arXiv:2304.00772v1 [math.NA] 3 Apr 2023

带波算子的非线性薛定谔方程长时间动力学中指数波积分器的一致误差界

Yue Feng[1],Yichen Guo[2] 和 Yongjun Yuan[3]

[1]法国巴黎索邦大学雅克-路易·利翁实验室，巴黎 *75005*[2]新加坡国立大学数学系，新加坡 *119076*[3] *MOE-LCSM*，湖南师范大学数学与统计学院，中国湖南长沙 *410081*

摘要

我们建立了指数波积分傅里叶伪谱方法（EWI-FP）在带波算子的非线性薛定谔方程（NLSW）长时间动力学问题中的一致误差界，其中非线性强度由 ε^{2p} 和$\varepsilon \in (0,1]$ 无量纲参数以及$p \in \mathrm{N}$表征。当 $0<\varepsilon \ll 1$时，该问题的长时间动力学等价于具有$O(1)$阶非线性和$O(\varepsilon)$阶初始数据的 NLSW 的长时间动力学。采用 EWI-FP 方法对 NLSW 进行数值求解，该方法将用于时间离散的指数波积分器与空间上的傅里叶伪谱方法相结合。我们严格建立了 EWI-FP 方法的H^1-误差界：在$O(1/\varepsilon^{\beta})$ 时刻之前，误差为$O(h^{m-1}+\varepsilon^{2p-\beta}\tau^2)$，其中 $0 \le \beta \le 2p$，网格尺寸为h，时间步长为 τ ，而$m \ge 2$ 是取决于精确解正则性的整数。最后，我们给出数值结果，以验证 EWI-FP 方法的误差估计，并表明其收敛阶是尖锐的。

关键词： 带波算子的非线性薛定谔方程、长时间动力学、指数型波积分器、傅里叶伪谱方法、一致误差界

1 引言

本文考虑环面 T^d $(d=1,2,3)$ 上的如下带波算子的非线性薛定谔方程（NLSW）

$$\begin{cases} i\partial_t\psi - \alpha\partial_{tt}\psi + \nabla^2\psi - \varepsilon^{2p}|\psi|^{2p}\psi = 0, \quad \mathbf{x}\in\mathbb{T}^d, \quad t>0, \\ \psi(\mathbf{x},0)=\psi_0(\mathbf{x}), \quad \partial_t\psi(\mathbf{x},0)=\psi_1(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\mathbb{T}^d, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中， $\psi := \psi(\mathbf{x},t)$ 是复值波函数，其空间变量为$\mathbf{x}$ 、时间为t， $\alpha = O(1)$是正常数， $0<\varepsilon\le 1$ 是控制非线性强度的无量纲参数，$p \in \mathrm{N}^+$ ，而 $\nabla^2=\Delta$ 是d维拉普拉斯算子。此外， $\psi_0(\mathbf{x})=O(1)$和 $\psi_1(\mathbf{x})=O(1)$ 是两个给定的复值函数，分别表示初始波和速度。弱非线性情形下带波算子非线性薛定谔方程（1.1）的解在空间和

时间中传播波长为$O(1)$的波，且空间中的波速也为$O(1)$。众所周知，带波算子的非线性薛定谔方程（1.1）守恒质量 [1, 2]

$$N(t) := \int_{\mathbb{T}^d} |\psi(\mathbf{x},t)|^2 d\mathbf{x} - 2\alpha \int_{\mathbb{T}^d} \mathrm{Im}\left(\overline{\psi(\mathbf{x},t)}\partial_t \psi(\mathbf{x},t)\right) d\mathbf{x} \equiv N(0), \quad t \geq 0,$$

以及能量

$$\begin{aligned} E(t) := & \int_{\mathbb{T}^d} \left[\alpha |\partial_t \psi(\mathbf{x},t)|^2 + |\nabla \psi(\mathbf{x},t)|^2 + \frac{\varepsilon^{2p}}{p+1} |\psi(\mathbf{x},t)|^{2p+2} \right] d\mathbf{x} \\ & \equiv E(0), \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

其中c 和 Im(c) 分别表示c的共轭和虚部。

带波算子的非线性薛定谔方程（NLSW）源于多种不同的物理场，包括克莱因–戈尔登方程的非相对论极限 [26, 27, 29], 等离子体中的朗缪尔波包络近似 [8, 12], 以及光子弹的正弦-戈尔登方程的调制平面脉冲近似 [5, 33]。过去几十年来，带有 $\varepsilon = 1$ 和$0 < \alpha \ll 1$ 的NLSW（1.1）在解析和数值方面得到了广泛研究 [1, 2, 8, 26, 27]。在解析方面，人们研究了解的存在性以及收敛至非线性薛定谔方程（NLSE）的收敛阶 [8, 26, 27, 29]。在数值方面，已提出多种高效数值方法，其中守恒有限差分方法最为常用 [1, 10,13, 19, 31, 34]。特别是，指数波积分器正弦伪谱法（EWI-SP）已被提出，并严格证明了其具有最优的一致时间误差界 [2]。关于数值格式的更多详情，请参阅 [9, 20, 22, 24, 30, 32, 35] 及其中的参考文献。

此外，通过引入新变量$\phi := \phi(\mathbf{x},\ t) = \varepsilon\psi(\mathbf{x},\ t)$，对波函数 $\psi(\mathbf{x},\ t)$ 的振幅进行缩放，可将 NLSW (1.1) 改写为如下具有$O(1)$-非线性和$O(\varepsilon)$-初始数据的 NLSW

$$\begin{cases} i\partial_t \phi - \alpha \partial_{tt} \phi + \nabla^2 \phi - |\phi|^{2p} \phi = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T}^d, \quad t > 0, \\ \phi(\mathbf{x},0) = \varepsilon \psi_0(\mathbf{x}), \quad \partial_t \phi(\mathbf{x},0) = \varepsilon \psi_1(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T}^d. \end{cases} \tag{1.2}$$

具有$O(\varepsilon^{2p})$-非线性和$O(1)$-初始数据的 NLSW 的长时间动力学，即 NLSW (1.1)，与具有$O(1)$-非线性和$O(\varepsilon)$-初始数据的 NLSW 的长时间动力学，即 NLSW (1.2)，等价。

近年来，文献中对色散偏微分方程（PDEs）的长时间动力学进行了深入研究，这类方程包括具有弱非线性或小势的（非线性）薛定谔方程、非线性克莱因–戈尔登方程和狄拉克方程 [3, 4, 7, 15, 16, 17]。指数波积分器和时间分裂方法广泛用于求解各种半线性演化方程，并在长时间模拟中表现良好 [11, 14, 16, 18, 21, 23]。然而，据我们所知，文献中尚无关于带波算子的非线性薛定谔方程（NLSW）（1.1）长时间动力学数值格式误差界的数值分析，尤其是误差界如何显式依赖于网格尺寸h、时间步长 τ 和小参数 $\varepsilon \in (0,1]$。形式上，通过能量方法和格朗沃尔不等式，对于t ∈

$[0,T]$，二阶时间离散的时间误差界表现为$O(e^{CT}\tau^2)$，这意味着当$t \in [0,T/\varepsilon^{\beta}]$且 $0 \le \beta \le 2p$时，时间误差界会变得无界，达到$O(e^{CT/\varepsilon^{\beta}}\tau^2)$。为在长时间区域内进行有效的误差估计，我们首先作出恰当的设定，即考虑具有弱非线性或小初始数据的带波算子的非线性薛定谔方程。本文旨在为指数波积分傅里叶伪谱（EWI-FP）方法建立带波算子的非线性薛定谔方程（NLSW）（1.1）长时间动力学的一致误差界，直至时间达到$O(\varepsilon^{-\beta})$ 且 $0 \le \beta \le 2p$。

本文其余部分安排如下。第2节讨论带波算子非线性薛定谔方程（NLSW）(1.1) 的指数波积分傅里叶伪谱（EWI-FP）方法的推导，该方法将时间上的指数波积分器与空间离散中的傅里叶伪谱方法相结合。第3节建立了非线性 Klein–Gordon 方程（NKGE）(1.1) 长时间动力学下 EWI-FP 方法的一致误差界，该误差界适用于时间范围 $O(\varepsilon^{-\beta})$，其中 $0 \le \beta \le 2p$。第4节给出数值结果，以验证误差估计。最后，第5节总结全文。全文采用记号 $A \lesssim B$ 表示存在一个通用常数$C > 0$，该常数与h、 τ和 ε 无关，且满足 $|A| \le CB$。

2 指数波积分傅里叶伪谱方法

本节介绍指数波积分傅里叶伪谱（EWI-FP）方法，用于数值求解带波算子的非线性薛定谔方程（1.1）。为简化记号，我们仅给出一维（1D）情况下带波算子的非线性薛定谔方程（1.1）的数值格式，其中$p = 1$。将其推广到高维以及/或更大的p是直接的。在一维中，计算区域$\Omega = (a,b)$ 上满足$p = 1$ 的带波算子的非线性薛定谔方程（1.1）可化为

$$\begin{cases} i\partial_t \psi(x,t) - \alpha\partial_{tt}\psi(x,t) + \partial_{xx}\psi(x,t) - \varepsilon^2|\psi(x,t)|^2\psi(x,t) = 0,\ x \in \Omega,\ t > 0, \\ \psi(x,0) = \psi_0(x), \quad \partial_t\psi(x,0) = \psi_1(x), \quad x \in \overline{\Omega} = [a,b], \\ \psi(a,t) = \psi(b,t), \quad \partial_x\psi(a,t) = \partial_x\psi(b,t), \quad t \ge 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

对于整数$m \ge 0$，我们将$H^m(\Omega)$定义为函数空间，其中函数$u(x) \in L^2(\Omega)$的H^m范数有限，其定义为

$$\|u\|_{H^m}^2 = \sum_{l\in\mathbb{Z}} (1+\mu_l^2)^m |\widehat{u}_l|^2, \text{ for } u(x) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{u}_l e^{i\mu_l(x-a)},\ \mu_l = \frac{2\pi l}{b-a}, \tag{2.2}$$

其中，$\widehat{u}_l$ $(l \in \mathbb{Z})$是函数$u(x)$ [2, 6]的傅里叶系数。事实上，空间$H^m(\Omega)$是经典 Sobolev 空间$W^{m,2}(\Omega)$的子空间，由导数阶数不超过$m-1$ 且满足 $(b-a)$周期性的函数 [28]组成。由于我们考虑的是周期边界条件，上述空间$H^m(\Omega)$ 是合适的。

令 $\tau = \Delta t > 0$ 为时间步长，并令 $t_n = n\tau$ （$n = 0, 1, \ldots$）为时间步。选择网格尺寸 $h = \Delta x := (b-a)/M$，其中 M 为偶正整数，则网格点记为

$$x_j := a + jh, \quad j \in \mathscr{T}_M^0 = \{j \mid j = 0, 1, \ldots, M\}.$$

记索引集为 $\mathrm{T}_M = \left\{ l \mid l = -\frac{M}{2}+1, \ldots, \frac{M}{2}-1 \right\}$，以及 $C_{\mathrm{per}}(\Omega) = \{u \in C(\overline{\Omega}) \mid u(a) = u(b)\}$ 和空间

$$X_M := \left\{ u = (u_0, u_1, \ldots, u_M)^T \in \mathbb{C}^{M+1} \mid u_0 = u_M \right\},$$
$$Y_M := \operatorname{span}\left\{ e^{i\mu_l(x-a)},\ x \in \overline{\Omega},\ l \in \mathscr{T}_M \right\}.$$

对于任意$u(x) \in C_{\mathrm{per}}(\Omega)$以及向量$u \in X_M$，令$P_M: L^2(\Omega) \to Y_M$为投影到$Y_M$ 上的标准L^2-投影算子，并令$I_M : C_{\mathrm{per}}(\Omega) \to Y_M$ 或$I_M : X_M \to Y_M$ 为三角插值算子 [28], ，即:

$$P_M u(x) = \sum_{l \in \mathscr{T}_M} \widehat{u}_l e^{i\mu_l(x-a)}, \quad I_M u(x) = \sum_{l \in \mathscr{T}_M} \widetilde{u}_l e^{i\mu_l(x-a)}, \quad x \in \overline{\Omega},$$

