arXiv:2304.00778v2 [math.AP] 4 Apr 2023

# 具有非标准增长的局部与非局部混合问题的局部行为 *

丁梦瑶[1], 方宇舟[2], 张超[2], 3†[1] 北京大学数学科学学院，北京 100871，中国[2] 哈尔滨工业大学数学学院，哈尔滨 150001，中国[3] 哈尔滨工业大学高等研究院，哈尔滨 150001，中国

摘要

我们研究具有非标准增长的局部与非局部混合泛函

$$u \mapsto \int_\Omega (|Du|^p - f(x)u)\,dx + \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^q}{|x-y|^{N+sq}}\,dxdy$$

其中 $1 < p \le sq$、$0 < s < 1$ 以及 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 为有界区域。我们借助正性扩张研究此类问题的极小化子的局部行为，包括局部有界性、局部 H¨older 连续性和哈纳克不等式。上述结果可视为在中心条件 $p > sq$ in [De Filippis-Mingione, Math. Ann., https://doi.org/10.1007/s00208-022-02512-7] 下相关结果的自然推广。

2010年数学学科分类：35B45；35B65；35R11；35K55

关键词：局部正则性；局部与非局部混合泛函；非标准增长；Caccioppoli 估计；正性扩张

## 1 引言

本文旨在研究以下泛函的极小化子的局部正则性：

$$\mathcal{E}(u;\Omega) := \int_\Omega (F(x,Du) - f(x)u)\,dx + \iint_{\mathcal{C}_\Omega} |u(x)-u(y)|^q K_{sq}(x,y)\,dxdy, \tag{1.1}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \ge 2$) 是一个有界区域，且

$$\mathcal{C}_\Omega := (\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N) \setminus ((\mathbb{R}^N \times \Omega) \times (\mathbb{R}^N \times \Omega)).$$

Carath´eodory 函数 $F$：$\Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ 满足

$$\Lambda^{-1}|\xi|^p \le F(x,\xi) \le \Lambda|\xi|^p \tag{1.2}$$

*本研究得到国家自然科学基金（编号：12071098）、黑龙江省博士后科学基金（编号：LBH-Z22177）以及中国博士后创新人才支持计划（编号：BX20220381）的资助

†通讯作者。电子邮箱：myding@pku.edu.cn（M. Ding）、18b912036@hit.edu.cn（Y. Fang）、czhang-math@hit.edu.cn（C.Zhang）

对于某个 $\Lambda > 1$。对称核 $K_{sq}$： $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ 是一个具有如下形式的可测函数

$$K_{sq}(x,y) = \frac{a(x,y)}{|x-y|^{N+sq}} \tag{1.3}$$

其中 $a(x,y) = a(y,x)$ 满足

$$a_0 \le a(x,y) \le A_0 \quad \text{for all } x,y \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N, \tag{1.4}$$

其中常数 $a_0 \ge 0$ 和 $A_0 > 0$。此外，

$$1 < p \le sq, \quad s \in (0,1). \tag{1.5}$$

为了给出极小化子的定义，我们需要定义一个函数空间

$$\mathcal{A}(\Omega) := \left\{ v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \;\middle|\; v|_\Omega \in L^p(\Omega) \text{ and } \mathcal{E}(v;\Omega) < \infty \right\},$$

并回顾尾空间

$$L^{q-1}_{sq}\left(\mathbb{R}^N\right) := \left\{ v \in L^{q-1}_{\text{loc}}\left(\mathbb{R}^N\right) \;\middle|\; \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|v(x)|^{q-1}}{1+|x|^{N+sq}} dx < \infty \right\},$$

其对应的非局部尾项定义为

$$\text{Tail}(v;x_0,r) := \left( r^{sq} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_r(x_0)} \frac{|v(x)|^{q-1}}{|x-x_0|^{N+sq}} dx \right)^{\frac{1}{q-1}} \quad \text{for } r>0, x_0 \in \mathbb{R}^N.$$

根据这些定义，容易推出对于任意 $v \in L^{q-1}_{sq}(\mathbb{R}^N)$，$\text{Tail}(v; x_0, r)$ 都是良定义的。

现在我们可以给出式（1.1）的极小化子的定义如下。

定义 1.1. 若满足以下条件，则称 $u \in \mathcal{A}(\Omega)$ 是 $\mathcal{E}$ 的极小化子：

$$\mathcal{E}(u;\Omega) \le \mathcal{E}(v;\Omega)$$

对于任意可测函数 $v$： $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$，若 $v = u$ 在 $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ 中几乎处处成立。

接下来，我们将在下一小节介绍现有文献中的一些相关结果。

## 1.1 相关文献综述

局部与非局部混合问题作为一个新兴研究领域，已受到广泛关注。在介绍这类混合问题的研究结果之前，我们先请读者参阅 [12, 14, 13,40, 39]，了解积分微分方程的正则性；并参阅 [7, 8, 18, 20, 19, 32, 33, 36, 38]，了解分数阶 $p$-拉普拉斯算子的弱解性质。这里，我们着重介绍 [18], 中提出的方法：Cozzi [18] 引入了分数阶 De Giori 类，并进一步建立了这些类的正则性理论。作为正则性结果的直接应用，通过证明非局部 Caccioppoli 估计，可以直接得到相应方程或泛函的弱解和极小化子的有界性、H¨older 连续性及哈纳克不等式。

让我们 转向最简单版本的局部与非局部线性方程的组合：

$$-\Delta u + (-\Delta)^s u = 0, \tag{1.6}$$

其中，非负调和函数的哈纳克不等式已在 [26]中得到证明；边界版本见 [15] 。此外，关于（1.6）的抛物型版本的哈纳克不等式已在 [1, 16], 中得到证明，但作者仅证明了该不等式对全局非负解成立。最近，Garain-Kinnunen [28] 为（1.6）的抛物型问题中的变号解证明了带尾项的弱哈纳克不等式。关于径向对称性、最大值原理以及（1.6）弱解的内部与边界利普希茨正则性，Biagi-Dipierro-Valdinoci-Vecchi [4, 5] 进行了系统研究。关于含一般非齐次项的方程（$u$、 $x$）的定性与定量性质，以及更一般的局部-非局部混合算子的边界正则性，另可参见 [42] 和 [6] $g$

对于如下的（1.6）非线性框架，

$$-\Delta_p u + (-\Delta)_p^s u = 0, \tag{1.7}$$

通过采用基于 De Giorgi-Nash-Moser 理论的纯解析方法，Garain-Kinnunen [27]证明了弱解的局部有界性、H¨older 连续性、哈纳克不等式以及半连续代表。因此，Fang-Shang-Zhang[24] 研究了（1.7）的抛物型对应问题的局部正则性；更一般的构造见 [29] 。这类方程的一些其他方面也已得到探讨，例如存在性、唯一性，以及含测度数据的问题中的高阶 H¨older 正则性 [30]， [11]。值得一提的是，De Filippis-Mingione[21] 首次研究了具有非一致增长的局部与非局部混合泛函，其形式如（1.1），并在中心假设 $p > sq$下，证明了这类问题的极小化子具有最大正则性，即（局部） $C^{1,\ \alpha}$-正则性。Byun-Lee-Song[10] 研究了局部项不产生正则化效应的情形，并讨论了由下述泛函建模的问题中极小化子的 H¨older 正则性和哈纳克不等式。

$$u \mapsto \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^q}{|x-y|^{N+sq}}\,dxdy + \int_\Omega a(x)|Du|^p\,dx$$

当 $a(x) \geq 0$， $p > q > 1$。请注意，(1.5) 中所要求的假设与关于增长指数 $p$， $q$ 在 [21, 10] 中的中心假设互不相容。最后需要指出的是，鉴于条件 $p \neq q$，泛函 (1.1) 与大量具有非标准增长的各向异性局部或非局部问题密切相关，例如参见 [35, 17, 2, 3, 22, 9, 25]。

## 1.2 主要结果陈述

我们想指出，本文的研究受到 De Filippis 和 Mingione 的论文[21] 的启发。 具体而言，他们在 *[21]* 的开放问题 8.3 中提出了一个问题：当 $q > p$ 时，能否去除定理 3 、 5 和 6 中关于 $u$ 的（局部）有界性假设。 为此，我们尝试给出肯定的答案。据我们所知，对于 1.1) 中的局部与非局部混合方程，当 $sq \geq p$ 时，尚无相应的理论。我们的目标是通过正性扩张研究带有非齐次项 $f$ 的 (1.1) 的极小化子的局部有界性、Hölder 连续性和 Harnack 估计。为简化叙述，我们引入下文所需的一些记号。

记号。按照惯例，域 $B_\rho(x_0)$ 是一个半径为 $\rho > 0$ 、中心为 $x_0 \in \mathbb{R}^N$ 的球。该符号可简写为 $B_\rho = B_\rho(x_0)$。对于任意 $x_0 \in \mathbb{R}^N$、 $k \in \mathbb{R}$ 和 $r > 0$，我们定义集合

$$A^-(k, x_0, r) := B_r(x_0) \cap \{x \in \mathbb{R}^N |\ u < k\} \quad \text{and} \quad A^+(k, x_0, r) := B_r(x_0) \cap \{x \in \mathbb{R}^N |\ u > k\}, \tag{1.8}$$

简记为

$$A^-(k,r) := A^-(k,x_0,r) \quad \text{and} \quad A^+(k,r) := A^+(k,x_0,r)$$

当 $x_0$ 的选择明确时。对于 $g \in L^1(V)$, $g$ 的平均值定义为

$$(g)_V := \fint_V g(x)\,dx := \frac{1}{|V|}\int_V g(x)\,dx.$$

对于函数 $a(\cdot)$，记

$$a_V^+ := \sup_{x\in V} a(x)$$

对任意 $V \subseteq \Omega$。对于情形 $V = B_R(x_0)$，我们只需令 $a_R^+ := a_{B_R(x_0)}^+$，即可简化记号。

本文中的连续测度 $\mu$ 满足

$$d\mu = d\mu(x,y) = |x-y|^{-N-sq}\,dxdy.$$

本文中，令 $p^* := \frac{Np}{N-p}$ 表示 $1 < p < N$， $q_s^* := \frac{Nq}{N-sq}$ 表示 $1 < sq < N$， $\bar{q} := {}^{q}_{(\gamma-1)\,\gamma}$ 。对于任意固定的 $r > 0$，我们还需要定义函数

$$h_r(t) := \frac{t^{p-1}}{r^p} + \frac{t^{q-1}}{r^{sq}}, \qquad g_r(t) := \frac{t^{\bar{q}-1}}{r^{\bar{q}}}, \qquad t \geq 0 \tag{1.9}$$

and

$$H_r(t) := \frac{t^p}{r^p} + \frac{t^q}{r^{sq}}, \qquad t \geq 0. \tag{1.10}$$

本文中， $H_r^{-1}$、 $h_r^{-1}$、 $g_r^{-1}$分别是 $H_r$、 $h_r$、 $g_r$ 的逆，我们用 $C$ 表示一个一般的正常数，该常数仅依赖于 $p$、 $s$、 $q$、 $\gamma$、 $\Lambda$、 $N$ 和 $a(\cdot,\cdot)$，无需另行说明。

现在，我们可以给出有界性结果。

**定理 1**（局部有界性）。假设 (1.2)–(1.5) 在 $a_0 > 0$ 下成立。设 $f \in L^\gamma_{\mathrm{loc}}(\Omega)$，其中 $\gamma > \max\left\{\frac{N}{p}, \frac{q}{q-1}\right\}$。令 $B_r := B_r(x_0) \subset\subset \Omega$。那么，对于泛函 (1.1) 的任意极小化子 $u \in \mathcal{A}(\Omega) \cap L^{q-1}_{sq}(\mathbb{R}^N)$，以下估计对任意 $\delta > 0$ 成立，

$$\sup_{B_{r/2}} u \leq C_\delta H_r^{-1}\left(\fint_{B_r} H_r(u_+)\,dx\right) + \delta h_r^{-1}\left(r^{-sq}\,\mathrm{Tail}^{q-1}\left(u_+; x_0, \frac{r}{2}\right)\right) + \delta g_r^{-1}\left(\left(\fint_{B_r}|f|^\gamma\,dx\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right)$$

其中 $C_\delta > 0$ 仅依赖于 $s, p, q, N, \Lambda, \gamma, a_0, A_0$ 和 $\delta$。

注意，在 $a_0 > 0$ 的情形下，通常可知 $K_{sq}(x,y) \approx \frac{1}{|x-y|^{N+sq}}$。然而，当函数 $a(\cdot,\cdot)$ 在某些点处为零（即 $a_0 = 0$）时，泛函（1.1）实际上呈现出局部与非局部混合双相泛函的特征。此时，通过将 $p$ 与 $q$ 之间的距离限制如下，我们仍可证明极小化子具有局部有界性。此外，考虑到（1.1）中的非局部双重积分，其核 $K_{sq}(\cdot,\cdot)$ 受到系数 $a$ 的扰动，因此这里引入“带权尾空间”以及相应的带权非局部尾项，记作

$$L^{q-1}_{a,sq}(\Omega,\mathbb{R}^N) = \left\{v \in L^{q-1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N) : \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}\int_{\mathbb{R}^N} a(x,y)\frac{|v(y)|^{q-1}}{(1+|y|)^{N+sq}}\,dy < \infty\right\}$$

and

$$\mathrm{Tail}_a(v;x_0,r) := \left( r^{sq} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in B_{2r}(x_0)} \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r(x_0)} a(x,y)\frac{|v(y)|^{q-1}}{|y-x_0|^{N+sq}}\,dy \right)^{\frac{1}{q-1}}. \tag{1.11}$$

我们容易验证，对于每个 $x_0 \in \Omega$ 和 $r \in (0, 2^{-1}\mathrm{dist}\{x_0, \partial\Omega\})$，$\mathrm{Tail}_a(u; x_0, r)$ 均为有限值，前提是 $u \in L^{q-1}_{a,sq}(\Omega\ \mathbb{R}^N)$。因此，在推导极小化子的局部有界性时，我们只要求 $a(x, y)$ 在 $\Omega \times \Omega$ 上局部有界。

定理 2 (局部有界性)。 假设 (1.2)–(1.3) 以及 (1.5) 和 $0 \le a(x, y) \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega\times\Omega)$均成立。令

$$\begin{cases} \frac{q}{p} \le 1 + \frac{p}{N-p} \ \textit{for}\ 1 < p \le N, \\ q < \infty \ \textit{for}\ p > N, \end{cases} \tag{1.12}$$

