arXiv:2304.00786v1 [math.AP] 3 Apr 2023

无限图上带势的椭圆方程的一个刘维尔定理

STEFANO BIAGI、GIULIA MEGLIOLI 和 FABIO PUNZO

Abstract. 我们研究定义在无限图上的一类带势椭圆方程是否具有刘维尔性质。在对图和势作出适当假设的条件下，我们证明其唯一的有界解为 $u \equiv 0$。我们还证明，对于一类特殊图，关于势的条件是最优的；也就是说，若该条件不成立，则存在无穷多个有界解。

1. Introduction

设 (G, ω, μ) 是一个固定的无限加权图，其边权为 ω，节点（或顶点）测度为 μ。本文研究以下形式的带势椭圆方程的有界解：

$$\Delta u - Vu = 0 \quad \text{in } G, \tag{1.1}$$

其中，势 V 是定义在 G 上的非负函数，而 Δ 表示作用于 G 上的拉普拉斯算子。

方程（1.1）的解的唯一性已由我们中的两位作者在近期论文[29]中进行研究；在该论文中证明了，只要 $u \equiv 0$ 属于方程（1.1）的唯一解，其中 u 属于某个 $\ell^p_\varphi(G, \mu)$ 空间，且 φ 是一个在无穷远处趋于 0 的权函数，$p \in [1, +\infty)$。此外，只要该图满足某个适当性质，也可以考虑 $u \in \ell^\infty(G, \mu)$ 的情形。无论如何，[29] 中所采用论证的一个基本假设，是存在某个 $c_1 > 0$ 使得

$$V(x) \geq c_1 \quad \text{for all } x \in G. \tag{1.2}$$

因此，本文旨在理解在不假设条件（$u \equiv 0$ 是问题（1.1）的唯一有界解的情形，而无需假设条件（1.2）。为此，我们必须采用与[29]中所使用的方法完全不同的方法。

我们称方程（1.1）满足刘维尔定理（或刘维尔性质），当且仅当 $u \equiv 0$ 是同一方程的唯一有界解。换言之，我们关注的是方程（1.1）的刘维尔定理是否成立。

在介绍我们的结果和证明方法之前，先将我们的问题置于相关文献的背景之中。众所周知，应用科学诸多领域的现象都可以通过图来建模（例如，参见 [5, 24, 27]）。因此，近年来，许多作者开始关注定义在图上的偏微分方程。特别是，椭圆方程和抛物方程的解的定性性质均已得到研究，分别参见 例如 [11, 12, 13, 15, 18, 22, 26, 34] 和 [1, 4, 6, 16, 17, 25, 31, 38, 39],。此外，专著 [10, 23, 32] 也是这一主题的重要贡献。

在 [19] 以及在 [21], 中，证明了在图满足适当假设的条件下，抛物型问题

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u & \text{in } G \times (0, \infty) \\ u = 0 & \text{in } G \times \{0\} \end{cases}$$

2010 *Mathematics Subject Classification.* 35A01, 35A02, 35B53, 35J05, 35R02.*Key words and phrases.* 图、刘维尔定理、下解–上解、比较原理、图上的拉普拉斯算子。

至多有一个满足适当增长条件的解。类似的结果可见于 [4], ，其中时间导数由离散差分取代。此外，在 [23,定理 12.15、推论 12.16、定理 12.17] 中证明了，在对 G作出适当假设时，若 u 是方程（1.1）的一个下解，且 $V \equiv 0$ 满足 $u \in \ell^p(G, \mu)$ 和 $u \geq 0$，则 u 必为常数。

类似的唯一性结果也已在流形上建立（例如，参见 [7, 8, 9, 30, 35]）、在 $\mathbb{R}^n$ 的有界区域中（参见 [2, 3, 33, 36]），以及针对非局部算子（参见 [28, 37]）。

现在，设 d 表示在 G上的伪度量，并设 $B_r(x_0$为以 $x_0 \in G$为球心、半径为 r 的球（见下文第2 节）。对于势 V，我们假设

$$V(x) \geq c_0\, d^{-\alpha}(x, x_0) \quad \text{for all } x \in G \setminus B_{R_0}(x_0),$$

对某些 $c_0 > 0$、$R_0 > 0$ 和 $\alpha \in [0,1]$ 成立。在关于 V 的这一假设下，我们证明：若存在某个常数 $\Lambda \in (0,1)$ 使得

$$\sum_{x \in G \setminus B_1(x_0)} e^{-\Lambda d^{\alpha}(x,x_0)} \mu(x) < +\infty, \tag{1.3}$$

那么 $u \equiv 0$ 就是方程（1.1）的唯一有界解。

为证明这一结果，我们借鉴了[7]。然而，由于在 [7] 中，问题是在黎曼流形上提出的，因此该背景下使用的许多思想无法应用于图上，因而两者存在重要差异。更具体地说，我们证明主要结果所采用的论证思路如下：引入函数

$$v(x,t) := e^t u(x) - 1 \quad \text{for all } x \in G,\ t \in [0,T],$$

我们首先证明，v的正部，即 v_+，在适当意义下是方程（1.1）的下解（见引理4.2）。随后，我们得到关于 v_+ 的关键先验估计 v_+ (见命题 4.1），其中使用了测试函数 $\xi = \xi(x,t)$和 $\eta = \eta(x)$。接着，我们选取一个合适的函数 ξ，它可视为某种“伴随抛物方程”的上解（见引理5.1）。另一方面，η 将选作“截断”函数（见引理5.2）。最后通过适当的估计即可得到结论。

我们证明唯一性策略中的一个关键点是：若 u 是方程（1.1）的有界解，则存在同一问题的一个解 v，使得 $0 < v \leq 1$(见命题 3.1）。为证明这一点，我们首先需要建立弱最大值原理（见引理3.3）和强最大值原理（见引理3.4）。值得一提的是，命题3.1、引理3.3、3.4、4.2 本身也可能具有独立的研究价值。

我们还证明，带有 $\alpha \in [0,1]$ 的界 (1.3) 是最优的。更确切地说，在一类特殊图上，我们证明：如果 V 按照 $d^{-\alpha}(x, x_0)$ 的速度衰减，且对于某个 $\alpha > 1$，当 $d(x, x_0) \to +\infty$ 时，那么问题 (1.1) 存在无穷多个有界解。具体而言，对于任意 $\gamma > 0$，都存在一个问题 (1.1) 的 u 解，使得当 $d(x, x_0) \to +\infty$ 时，$u(x) \to \gamma$。其证明基于构造一个合适的无穷远处的屏障函数，该屏障函数与我们所考虑的图类有关。据我们所知，在图上，这类通过指定无穷远处的狄利克雷条件来获得结果的方法，以及此类屏障函数的显式构造，都是全新的。

本文结构安排如下。在第 2 节中，我们介绍图框架并陈述主要结果。第 3节专门讨论前文所述椭圆方程的辅助结果。在第 4 节中，我们得到关于 $v_+(x,t)$ 的关键先验估计。我们在第 5节引入并研究测试函数。主要结果在第 6节中证明。最后，在第 7 节中，我们证明条件 (1.3) 的最优性。

2. Mathematical framework and the main result

2.1. 图设定。设 G 是一个可数无穷集，且 $\mu : G \to (0, +\infty)$ 是给定函数。注意，μ 可视为 G 上的拉东测度，使得 (G, μ) 成为一个

测度空间。此外，设

$$\omega : G \times G \to [0, +\infty)$$

是对称的、对角线为零且为有限和函数，即

$$\begin{aligned} &\text{(i) } \omega(x,y) = \omega(y,x) && \text{for all } (x,y) \in G \times G; \\ &\text{(ii) } \omega(x,x) = 0 && \text{for all } x \in G; \\ &\text{(iii) } \sum_{y \in G} \omega(x,y) < \infty && \text{for all } x \in G\,. \end{aligned} \tag{2.1}$$

因此，我们将加权图定义为三元组（G, ω, μ），其中 ω和 μ分别称为边权重和节点测度。注意，假设（ii）对应于要求G 没有自环。

设 x, y 是 G中的两个点；我们称

- x 与 y 连通，并记作 $x \sim y$，当且仅当 $\omega(x,y) > 0$;
- 当且仅当 $x \sim y$时，二元组（x, y）是图的一条边，顶点 x, y称为该边的端点;
- 若对于所有 $k = 0, \ldots, n-1.$，都有 $x_k \sim x_{k+1}$，则顶点集合 $\{x_k\}_{k=0}^n \subset G$ 是一条路径

We 现在可以列出加权图 (G, ω, μ) 可能满足的一些性质 .

定义 2.1. 我们称加权图 (G, ω, μ) 为

(i) 局部有限的，如果每个顶点 $x \in G$ 仅有有限多个 $y \in G$ 满足 $x \sim y$; (ii) 连通的，如果对于任意两个不同的顶点 $x, y \in G$，都存在一条连接 x 与 y 的路径; (iii) 无向的，如果其边没有方向。

对于任意 $x \in G$，我们定义

- x 的度为

$$\deg(x) := \sum_{y \in G} \omega(x,y);$$

- x 的加权度为

$$\mathrm{Deg}(x) := \frac{\deg(x)}{\mu(x)}.$$

G 上的伪度量是一个具有零对角线的对称映射 $d\colon G \times G \to [0, +\infty)$，它还满足三角不等式

$$d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y) \quad \text{for all } x, y, z \in G.$$

一般来说， d不是度量，因为我们可以找到点 x、 $y \in G$、 $x \neq y$，使得 $d(x,y) = 0$.现在，考虑任意路径 $\gamma \equiv \{x_k\}_{k=0}^n \subset G$，以及一个对称函数 $\sigma\colon G \times G \to [0, +\infty)$，使得

$$\sigma(x,y) > 0 \quad \text{if and only if } x \sim y.$$

然后，我们将从属于 σ 的长度定义为

$$l_\sigma(\gamma) := \sum_{k=0}^{n-1} \sigma(x_k, x_{k+1})\,.$$

如果存在一个对称映射 $\sigma\colon G \times G \to [0, +\infty)$，满足 $\sigma(x,y) > 0$ 当且仅当 $x \sim y$，并且使得....., 则称伪度量 $d \equiv d_\sigma$ 为路径伪度量

$$d_\sigma(x,y) = \inf\{\, l_\sigma(\gamma) : \gamma \text{ is a path between } x \text{ and } y \,\}\,.$$

最后，我们将伪度量 d 的跳跃大小 $s > 0$ 定义为

$$s := \sup\{d(x,y) \,:\, x, y \in G, \omega(x,y) > 0\}. \tag{2.2}$$

关于迄今引入对象的更详细说明，请读者参阅[14, 20, 21, 29]。本小节最后给出以下

定义 2.2. 若 (G,ω,μ) 上的伪度量 d 满足以下条件，则称其为内在的

$$\frac{1}{\mu(x)}\sum_{y\in G}\omega(x,y)d^2(x,y)\leq 1 \quad \textit{for all } x\in G\,. \tag{2.3}$$

注意，假设（2.3）可以与黎曼流形上的类似条件进行比较。事实上，给定任意一个固定的参考点 $x_0\in G$，考虑映射

$$G\ni x\mapsto d(x,x_0).$$

于是，我们有

$$\begin{aligned}|\nabla d(x,x_0)|^2&=\frac{1}{\mu(x)}\sum_{y\in G}\omega(x,y)[d(y,x_0)-d(x,x_0)]^2\\&\leq\frac{1}{\mu(x)}\sum_{y\in G}\omega(x,y)d^2(x,y)\ \text{ for any } x\in G.\end{aligned}$$