其中

$$\widehat{u}_l = \frac{1}{b-a}\int_a^b u(x) e^{-i\mu_l(x-a)} dx, \quad \widetilde{u}_l = \frac{1}{M}\sum_{j=0}^{M-1} u_j e^{-i\mu_l(x_j-a)}, \quad l \in \mathscr{T}_M,$$

其中，uj 在涉及$u(x_j)$ 时解释为$u(x_j)$ 。

NLSW (2.1) 的傅里叶谱离散形式为求

$$\psi_M(x,t) = \sum_{l \in \mathscr{T}_M} \widehat{\psi_l}(t) e^{i\mu_l(x-a)}, \quad x \in \Omega,\ t \geq 0, \tag{2.3}$$

使得

$$(i\partial_t - \alpha\partial_{tt})\psi_M(x,t) + \partial_{xx}\psi_M(x,t) - \varepsilon^2 P_M(f(\psi_M(x,t))) = 0, \tag{2.4}$$

其中$f(v) = |v|^2 v$。将 (2.3) 代入 (2.4)，利用傅里叶基函数的正交性，可得

$$i\frac{d}{dt}\widehat{\psi_l}(t) - \alpha\frac{d^2}{dt^2}\widehat{\psi_l}(t) - |\mu_l|^2\widehat{\psi_l}(t) - \varepsilon^2\widehat{(f(\psi_M))_l}(t) = 0, \quad l \in \mathscr{T}_M,\ t > 0. \tag{2.5}$$

对于每个 $l \in \mathrm{T}_M$，当t 接近$t_n = n\tau$ ($n \geq 0$)时，上述常微分方程可改写为

$$i\frac{d}{ds}\widehat{\psi_l}(t_n+s) - \alpha\frac{d^2}{ds^2}\widehat{\psi_l}(t_n+s) - |\mu_l|^2\widehat{\psi_l}(t_n+s) - \varepsilon^2 f_l^n(s) = 0,\ s \in \mathbb{R}, \tag{2.6}$$

其中

$$f_l^n(s) = \widehat{(f(\psi_M(t_n+s)))_l}. \tag{2.7}$$

现在，我们继续采用指数波积分器求解二阶常微分方程 (2.6)。根据常数变易公式或杜哈梅尔原理，对于 $n \geq 0$,

$$\widehat{\psi_l}(t_n+s) = e^{i\beta_l^+ s}\left(-\frac{\beta_l^-\widehat{\psi_l}(t_n) + i\partial_t\widehat{\psi_l}(t_n)}{\beta_l}\right) + e^{i\beta_l^- s}\left(\frac{\beta_l^+\widehat{\psi_l}(t_n) + i\partial_t\widehat{\psi_l}(t_n)}{\beta_l}\right)$$
$$+ \frac{i\varepsilon^2}{\alpha\beta_l}\int_0^s \kappa_l(s-w) f_l^n(w) dw, \quad 0 \leq s \leq \tau, \tag{2.8}$$

其中

$$\begin{aligned}\beta_l^+ &= \frac{1+\sqrt{1+4\alpha|\mu_l|^2}}{2\alpha},\\ \beta_l^- &= \frac{1-\sqrt{1+4\alpha|\mu_l|^2}}{2\alpha} = \frac{-2|\mu_l|^2}{1+\sqrt{1+4\alpha|\mu_l|^2}},\\ \beta_l &= \beta_l^+ - \beta_l^- = \frac{\sqrt{1+4\alpha|\mu_l|^2}}{\alpha},\end{aligned} \tag{2.9}$$

并且积分核定义为

$$\kappa_l(s) = e^{i\beta_l^+ s} - e^{i\beta_l^- s}. \tag{2.10}$$

对于 $n=0$，在 (2.8) 中取 $s=\tau$，由初始条件可得

$$\begin{aligned}\widehat{\psi_l}(\tau) &= e^{i\beta_l^+\tau}\left(-\frac{\beta_l^-\widehat{\psi_l}(0)+i\partial_t\widehat{\psi_l}(0)}{\beta_l}\right)+e^{i\beta_l^-\tau}\left(\frac{\beta_l^+\widehat{\psi_l}(0)+i\partial_t\widehat{\psi_l}(0)}{\beta_l}\right)\\ &\quad+\frac{i\varepsilon^2}{\alpha\beta_l}\int_0^\tau \kappa_l(\tau-w)f_l^0(w)dw\\ &= \frac{\beta_l^+e^{i\beta_l^-\tau}-\beta_l^-e^{i\beta_l^+\tau}}{\beta_l}\widehat{(\psi_0)}_l - i\tau e^{\frac{i\tau}{2\alpha}}\mathrm{sinc}(\tau\beta_l/2)\widehat{(\psi_1)}_l\\ &\quad+\frac{i\varepsilon^2}{\alpha\beta_l}\int_0^\tau \kappa_l(\tau-w)f_l^0(w)dw,\end{aligned} \tag{2.11}$$

其中 *sinc* 函数定义为

$$\mathrm{sinc}(s) = \frac{\sin(s)}{s} \quad \text{for} \quad s\neq 0, \text{ and} \quad \mathrm{sinc}(0)=1. \tag{2.12}$$

对于 $n\geq 1$，在 (2.8) 中取 $s=\pm\tau$ 并消去导数项 $\partial_t\psi_l(t_n)$，可得

$$\begin{aligned}\widehat{\psi_l}(t_{n+1}) &= -e^{\frac{i\tau}{\alpha}}\widehat{\psi_l}(t_{n-1}) + 2e^{\frac{i\tau}{2\alpha}}\cos(\beta_l\tau/2)\widehat{\psi_l}(t_n) + \frac{i\varepsilon^2}{\alpha\beta_l}\int_0^\tau \kappa_l(\tau-w)f_l^n(w)dw\\ &\quad-\frac{i\varepsilon^2 e^{\frac{i\tau}{\alpha}}}{\alpha\beta_l}\int_0^\tau \kappa_l(-w)f_l^{n-1}(w)dw.\end{aligned} \tag{2.13}$$

为方便起见，我们为 $l\in \mathrm{T}_M$ 引入以下记号，

$$\sigma_l^+(s) = e^{i\beta_l^+ s/2}\mathrm{sinc}\left(\frac{\beta_l^+ s}{2}\right), \quad \sigma_l^-(s) = e^{i\beta_l^- s/2}\mathrm{sinc}\left(\frac{\beta_l^- s}{2}\right), \quad s\in\mathbb{R}.$$

接下来，我们将分别近似式 (2.11) 和 (2.13) 中的积分。对于 $n=0$，通过

泰勒展开，当 $l \neq 0$ 时，可得

$$\begin{aligned}
&\int_0^\tau \kappa_l(\tau-w) f_l^0(w) dw \\
&\approx \int_0^\tau \kappa_l(\tau-w)\left(f_l^0(0)+w\partial_t f_l^0(0)\right) dw \\
&= \tau f_l^0(0)\left(\sigma_l^+(\tau)-\sigma_l^-(\tau)\right)+i\tau\partial_t f_l^0(0)\left(\frac{1-\sigma_l^+(\tau)}{\beta_l^+}-\frac{1-\sigma_l^-(\tau)}{\beta_l^-}\right), \qquad (2.14)\\
&\int_0^\tau \kappa_l(-w) f_l^0(w) dw \\
&\approx \tau f_l^0(0)\left(\overline{\sigma_l^+(\tau)}-\overline{\sigma_l^-(\tau)}\right)+i\tau\partial_t f_l^0(0)\left(\frac{1-\sigma_l^+(\tau)}{\beta_l^+ e^{i\beta_l^+\tau}}-\frac{1-\sigma_l^-(\tau)}{\beta_l^- e^{i\beta_l^-\tau}}\right), \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

且当 $l = 0$ 时，随着 $\beta_0^- = 0$，我们有

$$\begin{aligned}
&\int_0^\tau \kappa_0(\tau-w) f_0^0(w) dw \\
&\approx \int_0^\tau \kappa_0(\tau-w)\left(f_0^0(0)+w\partial_t f_0^0(0)\right) dw \\
&= \tau f_0^0(0)\left(\sigma_0^+(\tau)-1\right)+i\tau\partial_t f_0^0(0)\left(\frac{1-\sigma_0^+(\tau)}{\beta_0^+}+\frac{i\tau}{2}\right), \qquad (2.16)\\
&\int_0^\tau \kappa_0(-w) f_0^0(w) dw \\
&\approx \tau f_0^0(0)\left(\overline{\sigma_0^+(\tau)}-1\right)+i\tau\partial_t f_0^0(0)\left(\frac{1-\sigma_0^+(\tau)}{\beta_0^+ e^{i\beta_0^+\tau}}+\frac{i\tau}{2}\right), \qquad (2.17)
\end{aligned}$$

其中 $\partial_t f_0^0(0)$可以准确计算，因为初始条件中已知 $\partial_t\psi(x、0) = \psi_1(x)$。对于 $n \geq 1$，当 $l \neq 0$时，我们采用类似的近似方法：

$$\begin{aligned}
&\int_0^\tau \kappa_l(\tau-w) f_l^n(w) dw \\
&\approx \int_0^\tau \kappa_l(\tau-w)\left(f_l^n(0)+w\partial_t f_l^n(0)\right) dw \\
&= \tau f_l^n(0)\left(\sigma_l^+(\tau)-\sigma_l^-(\tau)\right)+i\tau\delta_t^- f_l^n(0)\left(\frac{1-\sigma_l^+(\tau)}{\beta_l^+}-\frac{1-\sigma_l^-(\tau)}{\beta_l^-}\right), \qquad (2.18)\\
&\int_0^\tau \kappa_l(-w) f_l^n(w) dw \\
&\approx \tau f_l^n(0)\left(\overline{\sigma_l^+(\tau)}-\overline{\sigma_l^-(\tau)}\right)+i\tau\delta_t^- f_l^n(0)\left(\frac{1-\sigma_l^+(\tau)}{\beta_l^+ e^{i\beta_l^+\tau}}-\frac{1-\sigma_l^-(\tau)}{\beta_l^- e^{i\beta_l^-\tau}}\right), \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

而当 $l=0$时，有：

$$\begin{aligned}
&\int_0^\tau \kappa_0(\tau-w)f_0^n(w)dw\\
&\approx \int_0^\tau \kappa_0(\tau-w)\big(f_0^n(0)+w\partial_t f_0^n(0)\big)dw\\
&=\tau f_0^n(0)\big(\sigma_0^+(\tau)-1\big)+i\tau\delta_t^- f_0^n(0)\left(\frac{1-\sigma_0^+(\tau)}{\beta_0^+}+\frac{i\tau}{2}\right), \qquad (2.20)\\
&\int_0^\tau \kappa_0(-w)f_0^n(w)dw\\
&\approx \tau f_0^n(0)\big(\overline{\sigma_0^+(\tau)}-1\big)+i\tau\delta_t^- f_0^n(0)\left(\frac{1-\sigma_0^+(\tau)}{\beta_0^+ e^{i\beta_0^+\tau}}+\frac{i\tau}{2}\right), \qquad (2.21)
\end{aligned}$$

其中，有限差分 $\delta^-{}_t f^n{}_0(0):=(f^n{}_0(0)-f^{n-1}{}_0(0))/\tau$ 是 $\partial_t f^n{}_0(0)$的近似。

设 $\psi^n{}_M(x)$是 $\psi_M(x、t_n)$的近似，并将 $g(\phi(x、t_n))$关于 $\phi(x、t)$记为

$$g(\phi(0))=\frac{d}{dt}f(\phi(t))|_{t=0},\quad g(\phi(t_n))=\delta_t^- f(\phi(t_n)),\ n\geq 1, \qquad (2.22)$$

