3））可利用三个边界条件 1.34、1.35 和 1.36 确定。最终解可表示为：

$$\bar{\psi}(s, z) = \sum_{i=1}^{6} \exp(\lambda_i z) \left[C_i(s) + \mathscr{E}_i(s) I_i(s, z) \right],$$

其中，对于 $i = 1$、2 和 3

$$C_i(s) = \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{|\mathscr{D}(s)|} Adj(\mathscr{D}(s))_{ij} \left[\mathscr{R}_j(s) - \sum_{m=4}^{6} C_m(s) \mathscr{C}_j^{(m)}(s) \right] \tag{3.1}$$

对于 $i = 4$ 到 6（即）

$$C_i(s) = -\mathscr{E}_i(s) I_i(s, z = -\infty) \tag{3.2}$$

这里，$\mathscr{D}(s)$ 是由方程 1.34、1.35 和 1.36 中左端项的系数构成的色散矩阵，其中 C_4、C_5 和 C_6 已移至右端项。$\mathscr{R}_j(s)$ 是包含方程 1.34、1.35 和 1.36 右端项的列矩阵。系数矩阵 $\mathscr{C}_j^{(m)}(s)$ 表示为：

$$\mathscr{C}_j^{(m)}(s) = [(\lambda_m^2 + 1) \quad L_m \quad M_m]^\intercal$$

其中，$L_m(s)$ 和 $M_m(s)$ 在 2.7 中定义。

3.2. 密度扰动

该过程与上一节类似。对于 $\hat{\rho}(z, t = 0) = R \exp(-(z - z_d)^2 / d^2)$ 的情形，其中 $z_d \in (-\infty, 0)$，积分、其导数以及界面处三个边界条件给出的 $\mathscr{R}_j(s)$，均可直接由第 2.3.1 小节写出。常数可由第 3.1.1 小节写出。

3.3. 自由表面扰动

该解与第 2.2 小节非常相似，但有以下变化：a) 由于 $z \to -\infty$ 处的有界性条件，只选取实部非负的三个根。b) 色散矩阵 $\mathscr{D}(s)$ 是由边界条件 1.34、1.35 和 1.36 左端系数生成的 3×3 矩阵。c) 除离散谱外，还存在连续谱。

4. 有限深度 - 非分层

将方程 1.33 中给出的解形式代入边界条件 1.34、1.35 和 1.35a、b。切向应力条件为：

$$\sum_{i=1}^{4} (\lambda_i^2 + 1) C_i(s) = -\sum_{i=1}^{4} \mathscr{F}_i(s) ((D + \lambda_i)^2 + 1) I_i(s, z = 0) \tag{4.1}$$

类似地，法向应力边界条件为

$$\sum_{i=1}^{4}\left[s\lambda_i^3 - s\lambda_i(sRe+3) - Re(1+Bo^{-1})\right]C_i(s) =$$
$$-\sum_{i=1}^{4}\mathscr{F}_i(s)\left[s(D+\lambda_i)^3 - s(sRe+3)(D+\lambda_i) - Re(1+Bo^{-1})\right]I_i(s,z=0)$$
$$+ Re(1+Bo^{-1})\mathbf{i}\hat{\eta}(t=0) - sReD\hat{\psi}(z=0,t=0) \tag{4.2}$$

底面的无穿透边界条件为：

$$\sum_{i=1}^{4} e^{-\lambda_i H}C_i(s) = -\sum_{i=1}^{4} e^{-\lambda_i H}\mathscr{F}_i(s)I_i(s,z=-H) \tag{4.3}$$

无滑移边界条件为：

$$\sum_{i=1}^{4} \lambda_i e^{-\lambda_i H}C_i(s) = -\sum_{i=1}^{4} \mathscr{F}_i(s)e^{-\lambda_i H}(D+\lambda_i)I_i(s,z=-H) \tag{4.4}$$

方程 4.1–4.4 可写为

$$\begin{bmatrix} (\lambda_1^2+1) & (\lambda_2^2+1) & (\lambda_3^2+1) & (\lambda_4^2+1) \\ L_1 & L_2 & L_3 & L_4 \\ e^{-\lambda_1 H} & e^{-\lambda_2 H} & e^{-\lambda_3 H} & e^{-\lambda_4 H} \\ \lambda_1 e^{-\lambda_1 H} & \lambda_2 e^{-\lambda_2 H} & \lambda_3 e^{-\lambda_3 H} & \lambda_4 e^{-\lambda_4 H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathscr{R}_1 \\ \mathscr{R}_2 \\ \mathscr{R}_3 \\ \mathscr{R}_4 \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

其中，$L_i(s)$ 是方程 4.5 中 $C_i(s)$ 的系数，$\mathscr{R}_i$ 是四个方程的右端项。我们注意到，乘以 $C_i(s)$ 的矩阵正是正规模态分析中色散关系所用的矩阵，并将其记为 $\mathscr{D}(s)$。因此，我们可以将系数写为：

$$C_i(s) = \sum_{j=1}^{4}\frac{1}{|\mathscr{D}(s)|}Adj(\mathscr{D}(s))_{ij}\mathscr{R}_j(s) \tag{4.6}$$