因此，条件（2.3）确保

$$|\nabla d(x,x_0)|^2\leq 1 \quad \text{for any } x\in G\,.$$

黎曼流形上显然满足这一性质。

对于一个 对于 $x_0\in G$ 和 $r>0$，我们定义关于任意伪度量 d 的球 $B_r(x_0)$ 为

$$B_r(x_0):=\{x\in G\,:\,d(x,x_0)<r\}\,.$$

本文中，我们始终作如下假设：

$$\begin{aligned}&(i)\ (G,\omega,\mu)\text{ 是一个连通局部有限加权图；}(ii)\text{ 存在一个伪度量 }d\text{，使}\\&\text{得跳跃大小 }s\text{ 有限；}(iii)\text{ 对任意 }x\in G,\ r>0,\text{ 关于 }d\text{ 的球 }B_r(x)\text{ 是一}\\&\text{个有限集；}\end{aligned} \tag{2.4}$$

这里我们用到了定义 2.1 和 2.2。

2.2. 差分算子和拉普拉斯算子。令 $\mathfrak{F}$ 表示所有函数 $f\colon G\to\mathbb{R}$的集合。对于任意 $f\in\mathfrak{F}$ 及所有 $x,y\in G$，我们给出如下

定义 2.3. 设 (G,ω,μ) 为一个加权图。对于任意 $f\in\mathfrak{F}$，

- 差分算子为

$$\nabla_{xy}f:=f(y)-f(x)\,; \tag{2.5}$$

- 在（G，ω，μ）上的（加权）拉普拉斯算子为

$$\Delta f(x):=\frac{1}{\mu(x)}\sum_{y\in G}[f(y)-f(x)]\omega(x,y) \quad \textit{for all } x\in G\,.$$

显然，

$$\Delta f(x)=\frac{1}{\mu(x)}\sum_{y\in G}(\nabla_{xy}f)\omega(x,y) \quad \text{for all } x\in G\,.$$

我们还定义了梯度平方 $f\in\mathfrak{F}$ （见 [4]）

$$|\nabla f(x)|^2=\frac{1}{\mu(x)}\sum_{y\in G}\omega(x,y)(\nabla_{xy}f)^2,\quad x\in G\,;$$

容易证明，对于任意 f、$g\in\mathfrak{F}$，以下关系成立

- 乘积法则

$$\nabla_{xy}(fg)=f(x)(\nabla_{xy}g)+(\nabla_{xy}f)g(y) \quad \text{for all } x,y\in G\,;$$

- 分部积分公式

$$\sum_{x\in G}[\Delta f(x)]g(x)\mu(x)=-\frac{1}{2}\sum_{x,y\in G}(\nabla_{xy}f)(\nabla_{xy}g)\omega(x,y)\,, \tag{2.6}$$

只要函数 f、$g\in\mathfrak{F}$ 中至少有一个具有有限支撑。

2.3. 主要结果。 我们已在（2.4）中陈述了关于加权图（G， ω， μ）的主要假设。关于势 V，我们假设

$$\begin{aligned}&V\in\mathfrak{F},\\&V(x)\geq 0\quad \text{for all } x\in G,\\&V(x)\geq c_0\,d^{-\alpha}(x,x_0)\quad \text{for all } x\in G\setminus B_{R_0}(x_0)\,.\end{aligned} \tag{2.7}$$

对于某些 $x_0\in G$、$R_0>0$、$c_0>0$ 和 $\alpha\in[0,1]$.

现在我们可以陈述本文的主要结果。

定理 2.4。 设假设 （2.3）、（2.4）和（2.7）均成立。设 u 是问题 （1.1）的一个有界解。此外，假设存在 $\Lambda\in$ （0， 1）使得

$$\sum_{x\in G\setminus B_1(x_0)}e^{-\Lambda d^{\alpha}(x,x_0)}\mu(x)<+\infty. \tag{2.8}$$

Then

$$u(x)=0\quad \textit{for any } x\in G.$$

注 2.5。注意，条件（1.3）关于 $\alpha\in[0,1]$ 是尖锐的。事实上，在一类特殊图类（即所谓的模型树）上，若其满足（2.8），且 V 按照 $d^{-\alpha}$（x， x_0）衰减，其中某个 $\alpha>1$ 满足 d（x， x_0）$\to+\infty$，则问题（1.1）存在无穷多个有界解。更确切地说，对于任意 $\gamma\in$ （0， $+\infty$），都存在一个（1.1）的解 u，使得

$$u(x)\to\gamma\quad \textit{as}\ \ d(x,x_0)\to+\infty\,.$$

由于 $\gamma>0$ 是任意的，特别地，方程 (1.1) 的非唯一性由此得出。更多细节请见第 7节。据我们所知，文献中尚未发现将此类方法用于图的研究。

3. 辅助结果

本节汇集若干具有独立意义的预备结果，这些结果将用于证明我们的主要结果，即定理 2.4。

命题 3.1. 设假设 (2.4)-(i) 成立。假设方程 (1.1)存在一个非平凡的有界解。那么，存在方程 v 的一个解 (1.1)，使得

$$0<v\leq 1\quad \textit{in}\ \ G\,. \tag{3.1}$$

与 [2, 7], 命题 3.1 的证明类似，该证明关键依赖于唯一可解性，即以下问题的狄利克雷问题:

$$\mathcal{L}:=\Delta-V(x),$$

即,

$$\begin{cases}\mathcal{L}u=f & \text{in } \Omega\\ u\equiv g & \text{in } G\setminus\Omega\end{cases} \tag{3.2}$$

（其中 $\Omega\subseteq G$ 是任意有限集，且有 f、$g\in\mathfrak{F}$），以及关于 $\mathcal{L}$的一些最大值原理。由于我们未能找到这些结果的准确参考文献，为了使本文尽可能自洽，我们在下文给出完整证明。

首先，我们给出以下定义

定义 3.2. 我们称 $u \in \mathfrak{F}$ 是方程 (3.2) 的一个解，如果

$$\frac{1}{\mu(x)} \sum_{y \in \Omega} \omega(x,y)\,[u(y) - u(x)] - V(x)u(x) = f(x) \quad \textit{for every } x \in \Omega, \tag{3.3}$$

并且 $u \equiv g$ 在 $G \setminus \Omega$中。此外，我们称 u 是方程(3.2)的上解（下解），如果 $=$ 在(3.3) 中被 $\leq$ $(\geq)$ 和 $u \geq g$ $(\leq)$ 在 $G \setminus \Omega$中取代。

现在我们建立以下弱最大值原理。

引理 3.3。 假设(2.4)-(i) 成立。设$\Omega \subseteq G$ 是一个有限集，并设 $u \in \mathfrak{F}$ 满足

$$\begin{cases} \mathcal{L}u \leq 0 & \textit{in } \Omega \\ u \geq 0 & \textit{in } G \setminus \Omega. \end{cases} \tag{3.4}$$

Then

$$u \geq 0 \quad \textit{in } \Omega.$$

证明。 我们基本上按照[10, 引理 139]的证明进行。令 $m := \min_{\Omega} u$；注意到 m 定义良好，因为集合 $\Omega \subseteq G$ 是有限的。反设$m < 0$。那么集合

$$F := \{x \in G : u(x) = m\} \neq \varnothing$$

满足

$$\text{if } x \in F \text{ and } y \in G,\ y \sim x, \text{ then } y \in F. \tag{3.5}$$

事实上，令 $x \in F$ 固定，因此 $u(x) = m < 0$。由 (2.7)、(3.4)，并回想$\omega(x, y) > 0$ 若 $y \sim x$，可得

$$\begin{aligned} 0 \geq \mathcal{L}u(x) &= \Delta u(x) - V(x)u(x) \\ &= \frac{1}{\mu(x)} \sum_{y \in G} \omega(x,y)(u(y) - u(x)) - V(x)u(x) \\ &= -\mathrm{Deg}(x)u(x) + \frac{1}{\mu(x)} \sum_{y \sim x} \omega(x,y)u(y) - V(x)u(x) \\ &\geq -\mathrm{Deg}(x)u(x) + \frac{1}{\mu(x)} \sum_{y \sim x} \omega(x,y)u(y). \end{aligned}$$

因此，由于 $u \geq m$ 属于 Ω 且 $u \geq 0 > m$ 属于 $G \setminus \Omega$，我们得到

$$m\mathrm{Deg}(x) = \mathrm{Deg}(x)u(x) \geq \frac{1}{\mu(x)} \sum_{y \sim x} \omega(x,y)u(y) \geq m\mathrm{Deg}(x),$$

由此可推出

$$\sum_{y \sim x} \omega(x,y)u(y) = m. \tag{3.6}$$

由 (3.6)，由于 $u \geq m$ 属于 G，我们得出 $u(y) = m$ 对每个 $y \in G$，$y \sim x$，即 (3.5)。

现在，考虑一些 $x \in F$和 $y \in G \setminus \Omega$，因此 $u(x) = m < 0$ 以及 $u(y) \geq 0$。由 (2.4)，存在一条路径 $\{x_k\}_{k=0}^{n}$ 使得

$$x_0 = x, \quad x_n = y.$$

由于 $x_0 = x \in F$，我们可以应用 (3.5) 并推得 $x_1 \in F$。重复这一论证，可得 $x_i \in F$对每个 $i = 0,\ldots,n$，因此尤其有 $x_n = y \in F$，从而$u(y) = m < 0$ 这就导出了矛盾。□

现在我们证明以下关于 $\mathcal{L}$-调和函数的强最大值原理 .

引理 3.4。 令假设 (2.4)-(i) 得到满足。令 $u \in \mathfrak{F}$ 满足

$$\begin{cases} \mathcal{L}u \le 0 & in\ G, \\ u \ge 0 & in\ G. \end{cases} \tag{3.7}$$

那么，要么 $u \equiv 0$ 属于 G，要么 $u > 0$ 属于 G。

证明。 设 u 是方程（3.7）的一个解。根据引理 3.3， $u \ge 0$ 属于 G。现在假设存在 $x_0 \in G$ 使得 u（x_0） $= 0$。此外，考虑集合

$$F := \{x \in G : u(x) = 0\} \subseteq G.$$

注意到 $x_0 \in F$。仿照引理 3.3的证明，并利用 $\min_G u = 0$，可得与（3.5）等价的

$$\text{if } y \in G \text{ and } y \sim x_0, \text{ then } y \in F.$$

因此，由于 G 是连通的，我们得出 $F = G$，从而 $u \equiv 0$ 属于 G。 □

根据引理 3.3 和 3.4，现在可以证明以下

命题 3.5。 设假设 （2.4）-(i)成立。设 $\Omega \subseteq G$ 为有限集。令$f : \Omega \to \mathbb{R}$ 和 $g : G \setminus \Omega \to \mathbb{R}$ 为 任意 函数。则存在一个 唯一解$u \in \mathfrak{F}$ ， 它是问题 （3.2）意义下的解（定义 *3.2*）。

证明。首先注意到，对于任意 $u \in \mathfrak{F}$，我们可以写成

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u(x) = \Delta u(x) - V(x)u(x) &= \frac{1}{\mu(x)} \sum_{y \in G} \omega(x,y)(u(y) - u(x)) - V(x)u(x) \\ &= -\mathrm{Deg}(x)u(x) + \sum_{y \in G} \frac{\omega(x,y)}{\mu(x)} u(y) - V(x)u(x) \\ &= -(\mathrm{Deg}(x) + V(x))u(x) + \sum_{y \in \Omega} P(x,y)u(y) + \sum_{y \notin \Omega} P(x,y)u(y), \end{aligned} \tag{3.8}$$

其中

$$P(x,y) := \frac{\omega(x,y)}{\mu(x)}.$$

因此，我们看到 $u \in \mathfrak{F}$ 是（3.2）的一个解，当且仅当 $u \equiv g$ 属于 $G \setminus \Omega$，且

$$-(\mathrm{Deg}(x) + V(x))u(x) + \sum_{y \in \Omega} P(x,y)u(y) = f(x) - \sum_{y \notin \Omega} P(x,y)g(y) \quad \forall\ x \in \Omega. \tag{3.9}$$