那么，傅里叶谱方法可表述如下。取 $\psi^0{}_M=P_M\psi_0$，然后可将 $n\geq 0$ 对应的近似 $\psi^{n+1}{}_M\in Y_M$ 更新为

$$\psi_M^{n+1}(x)=\sum_{l\in\mathcal{T}_M}\widehat{(\psi_M^{n+1})}_l e^{i\mu_l(x-a)},\quad x\in\overline{\Omega}, \qquad (2.23)$$

with

$$\widehat{(\psi_M^1)}_l=c_l^0\widehat{(\psi_M^0)}_l+d_l^0\widehat{(\psi_1)}_l+p_l\widehat{(f(\psi_M^0))}_l+q_l\widehat{(g(\psi_M^0))}_l, \qquad (2.24)$$

$$\begin{aligned}
\widehat{(\psi_M^{n+1})}_l=&\,c_l\widehat{(\psi_M^{n-1})}_l+d_l\widehat{(\psi_M^n)}_l+p_l\widehat{(f(\psi_M^n))}_l+q_l\widehat{(g(\psi_M^n))}_l\\
&-p_l^*\widehat{(f(\psi_M^{n-1}))}_l-q_l^*\widehat{(g(\psi_M^{n-1}))}_l,\quad n\geq 1, \qquad (2.25)
\end{aligned}$$

其中，式 (2.22) 中定义的 $g(\psi^n{}_M)$ $(n\geq 0)$ 可通过以下方式计算：

$$\begin{aligned}
&g(\psi_M^0)=2|\psi_M^0|^2P_M(\psi_1)+(\psi_M^0)^2\overline{P_M(\psi_1)},\\
&g(\psi_M^n)=\delta_t^- f(\psi_M^n)=\frac{f(\psi_M^n)-f(\psi_M^{n-1})}{\tau},\quad n\geq 1,
\end{aligned}$$

而式 (2.24)–(2.25) 中的系数为：

$$
\begin{aligned}
&c_l^0 = \frac{\beta_l^+ e^{i\beta_l^- \tau} - \beta_l^- e^{i\beta_l^+ \tau}}{\beta_l}, \quad d_l^0 = -i\tau e^{\frac{i\tau}{2\alpha}} \operatorname{sinc}(\tau\beta_l/2), \\
&c_l = -e^{\frac{i\tau}{\alpha}}, \quad d_l = 2e^{\frac{i\tau}{2\alpha}} \cos(\tau\beta_l/2), \\
&p_l = \frac{i\varepsilon^2\tau}{\alpha\beta_l}\left(\sigma_l^+(\tau) - \sigma_l^-(\tau)\right) \ (l \neq 0), \quad p_0 = \frac{i\varepsilon^2\tau}{\alpha\beta_0}\left(\sigma_0^+(\tau) - 1\right), \\
&p_l^* = \frac{i\varepsilon^2\tau e^{\frac{i\tau}{\alpha}}}{\alpha\beta_l}\left(\overline{\sigma_l^+(\tau)} - \overline{\sigma_l^-(\tau)}\right) \ (l \neq 0), \quad p_0^* = \frac{i\varepsilon^2\tau e^{\frac{i\tau}{\alpha}}}{\alpha\beta_0}\left(\overline{\sigma_0^+(\tau)} - 1\right), \\
&q_l = \frac{-\varepsilon^2\tau}{\alpha\beta_l}\left(\frac{1-\sigma_l^+(\tau)}{\beta_l^+} - \frac{1-\sigma_l^-(\tau)}{\beta_l^-}\right) \ (l \neq 0), \\
&q_0 = \frac{-\varepsilon^2\tau}{\alpha\beta_0}\left(\frac{1-\sigma_0^+(\tau)}{\beta_0^+} + \frac{i\tau}{2}\right), \\
&q_l^* = \frac{-\varepsilon^2\tau e^{\frac{i\tau}{\alpha}}}{\alpha\beta_l}\left(\frac{1-\sigma_l^+(\tau)}{\beta_l^+ e^{i\beta_l^+\tau}} - \frac{1-\sigma_l^-(\tau)}{\beta_l^- e^{i\beta_l^-\tau}}\right) \ (l \neq 0), \\
&q_0^* = \frac{-\varepsilon^2\tau e^{\frac{i\tau}{\alpha}}}{\alpha\beta_0}\left(\frac{1-\sigma_0^+(\tau)}{\beta_0^+ e^{i\beta_0^+\tau}} + \frac{i\tau}{2}\right).
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

通过直接计算和（2.9）可得 $|c_l|, |d_l|, |c^0{}_l| \circledR 1, |d^0{}_l| \circledR \tau^2, |p_l|, |p^*{}_l| \circledR \varepsilon^2\tau$ 以及 $|q_l|, |q^*{}_l| \circledR \varepsilon^2\tau^2$，其中 $l \in \mathrm{T}_M$。

在实际模拟中，由于难以计算（2.24）–（2.25）中的傅里叶系数，上述格式并不适用。因此，我们用插值代替投影，从而得到完整的离散化 EWI-FP 格式。令 $\psi^n{}_j\,(n \geq 1)$ 为 $\psi(x_j, t_n)$ 的近似值，并取 $\psi^0{}_j = \psi_0(x_j)$，其中 $j \in \mathrm{T}^{\,0}{}_M$，则在 $t = t_{n+1}$ （$\mathrm{n} = 0,\ 1,\ \ldots$）时的数值近似 $\psi^{n+1} = (\psi_0^{n+1}, \psi_1^{n+1}, \ldots,\ \psi^{n+1}{}_M)^T \in X_M$ 可通过以下方式计算：

$$
\psi_j^{n+1} = \sum_{l \in \mathscr{T}_M} \widetilde{(\psi^{n+1})}_l e^{i\mu_l(x_j - a)}, \quad j \in \mathscr{T}_M^0, \tag{2.27}
$$

with

$$
\widetilde{(\psi^1)}_l = c_l^0 \widetilde{(\psi_0)}_l + d_l^0 \widetilde{(\psi_1)}_l + p_l \widetilde{(f(\psi_0))}_l + q_l \widetilde{(g(\psi_0))}_l, \quad l \in \mathscr{T}_M, \tag{2.28}
$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{(\psi^{n+1})}_l = {} & c_l \widetilde{(\psi^{n-1})}_l + d_l \widetilde{(\psi^n)}_l + p_l \widetilde{(f(\psi^n))}_l + q_l \widetilde{(g(\psi^n))}_l \\
& - p_l^* \widetilde{(f(\psi^{n-1}))}_l - q_l^* \widetilde{(g(\psi^{n-1}))}_l, \quad l \in \mathscr{T}_M, \quad n \geq 1,
\end{aligned} \tag{2.29}
$$

其中，系数$c^0{}_l$、$d^0{}_l$、c^l、d_l、p_l、$p^*{}_l$、q^l和$q^*{}_l$由式（2.26）给出，而由式（2.22）定义的$g(\psi^n)$可通过以下方式计算：

$$
g(\psi_0) = 2|\psi_0|^2\psi_1 + (\psi_0)^2\overline{\psi_1}, \quad g(\psi^n) = \delta_t^- f(\psi^n), \quad n \geq 1. \tag{2.30}
$$

EWI-FP 是显式的，并且得益于快速傅里叶变换，可以高效实现。每个时间步长的计算开销为 $O(M \log M)$，内存开销为 $O(M)$。

3 长时间动力学的一致误差界

本节将严格证明 EWI-FP 方法对带波算子的非线性薛定谔方程 (2.1) 在时间范围 $t \in [0, T/\varepsilon^{\beta}]$ 内的一致误差界，其中 $T > 0$ 固定且 $0 \le \beta \le 2$。

3.1 主要结果

我们假设，对于某个整数 $m \ge 2$，带波算子非线性薛定谔方程 (2.1) 的精确解 $\psi(x, t)$ 在时间 $T_\varepsilon = T/\varepsilon^{\beta}$ 之前满足

$$\text{(A)} \quad \|\psi\|_{L^\infty([0,T_\varepsilon];W^{1,\infty}\cap H^m)} + \|\partial_t \psi\|_{L^\infty([0,T_\varepsilon];H^1)} + \|\partial_{tt}\psi\|_{L^\infty([0,T_\varepsilon];H^1)} \lesssim 1,$$

且初始数据满足

$$\text{(B)} \quad \|\psi_0(x)\|_{H^{m+2}} \lesssim 1.$$

记

$$M_1 = \sup_{\varepsilon\in(0,1]} \sup_{t\in[0,T_\varepsilon]} \|\psi(\cdot, t)\|_{L^\infty},$$

则指数波积分傅里叶伪谱方法具有以下误差估计。

定理 1. 设 $\psi^n \in X\, M$ 为通过 *EWI-FP*(2.27)–(2.29) 得到的 $\psi(x, t_n)$ 的数值近似，其中 $0 < \alpha \le 1$ 固定。在假设 (A) 和 (B)下，存在常数 $h_0 > 0$和 $\tau_0 > 0$，它们充分小且与 ε 无关；当 $0 < h < h_0, 0 < \tau < \tau_0$ 时，我们有

$$\begin{aligned} &\|\psi(x, t_n) - I_M \psi^n\|_{H^1} \lesssim h^{m-1} + \varepsilon^{2-\beta}\tau^2, \\ &\|\psi^n\|_{l^\infty} \le 1 + M_1, \quad 0 \le n \le \frac{T/\varepsilon^{\beta}}{\tau}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

对任意 $0 < \varepsilon \le 1$ 和 $0 \le \beta \le 2$。

注1. 一致误差界可推广至 $p \ge 1$ 的情形，即

$$\begin{aligned} &\|\psi(x, t_n) - I_M \psi^n\|_{H^1} \lesssim h^{m-1} + \varepsilon^{2p-\beta}\tau^2, \\ &\|\psi^n\|_{l^\infty} \le 1 + M_1, \quad 0 \le n \le \frac{T/\varepsilon^{\beta}}{\tau}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

对任意 $0 < \varepsilon \le 1$ 和 $0 \le \beta \le 2p$。

注2. 在二维/*3D* 情形下，根据相应的离散索伯列夫不等式，定理 *1* 在条件 $\tau \lesssim \varepsilon^{\beta/2-1} C_d(h)$ 下仍然成立，其中二维情况下 $C_d(h) = 1/|\ln h|$，三维情况下 $C_d(h) = h^{1/2}$。

为了建立误差界 (3.1)，我们定义误差函数

$$e^n(x) := \psi(x, t_n) - I_M \psi^n, \quad 0 \le n \le \frac{T/\varepsilon^{\beta}}{\tau}, \tag{3.3}$$

然后我们根据正则性假设得到 [25, 28]

$$\begin{aligned}\|e^n(x)\|_{H^1} &\le \|\psi(x,t_n)-P_M\psi(x,t_n)\|_{H^1}+\|P_M\psi(x,t_n)-I_M\psi^n\|_{H^1}\\ &\le C_1h^{m-1}+\|P_M\psi(x,t_n)-I_M\psi^n\|_{H^1},\end{aligned}\tag{3.4}$$

其中C_1是一个与h、$n\tau$和 ε无关的常数。因此，只需研究误差$e^n{}_M\in Y_M$，其定义如下：

$$e_M^n(x)=P_M\psi(x,t_n)-I_M\psi^n,\quad 0\le n\le\frac{T/\varepsilon^\beta}{\tau}.\tag{3.5}$$

3.2 预备估计

本小节将准备一些用于证明主要定理的结果。在下述表述中，为简洁起见，若无歧义，我们将 $\psi($ $t)$ 简记为 $\psi(x、t)$。

对于 $\phi=(\phi_0,\phi_1,\cdots,\phi_M)\in X_M$，定义$X_M$上的$l^2$-范数和$l^\infty$-范数如下：

$$\|\phi\|_{l^2}^2=h\sum_{j=0}^{M-1}|\phi_j|^2,\quad \|\phi\|_{l^\infty}=\max_{0\le j\le M-1}|\phi_j|,$$

于是可得如下误差估计。证明思路与 [2, 25, 28] 中的类似，为简洁起见，此处省略细节。

引理 1. 设 $\phi(x)\in H^1(\Omega)$, $\phi=(\phi_0,\phi_1,\cdots,\phi_M)^T$满足 $\phi_j=\phi(xj)(j\in\mathcal{T}^0M)$，则有

$$\left\|\delta_x^+\phi\right\|_{l^2}\lesssim\|\nabla I_M\phi\|_{L^2}\lesssim\left\|\delta_x^+\phi\right\|_{l^2},\tag{3.6}$$

其中 δ^+x $\phi_M=(\phi_1-\phi_M)/h$。

定义局部截断误差 $\xi^n(x)\in Y_M$ 为

$$\xi^n(x)=\sum_{l\in\mathcal{T}_M}\widehat{(\xi^n)}_l e^{i\mu_l(x-a)},\tag{3.7}$$

