arXiv:2304.00799v1 [quant-ph] 3 Apr 2023

微波量子二极管

Rishabh Upadhyay[1], DmitryS. Golubev[1], Yu-ChengChang[1],
GeorgeThomas 1, Andrew Guthrie[1], Joonas T. Peltonen[1], 和Jukka P. Pekola[1]
Pico group, QTF Centre of Excellence, Department of Applied Physics,
Aalto University School of Science, P.O. Box 13500, 00076 Aalto, Finland

量子电路的脆弱性是实现量子应用规模化的一大瓶颈。量子电路在低温下运行，极易受到放大器反向作用和外部噪声的影响。为此，人们使用环行器和隔离器等非互易微波器件。这些器件在低温恒温器中占用相当大的空间，限制了量子电路的可扩展性。我们提出了一种紧凑型微波二极管架构，利用超导磁通量子比特的非线性。在量子比特简并点，我们通过实验展示了两个相反方向传输的功率存在显著差异。实验观察结果与所提出的理论模型相符。在输入功率为 -99 dBm 且处于量子比特-谐振器避免交叉区域附近时，我们报告称，在 6.81 GHz 至 6.86 GHz 的 50 MHz 宽频率范围内，传输整流比超过 90%；在 6.67 GHz 至 6.91 GHz 的 250 MHz 范围内，传输整流比超过 60%。该架构结构紧凑，且易于扩展至多个读出通道，有望为量子信息、微波读出和光机械学开辟多种应用机会。

引言:

量子工程是一门充满活力的学科，连接着量子力学基础与成熟的工程领域，在过去几十年中取得了显著发展。超导量子比特等二能级系统是量子电路的构成基石。这类量子比特是目前研究最多、最有希望用于实现量子信息处理的候选者之一 [1–5]。超导量子比特的特性，例如本征能量、非线性、耦合强度等，相较于其他一些微观二能级量子系统 [8–13]，可以通过调整设计参数 [6, 7] 更轻松地加以调控。量子比特经过专门设计，具有较强的非线性，从而能够对其进行选择性寻址和控制 [1, 3, 7, 14]。这一动态特性使超导量子比特成为众多应用的有力候选者。

量子器件在低温下运行，需要与外部噪声良好隔离。环行器和隔离器等微波器件通过单向传输输出信号来保护量子电路，同时阻止噪声从输出通道回传至量子电路。它们的非互易特性依赖于铁氧体的性质[15–17]。基于铁氧体的非互易器件体积庞大[15–17], ，且由于需要强磁场，无法放置在量子电路附近。这限制了低温量子电路的可扩展性[15, 16, 18, 19]。文献中提出了各种无铁氧体替代方案。这些方案依赖于贵金属材料的特性 [18], 、人工原子的非线性行为 [16], 、直流超导量子干涉器件（dc-SQUID） [20], 以及约瑟夫森结阵列（JJ） [19, 21–23]。我们的器件是一个概念验证（PoC），有望应用于超导量子电路领域的微波读出组件。

在这项工作中，我们提出了一种稳健而简单的片上微波二极管，它基于超导磁通量子比特 [14]实现传输整流。器件的概念如图 1 (a) 所示。磁通量子比特通过电感耦合到两个长度不同、耦合强度各异的超导谐振器上。设计细节见第 I 节。在半磁通（简并点）处对量子比特进行单音光谱测量时，我们观察到沿相反方向传播的信号具有相同的传输系数曲线，但功率相差 5 dB。该功率会使量子比特从低能态跃迁至高能态。这种偏移表明我们的器件具有非互易特性，本文用传输整流比（R）来表征这一特性。我们研究了不同注入微波功率和量子比特所受磁通量在宽频率范围内变化时的传输整流比， R。由于具有很强的非互易性，我们的器件有望用作微波读出方案中的无铁氧体片上隔离器 [18–20, 23]。所报道器件中观察到的强非互易特性与电路量子热力学（c-QTD）领域相关，可用于调控和管理超导量子电路中的热流 [24, 25]–33]。此外，其紧凑尺寸使其适用于多个读出通道。只需微弱磁场即可控制传输整流比，这也带来了额外优势。

I. 设计与测量方案

设计。器件的光学显微镜图像见图 1 (b)，电路图见图 1 (c)。器件的核心元件是一个三结超导磁通量子比特 [14, 34]。其放大图像见图 2 (d)。磁通量子比特的超导环路包含约瑟夫森结。结的面