且 $f \in L^\gamma{}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 满足

$$\gamma > \max\left\{ \frac{q}{q-p}, \frac{p}{p-1}, \frac{N}{p} \right\} \ \textit{for}\ p \le N,\ \textit{and}\ \gamma = 1\ \textit{for}\ p > N. \tag{1.13}$$

则任意极小化子 $u \in \mathcal{A}(\Omega) \cap L^{q-1}_{a,sq}(\Omega\,\mathbb{R}^N)$ 的泛函 (1.1) 在 $\Omega$ 中局部有界。

基于上述有界性结果，即定理 1，我们可以进一步应用正性扩张技巧，证明极小化子的 H¨older 连续性。我们指出，接下来的 H¨older 连续性结果是在假设 $a_0 > 0$ 下建立的。主要原因是，当 $a(x, y) \ge 0$ 时，引理 $C$ 中的常数以及引理 4.1 和引理 4.2 中的常数 $L^\infty$ 会依赖于极小化子的范数，同时也依赖于引理 $M$ 4.2中的，即使我们对 ¨强加 H $a(\cdot,\cdot)$ 的 H连续性。这将导致定理 3 的证明中迭代失效。

定理 3（H¨older 连续性）。假设 (1.2)–(1.5) 在 $a_0 > 0$ 下成立。设 $f \in L^\gamma{}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$，且$\gamma > \max\left\{\frac{N}{p}, \frac{q}{q-1}\right\}$。那么泛函 (1.1) 的任意极小化子 $u \in \mathcal{A}(\Omega) \cap L^{q-1}_{sq}(\mathbb{R}^N)$ 都在 $\Omega$ 中局部$C^{0,\alpha}$ 连续，其中某个 $\alpha \in \in (0, 1)$ 仅依赖于 $N, p, s, q, \Lambda, \gamma, a_0, A_0$。

此外，根据定理1中的上确界估计、下文的尾部估计以及正性扩张，可以推出极小化子的哈纳克不等式。然而，当$a(x, y) \ge 0$ 时，不清楚如何用尾项$a(u_+;\ x_0,\ R)$ 来控制尾项$a(u_-;\ x_0,\ R)$。因此，我们对 $a_0$ 施加正性假设，以确保哈纳克不等式中的尾项涉及 $u_-$ 而非 $u$。

定理 4（哈纳克不等式）。假设 (1.2)–(1.5) 对 $a_0 > 0$ 成立。设 $f \in L^\gamma\mathrm{loc}(\Omega)$，其中 $\gamma > \max\left\{\frac{N}{p}, \frac{q}{q-1}\right\}$。令 $u \in \mathcal{A}(\Omega) \cap L^{q-1}_{sq}(\mathbb{R}^N)$ 是泛函 (1.1) 的极小化子，并满足 $u \ge 0$ in $B_{2R}(x_0) \subset \Omega$。假设 $R \in (0, 1)$ 满足 $0 < R < \mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega)/4$。则有

$$\sup_{B_R(x_0)} u \le C\Big( \inf_{B_R(x_0)} u + \mathrm{Tail}_a(u_-; x_0, R) + (R^{p-N/\gamma}\|f\|_{L^\gamma(B_{2R})})^{\frac{1}{p-1}} + (R^{\bar{q}-N/\gamma}\|f\|_{L^\gamma(B_{2R})})^{\frac{1}{\bar{q}-1}} \Big)$$

其中 $C$ 仅依赖于 $\Lambda$、$s$、$p$、$q$、$N$、$\gamma$、$a_0$、$A_0$。

## 1.3 预备知识

本节汇集了一些嵌入不等式和迭代结果，作为预备工具。首先是分数阶庞加莱不等式（见 $W^{s,\,q}$）。从现在起，除非另有说明，我们始终假设条件（1.2）–（1.5）成立。

引理 1.1。（见 [37, 公式 (6.3)]）设 $s \in (0,1)$ 且 $q \in [1,\infty)$。那么，对任意 $f \in W^{s,\,q}(B_r)$，有

$$\fint_{B_r} |f(x) - (f)_{B_r}|^q \, dx \le C r^{sq-N} \int_{B_r}\int_{B_r} \frac{|f(x)-f(y)|^q}{|x-y|^{N+sq}}\, dxdy$$

其中 $C > 0$ 仅依赖于 $s$、$q$ 和 $N$。

下面给出一个关于索博列夫函数水平集的等周不等式版本。这类不等式最早由 De Giorgi [23] 引入。这里我们采用 [18] 表述的版本。

引理 1.2。设 $N \ge 2$ 是一个整数，且 $p > 1$。那么，对于任意两个实数 $h_1 < h_2$ 以及任意 $f \in W^{1,\,p}(B_R)$，有

$$\left(\frac{\big|B_R \cap \{f \le h_1\}\big|}{|B_R|} \cdot \frac{\big|B_R \cap \{f \ge h_2\}\big|}{|B_R|}\right)^{\frac{N-1}{N}} \le \frac{CR^{1-\frac{N}{p}}}{h_2 - h_1} \|\nabla f\|_{L^p(B_R)} \left(\frac{\big|B_R \cap \{h_1 < f < h_2\}\big|}{|B_R|}\right)^{\frac{p-1}{p}},$$

其中某个常数 $C \ge 1$ 仅依赖于 $N$ 和 $p$。

现在回顾一个经典的迭代引理。

引理 1.3.（[31, 引理 4.3]）设 $\{Y_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 为一个正数序列，满足递归不等式

$$Y_{j+1} \le K b^j (Y_j^{1+\delta_1} + Y_j^{1+\delta_2}), \quad j = 0,1,2,\dots,$$

其中 $K > 0$、$b > 1$ 和 $\delta_2 \ge \delta_1 > 0$ 为给定数。若

$$Y_0 \le \min\left\{1, (2K)^{-\frac{1}{\delta_1}} b^{-\frac{1}{\delta_1^2}}\right\} \quad or \quad Y_0 \le \min\left\{(2K)^{-\frac{1}{\delta_1}} b^{-\frac{1}{\delta_1^2}}, (2K)^{-\frac{1}{\delta_2}} b^{-\frac{1}{\delta_1\delta_2} - \frac{\delta_2-\delta_1}{\delta_2^2}}\right\},$$

则 $Y_j \le 1$ 对某个 $j \in \mathbb{N}$成立。此外，

$$Y_j \le \min\left\{1, (2K)^{-\frac{1}{\delta_1}} b^{-\frac{1}{\delta_1^2}} b^{-\frac{j}{\delta_1}}\right\} \quad for\ all\ j \ge j_0,$$

其中 $j_0$ 是 满足 $Y_j \le 1$的最小 $j \in \mathbb{N}\cup\{0\}$。特别地，当 $j \to \infty$时， $Y_j$ 趋于零。

我们以一个在下文中发挥重要作用的技术引理结束本小节。

引理 1.4. 设 $p$、$q$、$s$ 满足 (1.5) 和 (1.12)。则存在一个正常数 $C = C(N,p,q,s)$，使得对每个 $f \in W^{1,p}(B_r)$ 及任意 $L_0 > 0$，有

$$\begin{aligned}\fint_{B_r} \left|\frac{f}{r}\right|^p + L_0 \left|\frac{f}{r^s}\right|^q dx \le{}& CL_0 r^{(1-s)q} \left(\fint_{B_r} |Df|^p dx\right)^{\frac{q}{p}} + C\left(\frac{|\operatorname{supp} f|}{|B_r|}\right)^{\sigma} \fint_{B_r} |Df|^p dx \\ &+ C\left(\frac{|\operatorname{supp} f|}{|B_r|}\right)^{p-1} \fint_{B_r} \left|\frac{f}{r}\right|^p + L_0 \left|\frac{f}{r^s}\right|^q dx\end{aligned}$$

*with*

$$\sigma := \begin{cases} \frac{p}{N} & for\ 1 < p < N, \\ 1 - \frac{p}{q} & for\ p \ge N. \end{cases}$$

证明。应用 H¨older 不等式和 Sobolev-Poincar´é 不等式，可得

$$\begin{aligned}\fint_{B_r}\left|\frac{f}{r^s}\right|^q dx &\le C\fint_{B_r}\left|\frac{f-(f)_{B_r}}{r^s}\right|^q dx + C\left|\frac{(f)_{Br}}{r^s}\right|^q \\ &\le C\left(\fint_{B_r}\left|\frac{f-(f)_{B_r}}{r^s}\right|^{p_q^*} dx\right)^{\frac{q}{p_q^*}} + C\left|\frac{(f)_{B_r}}{r^s}\right|^q \\ &\le Cr^{(1-s)q}\left(\fint_{B_r}|Df|^p\,dx\right)^{\frac{q}{p}} + C\left|\frac{(f)_{B_r}}{r^s}\right|^q,\end{aligned}$$

其中

$$p_q^* = \begin{cases} p^* & \text{for } 1<p<N, \\ q & \text{for } p\ge N.\end{cases}$$

以类似的方式，我们得到

$$\begin{aligned}\fint_{B_r}\left|\frac{f}{r}\right|^p dx &\le C\fint_{B_r}\left|\frac{f-(f)_{B_r}}{r}\right|^p \chi_{\{f\neq 0\}}\,dx + C\left|\frac{(f)_{Br}}{r}\right|^p \\ &\le C\left(\frac{|\operatorname{supp} f|}{|B_r|}\right)^{\sigma}\left(\fint_{B_r}\left|\frac{f-(f)_{B_r}}{r}\right|^{p_q^*} dx\right)^{\frac{p}{p_q^*}} + C\left|\frac{(f)_{B_r}}{r}\right|^p \\ &\le C\left(\frac{|\operatorname{supp} f|}{|B_r|}\right)^{\sigma}\fint_{B_r}|Df|^p dx + C\left|\frac{(f)_{B_r}}{r}\right|^p.\end{aligned}$$

由 H¨older 不等式可得

$$\begin{aligned}L_0\left|\frac{(f)_{B_r}}{r^s}\right|^q + \left|\frac{(f)_{B_r}}{r}\right|^p &\le L_0 r^{-sq}\left(\frac{|\operatorname{supp} f|}{|B_r|}\right)^{q-1}\fint_{B_r}|f|^q dx + r^{-p}\left(\frac{|\operatorname{supp} f|}{|B_r|}\right)^{p-1}\fint_{B_r}|f|^p dx \\ &\le \left(\frac{|\operatorname{supp} f|}{|B_r|}\right)^{p-1}\fint\left|\frac{f}{r}\right|^p + L_0\left|\frac{f}{r^s}\right|^q dx.\end{aligned}$$

结合上述估计即可得到所述结论。 □

# 2 Caccioppoli 估计

本节旨在建立 Caccioppoli 估计，它包含证明极小化子的（局部）正则性所需的全部信息，包括有界性、H¨older 连续性和 Harnack 估计。

引理 2.1 （卡乔波利不等式）。设 $B_{2R}\equiv B_{2R}(x_0)\subset\subset\Omega$。假设 $u\in\mathcal{A}(\Omega)$ 是 (1.1) 的极小化子。那么存在一个正常数 $C$，其仅依赖于 $s$、$p$、$q$、$\Lambda$、$N$，使得对任意 $0<\rho<r\le R$,

$$\begin{aligned}&\int_{B_\rho}|Dw_\pm|^p\,dx + \int_{B_\rho}\int_{B_\rho}a(x,y)\,|w_\pm(x)-w_\pm(y)|^q\,d\mu + \int_{B_\rho}w_\pm(x)\Big(\int_{\mathbb{R}^N}\frac{a(x,y)w_\mp^{q-1}(y)}{|x-y|^{N+sq}}dy\Big)dx \\ &\le \frac{C}{(r-\rho)^p}\int_{B_r}w_\pm^p dx + \frac{C}{(r-\rho)^q}\int_{B_r}\int_{B_r}a(x,y)\frac{|w_\pm(x)+w_\pm(y)|^q}{|x-y|^{N+(s-1)q}}\,dxdy \\ &\quad + \frac{Cr^{N+sq}}{(r-\rho)^{N+sq}}\int_{B_r}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\rho}a(x,y)\frac{w_\pm^{q-1}(x)w_\pm(y)}{|x-x_0|^{N+sq}}dxdy + C\int_{B_r}|f|w_\pm\,dx,\end{aligned}$$

其中 $w_\pm=(u-k)_\pm$ 具有一个水平 $k\in\mathbb{R}$。

证明。 由于这与 [18, 命题 75]类似，我们仅给出证明概要。任取$\rho_1$， $r_1$ 满足 $\rho \le \rho_1 < r_1 \le r$。令 $\phi \in C_0^\infty\left(B_{(r_1+\rho_1)/2}\right)$ 为满足 $0 \le \phi \le 1$， $\phi \equiv 1$ 在 $B_{\rho_1}$ 和 $|\nabla\phi| \le 4/(r_1-\rho_1)$中的截断函数。将 $v = u - w_+\phi$ 作为（1.1）中的测试函数，可以看出

$$\begin{aligned}
0 \le & \int_\Omega \big(F(x,Dv) - F(x,Du)\big)dx + \int_{B_{r_1}}\int_{B_{r_1}} a(x,y)\big(|v(x)-v(y)|^q - |u(x)-u(y)|^q\big)d\mu \\
& + 2\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{r_1}}\int_{B_{r_1}} a(x,y)\big(|v(x)-v(y)|^q - |u(x)-u(y)|^q\big)d\mu + \int_{B_{r_1}}(v-u)f(x)dx \\
=: & \ I_1 + I_2 + I_3 + I_4.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

我们分别估计 $I_1$、 $I_2$、 $I_3$ 和 $I_4$ 在（2.1）中的情形。对于 $I_1$，我们得到

$$I_1 \le C\int_{B_{r_1}\setminus B_{\rho_1}} |Dw_+|^p\,dx + C\int_{B_r}\left|\frac{w_+}{r_1-\rho_1}\right|^p dx - \Lambda^{-1}\int_{B_{r_1}}|Dw_+|^p\,dx.$$