其中

$$\widehat{(\xi^0)}_l=\widehat{(\psi(\tau))}_l-c_l^0\widehat{(\psi_0)}_l-d_l^0\widehat{(\psi_1)}_l-p_l\widehat{(f(\psi_0))}_l-q_l\widehat{(g(\psi_0))}_l,\tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}\widehat{(\xi^n)}_l=&\widehat{(\psi(t_{n+1}))}_l-c_l\widehat{(\psi(t_{n-1}))}_l-d_l\widehat{(\psi(t_n))}_l-p_l\widehat{(f(\psi(t_n)))}_l\\&-q_l\widehat{(g(\psi(t_n)))}_l+p_l^*\widehat{(f(\psi(t_{n-1})))}_l+q_l^*\widehat{(g(\psi(t_{n-1})))}_l,\quad n\ge1,\end{aligned}\tag{3.9}$$

于是我们有以下结果。

引理 2. 在假设 (A) 和 (B)下，对于(3.7) 中定义的 $\xi^n(x)$，其中满足(3.8)–(3.9)，当 $l\in\mathcal{T}_M$ 时，我们有如下分解，

$$\widehat{(\xi^0)}_l=e^{i\beta_l^+\tau}\widehat{(\xi^{0,+})}_l-e^{i\beta_l^-\tau}\widehat{(\xi^{0,-})}_l,\tag{3.10}$$

$$\widehat{(\xi^n)}_l=e^{i\beta_l^+\tau}\widehat{(\xi^{n,+})}_l-e^{i\beta_l^-\tau}\widehat{(\xi^{n,-})}_l-e^{\frac{i\tau}{\alpha}}(\widehat{(\xi^{n-1,+})}_l-\widehat{(\xi^{n-1,-})}_l),\quad n\ge1,\tag{3.11}$$

且 $\xi^{n,\pm}(x)=\sum_{l\in\mathcal{T}_M}(\xi^{n,\pm})_l e^{i\mu_l(x-a)}\in Y_M$。于是，我们得到误差界

$$\|\xi^{n,\pm}(x)\|_{H^1}\lesssim \varepsilon^2\tau(\tau^2+h^{m-1}). \tag{3.12}$$

此外，(2.26) 中给出的系数可以拆分为

$$\begin{aligned}
&p_l=e^{i\beta_l^+\tau}p_l^+-e^{i\beta_l^-\tau}p_l^-,\quad p_l^*=e^{\frac{i\tau}{\alpha}}\left(p_l^+-p_l^-\right)\\
&q_l=e^{i\beta_l^+\tau}q_l^+-e^{i\beta_l^-\tau}q_l^-,\quad q_l^*=e^{\frac{i\tau}{\alpha}}\left(q_l^+-q_l^-\right),\\
&p_l^+=\frac{i\varepsilon^2\tau}{\alpha\beta_l}\overline{\sigma_l^+(\tau)},\quad p_l^-=\frac{i\varepsilon^2\tau}{\alpha\beta_l}\overline{\sigma_l^-(\tau)}\quad(l\neq 0),\quad p_0^-=\frac{i\varepsilon^2\tau^2}{\alpha\beta_0},\\
&q_l^+=\frac{-\varepsilon^2\tau}{\alpha\beta_l}\cdot\frac{1-\sigma_l^+(\tau)}{\beta_l^+e^{i\beta_l^+\tau}},\\
&q_l^-=\frac{-\varepsilon^2\tau}{\alpha\beta_l}\cdot\frac{1-\sigma_l^-(\tau)}{\beta_l^-e^{i\beta_l^-\tau}}\quad(l\neq 0),\quad q_0^-=\frac{-i\varepsilon^2\tau^2}{2\alpha\beta_0},
\end{aligned} \tag{3.13}$$

其中 $|p^{\pm}l|\lesssim\varepsilon^2\tau, |q^{\pm}l|\lesssim\varepsilon^2\tau^2$。

证明。 在 (2.24)–(2.25) 中，将 $\psi_M(x,t)$ 替换为 $\psi(x,t)$ 后，方程对 $l\in\mathrm{T}_M$ 仍然成立。为避免混淆，我们仍使用相同的记号 $f_{nl}(s)=(f(\psi(t_n+s)))_l$。将 (2.24)–(2.25) 代入 (3.8)–(3.9)，可知对 $l\in\mathrm{T}_M$,

$$\widehat{(\xi^0)}_l=\frac{i\varepsilon^2}{\alpha\beta_l}\int_0^\tau\kappa_l(\tau-w)f_l^0(w)dw-p_l\widehat{(f(\psi_0))}_l-q_l\widehat{(g(\psi_0))}_l, \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{(\xi^n)}_l=&\frac{i\varepsilon^2}{\alpha\beta_l}\int_0^\tau\kappa_l(\tau-w)f_l^n(w)dw-\frac{i\varepsilon^2}{\alpha\beta_l}e^{\frac{i\tau}{\alpha}}\int_0^\tau\kappa_l(-w)f_l^{n-1}(w)dw\\
&-p_l\widehat{(f(\psi(t_n)))}_l-q_l\widehat{(g(\psi(t_n)))}_l\\
&+p_l^*\widehat{(f(\psi(t_{n-1})))}_l+q_l^*\widehat{(g(\psi(t_{n-1})))}_l,\quad n\geq 1.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

将积分近似误差 $Q^{n,\pm}(x)=\sum_{l\in\mathcal{T}_M}(Q^{n,\pm})_l e^{i\mu_l(x-a)}\in Y_M$ 记为

$$\widehat{(Q^{n,\pm})}_l=\frac{i\varepsilon^2}{\alpha\beta_l}\int_0^\tau e^{-i\beta_l^\pm w}f_l^n(w)dw\mp(p_l^\pm\widehat{(f(\psi(t_n)))}_l+q_l^\pm\widehat{(g(\psi(t_n)))}_l), \tag{3.16}$$

以及插值误差 $P_{n,\pm}(x)=\sum_{l\in\mathcal{T}_M}(P_{n,\pm})_l e^{i\mu_l(x-a)}\in Y_M$ 为

$$\begin{aligned}
\widehat{(P^{0,\pm})}_l=&p_l^\pm(\widehat{(f(\psi_0))}_l-\widehat{(f(\psi_0))}_l)+q_l^\pm(\widehat{(2|\psi_0|^2\psi_1)}_l\\
&+\widehat{((\psi_0)^2\overline{\psi_1})}_l-\widehat{(2|\psi_0|^2\psi_1)}_l-\widehat{((\psi_0)^2\overline{\psi_1})}_l),
\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{(P^{n,\pm})}_l=&p_l^\pm(\widehat{(f(\psi(t_n)))}_l-\widehat{(f(\psi(t_n)))}_l)\\
&+q_l^\pm(\widehat{(\delta_t^-f(\psi(t_n)))}_l-\widehat{(\delta_t^-f(\psi(t_n)))}_l).
\end{aligned} \tag{3.18}$$

将 (3.13) 与 (3.14)–(3.15) 结合，并定义

$$\xi^{n,\pm}(x) = Q^{n,\pm}(x) + P^{n,\pm}(x), \tag{3.19}$$

分解 (3.11) 成立。现在，为了估计 $\xi^{n\pm}(x)$，我们只需分别估计 $Q^{n\pm}(x)$ 和 $P_n,^{\pm}(x)$。

我们先估计 $Q^{n\pm}(x)$。根据定义 (3.16)，有

$$\begin{aligned}
\widehat{(Q^{0,\pm})}_l &= \frac{i\varepsilon^2}{\alpha\beta_l}\int_0^\tau e^{-i\beta_l^{\pm}w}(f_l^0(w) - f_l^0(0) - w\partial_t f_l^0(0))dw \\
&= \frac{i\varepsilon^2}{\alpha\beta_l}\int_0^\tau\int_0^w\int_0^{w_1} e^{-i\beta_l^{\pm}w}(\partial_{tt} f_l^0(w_2))dw_2dw_1dw, \\
\widehat{(Q^{n,\pm})}_l &= \frac{i\varepsilon^2}{\alpha\beta_l}\int_0^\tau e^{-i\beta_l^{\pm}w}(f_l^n(w) - f_l^n(0) - w\delta_t^- f_l^n(0))dw \\
&= \frac{i\varepsilon^2}{\alpha\beta_l}\int_0^\tau\int_0^w\int_0^{w_1} e^{-i\beta_l^{\pm}w}(\partial_{tt} f_l^n(w_2))dw_2dw_1dw \\
&\quad - \frac{i\varepsilon^2}{\alpha\beta_l}\int_0^\tau e^{-i\beta_l^{\pm}w} w\left(\int_0^\tau\int_0^{w_1}\partial_{tt} f_l^n(-w_2)dw_2dw_1\right)dw, \quad n \geq 1,
\end{aligned}$$

这意味着

$$|\widehat{(Q^{0,\pm})}_l| \lesssim \varepsilon^2\int_0^\tau\int_0^w\int_0^{w_1} |(\partial_{tt}\widehat{f(\psi(w_2))})_l|dw_2dw_1dw, \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}
|\widehat{(Q^{n,\pm})}_l| &\lesssim \varepsilon^2\int_0^\tau\int_0^w\int_0^{w_1} |(\partial_{tt}\widehat{f(\psi(t_n + w_2))})_l|dw_2dw_1dw \\
&\quad + \varepsilon^2\int_0^\tau\int_0^\tau\int_0^{w_1} |(\partial_{tt}\widehat{f(\psi(t_n - w_2))})_l|dw_2dw_1dw, \quad n \geq 1.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

在假设 (A) 和 (B) 下，对于 $t \in [0, T_\varepsilon]$，$\mathrm{k}\psi(x,t)\mathrm{k}_{H^1}$, $\mathrm{k}\partial_t\psi(x,t)\mathrm{k}_{H^1}$, $\mathrm{k}\partial_{tt}\psi(x,t)\mathrm{k}_{H^1}$® 1。注意到 $f(\phi) = |\phi|^2\phi$ 是光滑的，直接计算可得

$$\|\partial_{tt} f(\psi(t))\|_{H^1} \lesssim 1, \quad t \in [0, T_\varepsilon]. \tag{3.22}$$

由柯西不等式和贝塞尔不等式，对于 $n = 0$，我们有

$$\begin{aligned}
\|Q^{0,\pm}(x)\|_{H^1}^2 &= (b-a)\sum_{l\in\mathscr{T}_M}(1+|\mu_l|^2)|\widehat{(Q^{0,\pm})}_l|^2 \\
&\lesssim \varepsilon^4\sum_{l\in\mathscr{T}_M}(1+|\mu_l|^2)\left(\int_0^\tau\int_0^w\int_0^{w_1}|(\partial_{tt}\widehat{f(\psi(w_2))})_l|dw_2dw_1dw\right)^2 \\
&\lesssim \varepsilon^4\tau^3\int_0^\tau\int_0^w\int_0^{w_1}\sum_{l\in\mathscr{T}_M}(1+|\mu_l|^2)|(\partial_{tt}\widehat{f(\psi(w_2))})_l|^2dw_2dw_1dw \\
&\lesssim \varepsilon^4\tau^3\int_0^\tau\int_0^w\int_0^{w_1}\|\partial_{tt} f(\psi(w_2))\|_{H^1}^2dw_2dw_1dw \\
&\lesssim \varepsilon^4\tau^6.
\end{aligned}$$