现在我们声称， （3.9）的成立只涉及 u 在 Ω 上取到的值，因此可以改写为某个适当有限维向量空间中的一个线性方程。

事实上，若我们用 $\mathfrak{F}_\Omega$ 表示定义在 Ω 上的所有实值函数的集合，显然 $\mathfrak{F}_\Omega$ 是一个实向量空间，并且

$$\mathfrak{F}_\Omega = \mathrm{span}\{\chi_{\{x\}} : x \in \Omega\}$$

（这里， χ_A 表示集合 $A \subseteq G$ 的示性函数）。因此，由于 Ω 是有限集，我们得到 $\mathfrak{F}_\Omega$ 的维数有限，且为 n =card(Ω)。接着，在这个空间 $\mathfrak{F}_\Omega$ 上，我们定义映射

$$\mathcal{A} : \mathfrak{F}_\Omega \to \mathfrak{F}_\Omega, \qquad (\mathcal{A}u)(x) := -(\mathrm{Deg}(x) + V(x))u(x) + \sum_{y \in \Omega} P(x,y)u(y).$$

显然， $\mathcal{A}$ 是线性的；此外，恒等式（3.9）可以改写为

$$\mathcal{A}u = h_{f,g}, \qquad \text{where } h_{f,g} = f(x) - \sum_{y \notin \Omega} P(x,y)g(y) \in \mathfrak{F}_\Omega.$$

综上，我们有 $u \in \mathfrak{F}$ 是问题（3.2）的一个解，当且仅当

$$u \equiv g \text{ in } G \setminus \Omega \qquad \text{and} \qquad \mathcal{A}(u|_\Omega) = h_{f,g}. \tag{3.10}$$

利用狄利克雷问题（3.2）的这一“抽象”表述，我们可以轻松完成该命题的证明。首先我们注意到，由于引理 3.3中的弱最大值原理，线性算子 $\mathcal{A}$ 是单射：事实上，若 $u \in \mathfrak{F}_\Omega$ 满足 $\mathcal{A}u = 0$ （即 $\mathcal{A}u(x) = 0$ 对每个 $x \in \Omega$）且定义 $\hat{u} := u\mathbf{1}_\Omega$，由（3.8）可得

$$\mathcal{L}\hat{u} = \mathcal{A}u = 0 \text{ in } \Omega;$$

因此，由于 $\hat{u} \equiv 0$ 属于 $G \setminus \Omega$，直接应用引理 3.3 可知 $\hat{u} \equiv 0$ 属于 G，因此 $u = 0$ 属于 $\mathfrak{F}_\Omega$。由此，由于 $\mathfrak{F}_\Omega$ 具有有限维数，我们推出 $\mathcal{A}$ 也是满射，因此存在一个唯一的函数 $u \in \mathfrak{F}_\Omega$ 使得

$$\mathcal{A}u = h_{f,g}. \tag{3.11}$$

将这个唯一函数 u 定义为 $u(x) = g(x)$，对每个 $x \in G \setminus \Omega$，由式（3.11）可得式（3.10）成立，因此 u 是式（3.2）的唯一解。□

有了命题 3.5 ，我们终于可以证明命题 3.1。

命题 *3.1* 的证明。设 $u \in \mathfrak{F}$ 是问题（1.1）的一个非平凡有界解，并令 $\mathsf{s} := \sup_G |u| \in (0, +\infty)$。不失一般性，可假设 $\mathsf{s} = 1$；事实上，只需将 u 替换为 $\frac{u}{\mathsf{s}}$ 即可。此外，若 u 在 G上定号，则函数

$$v := \operatorname{sgn}(u)u,$$

是满足 (1.1) 和 (3.1) 的一个解。事实上，很容易看出 v 是 (1.1) 的一个非平凡解，并且 $0 \le v \le 1$ 在 G 上成立。于是，由引理3.4中的强最大值原理可知， $v > 0$ 在 G 上成立。反之，若 u 在 G中变号，我们取 M 使得

$$0 < M < \sup_G u_+ = 1,$$

并且，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，令 $v_n \in \mathfrak{F}$ 为问题的唯一解

$$\begin{cases} \mathcal{L}v = 0 & \text{in } B_n(p), \\ v = (u - M)_+ & \text{in } G \setminus B_n(p), \end{cases}$$

其中 $p \in G$ 是任意选取的一点。由命题 3.5可知，对每个 $n \in \mathbb{N}$， v_n 的存在性和唯一性均得到保证，因为球 $B_r(x)$ 是有限集，见 (2.4)。

现在我们断言，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，以下性质成立：

(i) $0 \le v_n \le 1$ 在 G 上逐点成立；

(ii) $v_n \le v_{n+1}$ 在 G 上逐点成立。

暂且假设这一断言成立，我们便可轻松完成该命题的证明。事实上，由 (i)-(ii) 可推得，序列 $\{v_n\}_n$ 在 G 上递增且有界；因此，函数

$$v(x) = \lim_{n \to +\infty} v_n(x) \qquad x \in G,$$

是良定义的，并且在 G 上满足 $0 \le v \le 1$ 。此外，由于

$$\begin{aligned} \mathcal{L}v_n(x) &= \Delta v_n(x) - V(x)v_n(x) \\ &= \frac{1}{\mu(x)} \sum_{y \in G} \omega(x,y)(v_n(y) - v_n(x)) - V(x)v_n(x) = 0 \quad \forall\, x \in B_n(p),\ n \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

由于定义拉普拉斯算子的求和 Δ 实际上是一个 有限和 (请注意，图G 是局部有限的)，令 $n \to +\infty$ 代入(3.12)，即可得

$$\mathcal{L}v(x) = 0 \quad \forall\, x \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n(p) = G,$$

因此 v 是问题(1.1)的一个解。最后，回想一下 $0 \le v \le 1$ 在 G 上成立，并利用引理 3.4中的强最大值原理，我们得出 $v \in \mathfrak{F}$ 也是问题(1.1)的一个解，且满足(3.1)。因此，只需证明所述的(i)-(ii)。

我们来证明（i）。首先注意到，由于 $\mathcal{L}v_n = 0$在 $B_n(p)$ 中，且由于 $v_n = (u-M)_+ \ge 0$在 $G \setminus B_n(p)$ 中，根据引理 3.3 中的弱最大值原理，我们推得 $v_n \ge 0$ 在 G中。另一方面，由于常值函数 $\zeta \equiv 1$ 满足

$$\begin{cases} \mathcal{L}\zeta = -V(x) \le 0 & \text{in } B_n(p), \\ \zeta \ge (u-M)_+ & \text{in } G \setminus B_n(p), \end{cases}$$

将弱最大值原理（引理 3.3 ）应用于函数 $\zeta - v_n$，我们立即得出 $v_n \le \zeta \equiv 1$ 在 G上逐点成立。

现在来证明（ii）。首先注意到，由于 $\zeta = u - M$ 满足

$$\begin{cases} \mathcal{L}\zeta = VM \ge 0 & \text{in } B_n(p), \\ \zeta = u - M \le (u-M)_+ & \text{in } G \setminus B_n(p), \end{cases}$$

将弱最大值原理（引理 3.3 ）应用于函数 $v_{n+1} - \zeta$，我们推得 $v_{n+1} \ge \zeta = u - M$ 在 G中成立；因此，由于我们已经知道 $v_{n+1} \ge 0$，可得

$$v_{n+1} \ge (u-M)_+ \quad \text{pointwise on } G. \tag{3.13}$$

根据（3.13），并再次将弱最大值原理（引理 3.3 ）应用于函数 $v_{n+1} - v_n$，其中 $\Omega = B_n(p)$，于是得出 $v_n \le v_{n+1}$ 在 G中成立。证明完毕。

□

4. A useful apriori estimate

现在我们已经证明了命题 3.1，接下来证明非负且有界解的一个 先验 估计，该估计适用于方程 (1.1)，并将在定理 2.4的证明中发挥关键作用。在下文中，我们设

$$S := G \times [0, +\infty); \tag{4.1}$$

并且，对于任意给定的 $T > 0$,

$$S_T := G \times [0, T]\,.$$

命题 4.1. 假设 (2.4)成立。设 u 是方程 (1.1) 的一个解，且满足 $0 \le u \le 1$。此外，设 $T > 0$ 并定义

$$v(x,t) := e^t u(x) - 1 \quad \textit{for all } (x,t) \in S_T\,.$$

最后，设 $\eta \in \mathfrak{F}$，且 $\xi : S_T \to \mathbb{R}$ 满足

(i) $\eta \ge 0$，$\operatorname{supp}\eta$ 是有限的; (4.2)

(ii) $\xi(x,\cdot) \in C^1([0,T))$, $e^{\xi(x,\cdot)} \in C^1([0,T])$ *for any* $x \in G$; (4.3)

(iii) $[\eta^2(y) - \eta^2(x)][e^{\xi(y,t)} - e^{\xi(x,t)}] \ge 0$ *for all* $x, y \in G$, $x \sim y$, $t \in [0,T]$. (4.4)

Then

$$\begin{aligned} &\sum_{x\in G} V(x)\eta^2(x) v_+^2(x,T) e^{\xi(x.T)}\mu(x) - \sum_{x\in G} V(x)\eta^2(x) v_+^2(x,0) e^{\xi(x.0)}\mu(x) \\ &\le \int_0^T \sum_{x\in G} v_+^2(x,t)\eta^2(x) e^{\xi(x,t)} \left\{ V(x)\xi_t(x,t)\mu(x) + \frac{1}{2}\sum_{y\in G}\omega(x,y)[1 - e^{\xi(y,t)-\xi(x,t)}]^2 \right\} dt \\ &\quad + 2\int_0^T \sum_{x,y\in G} v_+^2(x,t) e^{\xi(y,t)}[\eta(y) - \eta(x)]^2 \omega(x,y)\, dt\,. \end{aligned} \tag{4.5}$$

为了证明命题4.1 我们需要一个辅助结果（其本身也有独立意义），该结果表明，若 v 是抛物型方程的任意一个解

$$V\partial_t u - \Delta u = 0 \quad \text{in } G\times[0,T], \tag{4.6}$$

那么 $v_+ := \max\{v;\ 0\}$ 是同一方程的下解（在适当的意义下）。

以下内容陈述了这一点

引理 4.2. 设 $v:\ S_T \to \mathbb{R}$ 是方程 (4.6) 的一个解，使得映射 $t \mapsto v(x,t)$ 对于$C^1([0,T])$ 任意 $x \in G$ 均成立。于是，对于任意固定的 $x \in G$,

$$V\partial_t v_+(x,t) - \Delta v_+(x,t) \le 0 \quad \textit{for a.e. } t \in [0,T].$$

证明。我们分别考虑三种情形。

情形 1。设 $(x,t) \in G\times(0,T)$ 满足

$$v(x,t) > 0\,. \tag{4.7}$$

于是，由映射 $t \mapsto v(x,t)$ 的连续性，存在 $\delta > 0$，使得对于任意 $\tau \in (t-\delta, t+\delta)$，都有 $v(x,\tau) > 0$。因此，对于任意 $\tau \in (t-\delta, t+\delta)$，都有 $v(x,\tau) = v_+(x,\tau)$。consequently，由于映射 $t \mapsto v(x,t)$ 是 $C^1([0,T])$，我们还得到

$$\partial_t v(x,t) = \partial_t v_+(x,t). \tag{4.8}$$

现在，由于 $v_+(y,\ t) \ge v(y,\ t)$ 对任意 $y \in G$，由（4.7）、（4.8）和（4.6），可得

$$\begin{aligned} V\partial_t v_+(x,t) - \Delta v_+(x,t) &= V\partial_t v(x,t) - \frac{1}{\mu(x)}\sum_{y\in G}[v_+(y,t) - v_+(x,t)]\,\omega(x,y) \\ &\le V\partial_t v(x,t) - \frac{1}{\mu(x)}\sum_{y\in G}[v(y,t) - v(x,t)]\,\omega(x,y) = 0\,. \end{aligned}$$