其中，$Adj(\mathscr{D}(s))$ 表示矩阵 $\mathscr{D}(s)$ 的伴随矩阵。于是，总解的拉普拉斯逆变换可写为：

$$\hat{\psi}(z) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\gamma-\mathbf{i}\infty}^{\gamma+\mathbf{i}\infty}\exp(st)ds\sum_{i=1}^{4}\exp(\lambda_i(s)z)\left[\sum_{j=1}^{4}\frac{1}{|\mathscr{D}(s)|}Adj(\mathscr{D}(s))_{ij}\mathscr{R}_j(s) + \mathscr{F}_i(s)I_i(s,z)\right] \tag{4.7}$$

4.1. *Vorticity perturbation*

对于 $\hat{\omega}(z,t=0) = \Omega\exp(-(z-z_d)^2/d^2)$ 这一情形，其中 $z_d \in (-H,0)$，我们有

$$I(s,z) = Re\Omega K_i(s,z)$$

其中，$K_i(s,z)$ 已在前面的公式 2.12 中定义。其导数如下：

$$DI_i(s,z) = Re\Omega\exp\left(\frac{-(z-z_d)^2}{d^2}\right)\exp(-\lambda_i z)$$

$$D^2I_i(s,z) = -Re\Omega\left(\frac{2(z-z_d)}{d^2}+\lambda_i\right)\exp\left(\frac{-(z-z_d)^2}{d^2}\right)\exp(-\lambda_i z)$$

$$D^3 I_i(s,z) = Re\Omega\left[\left(\frac{2(z-z_d)}{d^2}+\lambda_i\right)^2 - \frac{2}{d^2}\right]\exp\left(\frac{-(z-z_d)^2}{d^2}\right)\exp(-\lambda_i z)$$

$$D^4 I_i(s,z) = -Re\Omega\left[\left(\frac{2(z-z_d)}{d^2}+\lambda_i\right)^3 - \frac{6}{d^2}\left(\frac{2(z-z_d)}{d^2}+\lambda_i\right)\right]\exp\left(\frac{-(z-z_d)^2}{d^2}\right)\exp(-\lambda_i z)$$

将上述积分的导数代入公式 4.1–4.4，即可直接写出右端矩阵 $\mathscr{R}_j(s)$。

4.2. 自由表面扰动

假设除振幅外的所有初始扰动均为零，则齐次方程 1.32 的解为：

$$\bar{\psi}(s,z) = \sum_{i=1}^{4}\exp(\lambda_i z)\frac{1}{|\mathscr{D}(s)|}\sum_{j=1}^{4} Adj(\mathscr{D}(s))_{ij}\mathscr{R}_j(s) \tag{4.8}$$

右端列向量 $\mathscr{R}_j(s)$为：

$$\begin{bmatrix}0 & Re(1+Bo^{-1})\mathbf{i}\hat{\eta}(t=0) & 0 & 0\end{bmatrix}^{\intercal} \tag{4.9}$$

那么，拉普拉斯逆变换可写为：

$$\hat{\psi}(z) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\gamma-\mathbf{i}\infty}^{\gamma+\mathbf{i}\infty}\exp(st)ds\sum_{i=1}^{4}\exp(\lambda_i(s)z)\left[\frac{1}{|\mathscr{D}(s)|}\sum_{j=1}^{4} Adj(\mathscr{D}(s))_{ij}\mathscr{R}_j(s)\right] \tag{4.10}$$

如果方程 4.10 的分子没有极点，且分母的极点均为简单极点（且可数无穷），则可写为：

$$\hat{\psi}(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{4}\exp(\lambda_i(s_n)z)\left[\frac{1}{|\mathscr{D}(s_n)|'}\sum_{j=1}^{4} Adj(\mathscr{D}(s_n))_{ij}\mathscr{R}_j(s_n)\right]\exp(s_n t) \tag{4.11}$$

于是，根据运动学边界条件，我们可以将振幅演化写为：

$$\begin{aligned}\frac{\hat{\eta}(t)}{\hat{\eta}(0)} = 1 &- \frac{\mathbf{i}}{\hat{\eta}(0)}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{4}\left[\frac{1}{s_n|\mathscr{D}(s_n)|'}\sum_{j=1}^{4} Adj(\mathscr{D}(s_n))_{ij}\mathscr{R}_j(s_n)\right]\exp(s_n t)\\ &- \frac{\mathbf{i}}{\hat{\eta}(0)}\sum_{i=1}^{4}\left[\frac{1}{|\mathscr{D}(0)|}\sum_{j=1}^{4} Adj(\mathscr{D}(0))_{ij}\mathscr{R}_j(0)\right]\end{aligned} \tag{4.12}$$