类似地，对于 $n \geq 1$，可得

$$\begin{aligned}
\|Q^{n,\pm}(x)\|_{H^1}^2 &= (b-a)\sum_{l\in\mathscr{T}_M}(1+|\mu_l|^2)|\widehat{(Q^{n,\pm})_l}|^2 \\
&\lesssim \varepsilon^4\sum_{l\in\mathscr{T}_M}(1+|\mu_l|^2)\Big(\int_0^\tau\int_0^w\int_0^{w_1}\Big|(\partial_{tt}f(\widehat{\psi(t_n+w_2)}))_l\Big|\,dw_2dw_1dw \\
&\quad+\int_0^\tau\int_0^\tau\int_0^{w_1}\Big|(\partial_{tt}f(\widehat{\psi(t_n-w_2)}))_l\Big|\,dw_2dw_1dw\Big)^2 \\
&\lesssim \varepsilon^4\tau^3\Big(\int_0^\tau\int_0^w\int_0^{w_1}\|\partial_{tt}f(\psi(t_n+w_2))\|_{H^1}^2\,dw_2dw_1dw \\
&\quad+\int_0^\tau\int_0^\tau\int_0^{w_1}\|\partial_{tt}f(\psi(t_n-w_2))\|_{H^1}^2\,dw_2dw_1dw\Big) \\
&\lesssim \varepsilon^4\tau^6.
\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\left\|Q^{n,\pm}(x)\right\|_{H^1}\lesssim\varepsilon^2\tau^3,\quad 0\leq n\leq\frac{T/\varepsilon^\beta}{\tau}. \tag{3.23}$$

接下来，我们将估计 $P^{n,\pm}(x)$。根据定义 (3.17)–(3.18)，有

$$\begin{aligned}
\left\|P^{0,\pm}(x)\right\|_{H^1} \leq\ & p_l^{\pm}\|P_M(f(\psi_0))-I_M(f(\psi_0))\|_{H^1} \\
&+q_l^{\pm}\Big(\left\|P_M(2|\psi_0|^2\psi_1)-I_M(2|\psi_0|^2\psi_1)\right\|_{H^1} \\
&+\left\|P_M((\psi_0)^2\overline{\psi_1}))-I_M((\psi_0)^2\overline{\psi_1})\right\|_{H^1}\Big),
\end{aligned}$$

对于 $n \geq 1$，有

$$\begin{aligned}
\left\|P^{n,\pm}(x)\right\|_{H^1} \leq\ & p_l^{\pm}\|P_M(f(\psi(t_n)))-I_M(f(\psi(t_n)))\|_{H^1} \\
&+q_l^{\pm}\left\|P_M(\delta_t^-f(\psi(t_n)))-I_M(\delta_t^-f(\psi(t_n)))\right\|_{H^1}.
\end{aligned}$$

由于 $\psi(x,t),\psi_0(x),\psi_1(x)\in H_m$，显然有 $|\psi_0|^2\psi_1,(\psi_0)^2\overline{\psi_1},f(\psi(t_n)),\delta^-{}_tf(\psi(t_n))\in H_m$。注意到 $p^{\pm}{}_l\leq\varepsilon^2\tau, q^{\pm}{}_l\leq\varepsilon^2\tau^2$，可得

$$\left\|P^{n,\pm}(x)\right\|_{H^1}\lesssim\varepsilon^2(\tau h^{m-1}+\tau^2h^{m-1})\lesssim\varepsilon^2\tau h^{m-1},\quad 0\leq n\leq\frac{T/\varepsilon^\beta}{\tau}. \tag{3.24}$$

结合 $Q^{n,\pm}(x)$ 的误差界 (3.23) 和 $P^{n,\pm}(x)$ 的误差界 (3.24)，可得

$$\|\xi^{n,\pm}(x)\|_{H^1}\lesssim\varepsilon^2\tau(\tau^2+h^{m-1}),\quad 0\leq n\leq\frac{T/\varepsilon^\beta}{\tau}. \tag{3.25}$$

□

由 (3.5) 和 (3.7)，可得

$$\widehat{(e_M^1)}_l = \widehat{(\xi^0)}_l + c_l^0(\widehat{(\psi_0)}_l - \widehat{(\psi_0)}_l) + d_l^0(\widehat{(\psi_1)}_l - \widehat{(\psi_1)}_l), \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}\widehat{(e_M^{n+1})}_l &= \widehat{(\xi^n)}_l + c_l(\widehat{(\psi(t_{n-1}))}_l - \widehat{(\psi^{n-1})}_l) + d_l(\widehat{(\psi(t_n))}_l - \widehat{(\psi^n)}_l)\\ &\quad + p_l\left(\widehat{(f(\psi(t_n)))}_l - \widehat{(f(\psi^n))}_l\right) + q_l\left(\widehat{(g(\psi(t_n)))}_l - \widehat{(g(\psi^n))}_l\right)\\ &\quad - p_l^*\left(\widehat{(f(\psi(t_{n-1})))}_l - \widehat{(f(\psi^{n-1}))}_l\right) - q_l^*\left(\widehat{(g(\psi(t_{n-1})))}_l - \widehat{(g(\psi^{n-1}))}_l\right)\\ &= \widehat{(\xi^n)}_l + \widehat{(\eta^n)}_l + c_l\widehat{(e_M^n)}_l + d_l\widehat{(e_M^{n-1})}_l, \quad n \geq 1,\end{aligned} \tag{3.27}$$

其中 $\eta^n(x) = \sum_{l\in\mathscr{T}_M} \widehat{(\eta^n)}_l e^{i\mu_l(x-a)} \in Y_M$对于 $n \geq 1$的定义为

$$\begin{aligned}\widehat{(\eta^n)}_l &= p_l(\widehat{(f(\psi(t_n)))}_l - \widehat{(f(\psi^n))}_l) + q_l(\widehat{(g(\psi(t_n)))}_l - \widehat{(g(\psi^n))}_l)\\ &\quad - p_l^*(\widehat{(f(\psi(t_{n-1})))}_l - \widehat{(f(\psi^{n-1}))}_l) - q_l^*(\widehat{(g(\psi(t_{n-1})))}_l - \widehat{(g(\psi^{n-1}))}_l),\end{aligned} \tag{3.28}$$

那么，我们得到以下关于 $\eta^n(x)$ 的分解和估计。

引理 3. 在假设 *(A)* 和 *(B)* 下，对于 $l \in \mathscr{T}_M$，我们有以下分解

$$\widehat{(\eta^n)}_l = e^{i\beta_l^+\tau}\widehat{(\eta^{n,+})}_l - e^{i\beta_l^-\tau}\widehat{(\eta^{n,-})}_l - e^{\frac{i\tau}{\alpha}}(\widehat{(\eta^{n-1,+})}_l - \widehat{(\eta^{n-1,-})}_l), \quad n \geq 1, \tag{3.29}$$

and $\eta^{n,\pm}(x) = \sum_{l\in\mathscr{T}_M} \widehat{(\eta^{n,\pm})}_l e^{i\mu_l(x-a)} \in Y_M$. *假设* $\|\psi^n\|_{l^\infty} \leq M_1 + 1$，*我们有估计*

te

$$\left\|\eta^{n,\pm}(x)\right\|_{H^1} \lesssim \varepsilon^2\tau\left(\left\|e_M^{n-1}\right\|_{H^1} + \left\|e_M^n\right\|_{H^1} + h^{m-1}\right), \quad n \geq 1. \tag{3.30}$$

证明。定义 $\eta^{n,\pm}(x)$ 为

$$\widehat{(\eta^{n,\pm})}_l = p_l^\pm(\widehat{(f(\psi(t_n)))}_l - \widehat{(f(\psi^n))}_l) + q_l^\pm(\widehat{(g(\psi(t_n)))}_l - \widehat{(g(\psi^n))}_l), \tag{3.31}$$

那么容易验证，分解式 (3.29) 成立。注意到 $\widehat{(f(\psi(t_0)))}_l = \widehat{(f(\psi^0))}_l, \widehat{(g(\psi(t_0)))}_l = \widehat{(g(\psi^0))}_l$，以及式 (2.22) 中 g 对 $n \geq 1$ 的定义，我们得到

$$\widehat{(\eta^{n,\pm})}_l = \begin{cases} 0, \quad n = 0,\\ p_l^\pm(\widehat{(f(\psi(t_n)))}_l - \widehat{(f(\psi^n))}_l)\\ \quad + q_l^\pm(\widehat{(\delta_t^- f(\psi(t_n)))}_l - \widehat{(\delta_t^- f(\psi^n))}_l), \quad n \geq 1.\end{cases} \tag{3.32}$$

由帕塞瓦尔等式和柯西不等式，注意到 $|p^\pm{}_l| \lesssim \varepsilon^2\tau, |q^\pm{}_l| \lesssim \varepsilon^2\tau^2$，可得

$$\begin{aligned}\left\|\eta^{n,\pm}(x)\right\|_{H_1}^2 &= (b-a)\sum_{l\in\mathscr{T}_M}(1+|\mu_l|^2)|\widehat{(\eta^{n,\pm})}_l|^2\\ &\lesssim \varepsilon^4\tau^2(b-a)\sum_{l\in\mathscr{T}_M}(1+|\mu_l|^2)|\widehat{(f(\psi(t_n)))}_l - \widehat{(f(\psi^n))}_l|^2\\ &\quad + \varepsilon^4\tau^4(b-a)\sum_{l\in\mathscr{T}_M}(1+|\mu_l|^2)|\widehat{(\delta_t^- f(\psi(t_n)))}_l - \widehat{(\delta_t^- f(\psi^n))}_l|^2\\ &\lesssim \varepsilon^4\tau^2\left\|I_M(f(\psi(t_n))) - I_M(f(\psi^n))\right\|_{H^1}^2\\ &\quad + \varepsilon^4\tau^4\left\|I_M(\delta_t^- f(\psi(t_n))) - I_M(\delta_t^- f(\psi^n))\right\|_{H^1}^2.\end{aligned} \tag{3.33}$$

我们将估计（3.33）右端的两项。根据假设 $\|\psi^n\|_{l^\infty} \le M_1+1$，$f$在区间 $[-(M_1+1)$ 上局部 Lipschitz 连续，$M_1+1]$，其中 C^{M_1} 为利普希茨系数。因此，可得

$$\begin{aligned}
&\|I_M(f(\psi(t_n)))-I_M(f(\psi^n))\|_{L^2}^2 = h\sum_{j=0}^{M-1}|f(\psi(x_j,t_n))-f(\psi_j^n)|^2\\
&\le C_{M_1}h\sum_{j=0}^{M-1}|\psi(x_j,t_n)-\psi_j^n|^2 = C_{M_1}\|I_M(\psi(t_n))-I_M\psi^n\|_{L^2}^2\\
&\le 2C_{M_1}\left(\|I_M\psi(t_n)-P_M\psi(t_n)\|_{L^2}^2+\|P_M\psi(t_n)-I_M\psi^n\|_{L^2}^2\right)\\
&\lesssim h^{2m}+\left\|e_M^n(x)\right\|_{L^2}^2, \qquad (3.34)
\end{aligned}$$

为估计 $\|\nabla(I_M(f(\psi(t_n)))-I_M(f(\psi^n)))\|_{L^2}$，根据引理 1，还需估计

$$\left\|\delta_x^+(f(\psi(x_j,t_n))-f(\psi_j^n))\right\|_{l^2}.$$

它可写为

$$\begin{aligned}
\delta_x^+(f(\psi(x_j,t_n))-f(\psi_j^n)) = &\int_0^1 |\phi_{1,j}(\theta)|^2\delta_x^+\psi(x_j,t_n)-|\phi_{2,j}(\theta)|^2\delta_x^+\psi_j^n d\theta\\
&+\int_0^1(\phi_{1,j}(\theta))^2\delta_x^+\overline{\psi(x_j,t_n)}-(\phi_{2,j}(\theta))^2\delta_x^+\overline{\psi_j^n}d\theta,
\end{aligned}$$

其中，对于 $0\le\theta\le 1$,

$$\phi_{1,j}(\theta)=\theta\psi(x_{j+1},t_n)+(1-\theta)\psi(x_j,t_n),\quad \phi_{2,j}(\theta)=\theta\psi_{j+1}^n+(1-\theta)\psi_j^n.$$