情形 2. 设 $(x,t) \in G\times(0,T)$ 满足

$$v(x,t) < 0\,. \tag{4.9}$$

那么，根据映射 $t \mapsto v(x,t)$ 的连续性，存在 $\delta > 0$ 使得对于任意 $\tau \in (t-\delta, t+\delta)$，都有 $v(x,\tau) < 0$。因此，对于任意 $\tau \in (t-\delta, t+\delta)$，都有 $v_+(x,\tau) = 0$。由此，由于映射 $t \mapsto v(x,t)$ 是 $C^1([0,T])$，我们还得到

$$\partial_t v_+(x,t) = 0. \tag{4.10}$$

现在，由于 $v_+(y,\ t) \ge 0$ 对于任意 $y \in G$，根据（4.9）和（4.10），我们有 e

$$\begin{aligned} V\partial_t v_+(x,t) - \Delta v_+(x,t) &= -\frac{1}{\mu(x)}\sum_{y\in G}[v_+(y,t) - v_+(x,t)]\,\omega(x,y) \\ &= -\frac{1}{\mu(x)}\sum_{y\in G}[v_+(y,t)]\omega(x,y) \le 0\,. \end{aligned}$$

Case 3. 固定 $x \in G$。考虑集合 $\mathcal{U}_x = \{t \in (0,T):\ v(x,t) = 0\}$。我们有 t

$$\partial_t v(x,t) = 0 \quad \text{for a.e. } t \in \mathcal{U}_x. \tag{4.11}$$

于是我们可以找到 $\mathcal{V}_x \subset \mathcal{U}_x$，使得

$$\lambda(\mathcal{V}_x) = \lambda(\mathcal{U}_x) \text{ and } \partial_t v(x,t) = 0 \text{ for every } t \in \mathcal{V}_x \tag{4.12}$$

（此处，λ 表示一维勒贝格测度）。因此，由于 $v_+(y,\ t) \ge 0$ 在 $G\times(0,\ T)$ 上逐点成立，根据（4.11）和（4.12），对于任意 $t \in \mathcal{V}_x$，都有

$$\begin{aligned} V\partial_t v_+(x,t) - \Delta v_+(x,t) &= -\frac{1}{\mu(x)}\sum_{y\in G}[v_+(y,t) - v_+(x,t)]\,\omega(x,y) \\ &= -\frac{1}{\mu(x)}\sum_{y\in G}[v_+(y,t)]\,\omega(x,y) \le 0\,. \end{aligned}$$

因此，结合三种情形即可得出论题。 □

命题 *4.1* 的证明。 首先注意到，由于引理 4.2，对于任意 $x \in G$,

$$V(x)\,\partial_t v_+(x,t) - \Delta v_+(x,t) \le 0 \quad \text{for a.e. } t \in [0,T]. \tag{4.13}$$

我们将 (4.13) 乘以函数 $(x,\ t) \mapsto v_+(x,\ t)\,\eta^2(x)e^{\xi(x,t)}\mu(x)$，并在时间区间 $[0,T]$ 上积分。于是得到

$$\begin{aligned}\int_0^T V(x)\,\partial_t v_+(x,t)v_+(x,t)\,\eta^2(x)e^{\xi(x,t)}\mu(x)\,dt \\ \le \int_0^T \Delta(v_+(x,t))\,v_+(x,t)\,\eta^2(x)e^{\xi(x,t)}\mu(x)\,dt.\end{aligned}$$

对 $x \in G$ 求和，得到

$$\begin{aligned}\sum_{x\in G}\int_0^T V(x)\,\partial_t v_+(x,t)v_+(x,t)\,\eta^2(x)e^{\xi(x,t)}\mu(x)\,dt \\ \le \sum_{x\in G}\int_0^T \Delta(v_+(x,t))\,v_+(x,t)\,\eta^2(x)e^{\xi(x,t)}\mu(x)\,dt.\end{aligned}$$

注意到，由于 $\eta(x)$ 是有限支撑的，后一个不等式中的级数实际上是有限和。因此，我们得到

$$\begin{aligned}\int_0^T \sum_{x\in G} V(x)\,\partial_t v_+(x,t)v_+(x,t)\,\eta^2(x)e^{\xi(x,t)}\mu(x)\,dt \\ \le \int_0^T \sum_{x\in G} \Delta(v_+(x,t))\,v_+(x,t)\,\eta^2(x)e^{\xi(x,t)}\mu(x)\,dt.\end{aligned} \tag{4.14}$$

Set

$$I := \sum_{x\in G} \Delta(v_+(x,t))\,v_+(x,t)\,\eta^2(x)e^{\xi(x,t)}\mu(x)\,.$$

于是，由 (2.5) 和 (2.6)，

$$\begin{aligned}I &= -\frac{1}{2}\sum_{x,y\in G}(\nabla_{xy}v_+)\,\nabla_{xy}\left[v_+\eta^2 e^{\xi}\right]\omega(x,y) \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{x,y\in G}\left[\nabla_{xy}v_+\right]^2\eta^2(y)e^{\xi(y,t)}\,\omega(x,y) \\ &\quad -\frac{1}{2}\sum_{x,y\in G} v_+(x,t)\eta^2(x)\,(\nabla_{xy}v_+)\left(\nabla_{xy}e^{\xi}\right)\,\omega(x,y) \\ &\quad -\frac{1}{2}\sum_{x,y\in G} v_+(x,t)e^{\xi(y,t)}\,(\nabla_{xy}v_+)\left(\nabla_{xy}\eta^2\right)\,\omega(x,y) =: J_1+J_2+J_3\,.\end{aligned} \tag{4.15}$$

鉴于（2.5），显然有

$$\nabla_{xy}\eta^2 = [\eta(y)+\eta(x)][\eta(y)-\eta(x)] \quad \text{for all } x,y \in G\,. \tag{4.16}$$

由指数为 2 的杨氏不等式，对于任意 $\delta_1 > 0$，对每个 $t \in [0,T]$，有

$$
\begin{aligned}
J_2 &= -\frac{1}{2}\sum_{x,y\in G} v_+(x,t)\eta^2(x)(\nabla_{xy}v_+)(\nabla_{xy}e^{\xi})\,\omega(x,y)\\
&= -\frac{1}{2}\sum_{x,y\in G} v_+(y,t)\eta^2(y)(\nabla_{xy}v_+)\left[e^{\xi(y,t)}-e^{\xi(x,t)}\right]\omega(x,y)\\
&= -\frac{1}{2}\sum_{x,y\in G} v_+(y,t)\eta^2(y)(\nabla_{xy}v_+)e^{\xi(y,t)}\left[1-e^{\xi(x,t)-\xi(y,t)}\right]\omega(x,y)\\
&\le \frac{\delta_1}{4}\sum_{x,y\in G}\left[\nabla_{xy}v_+\right]^2\eta^2(y)e^{\xi(y,t)}\,\omega(x,y)\\
&\quad+\frac{1}{4\delta_1}\sum_{x,y\in G} v_+^2(y,t)\left[1-e^{\xi(x,t)-\xi(y,t)}\right]^2\eta^2(y)e^{\xi(y,t)}\,\omega(x,y)\\
&= \frac{\delta_1}{4}\sum_{x,y\in G}\left[\nabla_{xy}v_+\right]^2\eta^2(y)e^{\xi(y,t)}\,\omega(x,y)\\
&\quad+\frac{1}{4\delta_1}\sum_{x,y\in G} v_+^2(x,t)\left[1-e^{\xi(y,t)-\xi(x,t)}\right]^2\eta^2(x)e^{\xi(x,t)}\,\omega(x,y).
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

同样，由于（4.16），根据指数为 2 的杨氏不等式，对于任意 $\delta_2 > 0$ 以及任意 $t \in [0,T]$，

$$
\begin{aligned}
J_3 &= -\frac{1}{2}\sum_{x,y\in G} v_+(x,t)e^{\xi(y,t)}(\nabla_{xy}v_+)\left[\eta(y)+\eta(x)\right]\left[\eta(y)-\eta(x)\right]\omega(x,y)\\
&\le \frac{\delta_2}{4}\sum_{x,y\in G} e^{\xi(y,t)}\left[\nabla_{xy}v_+\right]^2\left[\eta(y)+\eta(x)\right]^2\omega(x,y)\\
&\quad+\frac{1}{4\delta_2}\sum_{x,y\in G} e^{\xi(y,t)}v_+^2(x,t)\left[\eta(y)-\eta(x)\right]^2\omega(x,y)\\
&\le \frac{\delta_2}{2}\sum_{x,y\in G} e^{\xi(y,t)}\left[\nabla_{xy}v_+\right]^2\left[\eta^2(y)+\eta^2(x)\right]\omega(x,y)\\
&\quad+\frac{1}{4\delta_2}\sum_{x,y\in G} e^{\xi(y,t)}v_+^2(x,t)\left[\eta(y)-\eta(x)\right]^2\omega(x,y)\\
&= \frac{\delta_2}{4}\sum_{x,y\in G}\left[e^{\xi(y,t)}+e^{\xi(x,t)}\right]\left[\nabla_{xy}v_+\right]^2\left[\eta^2(y)+\eta^2(x)\right]\omega(x,y)\\
&\quad+\frac{1}{4\delta_2}\sum_{x,y\in G} e^{\xi(y,t)}v_+^2(x,t)\left[\eta(y)-\eta(x)\right]^2\omega(x,y).
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

由（4.4）我们可以很容易地推断出

$$
\left[\eta^2(y)+\eta^2(x)\right]\left[e^{\xi(y,t)}+e^{\xi(x,t)}\right]\le 2\left\{\eta^2(y)e^{\xi(y,t)}+\eta^2(x)e^{\xi(x,t)}\right\}. \tag{4.19}
$$

利用（4.18）和（4.19），

$$\begin{aligned} J_3 \leq & \frac{\delta_2}{2} \sum_{x,y\in G} [\nabla_{xy} v_+]^2 \left\{ \eta^2(y) e^{\xi(y,t)} + \eta^2(x) e^{\xi(x,t)} \right\} \omega(x,y) \\ & + \frac{1}{4\delta_2} \sum_{x,y\in G} e^{\xi(y,t)} v_+^2(x,t) \left[\eta(y) - \eta(x)\right]^2 \omega(x,y) \\ = & \delta_2 \sum_{x,y\in G} \left[\nabla_{xy} v_+\right]^2 \eta^2(y) e^{\xi(y,t)} \omega(x,y) \\ & + \frac{1}{4\delta_2} \sum_{x,y\in G} e^{\xi(y,t)} v_+^2(x,t) \left[\eta(y) - \eta(x)\right]^2 \omega(x,y) . \end{aligned} \tag{4.20}$$

结合（4.15）、（4.17）和（4.20），对于任意 $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned} & \sum_{x\in G} \Delta v_+(x,t) v_+(x,t), \eta^2(x) e^{\xi(x,t)} \mu(x) \\ & \leq -\frac{1}{2} \sum_{x,y\in G} [\nabla_{xy} v_+]^2 \eta^2(y) e^{\xi(y,t)} \omega(x,y) \\ & \quad + \frac{\delta_1}{4} \sum_{x,y\in G} [\nabla_{xy} v_+]^2 \eta^2(y) e^{\xi(y,t)} \omega(x,y) \\ & \quad + \frac{1}{4\delta_1} \sum_{x,y\in G} v_+^2(x,t) \left[1 - e^{\xi(y,t)-\xi(x,t)}\right]^2 \eta^2(x) e^{\xi(x,t)} \omega(x,y) \\ & \quad + \delta_2 \sum_{x,y\in G} \left[\nabla_{xy} v_+\right]^2 \eta^2(y) e^{\xi(y,t)} \omega(x,y) \\ & \quad + \frac{1}{4\delta_2} \sum_{x,y\in G} v_+^2(x,t) \left[\eta(y) - \eta(x)\right]^2 e^{\xi(y,t)} \omega(x,y) . \end{aligned} \tag{4.21}$$