详细内容见 [10, 第 7] 页。按照 [18, P4819–4821], 中的计算，我们知道

$$\begin{aligned}
I_2 + I_3 \le & -\frac{1}{C}\int_{B_{\rho_1}}\int_{B_{\rho_1}} a(x,y)\,|w_+(x)-w_+(y)|^q\,d\mu \\
& - \frac{1}{C}\int_{B_{\rho_1}} w_+(x)\left(\int_{\mathbb{R}^N}\frac{a(x,y)w_-^{q-1}(y)}{|x-y|^{N+sq}}dy\right)dx \\
& + C\iint_{(B_{r_1}\times B_{r_1})\setminus(B_{\rho_1}\times B_{\rho_1})} a(x,y)\,|w_+(x)-w_+(y)|^q\,d\mu \\
& + \frac{C}{(r_1-\rho_1)^q}\int_{B_{r_1}}\int_{B_{r_1}} a(x,y)\frac{|w_+(x)+w_+(y)|^q}{|x-y|^{N+(s-1)q}}\,dxdy \\
& + \frac{Cr^{N+sq}}{(r_1-\rho_1)^{N+sq}}\int_{B_r}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\rho}\frac{a(x,y)w_+^{q-1}(x)w_+(y)}{|x-x_0|^{N+sq}}dxdy
\end{aligned}$$

其中有某个通用常数 $C \ge 1$。对于项 $I_4$，显然

$$(v-u)f(x) = \phi(x)w_+(x)f(x),$$

由此可直接得到 $I_4$ 的如下估计，

$$I_4 \le \int_{B_r} w_+(x)|f(x)|dx.$$

根据 $I_1$–$I_4$ 的估计，我们可以得出

$$\begin{aligned}
& \int_{B_{\rho_1}}\int_{B_{\rho_1}} a(x,y)\,|w_+(x)-w_+(y)|^q\,d\mu + \int_{B_{\rho_1}}|Dw_+|^p\,dx \\
& \quad + \int_{B_{\rho_1}} w_+(x)\left(\int_{\mathbb{R}^N}\frac{a(x,y)w_-^{q-1}(y)}{|x-y|^{N+sq}}dy\right)dx \\
\le & C\bigg(\int_{B_{r_1}\setminus B_{\rho_1}}\int_{B_{r_1}\setminus B_{\rho_1}} a(x,y)\,|w_+(x)-w_+(y)|^q\,d\mu + \int_{B_{r_1}\setminus B_{\rho_1}}|Dw_+|^p\,dx \\
& \quad + \frac{1}{(r_1-\rho_1)^q}\int_{B_{r_1}}\int_{B_{r_1}} a(x,y)\frac{|w_+(x)+w_+(y)|^q}{|x-y|^{N+(s-1)q}}\,dxdy + \frac{1}{(r_1-\rho_1)^p}\int_{B_r} w_+^p dx
\end{aligned}$$

$$+\frac{r^{N+sq}}{(r_1-\rho_1)^{N+sq}}\int_{B_r}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\rho}\frac{a(x,y)w_+^{q-1}(x)w_+(y)}{|x-x_0|^{N+sq}}dxdy+\int_{B_r}w_+(x)|f(x)|dx\Big). \tag{2.2}$$

我们如下定义 $\Phi(t)$,

$$\Phi(t)=\int_{B_t}\int_{B_t}a(x,y)\,|w_+(x)-w_+(y)|^q\,d\mu+\int_{B_t}|Dw_+|^p\,dx$$
$$+\int_{B_t}w_+(x)\left(\int_{\mathbb{R}^N}\frac{a(x,y)w_-^{q-1}(y)}{|x-y|^{N+sq}}dy\right)dx,\qquad t>0.$$

由 (2.2) 可得

$$\Phi(\rho_1)\le C\big(\Phi(r_1)-\Phi(\rho_1)\big)+\frac{C}{(r_1-\rho_1)^q}\int_{B_{r_1}}\int_{B_{r_1}}a(x,y)\frac{|w_+(x)+w_+(y)|^q}{|x-y|^{N+(s-1)q}}\,dxdy$$
$$+\frac{C}{(r_1-\rho_1)^p}\int_{B_r}w_+^p dx+\frac{Cr^{N+sq}}{(r_1-\rho_1)^{N+sq}}\int_{B_r}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\rho}\frac{a(x,y)w_+^{q-1}(x)w_+(y)}{|x-x_0|^{N+sq}}dxdy$$
$$+C\int_{B_r}w_+(x)|f(x)|dx$$

其中 $C=C(N,s,p,q,\Lambda)$。由此可应用技术引理 [21, Lemma 2.5]，得到所需的估计。

□

# 3 局部有界性

本节旨在通过卡乔波利不等式，证明 (1.1) 的极小化子的局部有界性，见定理1 和2。

任取满足 $B_{2r}\equiv B_{2r}(x_0)\subset\subset\Omega$ 的中心 $x_0\in\Omega$ 和半径 $r\in(0,1)$，取一个递减序列

$$r_i=2^{-1}r+2^{-i-1}r,\quad i=0,1,2,\dots. \tag{3.1}$$

球 $B_i$ 选取如下

$$B_i=B_{r_i}(x_0),\quad i=0,1,2,\dots. \tag{3.2}$$

我们定义如下递增的层级序列及其对应的函数:

$$k_i=\left(1-2^{-i}\right)\bar{k}\quad\text{with }\bar{k}>0,\quad w_i=(u-k_i)_+,\quad i=0,1,2,\dots. \tag{3.3}$$

注意

$$r_i-r_{i+1}=2^{-i-2}r,\quad k_{i+1}-k_i=2^{-i-1}\bar{k}\quad\text{and}\quad w_{i+1}\le w_i,$$

这一点将在下文多次用到。在接下来的两个引理中，我们将讨论函数 $w_i$ 在域 $B_{i+1}$ 和 $B_i$上的卡乔波利不等式。

引理 3.1. 假设 $u$ 是 (1.1) 的一个极小化子，$K_{sq}$ 和 $F$ 满足 (1.2)–(1.4)，其中 $a_0>0$，且函数 $f|_{B_r}$ 属于 $L^\gamma(B_r)$，其中 $\gamma>\frac{q}{q-1}$。记号 $B_i$ 和 $w_i$ 分别由 (3.2)–(3.3) 给出。那么对于所有 $i\in\mathbb{N}$，我们有

$$\fint_{B_{i+1}}H_r(w_{i+1})dx\le\frac{C2^{i(N+q)}}{\left(H_r(k_{i+1}-k_i)\right)^{\frac{1}{\kappa'}}}\left(\fint_{B_i}H_r(w_i)dx\right)^{1+\frac{1}{\kappa'}}\left(1+\frac{\overline{\mathrm{Tail}}(u_+;x_0,r/2)}{h_r(k_{i+1}-k_i)}\right)$$

$$+\frac{C2^{i(N+q)}}{\left(H_r\left(k_{i+1}-k_i\right)\right)^{\frac{1}{\kappa'}}}\left(\fint_{B_i}H_r(w_i)dx\right)^{\frac{1}{\gamma'}+\frac{1}{\kappa'}}\frac{d}{g_r(k_{i+1}-k_i)},$$

其中 $\kappa:=p^*/p$, $\frac{1}{\kappa}+\frac{1}{\kappa'}=1$, $d:=\left(\fint_{B_r}|f(x)|^\gamma\,dx\right)^{\frac{1}{\gamma}}$, 函数 $H_r(\cdot)$ $g_r(\cdot)$ 由(1.9)–(1.10)确定,

且

$$\overline{\mathrm{Tail}}(u_+;x_0,r/2):=\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{r/2}(x_0)}\frac{u_+^{q-1}(x)}{|x-x_0|^{N+sq}}\,dxdy.$$

证明。通过利用（分数阶）Sobolev 嵌入定理和 Hölder 不等式，我们得到

$$\begin{aligned}
&\fint_{B_{i+1}}H_r(w_{i+1})dx\\
&\le\left(\frac{|A^+(k_{i+1},w_{i+1})|}{|B_{i+1}|}\right)^{\frac{1}{\kappa'}}\left(\fint_{B_{i+1}}\left(\frac{w_{i+1}^p}{r_{i+1}^p}+\frac{w_{i+1}^q}{r_{i+1}^{sq}}\right)^\kappa dx\right)^{\frac{1}{\kappa}}\\
&\le C\left(\frac{|A^+(k_{i+1},w_{i+1})|}{|B_{i+1}|}\right)^{\frac{1}{\kappa'}}\left(\fint_{B_{i+1}}\int_{B_{i+1}}|w_{i+1}(x)-w_{i+1}(y)|^q\,d\mu+\fint_{B_{i+1}}|Dw_{i+1}|^p dx\right)\\
&\quad+C\left(\frac{|A^+(k_{i+1},w_{i+1})|}{|B_{i+1}|}\right)^{\frac{1}{\kappa'}}\fint_{B_{i+1}}H_r(w_{i+1})dx,
\end{aligned}\tag{3.4}$$

其中我们用到了如下事实： $\kappa:=\min\{p^*/p,q_s^*/q\}$ and $\frac{1}{\kappa}+\frac{1}{\kappa'}=1$。不难验证,

$$\left|A^+(k_{i+1},r_{i+1})\right|\le\int_{A^+(k_{i+1},r_{i+1})}\frac{H_r((u-k_i)_+)}{H_r(k_{i+1}-k_i)}dx\le\int_{B_i}\frac{H_r(w_i)}{H_r(k_{i+1}-k_i)}dx,$$

其中集合 $A^+$ 定义为 (1.8)。应用引理 2.1 其中 $a_0>0$ 和 (3.1)，可得

$$\begin{aligned}
&\int_{B_{i+1}}\int_{B_{i+1}}\frac{|w_i(x)-w_i(y)|^q}{|x-y|^{N+sq}}dxdy+\int_{B_{i+1}}|Dw_i|^p dx\\
&\le C\left(\frac{r_i}{r_i-r_{i+1}}\right)^{N+q}\left(\fint_{B_i}\frac{w_{i+1}^p}{r^p}+\frac{w_{i+1}^q}{r^{sq}}dx+\fint_{B_i}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{i+1}}\frac{w_{i+1}^{q-1}(x)w_{i+1}(y)}{|x-x_0|^{N+sq}}dxdy+\fint_{B_i}|f|w_{i+1}\,dx\right)\\
&\le C2^{(N+q)i}\left(\fint_{B_i}H_r(w_{i+1})dx+\overline{\mathrm{Tail}}(u_+;x_0,r/2)\fint_{B_i}w_{i+1}dx+\fint_{B_i}|f|w_{i+1}\,dx\right).
\end{aligned}\tag{3.5}$$

现在我们来分析

$$\fint_{B_i}w_{i+1}\,dx\le\fint_{B_i}\frac{h_r((u-k_i)_+)}{h_r(k_{i+1}-k_i)}(u-k_{i+1})_+\,dx\le\frac{1}{h_r(k_{i+1}-k_i)}\fint_{B_i}H_r((u-k_i)_+)\,dx$$

and

$$w_{i+1}=(u-k_{i+1})_+\le(u-k_{i+1})_+\left[\frac{(u-k_i)_+}{k_{i+1}-k_i}\right]^{l-1}\le\frac{(u-k_i)_+^l}{(k_{i+1}-k_i)^{l-1}},\quad\text{for } l\ge1.$$

对于（3.5）中的最后一个积分，由 Hölder 不等式可得¨,

$$\begin{aligned}
\fint_{B_i}|f|w_{i+1}\,dx&\le\frac{1}{(k_{i+1}-k_i)^{\bar q-1}}\left(\fint_{B_i}|f|^\gamma\,dx\right)^{\frac{1}{\gamma}}\left(\fint_{B_i}w_i^{\bar q\cdot\gamma'}\,dx\right)^{\frac{1}{\gamma'}}\\
&=\frac{r^{\bar q}}{(k_{i+1}-k_i)^{\bar q-1}}\left(\fint_{B_i}|f|^\gamma\,dx\right)^{\frac{1}{\gamma}}\left(\fint_{B_i}\frac{w_i^q}{r^q}\,dx\right)^{\frac{1}{\gamma'}}
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{r^{\bar{q}}}{(k_{i+1}-k_i)^{\bar{q}-1}} \left( \fint_{B_i} |f|^{\gamma}\, dx \right)^{\frac{1}{\gamma}} \left( \fint_{B_i} H_r(w_i)\, dx \right)^{\frac{1}{\gamma'}} \tag{3.6}$$

其中 $\bar{q}:= q/\gamma' = (\gamma-1)\, q/\gamma$。将（3.5）和（3.6）代入（3.4）即可得到所需的估计 te. □

引理 3.2. 假设 $u$ 是 (1.1) 的极小化子，其中 $K_{sq}$ 和 $F$ 满足 (1.2)–(1.4)，且 满足$a_0 > 0$，并且函数 $f|_{B_r}$ 属于 $L^{\gamma}(B_r)$，满足

$$\gamma > \max\left\{ \frac{N}{p}, \frac{q}{q-1} \right\}.$$

那么，对于任意 $\delta \in (0,1)$，有

$$\sup_{B_{r/2}} u_+ \leq C_\delta H_r^{-1} \left( \fint_{B_r} H_r\left(u_+\right)\, dx \right) + \delta h_r^{-1}\left( r^{-sq}\, \mathrm{Tail}^{q-1}(u_+; x_0, r/2) \right) + \delta g_r^{-1}(d),$$

其中 $d = \left( \fint_{B_r} |f(x)|^{\gamma}\, dx \right)^{\frac{1}{\gamma}}$，常数 $C_\delta > 0$ 取决于 $s$、$p$、$q$、$N$、$\Lambda$、$a_0$、$A_0$ 和 $\delta$。

证明。回顾 $w_i$、$B_i$ 和 $H_r(\cdot)$的定义，记

$$Y_i = \fint_{B_i} H_r(w_i)\, dx.$$

引理 3.1 给出了关于 $Y_i$的如下估计：

$$\begin{aligned} Y_{i+1} \leq{}& \frac{C 2^{i(N+q)}}{\left(H_r(2^{-i-1}\bar{k})\right)^{1/\kappa'}} \left( 1 + \frac{\mathrm{Tail}^{q-1}(u_+; x_0, r/2)}{r^{sq} h_r(2^{-i-1}\bar{k})} \right) Y_i^{1+\frac{1}{\kappa'}} \\ &+ \frac{C 2^{i(N+q)}}{\left(H_r(2^{-i-1}\bar{k})\right)^{1/\kappa'}} \frac{d}{g_r(2^{-i-1}\bar{k})} Y_i^{1+\left(\frac{1}{\kappa'}+\frac{1}{\gamma'}-1\right)}. \end{aligned}$$