在假设 $\|\psi^n\|_{l^\infty}\le M_1+1$ 下，显然 $|\phi_{1,j}(\theta)|,|\phi_{2,j}(\theta)|\le M_1+1$。此外，假设 (A) 意味着 $\|\delta^+{}_x\psi(x_j,t_n)\|_{l^\infty}\le\|\partial_x\psi(x,t_n)\|_{L^\infty}\le 1$。于是，根据 $|\cdot|^2$ 的局部利普希茨性质，对于 $j\in\mathrm{T}^0{}_M$，我们有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^1|\phi_{1,j}(\theta)|^2\delta_x^+\psi(x_j,t_n)-|\phi_{2,j}(\theta)|^2\delta_x^+\psi_j^n d\theta\right|\\
&\le\left|\int_0^1\left(|\phi_{1,j}(\theta)|^2-|\phi_{2,j}(\theta)|^2\right)\delta_x^+\psi(x_j,t_n)d\theta\right|+\left|\int_0^1|\phi_{2,j}(\theta)|^2\left(\delta_x^+\psi(x_j,t_n)-\delta_x^+\psi_j^n\right)d\theta\right|\\
&\lesssim\left|\delta_x^+\psi(x_j,t_n)\right|\int_0^1\left|\phi_{1,j}(\theta)-\phi_{2,j}(\theta)\right|d\theta+\left|\phi_{2,j}(\theta)|^2\int_0^1|\delta_x^+\psi(x_j,t_n)-\delta_x^+\psi_j^n\right|d\theta\\
&\lesssim\left|\psi(x_{j+1},t_n)-\psi_{j+1}^n\right|+\left|\psi(x_j,t_n)-\psi_j^n\right|+\left|\delta_x^+\psi(x_j,t_n)-\delta_x^+\psi_j^n\right|.
\end{aligned}$$

类似地，对于第二项，$(\cdot)^2$ 是局部 Lipschitz 连续的，因此对于 $j \in \mathrm{T}^{0}{}_{M}$，我们有

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^1 (\phi_{1,j}(\theta))^2 \delta_x^+ \overline{\psi(x_j,t_n)} - (\phi_{2,j}(\theta))^2 \delta_x^+ \overline{\psi_j^n} d\theta\right| \\ &\lesssim \left|\psi(x_{j+1},t_n) - \psi_{j+1}^n\right| + \left|\psi(x_j,t_n) - \psi_j^n\right| + \left|\delta_x^+ \psi(x_j,t_n) - \delta_x^+ \psi_j^n\right|.\end{aligned}$$

结合这两个估计，并注意到引理 1，我们得到

$$\begin{aligned}&\left\|\delta_x^+ (f(\psi(x_j,t_n)) - f(\psi_j^n)\right\|_{l^2} \\ &\lesssim \left\|\psi(x_j,t_n) - \psi_j^n\right\|_{l^2} + \left\|\delta_x^+ \psi(x_j,t_n) - \delta_x^+ \psi_j^n\right\|_{l^2} \\ &\lesssim \|I_M \psi(x,t_n) - I_M \psi^n\|_{L^2} + \|\nabla I_M \psi(x,t_n) - \nabla I_M \psi^n\|_{L^2} \\ &\lesssim \|I_M \psi(x,t_n) - P_M \psi(x,t_n)\|_{L^2} + \left\|e_M^n\right\|_{L^2} + \|\nabla I_M \psi(x,t_n) - \nabla P_M \psi(x,t_n)\|_{L^2} + \left\|\nabla e_M^n\right\|_{L^2} \\ &\lesssim \left\|e_M^n\right\|_{H^1} + h^{m-1}.\end{aligned}$$

因此，由引理 1 可得，关于H^1 半范数，我们有

$$\begin{aligned}\|\nabla(I_M(f(\psi(t_n))) - I_M(f(\psi^n)))\|_{L^2} &\lesssim \left\|\delta_x^+ (f(\psi(x_j,t_n)) - f(\psi_j^n))\right\|_{l^2} \\ &\lesssim \left\|e_M^n\right\|_{H^1} + h^{m-1}.\end{aligned}$$

结合L^2范数下的估计，我们得到

$$\|I_M(f(\psi(t_n))) - I_M(f(\psi^n))\|_{H^1} \lesssim \|e_M^n\|_{H^1} + h^{m-1}.$$

因此，对于$n \geq 1$，我们有

$$\begin{aligned}&\left\|I_M(\delta_t^- f(\psi(t_n))) - I_M(\delta_t^- f(\psi^n))\right\|_{H^1} \\ &\leq \tau^{-1}\left(\|I_M(f(\psi(t_n))) - I_M(f(\psi^n))\|_{H^1} + \left\|I_M(f(\psi(t_{n-1}))) - I_M(f(\psi^{n-1}))\right\|_{H^1}\right) \\ &\lesssim \tau^{-1}\left(\left\|e_M^n\right\|_{H^1} + \left\|e_M^{n-1}\right\|_{H^1} + h^{m-1}\right).\end{aligned}$$

将上述两个估计代入式 (3.33)，我们得到

$$\left\|\eta^{n,\pm}(x)\right\|_{H_1}^2 \lesssim \varepsilon^4 \tau^2 \left(\left\|e_M^n\right\|_{H^1}^2 + \left\|e_M^{n-1}\right\|_{H^1}^2 + h^{2m-2}\right),$$

由此完成了对误差界 (3.30) 的证明。 □

3.3 定理 1 的证明

首先，我们考虑$n = 0$和$n = 1$的情形。当$n = 0$时，$\left\|e^0{}_M(x)\right\|_{H^1} = \mathrm{k}P_M \psi_0 - I_M \psi_0 \mathrm{k}_{H^1} \circledR h^{m-1}$。当$n = 1$时，我们有如下分解

$$\begin{aligned}\widetilde{(e_M^1)}_l &= \widetilde{(\xi^0)}_l + c_l^0\left(\widehat{(\psi_0)}_l - \widetilde{(\psi_0)}_l\right) + d_l^0\left(\widehat{(\psi_1)}_l - \widetilde{(\psi_1)}_l\right) \\ &= e^{i\beta_l^+ \tau}\widetilde{(e_M^{0,+})}_l + e^{i\beta_l^- \tau}\widetilde{(e_M^{0,-})}_l + e^{i\beta_l^+ \tau}\widetilde{(\xi^{0,+})}_l \\ &\quad - e^{i\beta_l^- \tau}\widetilde{(\xi^{0,-})}_l + e^{i\beta_l^+ \tau}\widetilde{(\eta^{0,+})}_l - e^{i\beta_l^- \tau}\widetilde{(\eta^{0,-})}_l,\end{aligned}$$

其中，$\widetilde{(\eta^{0,\pm})}_l = 0$ 且 $e^{0,\pm}_M(x) = \sum_{l\in\mathcal{T}_M} (e^{0,\pm}_M)_l e^{i\mu_l(x-a)} \in X_M$ 定义为

$$\widetilde{(e_M^{0,+})}_l = -\beta_l^{-1}\left(\beta_l^{-}\left(\widetilde{(\psi_0)}_l - \widetilde{(\psi_0)}_l\right) + i\left(\widetilde{(\psi_1)}_l - \widetilde{(\psi_1)}_l\right)\right),$$
$$\widetilde{(e_M^{0,-})}_l = \beta_l^{-1}\left(\beta_l^{+}\left(\widetilde{(\psi_0)}_l - \widetilde{(\psi_0)}_l\right) + i\left(\widetilde{(\psi_1)}_l - \widetilde{(\psi_1)}_l\right)\right),$$

因此 $(e^0_M)_l = (e^{0,+}_M)_l + (e^{0,-}_M)_l$。由于 $\beta^{-1}_l\beta^{\pm}_l$，$\beta^{-1}_l$® 1 对所有 $l \in T_M$ 均成立，根据贝塞尔等式，我们有

$$\left\|e_M^{0,\pm}(x)\right\|_{H^1} \lesssim \|P_M\psi_0 - I_M\psi_0\|_{H^1} + \|P_M\psi_1 - I_M\psi_1\|_{H^1} \lesssim h^{m-1}, \tag{3.35}$$

这意味着

$$\begin{aligned}\left\|e_M^1(x)\right\|_{H^1} &\lesssim \left\|e_M^{0,+}(x)\right\|_{H^1} + \left\|e_M^{0,-}(x)\right\|_{H^1} + \left\|\xi^{0,+}(x)\right\|_{H^1} + \left\|\xi^{0,-}(x)\right\|_{H^1} \\ &\lesssim h^{m-1} + \varepsilon^2\tau^3.\end{aligned}$$

在一维情形下，根据离散索博列夫不等式，我们有

$$\|e^n(x)\|_{L^\infty}^2 \lesssim \|e^n(x)\|_{L^2}\|\nabla e^n(x)\|_{L^2} \lesssim \|e^n(x)\|_{H^1}^2, \tag{3.36}$$

and

$$\|\psi^n\|_{l^\infty} \le \|\psi(x,t_n)\|_{L^\infty} + \|e^n(x)\|_{L^\infty} \le M_1 + \|e^n(x)\|_{L^\infty}. \tag{3.37}$$

对于 $n = 0$，1，我们已证明 $\mathrm{k}e^n(x)\mathrm{k}_{H^1}$® $h^{m-1} + \left\|e^n{}_M(x)\right\|_{H^1}$® $h^{m-1} + \varepsilon^2\tau^3$，因此存在两个常数 $h0$，$\tau_0 > 0$；当 $0 < h < h_0$ 且 $0 < \tau < \tau_0$ 时，我们有

$$\|\psi^n\|_{l^\infty} \le M_1 + 1, \tag{3.38}$$

这意味着对于 $n = 0$，1，误差界 (3.1) 成立。

接下来，我们将采用数学归纳法继续证明。假设误差界 (3.1) 对所有 $0 \le n \le q \le T_\tau^{/\varepsilon^\beta} - 1$ 均成立，并且对所有 $0 \le n \le q$，下述误差分解~~成立~~

$$\begin{aligned}\widetilde{(e_M^n)}_l = {} & e^{i\beta_l^+ n\tau}\widetilde{(e_M^{0,+})}_l + e^{i\beta_l^- n\tau}\widetilde{(e_M^{0,-})}_l \\ & + \sum_{k=0}^{n-1}\Big(e^{i\beta_l^+(n-k)\tau}\widetilde{(\xi^{k,+})}_l - e^{i\beta_l^-(n-k)\tau}\widetilde{(\xi^{k,-})}_l \\ & + e^{i\beta_l^+(n-k)\tau}\widetilde{(\eta^{k,+})}_l - e^{i\beta_l^-(n-k)\tau}\widetilde{(\eta^{k,-})}_l\Big),\end{aligned} \tag{3.39}$$

我们将证明 (3.1) 和 (3.39) 对 $n = q + 1$ 成立。

对于任意 a、$b \in \mathrm{C}$ 和 $k \ge 0$，有等式

$$\begin{aligned}&\left(e^{i\beta_l^+\tau} + e^{i\beta_l^-\tau}\right)\left(e^{i\beta_l^+ k\tau}a + e^{i\beta_l^- k\tau}b\right) - e^{i(\beta_l^+ + \beta_l^-)\tau}\left(e^{i\beta_l^+(k-1)\tau}a + e^{i\beta_l^-(k-1)\tau}b\right) \\ &= e^{i\beta_l^+(k+1)\tau}a + e^{i\beta_l^-(k+1)\tau}b.\end{aligned} \tag{3.40}$$