现在我们选择 $\delta_1 = 1$ 和 $\delta_2 = \frac{1}{4}$，使得 $-\frac{1}{2} + \frac{\delta_1}{4} + \delta_2 = 0$。因此，对于任意 $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned} I = & \sum_{x\in G} \Delta v_+(x,t) v_+(x,t) \eta^2(x) e^{\xi(x,t)} \mu(x) \\ \leq & \frac{1}{4} \sum_{x,y\in G} v_+^2(x,t) \left[1 - e^{\xi(y,t)-\xi(x,t)}\right]^2 \eta^2(x) e^{\xi(x,t)} \omega(x,y) \\ & + \sum_{x,y\in G} v_+^2(x,t) \left[\eta(y) - \eta(x)\right]^2 e^{\xi(y,t)} \omega(x,y) . \end{aligned} \tag{4.22}$$

将（4.22）代入（4.14），由于积分运算的线性性，我们得到

$$\begin{aligned} & \int_0^T \sum_{x\in G} V(x) \partial_t v_+(x,t) v_+(x,t) \eta^2(x) e^{\xi(x,t)} \mu(x) \, dt \\ & \leq \int_0^T \frac{1}{4} \sum_{x,y\in G} v_+^2(x,t) \left[1 - e^{\xi(y,t)-\xi(x,t)}\right]^2 \eta^2(x) e^{\xi(x,t)} \omega(x,y) \, dt \\ & \quad + \int_0^T \sum_{x,y\in G} v_+^2(x,t) [\eta(y) - \eta(x)]^2 e^{\xi(y,t)} \omega(x,y) \, dt. \end{aligned} \tag{4.23}$$

现在我们考察（4.23）的右端。因此有

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \sum_{x\in G} V(x)\,\partial_t v_+(x,t)\,v_+(x,t)\eta^2(x)e^{\xi(x,t)}\mu(x)\,dt \\
&\qquad = \sum_{x\in G} V(x)\eta^2(x)\mu(x)\int_0^T (v_+)_t(x,t)\,v_+(x,t)e^{\xi(x,t)}\,dt \\
&\qquad = \frac{1}{2}\sum_{x\in G} V(x)\eta^2(x)\mu(x)\int_0^T (v_+^2)_t(x,t)\,e^{\xi(x,t)}\,dt \\
&\qquad = \frac{1}{2}\sum_{x\in G} V(x)\eta^2(x)v_+^2(x,T)\,e^{\xi(x,T)}\,\mu(x) \\
&\qquad\quad - \frac{1}{2}\sum_{x\in G} V(x)\eta^2(x)v_+^2(x,0)\,e^{\xi(x,0)}\,\mu(x) \\
&\qquad\quad - \frac{1}{2}\int_0^T \sum_{x\in G} V(x)\eta^2(x)v_+^2(x,t)\xi_t(x,t)\,e^{\xi(x,t)}\,\mu(x)\,dt\,.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

将（4.23）与（4.24）结合起来，我们得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{x\in G} V(x)\eta^2(x)v_+^2(x,T)\,e^{\xi(x,T)}\,\mu(x) - \sum_{x\in G} V(x)\eta^2(x)v_+^2(x,0)\,e^{\xi(x,0)}\,\mu(x) \\
&\le \int_0^T \sum_{x\in G} \eta^2(x)v_+^2(x,t)\,e^{\xi(x,t)}\left\{V(x)\xi_t(x,t)\mu(x) + \frac{1}{2}\sum_{y\in G}\left[1-e^{\xi(y,t)-\xi(x,t)}\right]^2\omega(x,y)\right\}dt \\
&\quad + 2\int_0^T \sum_{x,y\in G} v_+^2(x,t)[\eta(y)-\eta(x)]^2 e^{\xi(y,t)}\omega(x,y)\,dt.
\end{aligned}$$

这正是（4.5），证明完毕。 □

5. Some distinguished test functions

现在我们来证明存在合适的测试函数 ξ 和 η，它们在（4.5）中可容许，并且满足一些特定的性质。

在下文中，令 $x_0 \in G$ 和 $R_0 > 0$ 如假设（2.7）所述；此外，我们选取参数 $M > 0$、$T > 0$、$\beta \in (0,\ 1]$、$\lambda > 1$ 以及

$$r \ge 2s + R_0, \tag{5.1}$$

其中 s 定义于（2.2）中。令

$$\mathbf{d}(x) := d(x, x_0) \text{ for every } x \in G,$$

于是我们定义

$$\begin{aligned}
&\xi(x,t) := -M\frac{\rho(x)}{\lambda T - t} \quad \text{for any } x \in G,\ t \in [0,T), \\
&\text{where } \rho(x) := \max\{\mathbf{d}^\beta(x), r^\beta\} = \begin{cases} r^\beta & \text{if } \mathbf{d}(x) \le r, \\ \mathbf{d}^\beta(x) & \text{if } \mathbf{d}(x) > r\,, \end{cases}
\end{aligned} \tag{5.2}$$

关于函数 ξ，我们有以下关键引理。

引理 5.1. 设假设 （2.3） 和 （2.4） 成立；假设 （2.7） 满足$\alpha \in [0,1]$。令 ξ 为定义于 （5.2） 中的函数。则

$$V(x)\,\xi_t(x,t)\mu(x) + \frac{1}{2}\sum_{y\in G}\omega(x,y)\left[1-e^{\xi(y,t)-\xi(x,t)}\right]^2 \le 0 \quad \textit{for all } x \in G,\ t \in (0,T), \tag{5.3}$$

只要 $M = T > 0$ 足够小且 $\beta = \alpha$。

证明。为便于阅读，我们将证明分为两个步骤。

Step I: 在第一步中，我们证明如下估计

$$|\rho(x)-\rho(y)|\le \beta R_0^{\beta-1} d(x,y) \qquad \text{for every } x,y\in G \text{ with } x\sim y. \tag{5.4}$$

为此，区分两种情况是有益的。

(i) $x\in B_{r-s}(x_0)$。在这种情况下，根据三角不等式和（2.2），我们有

$$\mathbf{d}(y)<r \text{ for every } y\in G,\ y\sim x;$$

因此，根据 ρ的定义，我们得到

$$|\rho(x)-\rho(y)| = r^\beta - r^\beta = 0,$$

而这显然意味着（5.4）。

(ii) $x\in G\setminus B_{r-s}(x_0)$。在这种情况下，我们首先注意到，由于函数

$$\mathbb{R}\ni t\mapsto \max\{t, r^\beta\}$$

由中值定理，且再次利用三角不等式，可知其是利普希茨连续的，利普希茨常数为 $L=1$，因此我们可以写出

$$\begin{aligned}|\rho(x)-\rho(y)| &\le |\mathbf{d}^\beta(x)-\mathbf{d}^\beta(y)| \le \beta\sigma^{\beta-1}|\mathbf{d}^\beta(x)-\mathbf{d}^\beta(y)|\\ &\le \beta\sigma^{\beta-1} d(x,y) \qquad \forall\, y\in G,\end{aligned} \tag{5.5}$$

其中 $\sigma\ge 0$ 是位于 $\mathbf{d}(x)$ 与 $\mathbf{d}(y)$ 之间的一个适当点。另一方面，由于我们假设 $x\notin B_{r-s}(x_0)$（因此，$\mathbf{d}(x)\ge r-s$），由（2.2）可得

$$\mathbf{d}(y)\ge r-2s\ge R_0 \quad \forall\, y\in G,\ y\sim x. \tag{5.6}$$

回想 $\beta\le 1$，由（5.5）–（5.6）立即可得

$$|\rho(x)-\rho(y)|\le \beta R_0^{\beta-1} d(x,y) \quad \forall\, y\in G,\ y\sim x,$$

这正是所需的（5.4）。

Step II: 在第二步中，我们证明（5.3）。首先，我们指出 t

$$(e^a-1)^2\le a^2 e^{2|a|} \quad \forall\, a\in\mathbb{R};$$

这个不等式与（5.4）结合起来，可得

$$\begin{aligned}\left(1-e^{\xi(y,t)-\xi(x,t)}\right)^2 &\le |\xi(y,t)-\xi(x,t)|^2 e^{2|\xi(y,t)-\xi(x,t)|}\\ &= \frac{M^2}{(\lambda T-t)^2}|\rho(y)-\rho(x)|^2 e^{\frac{2M}{\lambda T-t}|\rho(y)-\rho(x)|}\\ &\le \frac{\beta^2 R_0^{2\beta-2}M^2}{(\lambda T-t)^2} e^{\frac{2\beta R_0^{\beta-1}Md(x,y)}{T(\lambda-1)}} d(x,y)^2,\end{aligned}$$

并且，该估计对每个 x、$y\in G$ 以及每个 $t\in(0,\ T)$ 都成立。然后，利用（2.2）并回忆 d是内在的（因此，（2.3）成立），对于每个 $x\in G$和 $t\in(0,\ T)$，我们得到

$$\begin{aligned}&V(x)\,\xi_t(x,t)\mu(x)+\frac{1}{2}\sum_{y\in G}\omega(x,y)\left[1-e^{\xi(y,t)-\xi(x,t)}\right]^2\\ &\le -\frac{M\rho(x)}{(\lambda T-t)^2}V(x)\mu(x)+\frac{\beta^2R_0^{2\beta-2}M^2}{2(\lambda T-t)^2}\sum_{y\in G} e^{\frac{2\beta R_0^{\beta-1}Md(x,y)}{T(\lambda-1)}}\omega(x,y)d(x,y)^2\\ &\le -\frac{M\rho(x)}{(\lambda T-t)^2}V(x)\mu(x)+\frac{\beta^2R_0^{2\beta-2}M^2}{2(\lambda T-t)^2}e^{\frac{2\beta R_0^{\beta-1}Ms}{T(\lambda-1)}}\sum_{y\in G}\omega(x,y)d(x,y)^2\\ &= \frac{M\mu(x)}{(\lambda T-t)^2}\left\{-V(x)\rho(x)+\frac{M}{2}\beta^2R_0^{2\beta-2}e^{\frac{2\beta R_0^{\beta-1}Ms}{T(\lambda-1)}}\right\}.\end{aligned} \tag{5.7}$$

为进一步推进，我们现在固定 $\beta = \alpha$ 并利用假设（2.7）：考虑到 ρ 的分段定义，见（5.2），不难看出

$$V(x)\rho(x) \geq c_0\,\mathbf{d}(x)^{-\alpha}\rho(x) = c_0\,\mathbf{d}(x)^{-\alpha}\cdot\max\{\mathbf{d}^{\alpha}(x), r^{\alpha}\} \geq c_0 \quad \forall\, x \in G; \tag{5.8}$$

因此，结合（5.7）-（5.8），我们得出

$$V(x)\,\xi_t(x,t)\mu(x) + \frac{1}{2}\sum_{y\in G}\omega(x,y)\left[1 - e^{\xi(y,t)-\xi(x,t)}\right]^2$$
$$\leq \frac{M\mu(x)}{(\lambda T - t)^2}\left\{-c_0 + \frac{M}{2}\beta^2 R_0^{2\beta-2} e^{\frac{2\beta R_0^{\beta-1}Ms}{T(\lambda-1)}}\right\} \leq 0,$$

假设

$$M = T \quad \text{and} \quad 0 < M \leq \frac{2c_0 R_0^{2-2\beta} e^{-\frac{2}{\lambda-1}\beta R_0^{\beta-1}s}}{\beta^2}.$$

证明至此结束。 □

既然我们已经证明了引理5.1，接下来将证明适当的“截断”函数 η的存在性。为此，固定此前引入的所有记号，并选取

$$r_1 > 2r + 8s$$

并定义函数

$$\eta(x) := \min\left\{\frac{2\,[r_1 - s - \mathbf{d}(x)]_+}{r_1},\ 1\right\} \quad \text{for any } \ x \in G\,. \tag{5.9}$$

由于 [28, 引理 5.2]（选择 $\delta = 1/2$），我们得到以下结果。

引理 5.2. 假设 (2.3)-(2.4)成立。则由 η 在 (5.9)中定义的函数满足以下性质：

$$\text{(i)} \quad |\nabla_{xy}\eta| \leq \frac{2}{r_1} d(x,y)\chi_{\left\{\frac{r_1}{2}-2s\leq \mathbf{d}(x)\leq r_1\right\}} \qquad \textit{for any } \ x \in G;$$
$$\text{(ii)} \quad \sum_{y\in G}(\nabla_{xy}\eta)^2\,\omega(x,y) \leq \frac{4}{(r_1)^2}\mu(x)\chi_{\left\{\frac{r_1}{2}-2s\leq \mathbf{d}(x)\leq r_1\right\}} \quad \textit{for any } \ x \in G. \tag{5.10}$$