通过观察

$$H_r(2^{-i-1}\bar{k}) \geq 2^{-(i+1)q} H_r(\bar{k}),\ h_r(2^{-i-1}\bar{k}) \geq 2^{-(i+1)(q-1)} h_r(\bar{k})$$

and

$$g_r(2^{-i-1}\bar{k}) = 2^{-(i+1)(\bar{q}-1)} g_r(\bar{k}),$$

于是得到

$$\begin{aligned} Y_{i+1} \leq{}& \frac{C 2^{i(N+2q+\frac{q}{\kappa'})}}{H_r(\bar{k})^{\frac{1}{\kappa'}}} \left( 1 + \frac{\mathrm{Tail}^{q-1}(u_+; x_0, r/2)}{r^{sq} h_r\left(\bar{k}\right)} \right) Y_i^{1+\frac{1}{\kappa'}} \\ &+ \frac{C 2^{i(N+q+\bar{q}+\frac{q}{\kappa'})}}{H_r(\bar{k})^{\frac{1}{\kappa'}}} \frac{d}{g_r(\bar{k})} Y_i^{1+\left(\frac{1}{\kappa'}+\frac{1}{\gamma'}-1\right)}. \end{aligned}$$

现在我们首先选取 $\bar{k} \geq \delta h_r^{-1}\left( r^{-sq} 尾项^{q-1}(u_+;\ x_0, r/2) \right) + \delta g_r^{-1}(d)$，使得

$$\frac{\delta^q\, \mathrm{Tail}^{q-1}(u_+; x_0, r/2)}{r^{sq} h_r\left(\bar{k}\right)} \leq \frac{\mathrm{Tail}^{q-1}(u_+; x_0, r/2)}{r^{sq} h_r\left(\bar{k}/\delta\right)} \leq 1$$

and

$$\frac{\delta^q d}{g_r(\bar{k})} \leq \frac{d}{g_r\left(\bar{k}/\delta\right)} \leq 1.$$

因此，我们有

$$Y_{i+1} \leq \frac{C2^{i\theta}}{\delta^q H_r(\bar{k})^{\frac{1}{\kappa'}}}\left(Y_i^{1+\frac{1}{\kappa'}} + Y_i^{1+\left(\frac{1}{\kappa'}+\frac{1}{\gamma'}-1\right)}\right),$$

其中 $\theta := N + 2q + \frac{q}{\kappa'}$。此外，我们可以验证

$$\frac{1}{\kappa'} + \frac{1}{\gamma'} = \frac{\kappa-1}{\kappa} + \frac{\gamma-1}{\gamma} > 1$$

这是由于 $\gamma > \frac{\kappa}{\kappa-1}$ 由（1.13）保证。

取 $\sigma := \frac{\kappa'}{1/\kappa'+1/\gamma'-1} + (\kappa')^2\left(1-\frac{1}{\gamma'}\right)$，我们旨在选取足够大的 $\bar{k}$，使得

$$Y_0 = \fint_{B_r} H_r\left((u-\bar{k})\right)\,dx \leq \fint_{B_r} H_r\left(u_+\right)\,dx \leq \left(\frac{2C}{\delta^q\left(H_r\left(\bar{k}\right)\right)^{1/\kappa'}}\right)^{-\kappa'} 2^{-\theta\sigma}. \tag{3.7}$$

注意到

$$\left(\frac{2C}{\delta^q\left(H_r\left(\bar{k}\right)\right)^{1/\kappa'}}\right)^{-\kappa'} 2^{-\theta\sigma} = 2^{-\theta\sigma}\left(\frac{\delta^q}{2C}\right)^{\kappa'} H_r\left(\bar{k}\right)$$

¯并进行一些计算，我们选取 $k$，使得

$$\bar{k} \geq H_r^{-1}\left(2^{\theta\sigma}\left(\frac{2C}{\delta^q}\right)^{\kappa'} \fint_{B_r} H_r(u_+)\,dx\right)$$

以确保（3.7）成立。最终我们选择

$$\bar{k} = H_r^{-1}\left(2^{\theta\sigma}\left(\frac{2C}{\delta^q}\right)^{\kappa'} \fint_{B_r} H_r(u_+)\,dx\right) + \delta h_r^{-1}\left(\operatorname{Tail}^{q-1}(u_+;x_0,r/2)/r^{sq}\right) + \delta g_r^{-1}(d).$$

此时，我们可以利用引理 1.3 得出 $Y_i \to 0$ 当 $i \to \infty$时成立。证明至此完成。

□

定理 **1** 的证明。 该定理是引理 3.2 的直接推论。 □

接下来，我们考虑更一般的情形： $a_0 = 0$ 在（1.4）中，此时它确实具有双相问题的性质。

引理 3. **3.** 设 $u$ 是问题 (1.1)的极小化子。假设 (1.2)–(1.5) 及 $a_0 = 0$ 均成立。令 $t$

$$\begin{cases} q \leq \frac{Np}{N-p} =: p^* \ \textit{for}\ 1 < p \leq N, \\ q < \infty \ \textit{for}\ p > N \end{cases}$$

成立。函数 $f|_{B_r}$属于 $L^\gamma(B_r)$其中 $\gamma > \frac{p}{p-1}$。记号 $B_i, w_i$分别由以下各式给出(3.2)–(3.3)。于是，对所有满足 $i \in \mathbb{N}$ 的情形，均有

$$r^{-p}\fint_{B_{i+1}} H(w_{i+1})dx \leq Cr^{(1-s)q}2^{im}\left(\frac{1}{r^{sq}} + \frac{1}{r^p} + \frac{\operatorname{Tail}_a^{q-1}\left(u_+,x_0,r/2\right)}{r^{sq}\bar{k}^{q-1}}\right)^{\frac{q}{p}}\left(\fint_{B_i} H(w_i)dx\right)^{\frac{q}{p}}$$
$$+ \frac{Cr^{(1-s)q}2^{im}d^{\frac{q}{p}}}{\bar{k}^{(\bar{p}-1)q/p}}\left(\fint_{B_i} H(w_i)dx\right)^{\frac{q(\gamma-1)}{p\gamma}}$$

$$+C2^{im}\left(\frac{1}{r^{sq}}+\frac{1}{r^{p}}+\frac{\operatorname{Tail}_a^{q-1}(u_+,x_0,r/2)}{r^{sq}\bar{k}^{q-1}}\right)\left(\fint_{B_i}H(w_i)dx\right)^{2-\frac{p}{p^*}}$$
$$+\frac{C2^{im}d}{\bar{k}^{q(1-p/p^*)+\bar{p}-1}}\left(\fint_{B_i}H(w_i)dx\right)^{2-\frac{p}{p^*}-\frac{1}{\gamma}}$$
$$+\frac{C2^{im}}{r^{sq}\bar{k}^{q(p-1)}}\left(\fint_{B_i}H(w_i)dx\right)^{p}, \tag{3.8}$$

其中 $\bar{p}:=(\gamma-1)p/\gamma$, $m:=\max\{(N+sq)q/p, q+\bar{p}-pq/p^*, q(p-1)\}$, $d=\left(\fint_{B_r}|f(x)|^\gamma\,dx\right)^{\frac{1}{\gamma}}$，函数 $H(\cdot)$ 由 $H(t):=t^p+a_r^+t^q$ 定义，其中 $t>0$。这里，尾项$a(u_+,x_0,r/2)$ 由式 (1.11) 给出。

证明。 我们在引理 $\rho=r_{i+1}$ 和 $r=r_i$ 2.1 中选取，从而得到对任意满足 $\beta$ 的 $1\le\beta<p$,

$$\begin{aligned}\fint_{B_i}|Dw_i|^p\,dx&\le\frac{C}{(r_i-r_{i+1})^p}\fint_{B_i}w_{i+1}^p dx+\frac{C}{(r_i-r_{i+1})^q}\fint_{B_i}\int_{B_i}a(x,y)\frac{|w_{i+1}(x)+w_{i+1}(y)|^q}{|x-y|^{N+(s-1)q}}\,dxdy\\&\quad+\frac{Cr_i^{N+sq}}{(r_i-r_{i+1})^{N+sq}}\fint_{B_i}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{i+1}}a(x,y)\frac{w_{i+1}^{q-1}(x)w_{i+1}(y)}{|x-x_0|^{N+sq}}\,dxdy+C\fint_{B_i}|f|w_{i+1}\,dx\\&\le\frac{C2^{iq}a_r^+}{r^{sq}}\fint_{B_i}w_i^q\,dx+\frac{C2^{ip}}{r^p}\fint_{B_i}w_i^p\,dx+\frac{C2^{(i+1)(\beta-1)}}{\bar{k}^{\bar{q}-1}}\fint_{B_i}|f|w_i^\beta\,dx\\&\quad+\frac{C2^{i(N+sq+q)}\operatorname{Tail}_a^{q-1}(u_+,x_0,r/2)}{r^{sq}\bar{k}^{q-1}}\fint_{B_i}w_i^q\,dx,\end{aligned} \tag{3.9}$$

其中我们利用了 $w_{i+1}\le u_+$、 $r\ge r_i\ge r/2$ 和

$$w_{i+1}=(u-k_{i+1})_+\le\frac{2^{(i+1)(p-1)}}{\bar{k}^{\beta-1}}w_i^\beta.$$

现在考虑积分 $\fint_{B_i}|f|w_i^\beta\,dx$，并利用 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}\fint_{B_i}|f|w_i^\beta\,dx&\le\left(\fint_{B_i}|f|^\gamma\,dx\right)^{\frac{1}{\gamma}}\left(\fint_{B_i}w_i^{\frac{\gamma\beta}{\gamma-1}}\,dx\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\\&\le C\left(\fint_{B_r}|f|^\gamma\,dx\right)^{\frac{1}{\gamma}}\left(\fint_{B_i}w_i^p\,dx\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}},\end{aligned} \tag{3.10}$$

其中 $\beta$ 取为 $\beta=\bar{p}$。因此，将（3.10）代入（3.9），可得

$$\begin{aligned}\fint_{B_{i+1}}|Dw_{i+1}|^p\,dx&\le\left(\frac{C2^{iq}}{r^{sq}}+\frac{C2^{ip}}{r^p}+\frac{C2^{i(N+sq)}\operatorname{Tail}_a^{q-1}(u_+,x_0,r/2)}{r^{sq}\bar{k}^{q-1}}\right)\fint_{B_i}H(w_i)\,dx\\&\quad+\frac{C2^{i(\bar{p}-1)}d}{\bar{k}^{\bar{p}-1}}\left(\fint_{B_i}H(w_i)\,dx\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.\end{aligned} \tag{3.11}$$

另一方面，由引理1.4可知

$$\begin{aligned}r_{i+1}^{-q}\fint_{B_{i+1}}H(w_{i+1})\,dx&\le\fint_{B_{i+1}}\left(\frac{w_{i+1}}{r_{i+1}}\right)^p+a_r^+\left(\frac{w_{i+1}}{r_{i+1}^s}\right)^q dx\\&\le Cr_{i+1}^{(1-s)q}a_r^+\left(\fint_{B_{i+1}}|Dw_{i+1}|^p\,dx\right)^{\frac{q}{p}}\end{aligned}$$

$$+C\left(\frac{|A^+(k_{i+1},r_{i+1})|}{|B_{i+1}|}\right)^{\sigma}\fint_{B_{i+1}}|Dw_{i+1}|^p\,dx$$
$$+C\left(\frac{|A^+(k_{i+1},r_{i+1})|}{|B_{i+1}|}\right)^{p-1}\fint_{B_{i+1}}H\left(\frac{w_{i+1}}{r_{i+1}}\right)\,dx \tag{3.12}$$

with

$$\sigma:=\begin{cases}\frac{p}{N} & \text{for } 1<p<N,\\ 1-\frac{p}{q} & \text{for } p\geq N.\end{cases}$$

这里， $r$ 的选取直接保证了

$$\fint_{B_{i+1}}H\left(\frac{w_{i+1}}{r_{i+1}}\right)\,dx\leq Cr^{-sq}\fint_{B_{i+1}}H\left(w_{i+1}\right)\,dx.$$

不难验证，

$$\begin{aligned}\frac{|A^+(k_{i+1},r_{i+1})|}{|B_{i+1}|}&\leq\frac{1}{|B_{i+1}|}\int_{A^+(k_{i+1},r_{i+1})}\frac{(u-k_i)_+^p}{(k_{i+1}-k_i)^p}\,dx\\&=\frac{2^{(i+1)(p-1)}}{|B_{i+1}|}\int_{A^+(k_{i+1},r_{i+1})}\frac{w_i^p}{\bar{k}^{p-1}}\,dx\\&\leq\frac{2^{(i+1)p}}{\bar{k}^p}\fint_{B_i}H(w_i)\,dx\end{aligned}\tag{3.13}$$

由于（3.1）。结合（3.11）–（3.13）可推出

$$\begin{aligned}r^{-p}\fint_{B_{i+1}}H(w_{i+1})\,dx\leq{}&Cr^{(1-s)q}\left(\frac{2^{iq}}{r^{sq}}+\frac{2^{ip}}{r^p}+\frac{2^{i(N+sq)}\operatorname{Tail}_a^{q-1}(u_+,x_0,r/2)}{r^{sq}\bar{k}^{q-1}}\right)^{\frac{q}{p}}\left(\fint_{B_i}H(w_i)\,dx\right)^{\frac{q}{p}}\\&+Cr^{(1-s)q}\left(\frac{2^{(i+1)(\bar{p}-1)}d}{\bar{k}^{\bar{p}-1}}\right)^{\frac{q}{p}}\left(\fint_{B_i}H(w_i)\,dx\right)^{\frac{q(\gamma-1)}{p\gamma}}\\&+C\left(\frac{2^{iq}}{r^{sq}}+\frac{2^{ip}}{r^p}+\frac{2^{i(N+sq)}\operatorname{Tail}_a^{q-1}(u_+,x_0,r/2)}{r^{sq}\bar{k}^{q-1}}\right)\left(\fint_{B_i}H(w_i)\,dx\right)^{1+\sigma}\\&+\frac{C2^{i(q+\bar{p}-pq/p^*)}d}{\bar{k}^{q(1-p/p^*)+\bar{p}-1}}\left(\fint_{B_i}H(w_i)\,dx\right)^{1+\sigma-\frac{1}{\gamma}}\\&+\frac{C2^{iq(p-1)}}{r^{sq}\bar{k}^{q(p-1)}}\left(\fint_{B_i}H(w_i)\,dx\right)^{p}.\end{aligned}$$