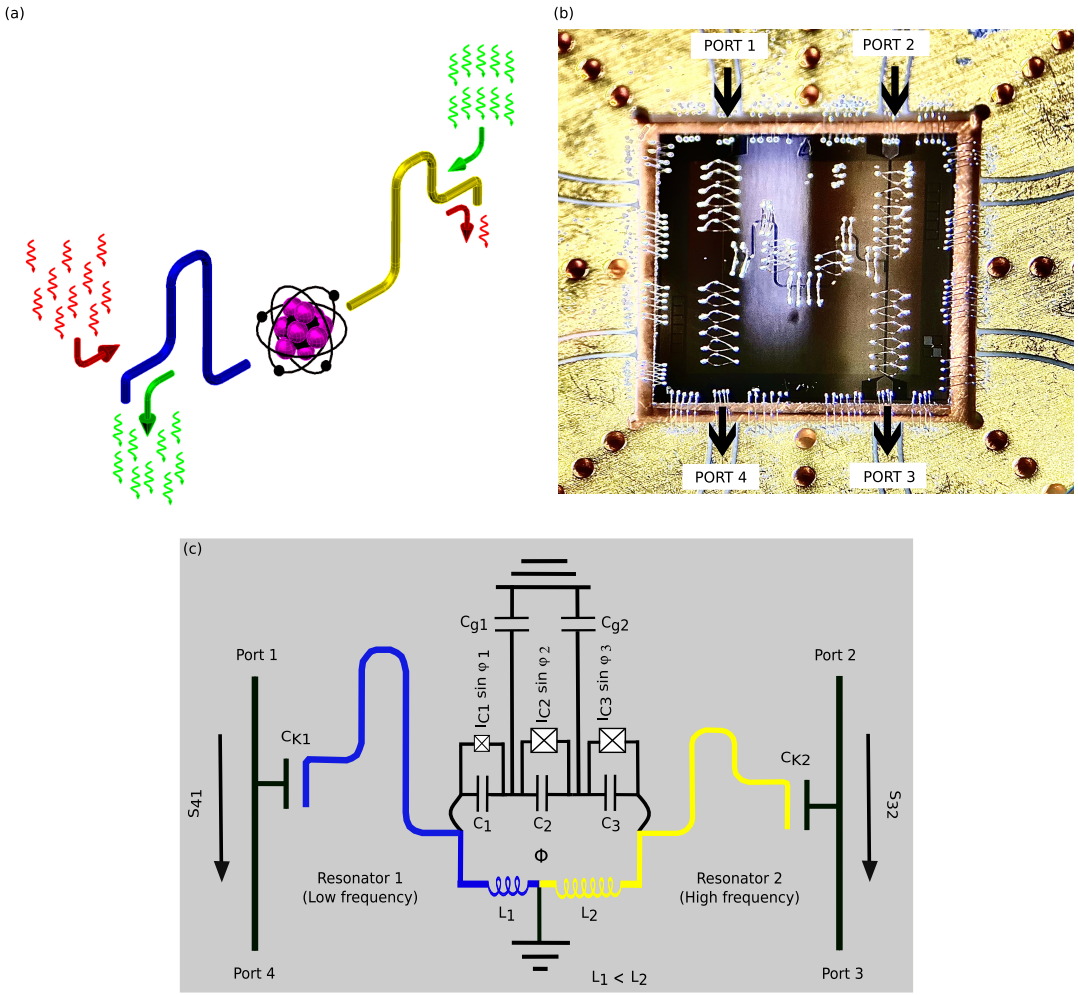

图 1。（a）将器件概念化表示为一个与两个谐振器耦合的人工原子。光子可以轻松地从右侧（绿色箭头）传向左侧，而从左侧入射的光子（红色箭头）则主要被反射回来。（b）器件键合在镀金铜样品台上的光学显微镜图像。射频信号通过端口 1 或端口 2 输入。端口 3 和端口 4 为输出端口。黑色箭头表示信号传播方向。（c）器件的电路模型。此处， Φ 为穿过量子比特回路的外部磁通。

积编号为 2 和 3 的结名义上相同，而结 1 较小。因此，结 2 和 3 的临界电流名义上相等，$I_{C2} = I_{C3} = I_C$，而第一个结的临界电流为 $I_{C1} = \alpha I_C$，其中我们估计 $\alpha = 0.632$。磁通量子比特有两个超导岛，分别编号为岛 1 和岛 2。岛 1 的总电容为 $C_{G1} = C_1 + C_2 + C_{g1}$，其中 C_1、C_2 是结 1、2 的电容，C_{g1} 是其对接地平面的电容。类似地，第二个岛的总电容为 $C_{G2} = C_2 + C_3 + C_{g2}$。磁通量子比特通过电感 L_1 和 L_2 与谐振器 1 和 2 感性耦合；这些电感由一根超导铝线构成，该导线被接地电极分成两部分，见图 2 (d)。相应的耦合常数与电感成正比，$g_j \propto L_j$ （$j = 1$，2） [35–38]。左侧谐振器（谐振器 1）设计频率为 $f_1 = 6.5$ GHz 的左侧谐振器与量子比特的耦合较弱；而设计频率为 $f_2 = 7.5$GHz 的右侧谐振器（谐振器 2）耦合较强，即 $g_1 < g_2$。上述引用的频率 f_1和 f_2 是在 $\lambda/4$-谐振器极限下的标称预期值，该极限在 L_1，$L_2 \to 0$ 时实现。在量子比特与谐振器耦合有限时，这些频率可能会向下偏移，偏移量未知。两个谐振器均通过标称相等的耦合电容与传输线耦合，如图 2（b）、（f）所示。关于器件及其制造的更多详情见第四节。