6. Proof of Theorem 2.4

基于第 3、4 和 5节得到的结果，我们现在可以给出定理 2.4的证明。下文中，我们固定使用迄今为止引入的所有符号。

定理 *2.4* 的证明。反证法，假设方程（1.1）存在一个非平凡有界解。那么，根据命题 3.1，我们知道存在同一方程（ u1.1）的一个解，使得

$$0 < u \leq 1 \quad \text{pointwise in } G. \tag{6.1}$$

现在定义 $v(x,\ t)$: $= e^t u(x) - 1$，对任意的（$x,\ t$）$\in S$，其中 S如（4.1）中所示。我们要证明

$$v(x,t) \leq 0 \quad \text{for every } x \in \operatorname{supp}(V) \text{ and } t > 0. \tag{6.2}$$

为此，我们固定 $T > 0$（稍后将适当选取为足够小的值），并任意选取 $r > 2s + R_0$，其中 $R_0 > 0$ 和 $0 < s < +\infty$ 分别如（2.7）和（2.2）所示。令 ξ 如（5.2）所示，其中 $\beta = \alpha,\ \ \lambda > 1$ 且 $M = T$ 按引理 5.1中的方式选取。此外，固定$r_1 > 0$ 使得

$$r_1 \geq 2r + 8s, \tag{6.3}$$

并令 η 如引理 5.2所示。现在注意到 η 和 ξ 显然满足条件（4.2）和（4.3）；此外，由于 η 和 $\xi(\cdot,t)$ 都是 关于 d的非增函数。因此，由（4.5）可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{x\in G} V(x)\eta^2(x)v_+^2(x,T)e^{\xi(x.T)}\mu(x) - \sum_{x\in G} V(x)\eta^2(x)v_+^2(x,0)e^{\xi(x.0)}\mu(x)\\
&\quad\le \int_0^T \sum_{x\in G} v_+^2(x,t)\eta^2(x)e^{\xi(x,t)}\left\{V(x)\xi_t(x,t)\mu(x) - \frac{1}{2}\sum_{y\in G}\omega(x,y)[1-e^{\xi(y,t)-\xi(x,t)}]^2\right\}dt\\
&\qquad + 2\int_0^T \sum_{x,y\in G} v_+^2(x,t)e^{\xi(y,t)}[\eta(y)-\eta(x)]^2\omega(x,y)\,dt.
\end{aligned} \tag{6.4}$$

另一方面，根据引理 5.1 存在 $T_0 = T_0(\lambda) > 0$，使得

$$V(x)\xi_t(x,t)\mu(x) - \frac{1}{2}\sum_{y\in G}\omega(x,y)[1-e^{\xi(y,t)-\xi(x,t)}]^2 \le 0 \qquad \forall\, x\in G,\, t\in(0,T), \tag{6.5}$$

在 $T \le T_0$ 的条件下。由此，结合 (6.4) 和 (6.5)，我们得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{x\in G} V(x)\eta^2(x)v_+^2(x,T)e^{\xi(x.T)}\mu(x) - \sum_{x\in G} V(x)\eta^2(x)v_+^2(x,0)e^{\xi(x.0)}\mu(x)\\
&\qquad \le 2\int_0^T \sum_{x,y\in G} v_+^2(x,t)e^{\xi(y,t)}[\eta(y)-\eta(x)]^2\omega(x,y)\,dt.
\end{aligned} \tag{6.6}$$

接下来，我们通过估计 (6.6) 的两端来继续证明。

- 左端估计。首先注意到，根据 (5.9) 中 η 的定义，我们有 $\eta \ge 0$ 在 G 上逐点成立，且 $\eta \equiv 1$ 在 $B_r(x_0) = \{x : \mathrm{d}(x) < r\}$。现在注意到，由 (6.1) 可知，$v_+(x,0) = 0$ 在 G 中；此外，$\rho(x) = \mathrm{d}(x)^\alpha$ 在 $B_r(x_0)$ 中，因此我们得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{x\in G} V(x)\eta^2(x)v_+^2(x,T)e^{\xi(x.T)}\mu(x) - \sum_{x\in G} V(x)\eta^2(x)v_+^2(x,0)e^{\xi(x.0)}\mu(x)\\
&\qquad = \sum_{x\in G} V(x)\eta(x)^2 v_+^2(x,T)e^{\zeta(x,T)}\mu(x)\\
&\qquad \ge \sum_{x\in B_r(x_0)} V(x)v_+^2(x,T)e^{\zeta(x,T)}\mu(x)\\
&\qquad = \gamma_{r,\Lambda}\sum_{x\in B_r(x_0)} V(x)\, v_+^2(x,T)\mu(x),
\end{aligned} \tag{6.7}$$

$_{r^\alpha}$其中我们使用了简写记号 $\gamma_{r,\ \Lambda} = e^{-\overline{\lambda-1}} > 0$。

-右端的估计。 我们首先注意到，根据（ ξ 5.2）中给出的定义，由于 $0 \leq v_+(x,\ t) \leq e^t$ 在 S上，对于 S 如（4.1）所示，并利用（5.10），我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \sum_{x,y\in G} v_+^2(x,t)e^{\xi(y,t)}[\eta(y)-\eta(x)]^2\omega(x,y)\,dt \\
&\qquad = \int_0^T \sum_{x,y\in G} v_+^2(x,t)e^{\xi(y,t)}(\nabla_{xy}\eta)^2\omega(x,y)\,dt \\
&\qquad = \int_0^T \sum_{x,y\in G} v_+^2(y,t)e^{\xi(x,t)}(\nabla_{xy}\eta)^2\omega(x,y)\,dt \\
&\qquad \leq e^{2T}\int_0^T \sum_{x,y\in G} \exp\Big(-\frac{T\rho(x)}{\lambda T-t}\Big)(\nabla_{xy}\eta)^2\omega(x,y)\,dt \\
&\qquad \leq Te^{2T}\sum_{x,y\in G} \exp\Big(-\frac{\rho(x)}{\lambda}\Big)(\nabla_{xy}\eta)^2\omega(x,y) \\
&\qquad = \frac{4Te^{2T}}{(r_1)^2}\sum_{x\in G} \exp\Big(-\frac{\rho(x)}{\lambda}\Big)\chi_{\left\{\frac{r_1}{2}-2s\leq d(x,x_0)\leq r_1\right\}}(x)\mu(x) \\
&\qquad \leq \frac{4Te^{2T}}{(r_1)^2}\sum_{x\in G} \exp\Big(-\frac{\rho(x)}{\lambda}\Big)\chi_{\{r<d(x,x_0)\leq r_1\}}(x)\mu(x).
\end{aligned}$$

现在，由于 ρ（x） $=\mathbf{d}^\alpha$（x）当 $\mathbf{d}$（x） $> r$，利用（6.3），我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \sum_{x,y\in G} v_+^2(x,t)e^{\xi(y,t)}[\eta(y)-\eta(x)]^2\omega(x,y)\,dt \\
&\qquad \leq \frac{4Te^{2T}}{(r_1)^2}\sum_{x\in G} \exp\Big(-\frac{\mathbf{d}^\alpha(x)}{\lambda}\Big)\chi_{\{r<d(x,x_0)\leq r_1\}}(x)\mu(x) \\
&\qquad = \frac{4Te^{2T}}{(r_1)^2}\sum_{x\in G} \exp\Big(-\frac{\mathbf{d}^\alpha(x)}{\lambda}\Big)\chi_{\{r<d(x,x_0)\leq r_1\}}(x)\mu(x) \\
&\qquad = \frac{c(T)}{(r_1)^2}\sum_{x\in G} \exp\Big(-\frac{\mathbf{d}^\alpha(x)}{\lambda}\Big)\chi_{\{r<d(x,x_0)\leq r_1\}}(x)\mu(x).
\end{aligned} \tag{6.8}$$

然后，将（6.7）和（6.8）与（6.6）结合，得到

$$\sum_{x\in B_r(x_0)} V(x)\,v_+^2(x,T)\mu(x) \leq \frac{c(T,\lambda,r)}{(r_1)^2}\sum_{x\in G} \exp\Big(-\frac{\mathbf{d}^\alpha(x)}{\lambda}\Big)\chi_{\{r<\mathbf{d}(x)\leq r_1\}}(x)\mu(x), \tag{6.9}$$

其中 c（T，λ，r） >0是仅依赖于 T、λ和 r的常数。现在，如果 $0<\Lambda<1$如（2.8）中所述，并令

$$\lambda = \frac{1}{\Lambda} > 1,$$

那么估计（6.9）归结为

$$\begin{aligned}
\sum_{x\in B_r(x_0)} V(x)\,v_+^2(x,T)\mu(x) &\leq \frac{c(T,\lambda,r)}{(r_1)^2}\sum_{x\in G} e^{-\Lambda\mathbf{d}^\alpha(x)}\chi_{\{r<\mathbf{d}(x)\leq r_1\}}(x)\mu(x) \\
&= \frac{c(T,\lambda,r)}{(r_1)^2}\sum_{x\in G} e^{-\Lambda d^\alpha(x,x_0)}\chi_{\{r<\mathbf{d}(x)\leq r_1\}}(x)\mu(x).
\end{aligned} \tag{6.10}$$

此外，我们回想起 r_1 是任意固定的，因此令 $r_1 \to +\infty$在（6.10）中取极限，并利用假设（2.8），可得

$$\sum_{x\in B_r(x_0)} V(x)\, v_+^2(x,T)\mu(x) = 0.$$

因此，我们很容易得出

$$v(x,T) \le 0 \quad \forall\, x \in B_r(x_0)\cap \mathrm{supp}(V),\ 0 \le T \le T_0(\lambda),$$

其中回顾一下，数值 T_0 取决于 λ，而后者至此已固定。由此，并且回顾 $r \ge 2s + R_0$ 也是任意固定的，我们得到

$$v(x,T) \le 0 \quad \forall\, x \in \mathrm{supp}(V),\ 0 \le T \le T_0(\lambda). \tag{6.11}$$

现在，引入“平移”函数

$$v_1(x,t) = v(x, t + T_0(\lambda)).$$

显然，它仍是抛物型问题 (4.6) 的一个解。此外，由 (6.11)，$v_1(x,0) \le 0$对每个 $x \in \mathrm{supp}(V$均成立。运用迄今所采用的同一论证，可推知

$$v_1(x,T) \le 0 \quad \forall\, x \in \mathrm{supp}(V),\ 0 \le T \le T_0(\lambda),$$

因此

$$v(x,T) \le 0 \quad \forall\, x \in \mathrm{supp}(V),\ 0 \le T \le 2T_0(\lambda).$$

通过反复应用这一论证，并关键性地利用 $T_0(\lambda) > 0$ 是一个在每次迭代中保持不变的通用数值这一事实（因为 $\lambda > 0$ 是固定的），我们得出

$$v(x,T) \le 0 \quad \forall\, x \in \mathrm{supp}(V),\ T \ge 0.$$

由此得到（6.2）。

现在可以轻松得出该定理的证明。事实上，由（6.2）并利用 v的定义，我们有

$$0 < u \le e^{-t} \quad \text{for every } x \in \mathrm{supp}(V) \text{ and } t > 0.$$

于是，令 $t \to +\infty$，可推得 $u \le 0$ 在 $\mathrm{supp}(V) \neq \varnothing$上成立，但这显然与（6.1）矛盾。证明至此完成。□

7. Optimality on model trees

我们先给出一个一般性的非唯一性判据，它适用于满足条件（G,ω,μ）和（2.4）的任意图。每当 $x \to \infty$ 时，我们记 $d(x,x_0) \to +\infty$，其中 $x_0 \in G$为某个参考点。