因此，通过整理上述不等式可立即得到（3.8）。 □

现在我们可以给出局部与非局部混合双相泛函有界性结果的证明。

定理 **2** 的证明。 设定理 2 的假设成立。现在令

$$Y_i=\fint_{B_i}H(w_i)\,dx,\quad i=0,1,2,\ldots,$$

其中 $B_i$， $w_i$ 在式（3.2）和（3.3）中给出，且 $H(\cdot)$ 的定义见引理 3.3。令

$$\bar{k}\geq\max\{1,\operatorname{Tail}_a(u_+,x_0,r/2)\}$$

稍后确定，由引理 3.3 可推得

$$Y_{i+1} \le C2^{im}\Big(Y_i^{\frac{q}{p}} + Y_i^{\frac{(\gamma-1)q}{\gamma p}} + Y_i^{1+\sigma} + Y_i^{1+\sigma-\frac{1}{\gamma}} + Y_i^{p}\Big), \tag{3.14}$$

其中 $m :=$ 最大值$\{(N+sq)q/p,\ q+\bar{p}-pq/p^*,\ q(p-1)\}$，常数 $C$ 还取决于 $r_\circ$ 由于假设（1.13），可以验证

$$\frac{(\gamma-1)q}{\gamma p} > 1 \quad \text{and} \quad \sigma - \frac{1}{\gamma} > 0.$$

此外，我们可以看到 $2-\frac{p}{p^*} > 1_\circ$ 由于 $H(u) \in L^1(B_r)$ 根据（1.12），可知

$$Y_0 = \fint_{B_r} H((u-\bar{k})_+)\,dx \to 0$$

$\bar{k}$ 由于 $k \to +\infty_\circ$ 因此，我们可以选取足够大的 $k$，使得

$$\cdots \le Y_i \le Y_{i-1} \le \cdots \le Y_0 \le 1$$

对于 $i = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots_\circ$ 因此，我们将式（3.14）重新排列为

$$Y_{i+1} \le C2^{im}Y_i^{1+\tau}. \tag{3.15}$$

Here

$$\tau := \min\left\{\frac{q}{p}-1, \frac{(\gamma-1)q}{\gamma p}-1, \sigma, \sigma-\frac{1}{\gamma}, p-1\right\} > 0.$$

$\bar{}$最后，我们选取足够大的数 $k$，使得

$$Y_0 \le C^{-\frac{1}{\tau}}2^{-\frac{m}{\tau^2}},$$

将其与（3.15）及引理 1.3 结合，可得

$$Y_j \to 0 \quad \text{as } j \to \infty. \tag{3.16}$$

$\bar{}$在上述对 $k$ 的选取下，(3.16) 保证 $u \le 2k$ 在 $B_{r/2}$ 中成立。我们可以通过对 $u \in L^\infty(B_{r/2})$ 应用类似的论证，推得 $-u_\circ$ □

# 4 局部 H¨older 连续性

本节首先总结 (1.1) 的极小化子的正性扩张（见引理 1.1 和 4.1–4.2），这对建立 H¨older 连续性和哈纳克不等式起着关键作用。

**引理 4.1.** 设 $K_{sq}$ 和 $F$ 满足 (1.2) 和 (1.3)，其中 $a_0 > 0_\circ$ 设 $B_{4R} := B_{4R}(x_0) \subset\subset \Omega$，且 $R \le 1_\circ$ 设 $u \in \mathcal{A}(\Omega) \cap L^{q-1}_{sq}(\mathbb{R}^N)$ 是 (1.1) 的极小化子，其中函数 $f|_{B_{4R}}$ 属于$L^\gamma(B_{4R})$，且 $\gamma > 1_\circ$ 假设 $u \ge M$ 在 $B_{4R}$ 中，且

$$|B_{2R} \cap \{u - M \ge t\}| \ge \nu\,|B_{2R}| \tag{4.1}$$

对于某个 $\nu \in (0,1)$、$t > 0$ 和 $M \in \mathbb{R}_\circ$ 那么对于任意 $\delta \in \big(0, \frac{1}{2^8}\big]$，如果

$$\|f\|_{L^\gamma(B_{4R})}\,|B_{4R}|^{-\frac{1}{\gamma}} + (4R)^{-sq}\,\mathrm{Tail}^{q-1}\left((u-M)_-; x_0, 4R\right) \le h_{4R}(\delta t) \tag{4.2}$$

满足 $h_{4R}(\delta t)$：$= \frac{(\delta t)^{p-1}}{(4R)^p} + \frac{(\delta t)^{q-1}}{(4R)^{sq}}$ 如 (1.9)所定义，则有

$$|B_{2R} \cap \{u - M < 2\delta t\}| \le \frac{C}{\nu}\left(\delta^{(q-1)/2} + |\log \delta|^{-\frac{N(p-1)}{(N-1)p}}\right)|B_{2R}|,$$

其中，$C > 0$与 $M$、$t$无关，仅取决于 $s$、$p$、$q$、$N$、$\Lambda$、$a_0$和 $A_0$。

证明。令 $\ell \ge \frac{\delta t}{2}$并设 $w = u - M$。不难验证，$w$属于 $\mathcal{A}(\Omega) \cap L^{q-1}_{sq}(\mathbb{R}^N)$且也是 $\mathcal{E}$的一个极小化子。借助引理 2.1 和（4.2），可推出

$$\begin{aligned}
&[(w-\ell)_-]^p_{W^{1,p}(B_{2R})} + a_0 \int_{B_{2R}} (w(x)-\ell)_- \Big( \int_{B_{2R}} \frac{(w(y)-\ell)_+^{q-1}}{|x-y|^{N+sq}} dy \Big) dx \\
&\le C\Big( \int_{B_{4R}} \frac{(w-\ell)_-^q}{(4R)^{sq}}\,dx + \int_{B_{4R}} \frac{(w-\ell)_-^p}{(4R)^p}\,dx + \int_{B_{4R}} |f|(w-\ell)_-\,dx \\
&\quad + \int_{B_{4R}} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{2R}} \frac{(w(x)-\ell)_-^{q-1}(w(y)-\ell)_-}{|x-x_0|^{N+sq}}\,dxdy \Big) \\
&\le C\left( \frac{\ell^p}{(4R)^p} + \frac{\ell^q}{(4R)^{sq}} + \ell \|f\|_{L^\gamma(B_{4R})} |B_{4R}|^{-\frac{1}{\gamma}} \right)|B_{4R}| \\
&\quad + C\left( \frac{\ell^q}{(4R)^{sq}} + \frac{\ell\, \mathrm{Tail}^{q-1}(w_-; x_0, 4R)}{R^{sq}} \right)|B_{4R}| \\
&\le C H_{4R}(\ell)\,|B_{4R}|. \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

这里利用 $B_{4R}$中 $w$ 的非负性，

$$\|(w-\ell)_-\|^m_{L^m(B_{4R})} \le C\ell^m |B_{4R}| \quad \text{for any } m \ge 1.$$

接下来，根据（4.3）左端的各项，令 $\tau = 1/2$ 并区分以下两种互斥情形：

$$\left(\frac{\delta^\tau t}{R}\right)^p > \left(\frac{\delta^\tau t}{R^s}\right)^q \quad \text{and} \quad \left(\frac{\delta^\tau t}{R}\right)^p \le \left(\frac{\delta^\tau t}{R^s}\right)^q. \qquad (4.4)$$

情形 (4.4)$_2$：将 $\ell = 4\delta^\tau t$ 代入（4.3），可得

$$\int_{B_{2R}} \int_{B_{2R}} \frac{(w(x)-4\delta^\tau t)_+^{q-1}(w(y)-4\delta^\tau t)_-}{|x-y|^{N+sq}}\,dxdy \le C\left(\frac{\delta^\tau t}{R^s}\right)^q |B_{4R}|$$

and

$$\begin{aligned}
&\int_{B_{2R}} \int_{B_{2R}} \frac{(w(x)-4\delta^\tau t)_+^{q-1}(w(y)-4\delta^\tau t)_-}{|x-y|^{N+sq}}\,dxdy \\
&\ge \frac{1}{(4R)^{N+sq}} \int_{B_{2R}\cap\{u\ge t\}} (w(x)-4\delta^\tau t)^{q-1}\,dx \int_{B_{2R}\cap\{w<2\delta^\tau t\}} (4\delta^\tau t - w(y))\,dy \\
&\ge \frac{\delta^\tau t^q}{CR^{sq}} \frac{|B_{2R}\cap\{w\ge t\}|}{|B_{2R}|}\,|B_{2R}\cap\{w<2\delta^\tau t\}| \\
&\ge \frac{\delta^\tau t^q \nu}{CR^{sq}}\,|B_{2R}\cap\{w<2\delta^\tau t\}|
\end{aligned}$$

其中 $C > 1$取决于 $p$，$q$，$s$，$N$，$\Lambda$，$a_0$，$A_0$，这里我们使用了假设（4.1）以及以下事实：$4\delta^\tau \le 1/2$ 且 $|x-y|^{N+sq} \le (4R)^{N+sq}$，对任意 $x$，$y \in B_{2R}$。由上述两个估计可立即得到

$$\frac{|B_{2R}\cap\{w<2\delta t\}|}{|B_{2R}|} \le \frac{|B_{2R}\cap\{w<2\delta^\tau t\}|}{|B_{2R}|} \le \frac{C}{\nu}\delta^{\tau(q-1)},$$

正如预期。

情形 (4.4)1： 令 $m \geq 7$ 为满足下列条件的唯一整数

$$2^{-m-1} \leq \delta < 2^{-m}.$$

考虑递减序列 $\{2^{-k}t\}_{k=0}^{m}$。注意 $2^{-k}t \in (2\delta t,\ t]$ 对任意 $k \in \{0,\dots,m-1\}$。此外，由（4.1），容易看出对于 $k \in \{1,\dots,m-2\}$,

$$\left|B_{2R} \cap \left\{\left(w - 2^{-k+1}t\right)_{-} \leq 2^{-k}t\right\}\right| = \left|B_{2R} \cap \left\{w \geq 2^{-k}t\right\}\right| \geq \left|B_{2R} \cap \{w \geq t\}\right| \geq \nu \left|B_{2R}\right| \tag{4.5}$$

and

$$\left|B_{2R} \cap \left\{\left(w - 2^{-k+1}t\right)_{-} \geq 3 \cdot 2^{-k-1}t\right\}\right| = \left|B_{2R} \cap \left\{w \leq 2^{-k-1}t\right\}\right|. \tag{4.6}$$

情形（4.4）$_1$ 可得

$$R^{sq-p} > (\delta^{\tau}t)^{q-p} > (2^{(-m-1)\tau}t)^{q-p} > (2^{-k-1}t)^{q-p}, \quad k = k_0,\dots,m-2$$

其中 $k_0$ 是大于 $\tau m$的最小整数。这保证了

$$\frac{(2^{-k+1}t)^q}{R^{sq}} \leq \frac{C(2^{-k+1}t)^p}{R^p}, \quad k = k_0,\dots,m-2.$$

由于 $2^{-k+1} \geq \delta$，由上一个公式以及（4.3）结合 $\ell = 2^{-k+1}t$ 可得

$$\begin{aligned}
\left[\left(w - 2^{-k+1}t\right)_{-}\right]^p_{W^{1,p}(B_{2R})} &\leq CH_{4R}(2^{-k+1}t)\left|B_{4R}\right| \\
&\leq C\left(\frac{(2^{-k+1}t)^p}{R^p} + \frac{(2^{-k+1}t)^q}{R^{sq}}\right)\left|B_{4R}\right|, \\
&\leq CR^{N-p}(2^{-k+1}t)^p, \quad k = k_0,\dots,m-2.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

因此，我们可以将引理 1.2 应用于函数 $\left(w - 2^{-k+1}t\right)_{-}$，其中 $h_1 = 2^{-k}t$ 和 $h_2 = 3 \cdot 2^{-k-1}t$。容易得到

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\left|B_{2R} \cap \left\{\left(w - 2^{-k+1}t\right)_{-} \leq 2^{-k}t\right\}\right|}{|B_R|} \cdot \frac{\left|B_{2R} \cap \left\{\left(w - 2^{-k+1}t\right)_{-} \geq 3 \cdot 2^{-k-1}t\right\}\right|}{|B_R|}\right)^{\frac{N-1}{N}} \\
&\leq \frac{C2^k R^{1-\frac{N}{p}}}{t}\left[\left(w - 2^{-k+1}t\right)_{-}\right]_{W^{1,p}(B_{2R})}\left(\frac{\left|B_{2R} \cap \left\{2^{-k}t < \left(w - 2^{-k+1}t\right)_{-} < 3 \cdot 2^{-k-1}t\right\}\right|}{|B_R|}\right)^{\frac{p-1}{p}},
\end{aligned}$$

结合式（4.5）和（4.6）可得

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\left|B_{2R} \cap \left\{w \leq 2^{-k-1}t\right\}\right|}{|B_{2R}|}\right)^{\frac{N-1}{N}} \\
&\leq \frac{CR^{1-\frac{N}{p}}2^k}{\nu^{\frac{N-1}{N}}t}\left[\left(w - 2^{-k+1}t\right)_{-}\right]_{W^{1,p}(B_{2R})}\left(\frac{\left|B_{2R} \cap \left\{2^{-k-1}t < w < 2^{-k}t\right\}\right|}{|B_{2R}|}\right)^{\frac{p-1}{p}}
\end{aligned}$$

对于某个 $C > 0$ 仅依赖于 $N$ 和 $p$。根据（$\left(w - 2^{-k+1}t\right)_{-}$4.7），我们可以控制 $\left(w - 2^{-k+1}t\right)_{-}$的 Gagliardo 半范数，并推得，对于任意 $k \in \{k_0,\dots,m-2\}$,

$$\left(\frac{\left|B_{2R} \cap \left\{w \leq 2^{-k-1}t\right\}\right|}{|B_{2R}|}\right)^{\frac{N-1}{N}} \leq \frac{C}{\nu^{\frac{N-1}{N}}}\left(\frac{\left|B_{2R} \cap \left\{2^{-k-1}t < w < 2^{-k}t\right\}\right|}{|B_{2R}|}\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

将上述不等式对 $k$ 从 $k_0$ 取到 $m-2$ 求和后，我们得到

$$(m-2-k_0)\Big(\frac{|B_{2R}\cap\{w<2\delta t\}|}{|B_{2R}|}\Big)^{\frac{(N-1)p}{N(p-1)}}\le\frac{C}{\nu^{\frac{(N-1)p}{N(p-1)}}}\sum_{i=k_0}^{m-2}\frac{\left|B_{2R}\cap\left\{2^{-k-1}t<w<2^{-k}t\right\}\right|}{|B_{2R}|}\le\frac{C}{\nu^{\frac{(N-1)p}{N(p-1)}}},$$