于是，在 (3.26) 中，根据 (2.26) 中α_l 和β_l 的定义，结合 ξ 和 η 的分解，并应用等式 (3.40)，可得

$$
\begin{aligned}
\widehat{(e_M^{q+1})}_l &= \left(e^{i\beta_l^+\tau} + e^{i\beta_l^-\tau}\right)\widehat{(e_M^q)}_l - e^{i(\beta_l^+ + \beta_l^-)\tau}\widehat{(e_M^{q-1})}_l \\
&\quad + e^{i\beta_l^+\tau}\widehat{(\xi^{q,+})}_l - e^{i\beta_l^-\tau}\widehat{(\xi^{q,-})}_l - e^{i(\beta_l^+ + \beta_l^-)\tau}\left(\widehat{(\xi^{q-1,+})}_l - \widehat{(\xi^{q-1,-})}_l\right) \\
&\quad + e^{i\beta_l^+\tau}\widehat{(\eta^{q,+})}_l - e^{i\beta_l^-\tau}\widehat{(\eta^{q,-})}_l - e^{i(\beta_l^+ + \beta_l^-)\tau}\left(\widehat{(\eta^{q-1,+})}_l - \widehat{(\eta^{q-1,-})}_l\right) \\
&= e^{i\beta_l^+(q+1)\tau}\widehat{(e_M^{0,+})}_l + e^{i\beta_l^-(q+1)\tau}\widehat{(e_M^{0,-})}_l \\
&\quad + \sum_{k=0}^{q-2}\Big(e^{i\beta_l^+(q+1-k)\tau}\widehat{(\xi^{k,+})}_l - e^{i\beta_l^-(q+1-k)\tau}\widehat{(\xi^{k,-})}_l \\
&\quad + e^{i\beta_l^+(q+1-k)\tau}\widehat{(\eta^{k,+})}_l - e^{i\beta_l^-(q+1-k)\tau}\widehat{(\eta^{k,-})}_l\Big) \\
&\quad + \left(e^{i\beta_l^+\tau} + e^{i\beta_l^-\tau}\right)\left(e^{i\beta_l^+\tau}\widehat{(\xi^{q-1,+})}_l - e^{i\beta_l^-\tau}\widehat{(\xi^{q-1,-})}_l\right) \\
&\quad - e^{i(\beta_l^+ + \beta_l^-)\tau}(\widehat{(\xi^{q-1,+})}_l - \widehat{(\xi^{q-1,-})}_l) \\
&\quad + (e^{i\beta_l^+\tau} + e^{i\beta_l^-\tau})\left(e^{i\beta_l^+\tau}\widehat{(\eta^{q-1,+})}_l - e^{i\beta_l^-\tau}\widehat{(\eta^{q-1,-})}_l\right) \\
&\quad - e^{i(\beta_l^+ + \beta_l^-)\tau}\left(\widehat{(\eta^{q-1,+})}_l - \widehat{(\eta^{q-1,-})}_l\right) \\
&\quad + e^{i\beta_l^+\tau}\widehat{(\xi^{q,+})}_l - e^{i\beta_l^-\tau}\widehat{(\xi^{q,-})}_l + e^{i\beta_l^+\tau}\widehat{(\eta^{q,+})}_l - e^{i\beta_l^-\tau}\widehat{(\eta^{q,-})}_l,
\end{aligned}
$$

这意味着

$$
\begin{aligned}
\widehat{(e_M^{q+1})}_l &= e^{i\beta_l^+(q+1)\tau}\widehat{(e_M^{0,+})}_l + e^{i\beta_l^-(q+1)\tau}\widehat{(e_M^{0,-})}_l \\
&\quad + \sum_{k=0}^{q}\Big(e^{i\beta_l^+(q+1-k)\tau}\widehat{(\xi^{k,+})}_l - e^{i\beta_l^-(q+1-k)\tau}\widehat{(\xi^{k,-})}_l \\
&\quad + e^{i\beta_l^+(q+1-k)\tau}\widehat{(\eta^{k,+})}_l - e^{i\beta_l^-(q+1-k)\tau}\widehat{(\eta^{k,-})}_l\Big),
\end{aligned}
$$

i.也就是说，当$n = q + 1$时，分解 (3.39) 仍然成立。然后根据柯西不等式，我们有 e

$$
\begin{aligned}
\left|\widehat{(e_M^{q+1})}_l\right|^2 &\le 6\Bigg(\left|\widehat{(e_M^{0,+})}_l\right|^2 + \left|\widehat{(e_M^{0,-})}_l\right|^2 \\
&\quad + (q+1)\sum_{k=0}^{q}\left(\left|\widehat{(\xi^{k,+})}_l\right|^2 + \left|\widehat{(\xi^{k,-})}_l\right|^2 + \left|\widehat{(\eta^{k,+})}_l\right|^2 + \left|\widehat{(\eta^{k,-})}_l\right|^2\right)\Bigg).
\end{aligned}
$$

结合引理 2 和引理 3，根据贝塞尔等式，我们有

$$\begin{aligned}\left\|e_M^{q+1}(x)\right\|_{H^1}^2 \le 6\Big(&\left\|e_M^{0,+}(x)\right\|_{H^1}^2+\left\|e_M^{0,-}(x)\right\|_{H^1}^2+(q+1)\sum_{k=0}^{q}\Big(\left\|\xi^{k,+}(x)\right\|_{H^1}^2\\&+\left\|\xi^{k,-}(x)\right\|_{H^1}^2+\left\|\eta^{k,+}(x)\right\|_{H^1}^2+\left\|\eta^{k,-}(x)\right\|_{H^1}^2\Big)\Big)\\\le\ & C_1h^{2m-2}+C_2(q+1)^2\varepsilon^4\tau^2\left(\tau^4+h^{2m-2}\right)\\&+C_3(q+1)\varepsilon^4\tau^2\sum_{k=0}^{q}\left(\left\|e_M^k\right\|_{H^1}^2+h^{2m-2}\right)\\\le\ & C_0\left(\varepsilon^{4-2\beta}\tau^4+h^{2m-2}\right)+C_3\varepsilon^{4-\beta}\tau\sum_{k=0}^{q}\left\|e_M^k\right\|_{H^1}^2.\end{aligned}$$

根据条件 $0\le\beta\le2$ 和 $0<\varepsilon\le1$，我们应用离散格朗沃尔不等式得到 t

$$\left\|e_M^{q+1}(x)\right\|_{H^1}^2\le C_T\left(\varepsilon^{4-2\beta}\tau^4+h^{2m-2}\right),\quad 1\le q\le\frac{T/\varepsilon^\beta}{\tau},\tag{3.41}$$

其中 C_T是一个与 τ、h、ε和 β无关的常数。因此，对于 $n=q+1$，(3.1)中的第一个不等式仍然成立。根据三角不等式和一维离散索博列夫不等式，存在两个充分小的常数$h_0>0$ 和 $\tau_0>0$，使得当 $0<h<h_0$ 和 $0<\tau<\tau_0$时，有

$$\left\|\psi^{q+1}\right\|_{l^\infty}\le\left\|\psi(x,t_q)\right\|_{L^\infty}+\left\|e^{q+1}(x)\right\|_{L^\infty}\le1+M_1.\tag{3.42}$$

因此，通过数学归纳法，定理 1 的证明完成。

4 数值结果

本节针对具有弱非线性 (2.1) 的带波算子的非线性薛定谔方程，给出采用 EWI-FP格式 (2.27) 及 (2.28)–(2.29) 所得到的数值结果。在下面的数值实验中，我们选取 $\alpha=1$、计算区域 $\Omega=(-\pi,\pi)$以及初始数据为

$$\psi_0(x)=\frac{1}{2+\cos^2(x)+\sin(x)},\quad \psi_1(x)=\frac{1}{2+\sin^2(x)+\cos(x)}.\tag{4.1}$$

数值模拟在时间区间 $[0,T/\varepsilon^\beta]$ 上进行，其中 $0\le\beta\le2$ 且 $T=1$固定。这里，我们研究以下三种具有不同 β 的情形：

情形 I：固定时间动力学，直至时间达到 $O(1)$，即 $\beta=0$。情形 II：中间长时间动力学，直至时间达到 $O(\varepsilon^{-1})$，即 $\beta=1$。情形 III：长时间动力学，直至时间达到 $O(\varepsilon^{-2})$，即 $\beta=2$。

由于带波算子的非线性薛定谔方程的精确解未知，我们采用所提出的 EWI-FP格式，使用非常细的网格 $h_e=\pi/64$ 和非常小的时间步长 $\tau_e=5\times10^{-4}$，通过数值计算得到“参考”解。为了量化数值误差，我们测量 H^1-范数下的 $e(\cdot,t_n=1/\varepsilon^\beta)=\psi(x,t_n)-I_M\psi^n$。

在不同的 ε 和 β 下，给出了 $t = 1/\varepsilon^{\beta}$ 时的空间误差和时间误差。对于空间误差测试，我们固定时间步长为 $\tau = 5\times 10^{-4}$，使时间误差可以忽略。表1展示了 $\beta = 0$、$\beta = 1$ 和 $\beta = 2$ 的长时间空间误差，这表明对于任意 $0 < \varepsilon \le 1$ 和 $0 \le \beta \le 2$，EWI-FP格式在空间上均具有一致的谱精度。

表1：EWI-FP格式用于具有不同 β 和的带波算子的非线性薛定谔方程（2.1）的空间误差 ε.

	$\|e(\cdot, t = 1/\varepsilon^{\beta})\|_{H^1}$	$h = \pi/4$	$h = \pi/8$	$h = \pi/16$	$h = \pi/32$
$\beta = 0$	$\varepsilon = 1$	1.81E-1	5.69E-3	8.84E-5	7.01E-10
	$\varepsilon = 1/2$	1.28E-1	6.57E-3	5.95E-5	6.43E-10
	$\varepsilon = 1/2^2$	1.08E-1	7.53E-3	5.27E-5	6.34E-10
	$\varepsilon = 1/2^3$	1.04E-1	7.74E-3	5.10E-5	6.29E-10
	$\varepsilon = 1/2^4$	1.02E-1	7.79E-3	5.05E-5	6.27E-10
$\beta = 1$	$\varepsilon = 1$	1.81E-1	5.69E-3	8.84E-5	7.01E-10
	$\varepsilon = 1/2$	1.28E-1	7.39E-3	3.28E-5	1.22E-10
	$\varepsilon = 1/2^2$	8.86E-2	1.05E-2	3.89E-5	2.29E-10
	$\varepsilon = 1/2^3$	3.94E-2	1.20E-2	6.05E-5	5.17E-10
	$\varepsilon = 1/2^4$	7.66E-2	6.84E-3	6.42E-6	4.07E-10
$\beta = 2$	$\varepsilon = 1$	1.81E-1	5.69E-3	8.84E-5	7.01E-10
	$\varepsilon = 1/2$	8.70E-2	1.22E-2	5.04E-5	2.50E-10
	$\varepsilon = 1/2^2$	8.60E-2	8.43E-3	9.12E-6	4.10E-10
	$\varepsilon = 1/2^3$	1.04E-1	4.64E-3	3.43E-5	5.74E-10
	$\varepsilon = 1/2^4$	1.15E-1	1.14E-2	5.78E-5	2.81E-10

对于时间误差，选取一个非常细的网格尺寸 $h = \pi/64$，使空间误差可以忽略。图1–3分别展示了在不同的 ε 和 τ 下，$\beta = 0$、$\beta = 1$ 和 $\beta = 2$ 对应的 EWI-FP 格式的时间误差。从这些图以及为简洁起见未在此展示的其他数值结果中，我们得到以下观察：(i) 在时间上，对于任意固定的 $\varepsilon = \varepsilon_0 > 0$，EWI-FP 格式具有二阶精度（参见图 1(a)–3(a) 中的各条曲线）。(ii) 当 $\beta = 0$ 时，时间误差的表现为$O(\varepsilon^2\tau^2)$ （参见图1(b)）。图2(b)和图3(b)分别表明，当 $\beta = 1$ 时，时间误差为 $O(\varepsilon\tau^2)$；当 $\beta = 2$ 时，时间误差为$O(\tau^2)$。(iii) 数值结果验证了定理 1 给出的一致误差界，并表明这些误差界是尖锐的。

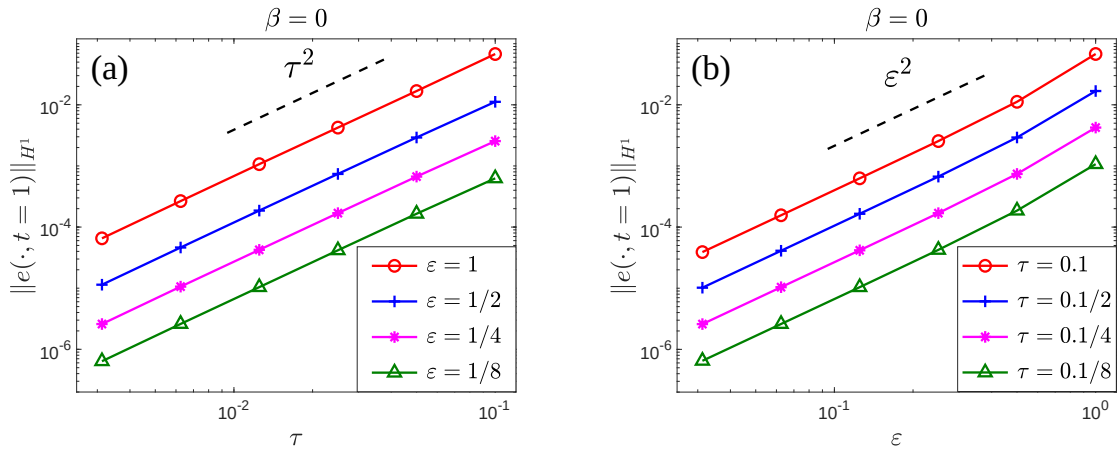

图 1：对于带波算子的非线性薛定谔方程 (2.1)，采用 EWI-FP格式时的时间误差，其中 $\beta = 0$ 对应 (a) 不同的 ε；(b) 不同的 τ。