7.1. 一个一般性的非唯一性判据。考虑方程（1.1）。我们可以证明以下结果。

ˆ命题 7.1。 假设 (2.4) 成立。此外，设 $V \in \mathfrak{F}$、 $V > 0$ 和 $R > 0$。如果存在问题的上解

$$\begin{aligned} \frac{1}{V}\Delta h &= -1 \quad in\ G \setminus B_{\hat{R}}, \\ h &> 0 \quad in\ G \setminus B_{\hat{R}}, \\ \lim_{x\to\infty} h(x) &= 0\,, \end{aligned} \tag{7.1}$$

那么，问题 u 的有界解有无穷多个(1.1)。特别地，对于任意$\gamma \in \mathbb{R}$， $\gamma > 0$，存在一个解 u 满足问题 (1.1)，使得

$$\lim_{x\to\infty} u(x) = \gamma.$$

证明。设 $\gamma \in \mathbb{R}, \gamma > 0$。对于任意 $j \in \mathbb{N}$，考虑以下问题

$$\begin{cases} \Delta u - V(x)u &= 0 \quad \text{in } B_j \\ u &= \gamma \quad \text{in } G \setminus B_j. \end{cases} \tag{7.2}$$

根据假设（2.4），由命题 3.5可知，对于任意 $j \in \mathbb{N}$，问题（7.2）存在唯一的解 u_j，其意义符合定义 3.2。我们现在断言

$$0 \le u_j(x) \le \gamma \quad \text{for any } x \in G \text{ and for any } j \in \mathbb{N}. \tag{7.3}$$

事实上，由于

$$\Delta u_j - V(x)u_j = 0 \quad \text{in } B_j,$$

并且由于 $u_j = \gamma \ge 0$ 在 $G \setminus B_j$中，由引理 3.3，我们可以推知 $u_j \ge 0$ 在 G中。另一方面，令 $\overline{v}$（x）：$= \gamma$ 对任意 $x \in G$。于是，由于 V（x） > 0 对任意 $x \in G$，并且由于 $\gamma > 0$

$$\begin{aligned} \Delta\overline{v}(x) - V(x)\overline{v}(x) &= \frac{1}{\mu(x)} \sum_{y \in G} \omega(x,y)[\overline{v}(y) - \overline{v}(x)] - V(x)\overline{v}(x) \\ &= -\gamma\, V(x) \le 0 \quad \text{for any } x \in G. \end{aligned} \tag{7.4}$$

对任意 $j \in \mathbb{N}$，令 w：$= \overline{v} - u_j$。由（7.2）和（7.4），

$$\Delta w - V(x)w \le 0 \quad \text{in } G.$$

此外，$w \ge 0$ 在 $G \setminus B_j$中。因此，由引理 3.3，$w \ge 0$ 在 G 中，并且特别地，

$$u_j \le \gamma \quad \text{in } G\,.$$

因此，式（7.3）成立。此外，对于任意 $j \in \mathbb{N}$，令 u_{j+1} 为问题（7.2）在 B_{j+1}中的解。因此，特别地，注意到

$$\Delta u_{j+1} - V(x)u_{j+1} = 0 \quad \text{in } B_j,$$

并且由式（7.3），$u_{j+1}(x) \le \gamma$ 对任意 $x \in G \setminus B_j$成立。令 v：$= u_j - u_{j+1}$，则

$$\begin{cases} \Delta v - V(x)v = 0 & \text{in } B_j, \\ v = \gamma - u_{j+1} \ge 0 & \text{in } G \setminus B_j. \end{cases}$$

因此，由引理 3.3，$v \ge 0$ 在 G 中成立；特别地，对任意 $j \in \mathbb{N}$，

$$u_{j+1} \le u_j \quad \text{in } G. \tag{7.5}$$

因此，由式（7.3）和式（7.5），可推得序列 $\{u_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ 是递减且有界的，在 G上。因此，存在 $u \in \mathfrak{F}$ 使得

$$u(x) = \lim_{j \to +\infty} u_j(x), \qquad x \in G.$$

此外，u_j 对任意 7.2问题求解 $j \in \mathbb{N}$，并且由于定义拉普拉斯算子的求和项Δ 有限，令 $j \to +\infty$，可得 u 是问题（1.1）的解。令 h 为问题（7.1）的上解。于是，对任意 $x \in G \setminus B_{\hat{R}}$，按假设中的 $\hat{}$ $R > 0$ 定义如下，

$$\underline{w}(x) := -C\, h(x) + \gamma. \tag{7.6}$$

对于任意 $j \in \mathbb{N}$ 使得 $B_j \supset B_{\hat{R}}$，我们证明 $\underline{w}$ 是问题（7.2）在定义 3.2所述意义下的下解。由（7.1）且由于 $V > 0$ 在 G中，我们有

$$\begin{aligned} \Delta\underline{w}(x) - V(x)\underline{w}(x) &= \frac{C}{\mu(x)} \sum_{y \in G} \omega(x,y)[(-h(y) + \gamma) - (-h(x) + \gamma)] - V(x)(-Ch(x) + \gamma) \\ &= -C\Delta h(x) + V(x)C\, h(x) - V(x)\gamma \\ &\ge V(x)\,(C - \gamma) \\ &\ge 0 \quad \text{for any } x \in B_j \setminus B_{\hat{R}}\,, \end{aligned}$$

前提是 $C > 0$ 足够大。此外，$u_j \geq \underline{w}$ 在 $G \setminus B_j$ 中，因为 $u_j = \gamma$ 在 $G \setminus B_j$中。因此，由引理 3.3，可得

$$u_j(x) \geq \underline{w}(x) \quad \text{for any } x \in G \setminus B_{\hat{R}}. \tag{7.7}$$

将（7.3）与（7.7结合起来可得

$$-C\,h(x) + \gamma = \underline{w}(x) \leq u_j(x) \leq \gamma \quad \text{for any } x \in G \setminus B_{\hat{R}}.$$

令 $j \to \infty$，可得

$$-C\,h(x) + \gamma \leq u(x) \leq \gamma \quad \text{for any } x \in G \setminus B_{\hat{R}},$$

因此，特别地，由（7.1），

$$\lim_{x\to\infty} u(x) = \gamma.$$

□

7.2. 模型树与一个特殊上解。本小节中，我们考察一类特殊的图，即所谓的模型树，并证明对于这类图，定理2.4 中的唯一性结果是尖锐的。更确切地说，我们证明假设（ $\alpha \in [0,1]$ 2.7）中的选择是最优的；事实上，只要 $\alpha > 1$，就存在无穷多个有界解。首先定义模型树。设 $m(x)$表示以 x 为端点的边数。

定义 7.2. 若图 T 含有一个顶点 x_0（称为模型的根），且 $m(x)$ 在半径为 r 、以 x_0 为中心的球面上为常数，则称该图为模型树。于是有：

$$\textit{if } x \in S_r(x_0) = \{x \in T : d(x, x_0) = r\}, \textit{ then } \quad m(x) = m(r).$$

此处及下文，对于任意 $x, x_0 \in G$, $d(x, x_0)$ 表示标准度量（在图上），即沿着连接 x_0 与 x 的路径，将 x 与 x_0 分隔开的顶点数。

此外，我们将根的距离为 r 处的分支数 $b(r)$ 定义为连接 S_r 中每个顶点与 S_{r+1} 中一个顶点的边数；我们还令 $b(0) = m(x_0)$。因此，对于任意 $r > 0$，有 $m(r) = b(r) + 1$。我们用 $T_{b(r)}$ 表示分支数为 $b(r)$ 的模型树。若模型树的分支数为常数，即对某个 $b \in \mathbb{N}$，每个 $r \geq 0$ 都有 $b(r) = b$，则称该模型树为齐次模型树。

令 $\omega :\ G \times G \to \mathbb{R}$ 为图 G 的边权重，定义见（2.1）。若$\omega(x, y) \in \{0, 1\}$ 对所有 x, $y \in G$成立，则称该图具有 标准边权重，并记作 $\omega_0(x, y)$。特别地，对于每个 $x \in G \setminus \{x_0\}$,

$$\omega_0(x, y) = 1 \text{ if and only if } d(x, y) = 1 \text{ and } [d(y, x_0) = d(x, x_0) \pm 1]\,. \tag{7.8}$$

注意，对于每个 $x \in G \setminus \{x_0\}$,

$$\begin{aligned} &\text{cardinality}\{y \in G : d(x, y) = 1, d(y, x_0) = d(x, x_0) + 1\} = b, \\ &\text{cardinality}\{y \in G : d(x, y) = 1, d(y, x_0) = d(x, x_0) - 1\} = 1\,. \end{aligned} \tag{7.9}$$

此外，我们将加权计数测度定义为满足以下条件的测度 μ ： 存在$c > 0$ 使得对于所有 $x \in G$, $\mu(x) = c$，并将其记为 μ_c。此外，我们将以根 x_0 为中心、半径为 r 的球 $B_r(x_0)$ 简记为 B_r。

下文中，我们将讨论一个分支数为 b、边权重为 ω_0 、加权计数测度为 μ_c 的模型齐次树，即三元组

$$(T_b, \omega_0, \mu_c).$$

现在，在 $(T_b,\ \omega_0,\ \mu_c)$ 上，我们显式构造一个函数 h ，使其满足命题 7.1 中所要求的所有性质。

引理 7.3. 设 (T_b, ω_0, μ_c) 是如上所述、分支数为 $b \geq 2$ 的图，且 $V \in \mathfrak{F}$, $V > 0$ 位于 T_b 上。假设对某些 $\alpha > 1$ 和 $R_0 \geq 2$，有

$$V(x) \leq C_0\, d^{-\alpha}(x, x_0) \quad \text{for any } x \in G \setminus B_{R_0}\,. \tag{7.10}$$

ˆˆ 于是存在 $C > 0$、 $R > 0$ 和 $\beta > 0$，使得

$$h(x) := \hat{C} d^{-\beta}(x, x_0), \quad x \in G \setminus B_{\hat{R}}$$

是问题 (7.1) 的一个上解。

证明。固定 $x \in G \setminus B_{R_0}$。令 $\mathbf{d}(\cdot) := d(\cdot, x_0)$，并注意到

$$\mathbf{d}(y) \geq \mathbf{d}(x) - 1 \geq 1 \quad \forall\, y \in T_b,\, y \sim x$$

(回想 $R_0 \geq 2$ 并参见 (7.8))，由中值定理可得

$$\begin{aligned} \Delta h(x) &= \frac{\hat{C}}{\mu_c} \sum_{y \in G} \omega_0(x,y)[\mathbf{d}^{-\beta}(y) - \mathbf{d}^{-\beta}(x)] \\ &= -\beta \frac{\hat{C}}{\mu_c} \sum_{y \in G} \omega_0(x,y) \xi^{-\beta-1}[\mathbf{d}(y) - \mathbf{d}(x)], \end{aligned} \tag{7.11}$$

对于介于 $\mathbf{d}(y)$ 和 $\mathbf{d}(x)$ 之间的某个 ξ。显然，

$$\begin{aligned} \sum_{y \in G} \omega_0(x,y) \xi^{-\beta-1}[\mathbf{d}(y) - \mathbf{d}(x)] &= \sum_{\mathbf{d}(y) > \mathbf{d}(x)} \omega_0(x,y) \xi^{-\beta-1}[\mathbf{d}(y) - \mathbf{d}(x)] \\ &\quad + \sum_{\mathbf{d}(y) < \mathbf{d}(x)} \omega_0(x,y) \xi^{-\beta-1}[\mathbf{d}(y) - \mathbf{d}(x)] \\ &=: \mathrm{S}^+ + \mathrm{S}^-. \end{aligned} \tag{7.12}$$