由此可得

$$\frac{|B_{2R}\cap\{w<2\delta t\}|}{|B_{2R}|}\le\frac{C}{\nu}|\log(\delta^{1-\tau})|^{-\frac{N(p-1)}{(N-1)p}}.$$

因此，证明完毕。 □

根据上述测度论信息，我们可以得到以下逐点结果：

**引理 4.2.** 假设 $K_{sq}$ 和 $F$ 满足 (1.2) 和 (1.3)，且具有 $a_0>0$。设 $B_{4R}:=B_{4R}(x_0)\subset\subset\Omega$，且 $R\le1$。令 $u\in\mathcal{A}(\Omega)\cap L^{q-1}_{sq}(\mathbb{R}^N)$ 为 (1.1) 的极小化子，其中函数 $f|_{B_{4R}}$属于$L^\gamma(B_{4R})$，且 $\gamma>\max\{\frac{N}{p},1\}$。假设存在某个 $M\in\mathbb{R}$, $u\ge M$属于 $B_{4R}$，并且

$$|B_{2R}\cap\{u-M\ge t\}|\ge\nu|B_{2R}|$$

满足某个 $\nu\in(0,1)$ 和 $t>0$。那么存在 $\delta\in\big(0,\frac{1}{2^8}\big]$，它们仅依赖于绝对常数 $N,p,q,s,\Lambda,a_0,A_0$ 和 $\nu$，使得只要

$$\|f\|_{L^\gamma(B_{4R})}|B_{4R}|^{-\frac{1}{\gamma}}+(4R)^{-sq}\operatorname{Tail}^{q-1}((u-M)_-;x_0,4R)\le h_{4R}(\delta t)\tag{4.8}$$

满足 $h_{4R}(\delta t)$: $=\frac{(\delta t)^{p-1}}{(4R)^p}+(\delta t)^{q-1}(4R)^{sq}$ 如 (1.9)所确定的，则可得

$$u-M\ge\delta t\quad in\ B_R.\tag{4.9}$$

证明。仍令 $w:=u-M$。设 $\delta\in(0,2^{-8}]$ 和 $\epsilon\in\big(0,2^{-N-1}\big]$，具体取值稍后确定。首先假设

$$|B_{2R}\cap\{w<2\delta t\}|\le\epsilon|B_{2R}|\tag{4.10}$$

其中 $\epsilon$充分小。任意选取半径 $\rho$，$r$ 满足 $R/2\le r/2<\rho<r\le2R$。由（4.10）结合 $\epsilon\le2^{-N-1}$，可知对于任意 $k\in[\delta t,2\delta t]$ 和

$$\begin{aligned}|B_\rho\cap\{(w-k)_-=0\}|&=|B_\rho\backslash\{w<k\}|\ge|B_\rho|-|B_{2R}\cap\{w<2\delta t\}|\\&\ge\left(1-\epsilon\left(\frac{2R}{\rho}\right)^N\right)|B_\rho|\ge\left(1-2^N\epsilon\right)|B_\rho|\\&\ge\frac{1}{2}|B_\rho|.\end{aligned}$$

这使我们能够利用 Poincar´e-Sobolev 不等式，并得到

$$\begin{aligned}(k-h)^q\left(\frac{|B_\rho\cap\{w<h\}|}{|B_\rho|}\right)^{\frac{q}{q_s^*}}&\le\left(\fint_{B_\rho}(w-k)_-^{q_s^*}\,dx\right)^{\frac{q}{q_s^*}}\\&\le C\rho^{sq}\fint_{B_\rho}\int_{B_\rho}|(w(x)-k)_--(w(y)-k)_-|^q\,d\mu\end{aligned}\tag{4.11}$$

and

$$(k-h)^p\left(\frac{|B_\rho\cap\{w<h\}|}{|B_\rho|}\right)^{\frac{p}{p^*}}\le\left(\fint_{B_\rho}(w-k)_-^{p^*}\,dx\right)^{\frac{p}{p^*}}$$
$$\le C\rho^p\fint_{B_\rho}|D\big((w-k)_-\big)|^p\,dx \tag{4.12}$$

对于任意 $h\in(\delta t,k)$。令

$$\kappa:=\frac{p^*}{p}<\frac{q_s^*}{q},$$

由（4.11）、（4.12）和引理 2.1可得

$$\begin{aligned}
&\left(\left(\frac{k-h}{\rho^s}\right)^q+\left(\frac{k-h}{\rho}\right)^p\right)\left(\frac{|B_\rho\cap\{w<h\}|}{|B_\rho|}\right)^{\frac{1}{\kappa}}\\
&\le C\fint_{B_\rho}\int_{B_\rho}|(w(x)-k)_- -(w(y)-k)_-|^q\,d\mu+\fint_{B_\rho}|D\big((w-k)_-\big)|^p\,dx\\
&\le C\left(\frac{r}{r-\rho}\right)^{N+q}\left(\fint_{B_r}\frac{(w-k)_-^q}{r^{sq}}\,dx+\fint_{B_r}\frac{(w-k)_-^p}{r^p}\,dx\right.\\
&\qquad\left.+\fint_{B_r}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\rho}\frac{a(x,y)(w(x)-k)_-^{q-1}(w(y)-k)_-}{|x-x_0|^{N+sq}}\,dxdy+\fint_{B_r}|f|(w-k)_-\right),
\end{aligned}\tag{4.13}$$

其中，左端可估计如下，

$$\left(\left(\frac{k-h}{\rho^s}\right)^q+\left(\frac{k-h}{\rho}\right)^p\right)\left(\frac{|B_\rho\cap\{w<h\}|}{|B_\rho|}\right)^{\frac{1}{\kappa}}\ge H_{4R}(k-h)\left(\frac{|B_\rho\cap\{w<h\}|}{|B_\rho|}\right)^{\frac{1}{\kappa}}.\tag{4.14}$$

接下来，我们利用以下事实

$$\|(w-k)_-\|^m_{L^m(B_r(x_0))}\le Ck^m\left|A^-(k,x_0,r)\right|\ \text{ for any } m\ge1\tag{4.15}$$

来估计（4.13）中的前两个积分。由（4.8），可知

$$\begin{aligned}
&\int_{B_r}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\rho}\frac{a(x,y)(w(x)-k)_-^{q-1}(w(y)-k)_-}{|x-x_0|^{N+sq}}\,dxdy\\
&\le\int_{B_r}(w(y)-k)_-\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{4R}}\frac{a(x,y)w_-^{q-1}(x)}{|x-x_0|^{N+sq}}\,dx\right)dy\\
&\quad+\int_{B_r}(w(y)-k)_-\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{2R}}\frac{k^{q-1}}{|x-x_0|^{N+sq}}\,dx\right)dy\\
&\le Ck\left|A(k,x_0,r)\right|\mathrm{Tail}^{q-1}(w_-;x_0,2R)+Ck^q\left|A(k,x_0,r)\right|\left(R^{-p}+R^{-sq}\right)\\
&\le CH_{4R}(k)\left|A(k,x_0,r)\right|.
\end{aligned}\tag{4.16}$$

这里，正常数 $C$取决于 $N$、$p$、$q$、$s$、$A_0$ 和 $\Lambda$。此外，我们估计 $\int_{B_r}|f|(w-k)_-\,dx$如下：

$$\begin{aligned}
\int_{B_r}|f|(w-k)_-\,dx&\le k\|f\|_{L^\gamma(B_r)}\left|A^-(k,x_0,r)\right|^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\\
&=k\|f\|_{L^\gamma(B_r)}|B_r|^{-\frac{1}{\gamma}}\frac{\left|A^-(k,x_0,r)\right|^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{|B_r|^{-\frac{1}{\gamma}}}
\end{aligned}$$

$$\leq kh_{4R}(\delta t)\frac{|A^-(k,x_0,r)|^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{|B_r|^{-\frac{1}{\gamma}}}$$
$$\leq H_{4R}(k)\frac{|A^-(k,x_0,r)|^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{|B_r|^{-\frac{1}{\gamma}}} \tag{4.17}$$

由 (4.8) 可知。结合 (4.13)–(4.17) 可得

$$\left(\frac{|A^-(h,x_0,\rho)|}{|B_\rho|}\right)\leq C\left(\frac{r}{r-\rho}\right)^{(N+q)\kappa}\left(\frac{H_{4R}(k)}{H_{4R}(k-h)}\right)^{\kappa}\left(\frac{|A^-(k,x_0,r)|}{|B_r|}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}\kappa}.$$

考虑由下式定义的序列 $\{r_i\}_{i=0}^{\infty}$ 和 $\{k_i\}_{i=0}^{\infty}$

$$r_i:=(1+2^{-i})R\quad\text{and}\quad k_i:=\left(1+2^{-i}\right)\delta t.$$

再令 $Y_i:=|A^-(k_i,\ x_0,\ r_i)|/|B_{r_i}|$。将4.11式应用于 $h=k_i,\ k=k_{i-1},\ \rho=r_i$ 和 $r=r_{i-1}$，可得

$$Y_{i+1}\leq C2^{i(N+2q)\kappa}Y_i^{\frac{\kappa(\gamma-1)}{\gamma}},\qquad i=1,2,3,\ldots.$$

关于 $\gamma$ 的假设保证

$$\frac{\kappa(\gamma-1)}{\gamma}>1.$$

对于 $p\geq N$，我们可以预先取 $\kappa$ 大于 $\frac{\gamma}{\gamma-1}$。然后，为了利用收敛引理，我们令

$$Y_0=\frac{|A^-(2\delta t,x_0,2R)|}{|B_{2R}|}\leq(2C)^{-\frac{1}{\kappa(\gamma-1)/\gamma-1}}2^{-\frac{\kappa(N+2q)}{(\kappa(\gamma-1)/\gamma-1)^2}}=:\theta,$$

只需选取 $\delta$ 充分小即可。根据引理4.1，我们选取 $\delta\in\left(0,\ \frac{1}{2^8}\right]$，其取决于 $p,\ q,\ s,\ N,\ \Lambda$ 和 $a_0,\ A_0$，使得

$$\frac{C}{\nu}\left(\delta^{(q-1)/2}+|\log\delta|^{-\frac{N(p-1)}{(N-1)p}}\right)\leq\min\{\theta,2^{-N-1}\}.$$

由此处的推导以及引理1.3可知

$$\lim_{i\to\infty}Y_i=0,$$

这直接保证了 $w\geq\delta t$ 在 $B_R$中。因此，在引理陈述中如上选择 $\delta$ 后，正性扩张结论（4.9）显然成立。□

现在，我们通过证明 H¨older 连续性来结束本节。在证明中，我们需要特别关注引理 $\delta$ 中的常数 4.2 ，确保它不依赖于任意数 $M$。为此，可以按如下方式得到所需结果。

定理3的证明。 设 $\delta\in(0,2^{-8}]$ 为引理4.2中得到的常数。根据勒贝格控制收敛定理，我们可以找到足够小的 $\alpha$ 满足

$$0<\alpha\leq\min\left\{\frac{s}{2},\log_4\left(\frac{2}{2-\delta}\right),\frac{p\gamma-N}{2\gamma(p-1)}\right\}\tag{4.18}$$

and

$$\int_4^{+\infty} \frac{(\rho^\alpha - 1)^{q-1}}{\rho^{1+sq}} d\rho \le \frac{\delta^{q-1}}{32^{q+1} N |B_1|}. \tag{4.19}$$

于是我们令

$$j_0 := \max\left\{ \frac{2}{sq} \log_4 \left( \frac{32^{q+1} N (1 + |B_1|)}{s\delta^{q-1}} \right), \frac{2\gamma(p-1)}{p\gamma - N} \log_4 \left( \frac{4}{\delta |B_1|^{\frac{1}{\gamma(p-1)}}} \right) \right\}. \tag{4.20}$$

接下来，我们将利用归纳论证证明，存在一个实数非递减序列$\{m_i\}_{i=0}^{\infty}$和一个实数非递增序列$\{M_i\}_{i=0}^{\infty}$，使得

$$m_i \le u \le M_i \quad \text{in } B_{4^{1-i}R}, \qquad i = 0, 1, 2, 3, \dots \tag{4.21}$$

and

$$M_i - m_i = 4^{-\alpha i} L, \qquad i = 0, 1, 2, 3, \dots \tag{4.22}$$

with

$$L := 2 \cdot 4^{\frac{sj_0}{2}} \|u\|_{L^\infty(B_{4R(x_0)})} + \mathrm{Tail}(u; x_0, 4R) + \|f\|^{\frac{1}{p-1}}_{L^\gamma(B_{4R(x_0)})}. \tag{4.23}$$

取 $m_i := -4^{-\alpha i} L/2$ 以及 $M_i := 4^{-\alpha i} L/2$，对于任意 $i = 0, \dots, j_0$。于是，根据 (4.21)，并结合 (4.20) 和 (4.23)，这些 $i$'s 都满足 (4.21)。现在固定一个整数 $j \ge j_0$，并假设序列 $\{m_i\}_{i=1}^{j}$和 $\{M_i\}_{i=1}^{j}$ 已构造出来。只要找到合适的$m_{j+1}$ 和 $M_{j+1}$，就能证明我们预期的结论 (4.21)。

定义函数

$$v := \frac{2 \cdot 4^{\alpha j}}{L} \left( u - \frac{M_j + m_j}{2} \right) \quad \text{in } \mathbb{R}^N.$$