5. 无限深度 - 非分层

5.1. 涡量初始条件

根据第 1.1 小节的积分推导，我们看到 $I_i(s,z=-\infty)$ 有界。因此，通过应用有限性边界条件，我们得到 $C_3(s) = -\mathscr{F}_3(s)I_3(s,z=-\infty)$ 和 $C_4(s) = -\mathscr{F}_4(s)I_4(s,z=-\infty)$。因此，我们写为：

$$C_i(s) = \sum_{j=1}^{2}\frac{1}{|\mathscr{D}(s)|}Adj(\mathscr{D}(s))_{ij}\left[\mathscr{R}_j(s) - \sum_{m=3}^{4} C_m(s)\mathscr{C}_j^{(m)}(s)\right] \tag{5.1}$$

其中，$\mathscr{D}(s)$ 是由边界条件 4.1 和 4.2 得到的色散矩阵；将第 4.1 小节中积分的导数代入边界

条件 4.1 和 4.2 的右端项中，可写出 ()。而 $\mathscr{C}_j^{(m)}(s)$ 是相同边界条件左端项中的系数，即:

$$\mathscr{C}_j^{(m)}(s) = [(\lambda_m^2+1) \quad s\lambda_m^3 - s\lambda_m(s\mathrm{Re}+3) - \mathrm{Re}(1+\mathrm{Bo}^{-1})]^\intercal$$

5.2. 自由表面扰动

假设除振幅外的所有初始扰动均为零，齐次方程 1.32 的解为:

$$\bar{\psi}(s,z) = \sum_{i=1}^{2} \exp(\lambda_i z) \frac{1}{|\mathscr{D}(s)|} \sum_{j=1}^{2} Adj(\mathscr{D}(s))_{ij} \mathscr{R}_j(s) \tag{5.2}$$

矩阵 $\mathscr{D}(s)$ 可由边界条件 4.1 和 4.2 写出。右端矩阵 $\mathscr{R}_j(s)$ 为:

$$\begin{bmatrix} 0 & Re(1+Bo^{-1})\mathbf{i}\hat{\eta}(t=0) \end{bmatrix}^\intercal \tag{5.3}$$

那么，拉普拉斯逆变换可写为:

$$\hat{\psi}(z) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\gamma-\mathbf{i}\infty}^{\gamma+\mathbf{i}\infty} \exp(st) ds \sum_{i=1}^{2} \exp(\lambda_i(s) z) \left[\frac{1}{|\mathscr{D}(s)|} \sum_{j=1}^{2} Adj(\mathscr{D}(s))_{ij} \mathscr{R}_j(s) \right] \tag{5.4}$$

在这种情形下，我们预期会出现连续谱和离散谱，因为该拉普拉斯逆变换积分的被积函数会有极点和一个分支点。

6. 常微分方程所得多项式的根（？）

6.1. *For stratified case*

将解的形式代入方程 1.29 的齐次形式后

$$\Big[(\lambda_i^2-1) - sRePr\Big]\Big[(\lambda_i^2-1) - sRe\Big](\lambda_i^2-1) - RiFr^2Re^2Pr = 0 \tag{6.1}$$

假设 $\lambda_i^2 - 1 = l$，我们可以将关于 λ_i 的这个六次多项式化简为关于 l 的三次多项式。因此，

$$\Big[l - sRePr\Big]\Big[l - sRe\Big]l - RiFr^2Re^2Pr = 0 \tag{6.2}$$

$$l^3 - sRe(Pr+1)l^2 + s^2Re^2Prl - RiFr^2Re^2Pr = 0$$

我们写为:

$$q = \frac{1}{3}s^2Re^2Pr - \frac{1}{9}s^2Re^2(Pr+1)^2$$

$$r = \frac{1}{6}\Big[3RiFr^2Re^2Pr - s^3Re^3Pr(Pr+1)\Big] + \frac{1}{27}[s^3Re^3(Pr+1)^3]$$

and

$$p_1 = (r + \sqrt{q^3+r^2})^{1/3}, \qquad p_2 = (r - \sqrt{q^3+r^2})^{1/3}$$

那么，三次多项式的根为

$$l_1 = (p_1+p_2) + \frac{1}{3}sRe(Pr+1)$$

$$l_2 = -\frac{1}{2}(p_1+p_2) + \frac{-\mathbf{i}\sqrt{3}}{2}(p_1-p_2) + \frac{1}{3}sRe(Pr+1)$$

$$l_3 = -\frac{1}{2}(p_1 + p_2) - \frac{-\mathbf{i}\sqrt{3}}{2}(p_1 - p_2) + \frac{1}{3}sRe(Pr + 1)$$

因此，我们得到

$$\lambda_1 = +\sqrt{1 + l_1}, \quad \lambda_2 = -\sqrt{1 + l_1}, \quad \lambda_3 = +\sqrt{1 + l_2}, \quad \lambda_4 = -\sqrt{1 + l_2}, \quad \lambda_5 = +\sqrt{1 + l_3}, \quad \lambda_6 = -\sqrt{1 + l_3} \tag{6.3}$$

6.2. 无分层

将解的形式代入方程 1.32 的齐次形式

$$\Big[l - sRe\Big]l = 0 \tag{6.4}$$

因此，解为:

$$l = 0, \qquad l = sRe$$

以及四次多项式的根:

$$\lambda_1 = +1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = +\sqrt{1 + sRe}, \quad \lambda_4 = -\sqrt{1 + sRe} \tag{6.5}$$