此外，利用（7.8）-（7.9）（并且由于 $\beta > 0$），我们得到

$$\begin{aligned} &\text{(i) } \mathrm{S}^+ \geq \sum_{\mathbf{d}(y) > \mathbf{d}(x)} \omega_0(x,y) \mathbf{d}^{-\beta-1}(y)[\mathbf{d}(y) - \mathbf{d}(x)] = b\, \mathbf{d}^{-\beta-1}(y) = -b[\mathbf{d}(x)+1]^{-\beta-1}; \\ &\text{(ii) } \mathrm{S}^- \geq \sum_{\mathbf{d}(y) < \mathbf{d}(x)} \omega_0(x,y) \mathbf{d}^{-\beta-1}(x)[\mathbf{d}(y) - \mathbf{d}(x)] = \mathbf{d}^{-\beta-1}(x). \end{aligned} \tag{7.13}$$

结合（7.11）、（7.12）和（7.13），进而得到

$$\Delta h(x) \leq \frac{\hat{C}\beta}{\mu_c} \left\{ -b[\mathbf{d}(x)+1]^{-\beta-1} + \mathbf{d}^{-\beta-1}(x) \right\}. \tag{7.14}$$

ˆ 我们最后注意到，给定任意 $\varepsilon > 0$，存在 $R > R_0$ 使得

$$1 < \frac{[\mathbf{d}(x)+1]^{\beta+1}}{\mathbf{d}^{\beta+1}(x)} < 1 + \varepsilon \quad \text{whenever } \mathbf{d}(x) > \hat{R}; \tag{7.15}$$

因此，如果 $x \in G \setminus B_{\hat{R}} \subseteq G \setminus B_{R_0}$，由（7.14）、（7.15）和（7.10）可得

$$\frac{1}{V(x)} \Delta h(x) \leq \frac{\hat{C}\beta}{\mu_c C_0} \mathbf{d}^{\alpha}(x) \mathbf{d}^{-\beta-1}(x) \left(-\frac{b}{1+\varepsilon} + 1 \right) \leq -\frac{\hat{C}\hat{R}^{\alpha-\beta-1}\beta}{2C_0\mu_c} = -1,$$

只要

$$\varepsilon = \frac{2b-3}{3} > 0,\ 0 < \beta \leq \alpha - 1,\ \hat{C} = \frac{2C_0\mu_c}{\hat{R}^{\alpha-\beta-1}\beta}.$$

注意，由于 $b \geq 2$, $\varepsilon > 0$，而由于 $\alpha > 1$, $\beta > 0$。证明完毕。 □

由命题 7.1 和引理7.3 可得如下结论

推论 7.4. 设 $(T_b,\ \omega_0,\ \mu_c)$ 是上述具有分支数 $b\geq 2$的图，并设 $V\in\mathfrak{F},\ V>0$定义在 T_b上。假设条件 (7.10)成立。

那么，存在无穷多个有界解 u 满足问题(1.1)。特别地，对于任意 $\gamma\in\mathbb{R},\ \gamma>0$，存在一个解 u 满足问题(1.1)，使得

$$\lim_{x\to\infty} u(x)=\gamma.$$

7.3. 一个反例。 根据推论7.4，我们很容易证明，假设（2.7）中的要求 $\alpha\in[0,1]$ 不能省略；也就是说，如果将范围限定在某一特定类的图上，该假设是最优的。

为说明这一事实，设 (T_b,ω_0,μ_1) 是一个分支数为 $b\geq 2$ 的齐次模型树（配备加权计数测度 $\mu_c\equiv 1$），并令 x_0 为该模型树的根。给定任意数值 $\alpha>1$，我们考虑如下定义的函数 $V\in\mathfrak{F}$：

$$V(x):=(1+d(x,x_0))^{-\alpha}$$

（其中 d 是树上的通常距离）。显然，在此情形下，假设（2.3）和（2.4）均成立；此外，V：$T_b\to\mathbb{R}$ 是定义在上的严格正势 T_b，但最后一个条件——假设（2.7）——显然不成立（因为 $\alpha>1$）。

我们现在注意到，由于 $\alpha>1$，级数（2.8）收敛，对于任意取值的 $\Lambda\in(0,\ 1)$：事实上，回顾 $\mu_1\equiv 1$，我们得到如下计算

$$\sum_{x\in G\setminus B_1(x_0)} e^{-\Lambda d^\alpha(x,x_0)}\mu(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{\{x:\,d(x,x_0)=n\}} e^{-\Lambda d^\alpha(x,x_0)}\mu(x)\Big)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\Lambda n^\alpha}\mu(\{x:\,d(x,x_0)=n\})=\sum_{n=1}^{\infty} b^n e^{-\Lambda n^\alpha},$$

并且级数 $\sum_n b^n e^{-\Lambda n^\alpha}$ 通过比值判别法收敛。

另一方面，由于 $b\geq 2$ 且由于 V是在 T_b 上满足条件（7.10）（其中 $R_0=1$ 且 $C_0=1$）的严格正势，我们可以应用推论 7.4，由此可知存在无穷多个方程（1.1）的非平凡有界解。因此，条件 $\alpha\in[0,1]$ 在此情形下是最优的。

致谢 第二作者的研究经费由德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）提供，项目为 SFB 1283/2 2021 - 317210226。所有作者均为意大利国家高等数学研究所（INdAM，意大利）下属“Gruppo Nazionale per l’Analisi Matematica, la Probabilità e le loro Applicazioni”（GNAMPA）的成员。

References

[1] M. Barlow、T. Coulhon、A. Grigor’yan, *Manifolds and graphs with slow heat kernel decay*, 《数学发明》144（2001年），609-649。[2] S. Biagi、F. Punzo, *A Liouville-type theorem for elliptic equations with singular coefficients in bounded domains* 10 1007 00526 022 02389 ，《变分法与偏微分方程》，DOI：./s - - -z,（即将发表）。[3] S. Biagi、F. Punzo, *A Liouville theorem for elliptic equations in divergence form with a potential*，预印本（2022年）。[4] T. Coulhon、A. Grigor’yan、F. Zucca, *The discrete integral maximum principle and its applications*, 《东北数学杂志》57（2005年），559-587。[5] N. Deo, 《图论及其在工程与计算机科学中的应用》，多佛出版社，纽约（2016年）[6] M. Erbar、J. Maas, *Gradient flow structures for discrete porous medium equations*, 《离散与连续动力系统》34（2014），1355-1374。[7] A. Grigor’yan, *Bounded solutions of the Schrödinger equation on noncompact Rieamnnian manifolds*, 《苏联数学杂志》51, 2340-2349（1990）。[8] A. Grigor’yan, *Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds* **36** 1999 135 249 ，《美国数学会通报》（），–。[9] A. Grigor’yan,《热核与流形分析》，AMS/IP 高等数学研究，47。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯；国际出版社，马萨诸塞州波士顿，2009年。

[10] A. Grigor'yan, 《图上的分析导论》, AMS大学讲义系列71（2018年）。[11] A. Grigor'yan、Y. Lin、Y. Yang, *Kazdan-Warner equation on graph*, 《变分法与偏微分方程》55（2016）, 1-13。[12] A. Grigor'yan、Y. Lin、Y. Yang, *Yamabe type equations on graphs*, 《微分方程杂志》261（2016）, 4924-943。[13] A. Grigor'yan、Y. Lin、Y. Yang, *Existence of positive solutions to some nonlinear equations on locally finite graphs* **60** 2017 1311 1324 , 《中国科学: 数学》（）, -。[14] A. Grigor'yan、A. Telcs, *Sub-Gaussian estimated of heat kernels on infinite graphs*, 《杜克数学杂志》109(3)（2001年）, 451–510。[15] Q. Gu、X. Huang、Y. Sun, *Superlinear elliptic inequalities on weighted graphs*, 预印本（2022年）。[16] B. Hua、Y. Lin, *Stochastic completeness for graphs with curvature dimension conditions*, 《数学进展》306（2017）, 279-302。[17] B. Hua、D. Mugnolo, *Time regularity and long-time behavior of parabolic p-Laplace equations on infinite graphs* **259** 2015 6162 6190 , 《微分方程杂志》（）, -。[18] B. Hua、L. Wang, *Dirichlet p−Laplacian eigenvalues and Cheeger constants on symmetric graphs*, 《数学进展》364（2020）, 106997。[19] X. Huang, *On uniqueness class for a heat equation on graphs*, 《数学分析及其应用》393（2012）, 377–388。[20] X. Huang、M. Keller、J. Masamune、R.K. Wojciechowski, *A note on self-adjoint extensions of the Laplacian on weighted graphs* **265**, 2913 1556 1578 , 《泛函分析杂志》（）, -。[21] X. Huang、M. Keller、M. Schmidt, *On the uniqueness class stochastic completeness and volume growth*, , 《美国数学会汇刊》（）, -。[22] M. Keller、M. Schwarz, *The Kazdan-Warner equation on canonically compactifiable graphs*, 《变分法与偏微分方程》57（2018）, 1-18。[23] M. Keller、D. Lenz、R.K. Wojciechowski, 《图与离散Dirichlet空间》, 施普林格（2021年）。[24] A. Lesne, *Complex networks: from graph theory to biology*, 《数学物理快报》78（2006）, 235-262。[25] Y. Lin、Y. Wu, *The existence and nonexistence of global solutions for a semilinear heat equation on graphs* **56**, 2017 1 22 , 《变分法与偏微分方程》（）, -。[26] S. Liu、Y. Yang, *Multiple solutions of Kazdan-Warner equation on graphs in the negative case*, 《变分法与偏微分方程》59（2020）, 1-15。[27] E. Lieberman、C. Hauert、M.A. Nowak, *Evolutionary dynamics on graphs*, 《自然》433（2005）, 312-316。[28] G. Meglioli、F. Punzo, *Uniqueness for fractional parabolic and elliptic equations with drift*, 《纯粹与应用分析通讯》, 即将发表。[29] G. Meglioli、F. Punzo, *Uniqueness in weighted ℓ^p spaces for the Schrödinger equation on infinite graphs*, 预印本（2022年）。[30] G. Meglioli、A. Roncoroni, *Uniqueness in weighted Lebesgue spaces for an elliptic equation with drift on manifolds*, 预印本（2022年）[31] D. Mugnolo, *Parabolic theory of the discrete p-Laplace operator*, 《非线性分析》87（2013）, 33-60。[32] D. Mugnolo, 《网络上演化方程的半群方法》, 施普林格（2016年）。[33] C. Nobili、F. Punzo, *Uniqueness for degenerate parabolic equations in weighted L^1 spaces*, 《演化方程杂志》22（2022）, 50。[34] A. Pinamonti、G. Stefani, *Existence and uniqueness theorems for some semi-linear equations on locally finite graphs* **150** 2022 4757 4770 , 《美国数学会会刊》（）, -。[35] F. Punzo, *Uniqueness for the heat equation in Riemannian manifolds*, 《数学分析及其应用》424（2015）, 402-422。[36] F. Punzo, *Integral conditions for uniqueness for solutions to degenerate parabolic equations*, 《微分方程杂志》267（2019）, 6555-6573。[37] F. Punzo、F. Valdinoci, *Uniqueness in weighted Lebesgue spaces for a class of fractional parabolic and elliptic equations* **258** 2015 555 587 , 《微分方程杂志》（）, -。[38] A. Slavik、P. Stehlik、J. Volek, *Well-posedness and maximum principles for lattice reaction-diffusion equations* **8** 2019 303 322 , 《非线性分析进展》（）, -。[39] Y. Wu, *Blow-up for a semilinear heat equation with Fujita's critical exponent on locally finite graphs*, 《西班牙皇家精确、物理与自然科学学院杂志 A辑：数学》115（2021）, 1-16。

Stefano Biagi,
Dipartimento di Matematica,
Politecnico di Milano,
Piazza Leonardo da Vinci 32, 20133, Milano, Italy
E-mail address: stefano.biagi@polimi.it

Giulia Meglioli,
Fakultät für Mathematik,
Universität Bielefeld, 33501,
Bielefeld, Germany
E-mail address: gmeglioli@math.uni-bielefeld.de

Fabio Punzo,Dipartimento di Matematica,
Politecnico di Milano,
Piazza Leonardo da Vinci 32, 20133, Milano, Italy
E-mail address: fabio.punzo@polimi.it