根据 (4.21)、(4.22) 以及 $\{m_i\}_{i=1}^{j}$的单调性 $\{M_i\}_{i=1}^{j}$，我们可以得到

$$|M_j + m_j| \le \left(1 - 4^{-\alpha j}\right) L. \tag{4.24}$$

由于 $\{2u - M_j - m_j, M_j + m_j - 2u\} \le M_j - m_j$ 的最大值在 $B_{4^{1-j}R}$ 中，显然

$$|v| \le \frac{2 \cdot 4^{\alpha j}}{L} \left( \frac{M_j - m_j}{2} \right) \quad \text{in } B_{4^{1-j}R},$$

then

$$|v| \le 1 \quad \text{in } B_{4^{1-j}R}.$$

取 $x \in B_{4R} \backslash B_{4^{1-j}R}$并令 $\ell \in \{0, \dots, j-1\}$ 为满足 $x \in B_{4^{1-\ell}R} \backslash B_{4^{-\ell}R}$的唯一整数。由（4.21）、（4.22）以及 $\{m_i\}_{i=1}^{j}$的单调性可得

$$\begin{aligned} v(x) &\le \frac{2 \cdot 4^{\alpha j}}{L} \left( M_\ell - m_\ell + m_\ell - \frac{M_j + m_j}{2} \right) \\ &\le \frac{2 \cdot 4^{\alpha j}}{L} \left( M_\ell - m_\ell + m_j - \frac{M_j + m_j}{2} \right) \\ &= \frac{2 \cdot 4^{\alpha j}}{L} \left( M_\ell - m_\ell - \frac{M_j - m_j}{2} \right) = 2 \cdot 4^{\alpha(j-\ell)} - 1 \\ &\le 2 \left( \frac{4^j |x|}{R} \right)^\alpha - 1. \end{aligned}$$

类似论证可得 $v(x) \geq -2\left(4^j|x|/R\right)^\alpha + 1$，因此

$$(1 \pm v(x))_-^{q-1} \leq 2^{q-1}\left(\left(\frac{4^j|x|}{R}\right)^\alpha - 1\right)^{q-1} \quad \text{for a.a. } x \in B_{4R}\backslash B_{4^{1-j}R}. \tag{4.25}$$

与此同时，由（4.24）可得

$$(1 \pm v(x))_-^{q-1} \leq 2^{q-1}\left(\left(\frac{2\cdot 4^{\alpha j}}{L}\right)^{q-1}|u|^{q-1} + 4^{\alpha(q-1)j}\right) \quad \text{for a.a. } \mathbb{R}^N\backslash B_{4R}. \tag{4.26}$$

利用（4.25）、（4.26），并适当作变量代换，可得

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tail}\left((1 \pm v)_-; x_0, 4^{1-j}R\right)^{q-1} \\
&\leq 4^{-jsq+sq+q-1}R^{sq}\left(\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{4^{1-j}R}} \frac{\left(\left(4^j|x|/R\right)^\alpha - 1\right)^{q-1}}{|x|^{N+sq}}\,dx\right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{4^{\alpha j}}{L}\right)^{q-1}\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{4R}} \frac{|u(x)|^{q-1}}{|x|^{N+sq}}\,dx + 4^{\alpha(q-1)j}\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{4R}} \frac{dx}{|x|^{N+sq}}\right) \\
&\leq 8^q N\,|B_1|\int_4^{+\infty} \frac{(\rho^\alpha - 1)^{q-1}}{\rho^{1+sq}}d\rho + 8^q 4^{(\alpha q - sq)j}\frac{\mathrm{Tail}(u; x_0, 4R)^{q-1}}{L^{q-1}} \\
&\quad + \frac{8^q N\,|B_1|\,4^{(\alpha q-sq)j}}{sq} \\
&\leq 8^q N\,|B_1|\int_4^{+\infty} \frac{(\rho^\alpha - 1)^{q-1}}{\rho^{1+sq}}d\rho + \frac{8^{q+1}N(|B_1|+1)4^{(\alpha q-sq)j}}{s}.
\end{aligned}$$

由（4.19）、（4.20）和（4.23），可知

$$\mathrm{Tail}\left((1 \pm v)_-; x_0, 4^{1-j}R\right) \leq \frac{\delta}{4}. \tag{4.27}$$

现在，我们有以下两种情况：

$$\left|B_{4^{1-j}R/2} \cap \{v \geq 0\}\right| \geq \frac{1}{2}\left|B_{4^{1-j}R/2}\right| \text{ or } \left|B_{4^{1-j}R/2} \cap \{v \geq 0\}\right| < \frac{1}{2}\left|B_{4^{1-j}R/2}\right|. \tag{4.28}$$

若（4.28）中的第一种情况成立，则考虑函数

$$\frac{L}{2\cdot 4^{\alpha j}}(1+v) = u - \frac{M_j + m_j}{2} + \frac{L}{2\cdot 4^{\alpha j}}.$$

于是，我们有

$$\left|B_{4^{1-j}R/2} \cap \left\{u - \frac{M_j+m_j}{2} + \frac{L}{2\cdot 4^{\alpha j}} \geq \frac{L}{2\cdot 4^{\alpha j}}\right\}\right| = \left|B_{4^{1-j}R/2} \cap \{v \geq 0\}\right| \geq \frac{1}{2}\left|B_{4^{1-j}R/2}\right|.$$

由式（4.20）和（4.23）可得

$$\|f\|_{L^\gamma(B_{4^{1-j}R})}\left|B_{4^{1-j}R}\right|^{-\frac{1}{\gamma}} \leq |B_1|^{-\frac{1}{\gamma}}\|f\|_{L^\gamma(B_{4R})}(4^{1-j}R)^{-\frac{N}{\gamma}} \leq \left(\frac{1}{4^{-j}R}\right)^p\left(\frac{\delta}{2}\cdot\frac{L}{2\cdot 4^{\alpha j}}\right)^{p-1}. \tag{4.29}$$

此外，还有

$$\mathrm{Tail}\left(\left(u - \frac{M_j+m_j}{2} + \frac{L}{2\cdot 4^{\alpha j}}\right)_-; x_0, 4^{1-j}R\right) = \frac{L}{2\cdot 4^{\alpha j}}\mathrm{Tail}\left((1+v)_-; x_0, 4^{1-j}R\right) \leq \frac{\delta}{4}\cdot\frac{L}{2\cdot 4^{\alpha j}}.$$

我们利用引理4.2 结合$t=\frac{L}{2\cdot 4^{\alpha j}}$和 $M=\frac{M_j+m_j}{2}-\frac{L}{2\cdot 4^{\alpha j}}$，得到

$$u-\frac{M_j+m_j}{2}+\frac{L}{2\cdot 4^{\alpha j}}\geq\frac{L}{2\cdot 4^{\alpha j}}\delta\quad\text{ in } B_{4^{-j}R}.$$

这直接表明

$$\begin{aligned}u&\geq\frac{M_j+m_j}{2}+\frac{L}{2\cdot 4^{\alpha j}}\delta-\frac{L}{2\cdot 4^{\alpha j}}\\&=M_j-\frac{M_j-m_j}{2}-\frac{L}{2\cdot 4^{\alpha j}}(1-\delta)\\&=M_j-\frac{L}{2\cdot 4^{\alpha j}}(2-\delta)\quad\text{ in } B_{4^{-j}R}.\end{aligned}$$

鉴于（4.18），我们可以推导出

$$M_j-4^{-(j+1)\alpha}L\leq u\leq M_j\quad\text{ in } B_{4^{-j}R}.$$

这直接保证了 $i=j+1$ 上的（4.21），其中 $M_{j+1}:=M_j$ 且 $m_{j+1}:=M_{j+1}-4^{-(j+1)\alpha}L$。若（4.28）中的第二种情形成立，我们将处理函数 $(1-v\ L\ )$，并采用与上述类似的论证，通过令 $m_{j+1}:=m_j$ 且 $M_{j+1}:=m_{j+1}+4^{-(j+1)\alpha}L$，得到相同的结论。$\square$

# 5 哈纳克不等式

本节旨在为（1.1）的极小化子建立 Harnack 估计。下面的引理可通过与引理 4.2 非常相似的方法推得，其中 $M=0$。

引理 5.1. 假设 $K_{sq}$ 和 $F$ 满足（1.2）和（1.3），其中 $a_0>0$。设 $u\in\mathcal{A}(\Omega)\cap L^{q-1}_{sq}\left(\mathbb{R}^N\right)$ 是（1.1）的极小化子，且在球 $B_{16R}:=B_{16R}(x_0)\subset\subset\Omega$ 中非负，其中 $R\leq 1$。函数 $f|_{B_{16R}}$ 属于 $L^\gamma(B_{16R})$，其中 $\gamma>1$。假设

$$|B_R\cap\{u\geq t\}|\geq\nu^k|B_R|$$

对于某个 $\nu\in(0,1)$、$t>0$ 和 $k\in\mathbb{N}^+$。那么存在 $\delta\in\left(0,\frac{1}{2^8}\right]$，其仅依赖于 $N$、$p$、$q$、$s$、$a_0$、$A_0$ 和 $\nu$，若

$$\|f\|_{L^\gamma(B_{16R})}|B_{16R}|^{-\frac{1}{\gamma}}+(16R)^{-sq}\operatorname{Tail}^{q-1}(u_-;x_0,16R)\leq h_{16R}(\delta^k t)$$

其中 $h_{16R}(\delta t):=\frac{(\delta^k t)^{p-1}}{(16R)^p}+(\delta^k t)^{q-1}(16R)^{sq}$ 如 (1.9)中所给出，则有

$$u\geq\delta^k t\quad in\ B_R.$$

有了引理 5.1 之后，我们可以得出以下弱哈纳克不等式。

引理 5.2. 假设 $K_{sq}$ 和 $F$ 满足 (1.2) 和 (1.3)，其中 $a_0>0$。设 $u\in\mathcal{A}(\Omega)\cap L^{q-1}_{sq}\left(\mathbb{R}^N\right)$ 在球 $B_{16R}:=B_{16R}(x_0)\subset\subset\Omega$ 内非负，且 $R\leq 1$，并且是 (1.1) 的极小化子。假设函数 $f|_{B_{16R}}$ 属于 $L^\gamma(B_{16R})$，其中 $\gamma>\max\left\{1,\frac{N}{p}\right\}$。那么存在常数 $\varepsilon_0\in(0,1)$ 和 $C\geq 1$，二者均依赖于 $s$、$p$、$q$、$N$、$\Lambda$、$a_0$ 和 $A_0$，使得

$$\left(\fint_{B_R}u^{\varepsilon_0}\,dx\right)^{\frac{1}{\varepsilon_0}}\leq C\inf_{B_R}u+Ch_{16R}^{-1}\left(d+(16R)^{-sq}\operatorname{Tail}^{q-1}(u_-;x_0,16R)\right),\tag{5.1}$$

其中 $d:=\left(\fint_{B_{16R}}f^\gamma(x)\,dx\right)^{\frac{1}{\gamma}}$。

证明。令 $\delta \in \left(0, \frac{1}{2^8}\right]$ 为引理 4.2 在选取 $\nu = \frac{1}{2}$ 的条件下确定的常数。因此，我们设

$$\varepsilon_0 := \frac{\log \nu}{2 \log \delta} = \frac{1}{2 \log_{\frac{1}{2}} \delta} \in (0,1). \tag{5.2}$$

我们声称，对于任意 $t \geq 0$,

$$\inf_{B_R} u + h_{16R}^{-1}\left(d + (16R)^{-sq} \operatorname{Tail}^{q-1}\left(u_-; x_0, 16R\right)\right) \geq \delta \left(\frac{\left|A^+(t, x_0, R)\right|}{|B_R|}\right)^{\frac{1}{2\varepsilon_0}} t. \tag{5.3}$$

We 只需考虑 $t \in \left[0, \sup_{B_R} u\right)$ 的情形。否则，上述不等式显然成立 .

对于每个 $t \in \left[0, \sup_{B_R} u\right)$，令 $k = k(t)$ 为满足以下条件的唯一整数

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{\left|A^+(t, x_0, R)\right|}{|B_R|} \leq k < 1 + \log_{\frac{1}{2}} \frac{\left|A^+(t, x_0, R)\right|}{|B_R|}. \tag{5.4}$$

注意，(5.2) 和 (5.4) 表明

$$\delta^k \geq \delta \left(\frac{\left|A^+(t, x_0, R)\right|}{|B_R|}\right)^{\frac{1}{2\varepsilon_0}}.$$

现在我们只考虑以下情形

$$d + (16R)^{-sq} \operatorname{Tail}^{q-1}\left(u_-; x_0, 16R\right) < h_{16R}\left(\delta^k t\right).$$

否则，根据 $k$的定义，易知 (5.3) 成立。仍由 (5.4)，可得

$$\left|A^+(t, x_0, R)\right| \geq 2^{-k} |B_R|,$$

结合引理 5.1可推出

$$u \geq \delta^k t \text{ in } B_R,$$

因此

$$\inf_{B_R} u + h_{16R}^{-1}\left(d + (16R)^{-sq} \operatorname{Tail}^{q-1}\left(u_-; x_0, 16R\right)\right) \geq \delta^k t.$$

这与（5.4）一起保证了（5.3）。此时，仿照 [18,命题 6.8] 证明中的类似论证，即可得到所需结果。 □

接下来，我们结合定理 1中的上确界估计、引理 5.2 中的弱哈纳克不等式以及下面的尾部估计，推出定理 4中的 Harnack 估计。

定理的证明4。我们首先要得到一个尾部估计。任取 $z \in B_R(x_0) \subset\subset \Omega$ 和 $r \in (0, 2R]$。记 $M := \sup_{B_r(z)} u > 0$，应用引理2.1，取 $k \equiv 2M$ 可得

$$\begin{aligned}
&\int_{B_{r/2}(z)} (u(x) - 2M)_- \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{(u(y) - 2M)_+^{q-1}}{|x-y|^{N+sq}} dy\right) dx \\
\leq & C\left(\frac{\|(u-2M)_-\|_{L^q(B_r(z))}^q}{r^{sq}} + \frac{\|(u-2M)_-\|_{L^p(B_r(z))}^p}{r^p}\right) \\
& + \frac{C}{r^{sq}} \|(u-2M)_-\|_{L^1(B_r(z))} \operatorname{Tail}^{q-1}\left((u-2M)_-; z, r/2\right)
\end{aligned}$$

$$+C\|(u-2M)_-\|_{L^{\gamma'}(B_r(z))}\|f\|_{L^{\gamma}(B_r(z))}. \tag{5.5}$$

容易看出,

$$(u(y)-2M)_+^{q-1}\geq \min\left\{1,2^{2-q}\right\}u_+^{q-1}(y)-2^{q-1}M^{q-1}.$$

由上述两个观察结果以及 $u\leq M$ 在 $B_r(z)$ 上这一事实，可得

$$\begin{aligned}
&\int_{B_{r/2}(z)}(u(x)-2M)_-\left(\int_{\mathbb{R}^N}\frac{(u(x)-2M)_+^{q-1}}{|x-y|^{N+sq}}dy\right)dx\\
&\geq 2^{-N-sq}M\int_{B_{r/2}(z)}\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r(z)}\frac{\min\left\{1,2^{2-q}\right\}u_+^{q-1}(y)-2^{q-1}M^{q-1}}{|y-z|^{N+sq}}dy\right)dx\\
&\geq \frac{Mr^{N-sq}}{C}\operatorname{Tail}(u_+;z,r)-Cr^{N-sq}M^q,
\end{aligned}\tag{5.6}$$