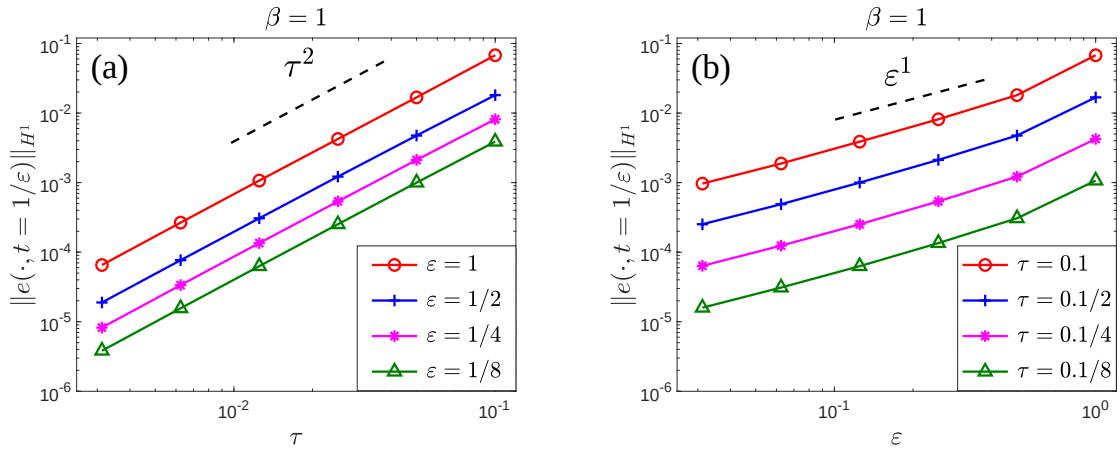

图 2：对于带波算子的非线性薛定谔方程 (2.1)，采用 EWI-FP格式时的时间误差，其中 $\beta = 1$ 对应 (a) 不同的 ε；(b) 不同的 τ。

5 结论

指数波积分傅里叶伪谱（EWI-FP）方法用于对弱非线性的带波算子的非线性薛定谔方程（NLSW）进行离散化，其中非线性强度由 ε^{2p} 表征，$0 < \varepsilon \leq 1$ 是无量纲参数，且$p \in \mathrm{N}^+$。对 NLSW 的长时间动力学，严格证明了 EWI-FP 方法的一致误差界为$O(h^{m-1} + \varepsilon^{2p-\beta}\tau^2)$，适用于直到时间$t = T/\varepsilon^\beta$，其中$T > 0$ 固定且 $0 \leq \beta \leq 2p$。最后，给出了数值结果，以验证误差界并证明其具有最优性和尖锐性。

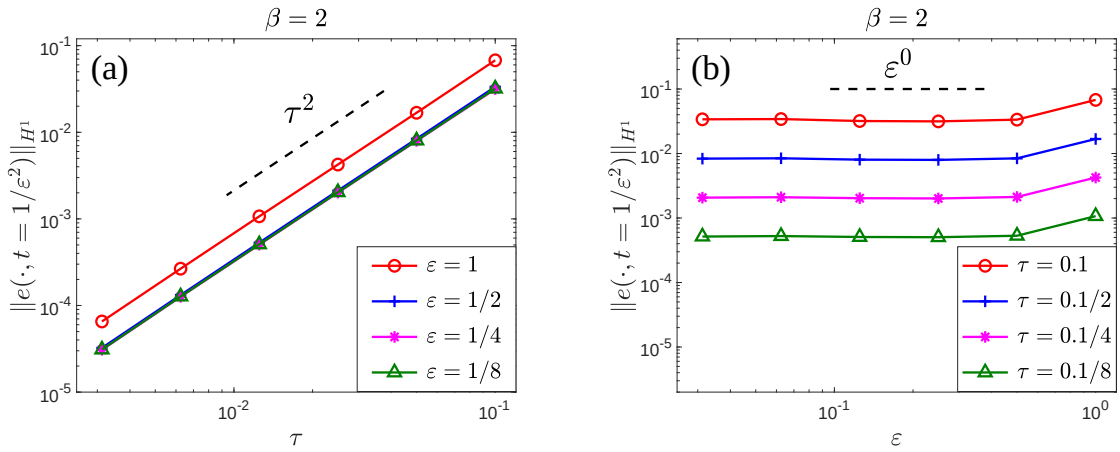

图3：带波算子的非线性薛定谔方程 (2.1) 的 EWI-FP格式时间误差，其中 $\beta = 2$ 分别取 (a) 不同的 ε; 以及 (b) 不同的 τ。

致谢

作者谨向包维柱教授致以谢意，感谢他提出的宝贵建议和意见。YF 衷心感谢新加坡教育部资助项目 MOE-000357-01，以及欧洲研究委员会（ERC）通过欧盟地平线2020研究与创新计划（资助协议编号 850941）提供的支持。YY 得到了国家自然科学基金（资助协议编号 11971007）的部分资助。部分工作是在 2023年 YF 访问新加坡国立大学数学系和数学科学研究所期间完成的。

参考文献

[1]W. Bao 和 Y. Cai，带波算子的非线性薛定谔方程有限差分方法的一致误差估计，SIAM J. Numer. Anal. **50**，492–521（2012年）。[2] W. Bao 和 Y. Cai，带波算子的非线性薛定谔方程指数波积分器正弦伪谱方法的一致且最优误差估计，SIAM J. Nu- mer. Anal. **52**，1103–1127（2014）。[3] W. Bao、Y. Cai 和 Y. Feng，弱非线性下非线性克莱因–戈尔登方程时间分裂方法长时间动力学的一致误差界改进，SIAM J. Numer. Anal.**60**，1962–1984（2022年）。[4] W. Bao、Y. Cai 和 Y. Feng，长时间（非线性）薛定谔方程时间分裂方法的一致误差界改进，Math. Comp. **92**，1109–1139（2023年）。

[5]*W. Bao*、*X. Dong* 和 *J. Xin*，临界坍缩之后用于描述光子弹的正弦–戈登方程与受扰非线性薛定谔方程的比较，*Phys. D 239*，*1120–1134*（*2010*年）。[6] *W. Bao*、*Y. Feng* 和 *C. Su*，弱非线性下非线性克莱因–戈尔登方程长时间动力学时间分裂谱方法的一致误差界，*Math. Comp. 91*，*811–842*（*2022*年）。[7] *W. Bao*、*Y. Feng* 和 *J. Yin*，小势下狄拉克方程长时间动力学时间分裂方法的一致误差界改进，*Multiscale Model. Simul. 20*，*1040–1062*（*2022*年）。[8] *L. Bergé* 和 *T. Colin*，等离子体物理中包络方程的奇异摄动问题，*Phys. D 84*，*437–459*（*1995*年）。[9] *L. Brugnano*、*C. Zhang* 和 *D. Li*，一类用于带波算子的非线性薛定谔方程的能量守恒哈密顿边值方法，*Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 60*，*33–49*（*2018*年）。[10] *W. Cai*、*D. He* 和 *K. Pan*，一种用于带波算子的非线性薛定谔方程的线性化能量守恒有限元方法，*Appl. Numer. Math. 140*，*183–198*（*2019*年）。[11] *E. Celledoni*、*D. Cohen* 和 *B. Owren*，一种应用于三次薛定谔方程的对称指数积分器，*Found. Comput. Math. 8*，*303–317*（*2008*年）。[12] *T. Colin* 和 *P. Fabrie*，非线性薛定谔波方程的时间半离散，*Discrete Contin. Dynam. Syst. 4*，*671–690*（*1998*年）。[13] *D. Deng* 和 *Z. Li*，带波算子的非线性薛定谔方程高阶保结构 *Du Fort–Frankel* 格式及其分析，*J. Comput. Appl. Math. 417*，*114616*（*2023*年）。[14] *E. Faou*，《几何数值积分与薛定谔方程》，欧洲数学会，苏黎世（*2012*年）。[15] *Y. Feng*、*Z. Xu* 和 *J. Yin*，小势下狄拉克方程长时间动力学指数波积分方法的一致误差界，*Appl. Numer. Math. 172*，*50–66*（*2022*年）。[16] *Y. Feng* 和 *W. Yi*，非线性克莱因–戈尔登方程长时间动力学指数波积分傅里叶伪谱方法的一致误差界，*Multiscale Model. Simul. 19*，*1212–1235*（*2021*年）。[17] *Y. Feng* 和 *J. Yin*，小势下狄拉克方程不同离散化方法的长时间空间分辨率，*J. Comput. Appl. Math. 412*，*114342*（*2022*年）。[18] *W. Gautschi*，基于三角多项式的常微分方程数值积分，*Numer. Math. 3*，*381–397*（*1961*年）。

[19] *B. Guo* 和 *H. Liang*，关于一类带波算子的非线性薛定谔方程组数值计算问题，*J. Numer. Methods Comput. Appl. 4, 176–182 (1983).*[20] *L. Guo* 和 *Y. Xu*，带波算子的非线性薛定谔方程的能量守恒局部间断伽辽金方法，*J. Sci. Comput. 65, 622–647 (2015).*[21] *E. Hairer*、*C. Lubich* 和 *G. Wanner*，《几何数值积分》，*Springer*，柏林（*2002*）.[22] *M. Hochbruck* 和 *C. Lubich*，一种用于振荡型二阶微分方程的 *Gautschi* 型方法，*Numer. Math. 83, 403–426 (1999).*[23] *M. Hochbruck* 和 *A. Ostermann*，指数积分器，*Acta Numerica 19, 209–286 (2010).*[24] *B. Ji* 和 *L. Zhang*，一种用于带波算子的非线性薛定谔方程的指数波积分傅里叶伪谱方法，*J. Appl. Math. Comput. 58, 273–288 (2018).*[25] *H.-O. Kreiss* 和 *J. Oliger*，傅里叶方法的稳定性，*SIAM J. Numer. Anal. 16, 421–433 (1979).*[26] *S. Machihara*、*K. Nakanishi* 和 *T. Ozawa*，非线性 *Klein-Gordon* 方程在能量空间中的非相对论极限，*Math. Ann. 322, 603–621 (2002).*[27] *A. Y. Schoene*，关于 *Klein–Gordon* 方程和狄拉克方程的非相对论极限，*J. Math. Anal. Appl. 71, 36–47 (1979).*[28] *J. Shen*、*T. Tang* 和 *L.-L. Wang*，《谱方法：算法、分析与应用》，*Springer-Verlag*，柏林（*2011*）.[29] *M. Tsutumi*，二维空间中非线性 *Klein-Gordon* 方程的非相对论近似，*Nonlinear Anal. 8, 637–643 (1984).*[30] *J. Wang*，带波算子的非线性薛定谔方程的多辛傅里叶伪谱方法，*J. Comput. Math. 25, 31–48 (2007).*[31] *T. Wang* 和 *L. Zhang*，带波算子的非线性薛定谔方程若干新型守恒格式的分析，*Appl. Math. Comput. 182, 1780–1794 (2006).*[32] *S. Wang*、*L. Zhang* 和 *R. Fan*，带波算子的非线性薛定谔方程的离散时间正交样条配置方法，*J. Comput. Appl. Math. 235, 1993–2005 (2011).*[33] *J. Xin*，使用二维 *sine–Gordon* 方程模拟光子弹，*Phys. D 135, 345–368 (2000).*[34] *L. Zhang* 和 *Q. Chang*，一种用于一类带波算子的非线性薛定谔方程的守恒数值格式，*Appl. Math. Comput. 145, 603–612 (2003).*[35] *X. Zhao*，将多尺度时间积分器与双尺度表述相结合求解带波算子的非线性薛定谔方程，*J. Comput. Appl. Math. 326, 320–336 (2017).*