其中我们利用了以下事实：对于任意 $x\in B_r(z)$ 和 $y\in\mathbb{R}^N\setminus B_r(z)$，$|x-y|\leq 2|y-z|$。另一方面，由于 $u\geq 0$ 在 $B_r(z)$ 上，我们有

$$\frac{\|(u-2M)_-\|_{L^q(B_r(z))}^q}{r^{sq}}+\frac{\|(u-2M)_-\|_{L^p(B_r(z))}^p}{r^p}\leq r^{N-sp}(r^{sq-p}M^p+M^q). \tag{5.7}$$

最后两项可估计为:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r^{sq}}\|(u-2M)_-\|_{L^1(B_r(z))}\operatorname{Tail}^{q-1}((u-2M)_-;z,r/2)\\
&\quad+\|(u-2M)_-\|_{L^{\gamma'}(B_r(z))}\|f\|_{L^{\gamma}(B_r(z))}\\
&\leq Mr^{N-sq}\operatorname{Tail}^{q-1}(u_-;z,r)+Mr^{\frac{N}{\gamma}}\|f\|_{L^{\gamma}(B_r(z))}\\
&\leq Mr^{N-sq}\operatorname{Tail}^{q-1}(u_-;z,r)+Mr^Nd.
\end{aligned}\tag{5.8}$$

将（5.6）、（5.7）和（5.8）代入（5.5）可得

$$Mr^{N-sq}\operatorname{Tail}^{q-1}(u_+;z,r)\leq Cr^{N-sq}\left(M\operatorname{Tail}^{q-1}(u_-;z,r)+Mr^{sq}d+r^{sq-p}M^p+M^q\right),$$

这直接保证了如下尾部估计:

$$\operatorname{Tail}^{q-1}(u_+;z,r)\leq C\big(\operatorname{Tail}^{q-1}(u_-;z,r)+r^{sq}h_r(M)+r^{sq}d\big).$$

应用逆算子 $h_r^{-1}$，我们得到

$$h_r^{-1}\big(r^{-sq}\operatorname{Tail}^{q-1}(u_+;z,r)\big)\leq Ch_r^{-1}\big(r^{-sq}\operatorname{Tail}^{q-1}(u_-;z,r)\big)+M+h_r^{-1}(d).$$

由引理 3.2可知，对于任意 $\delta_1$,

$$\sup_{B_r(z)}u_+\leq C_{\delta_1}H_{2r}^{-1}\left(\fint_{B_{2r}}H_{2r}(u_+)\,dx\right)+\delta_1h_{2r}^{-1}\big((2r)^{-sq}\operatorname{Tail}^{q-1}(u_+;x_0,r)\big)+\delta_1g_{2r}^{-1}(d)$$

因此 我 $C_{\delta_1}>0$ 取决于 $\delta_1$。结合上述两个估计可得

$$\begin{aligned}
\sup_{B_r(z)}u\leq\ & C_{\delta_1}H_{2r}^{-1}\left(\fint_{B_{2r}}H_{2r}(u_+)\,dx\right)+C\delta_1h_r^{-1}\big(r^{-sq}\operatorname{Tail}^{q-1}(u_-;z,r)\big)+\delta_1g_{2r}^{-1}(d)\\
&+C\delta_1M+h_r^{-1}(d)
\end{aligned}$$

$$\leq C_{\delta_1} H_r^{-1}\left(\fint_{B_{2r}} H_r\left(u_+\right)\,dx\right) + C\delta_1\,\mathrm{Tail}(u_-;z,r) + \delta_1 g_r^{-1}(d) + C\delta_1 M + h_r^{-1}(d), \tag{5.9}$$

其中我们用到了函数 $H_r$、$g_r$、$h_r$ 的正则性。利用凸函数 $t\mapsto\left[H_r^{-1}(t)\right]^q$ 的詹森不等式，可以看出对于任意 $\delta_2>0$,

$$\begin{aligned} H_r^{-1}\left(\fint_{B_{2r}(z)} H_r\left(u_+\right)\,dx\right) &\leq \left(\fint_{B_{2r}(z)} u^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\sup_{B_{2r}(z)} u\right)^{\frac{q-\varepsilon_0}{q}} \left(\fint_{B_{2r}(z)} u^{\varepsilon_0}\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \delta_2 \sup_{B_{2r}(z)} u + C_{\delta_2}\left(\fint_{B_{2r}(z)} u^{\varepsilon_0}\,dx\right)^{\frac{1}{\varepsilon_0}} \end{aligned} \tag{5.10}$$

其中 $\varepsilon_0>0$ 在引理 5.2 中确定。取 $\delta_1$，$\delta_2$ 充分小，由 (5.9) 和 (5.10) 可得

$$\begin{aligned} \sup_{B_r(z)} u &\leq \frac{1}{2}\sup_{B_{2r}(z)} u + C\left(\fint_{B_{2r}(z)} u^{\varepsilon_0}\,dx\right)^{\frac{1}{\varepsilon_0}} + C\,\mathrm{Tail}\left(u_-;z,r\right) + Ch_r^{-1}(d_r) + Cg_r^{-1}(d_r) \\ &\leq \frac{1}{2}\sup_{B_{2r}(z)} u + C\left(\fint_{B_{2r}(z)} u^{\varepsilon_0}\,dx\right)^{\frac{1}{\varepsilon_0}} + C\,\mathrm{Tail}\left(u_-;z,r\right) \\ &\quad + C\big(r^{-N+p}\|f\|_{L^\gamma(B_r(z))}\big)^{\frac{1}{p-1}} + C\big(r^{-N+\bar{q}}\|f\|_{L^\gamma(B_r(z))}\big)^{\frac{1}{\bar{q}-1}}. \end{aligned} \tag{5.11}$$

利用 (5.11，结合适当的覆盖论证和技术引理 [18, 引理 4。11], 可得

$$\begin{aligned} \sup_{B_R} u \leq &\left(\fint_{B_{2R}} u^{\varepsilon_0}\,dx\right)^{\frac{1}{\varepsilon_0}} + \mathrm{Tail}\left(u_-;x_0,R\right) \\ &+ R^{(p-\frac{N}{\gamma})/(p-1)}\|f\|_{L^\gamma(B_{2R})}^{\frac{1}{p-1}} + R^{(\bar{q}-\frac{N}{\gamma})/(\bar{q}-1)}\|f\|_{L^\gamma(B_{2R})}^{\frac{1}{\bar{q}-1}}. \end{aligned}$$

结合 (5.1，即可得到所需的哈纳克不等式。 □

# 参考文献


[1] M. T. Barlow，R. F. Bass，Z. Chen，M. Kassmann，非局部狄利克雷型与对称跳跃过程，Trans. A mer. Math. Soc. 361 (4) (2009年) 1963–1999。[2] L. Beck，G. Mingione，利普希茨界与非一致椭圆性，Comm. Pure Appl. Math. 73 (5) (2020年) 944–1034。[3] P. Bella，M. Sch¨affner，关于具有 $(p,q)$-增长的标量积分泛函的极小化子的正则性，Anal. PDE，13 (7) (2020年) 2241–2257。[4] S. Biagi，S. Dipierro，E. Valdinoci，E. Vecchi，混合局部与非局部椭圆算子：正则性与最大值原理，Comm. Partial Differential Equations 47 (3) (2021年) 585–629。[5] S. Biagi，S. Dipierro，E. Valdinoci，E. Vecchi，涉及混合局部与非局部算子的半线性椭圆方程，Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 151 (5) (2021年) 1611–1641。[6] A. Biswas，M. Modasiya，A. Sen，局部-非局部混合算子的边界正则性及其应用Ann. Mat. Pura Appl. 202 (2) (2023年) 679–710。

[7] L. Brasco，E. Lindgren，A. Schikorra，超二次情形下分数阶 $p$-拉普拉斯算子的高阶 H¨older 正则性，Adv. Math. 338 (7) (2018年) 782–846。[8] L. Brasco，E. Lindgren，M. Str¨omqvist，非线性分数阶扩散方程解的连续性，J. Evol. Equ. 21 (4) (2021年) 4319–4381。[9] S. S. Byun，H. Kim，J. Ok，具有一般增长的分数阶非局部方程解的局部 H¨older 连续性，Math. Ann.，https://doi.org/10.1007/s00208-022-02472-y。[10] S. S. Byun，H. Lee，K. Song，局部与非局部混合双相泛函的正则性结果，arXiv:2301.06234。[11]S. S. Byun，K. Song，带测度数据的局部与非局部混合方程，Calc. Var. Partial Differential Equations 62 (1) (2023年) 35页。[12] L.A. Caffarelli，C.H. Chan，A. Vasseur，抛物型非线性积分算子的正则性理论，J. Amer. Math. Soc. 24 (3) (2011年) 849–869。[13] L.A. Caffarelli，L. Silvestre，完全非线性积分微分方程的正则性理论，Comm. Pure Appl. Math. 62 (5) (2009年) 597–638。[14] L. Caffarelli，L. Silvestre，与分数阶拉普拉斯算子相关的延拓问题，Comm. Partial Differential Equations 32 (7-9) (2007年) 1245–1260。[15] Z. Chen，P. Kim，R. Song，Z. Vondra˘cek，关于 $\Delta + \Delta^{\alpha/2}$ 的边界哈纳克原理，Trans. Amer. Math. Soc. 364 (8) (2012年) 4169–4205。[16] Z. Chen，T. Kumagai，先验 H¨older 估计、抛物型哈纳克原理以及跳跃扩散的热核估计，Rev. Mat. Iberoam. 26 (2) (2010年) 551–589。[17] M. Colombo，G. Mingione，双相变分问题的正则性，Arch. Ration. Mech. Anal. 215 (2) (2015年) 443–496。[18] M. Cozzi，非局部问题的极小化子与解的正则性结果及哈纳克不等式：基于分数阶德乔治类的统一方法，J. Funct. Anal. 272 (11) (2017年) 4762–4837。[19] A. Di Castro，T. Kuusi，G. Palatucci，分数阶 $p$-极小化子的局部行为，Ann. Inst. H. Poincar´e Anal. Non Lin´eaire 33 (5) (2016年) 1279–1299。[20] A. Di Castro，T. Kuusi，G. Palatucci，非局部哈纳克不等式，J. Funct. Anal. 267 (6) (2014年) 1807–1836。[21] C. De Filippis，G. Mingione，局部与非局部混合问题中的梯度正则性，Math. Ann.，https://doi.org/10.1007/s00208-022-02512-7。[22] C. De Filippis，G. Palatucci，非局部双相方程的 H¨older 正则性，J. Differential Equations 267 (1) (2019年) 547–586。[23] E. De Giorgi，关于正则多重积分极值函数的可微性与解析性，Mem. Accad. Sci. Torino. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. 3 (3) (1957年) 25–43。[24] Y. Fang，B. Shang，C. Zhang，混合局部与非局部抛物型 $p$- 拉普拉斯方程的正则性理论，J. Geom. Anal. 32 (1) (2022年) 33页。[25] Y. Fang，C. Zhang，具有一般增长的非局部方程的哈纳克不等式，Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A，https://doi.org/10.1017/prm.2022.55。[26] M. Foondun，具有非局部部分的若干狄利克雷型的热核估计与哈纳克不等式，Electron. J. Probab. 14 (11) (2009年) 314–340。[27] P. Garain，J. Kinnunen，关于局部与非局部混合拟线性椭圆方程的正则性理论，Trans. Amer. Math. Soc. 375 (8) (2022年) 5393–5423。[28] P. Garain，J. Kinnunen，局部与非局部混合抛物方程的弱哈纳克不等式，J. Differential Equations 360 (2023年) 373–406。[29] P. Garain，J. Kinnunen，关于局部与非局部混合拟线性抛物方程的正则性理论，Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.，即将发表。[30] P. Garain，E. Lindgren，局部与非局部混合退化椭圆方程的高阶 H¨older 正则性，Calc. Var. Partial Differential Equations 62 (2) (2023年) 36 页。

[31] K. Ho, I. Sim, 《“变指数退化椭圆方程解的存在性及其若干性质”勘误》, [Nonlinear Anal. 98 (2014年), 146–164], Nonlinear Anal. 128 (2015 年 ) 423–426.[32] M. Kassmann, 《 De Giorgi 非局部算子理论》, 巴黎科学院数学报告 345 (11) (2007年) 621–624.[33] M. Kassmann, 《具有可测核的积分微分算子的先验估计》, Calc. Var. Partial Differential Equations 34 (1) (2009年) 1–21.[34] J. Mal´y, W.P. Ziemer, 《椭圆偏微分方程解的精细正则性》, Amer. Math. Soc.（普罗维登斯，罗得岛州，1997年）。[35] P. Marcellini, 《具有非标准增长条件的变分法积分极小化子的正则性》。Arch. Ration. Mech. Anal. 105 (1989) 267–284.[36] T. Mengesha, A. Schikorra, S. Yeepo, 《具有 Hölder 连续核的非局部偏微分方程的 Calderón-Zygmund 型估计》, Adv. Math. 383 (2021年) 64页.[37] G. Mingione, 《非线性椭圆方程组解奇异集的界》, Calc. Var. Partial Differential Equations 18 (3) (2003) 373–400.[38] S. Nowak, 《具有 VMO 系数的线性非局部方程的改进 Sobolev 正则性》, Math. Ann., https://doi.org/10.1007/s00208-022-02369-w.[39] L. Silvestre, 《类似分数阶拉普拉斯算子的积分微分方程解的 Hölder 估计》, Indiana Univ. Math. J. 55 (3) (2006) 1155–1174.[40] L. Silvestre, 《拉普拉斯算子分数阶幂障碍问题的正则性》, Comm. Pure Appl. Math. 60 (1) (2007年) 67–112.[41] M. Str¨omqvist, 《以分数阶$p$-拉普拉斯算子为模型的非局部抛物方程解的局部有界性》, J. Differential Equations 266 (12) (2019年) 7948–7979.[42] X. Su, E. Valdinoci, Y. Wei, J. Zhang, 《局部与非局部混合椭圆方程解的正则性结果》, Math. Z. 302 (3) (2022年) 1855–1878。