测量方案。如图 1 (b) 所示，器件通过引线键合连接到镀金印刷电路板上。射频光谱测量是在一台无制冷剂稀释制冷机中进行的，基底温度为 15 mK。测量装置的示意图如图 3 (a) 所示。我们使用了两条输入线，它们在制冷机的不同温度级具有

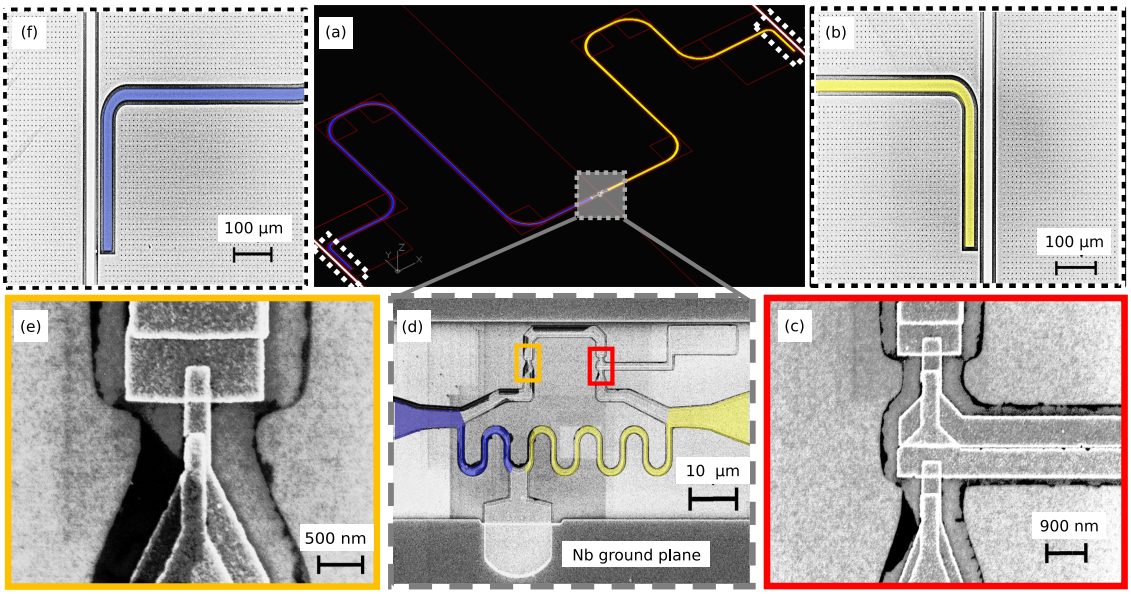

图 2。（a）器件布局，展示了两个谐振器以及位于中央的三结超导磁通量子比特。右侧和左侧谐振器分别以黄色和深蓝色表示。右上角和左下角由白色点线围成的区域标示了将右侧和左侧谐振器与馈线耦合的电容器的位置。（b）和（f）中展示了这些电容器的放大图。（a）中靠近中央的灰色阴影区域表示一个三端磁通量子比特，其放大图见（d）。量子比特通过左右两侧的局部电感与两个谐振器耦合，图中以不同颜色突出显示。（c）磁通量子比特两个大结的放大电子显微图。（e）较小量子比特结的电子显微镜图像。

相同的衰减。在输出端，我们使用了一台商用同轴微波开关，使器件的端口 3 或端口 4 可连接到同一个输出通道。在施加直流偏置时，该同轴微波开关会将输出通道连接到所需端口，并将另一端口接入 50 Ω 负载，以避免反射，如图 3 (b) 所示。该装置消除了微波传输经过输出端口 3 和 4 时可能产生的不必要差异，从而避免这些差异影响测量。随后，信号沿输出线路传输，该线路在混合室内设有两个隔离器。在 4 K 温度级，信号经低噪声高电子迁移率晶体管放大器放大 42 dB。此外，信号在室温下还会放大 52 dB。如图 3 (a) 所示，我们使用混合室中的直流驱动全局磁线圈对量子比特进行磁通偏置。我们采用单音和双音光谱测量方法对器件进行了表征，这些方法将在第 II 节和附录 C 中简要讨论。

II. 结果与讨论

本节报告单音光谱测量结果，研究在施加较弱磁场以及不同注入微波功率下的量子比特—谐振器相互作用。传输整流表现为传输系数之间的差异：

传输系数 S_{31} 和 S_{42}。传输系数 S_{XY} 定义为从端口 X输出的信号振幅与输入端口 Y的信号振幅之比。我们将量子比特调至简并点，此时穿过量子比特回路的磁通为半个磁通量子，$\Phi = 0.5\Phi_0$。

我们在不同探测功率下扫描探测信号频率。为尽量减少输入线衰减可能导致的误差，我们采用了第 IV 节“背景校准”小节中描述的原位校准方法。图 4(a) 和图 4(b) 绘出了以此方法获得的传输系数 $|S_{31}|^2$ 和 $|S_{42}|^2$。

我们研究了两个谐振器混合模频率 f_h =6.761 GHz 附近的频率范围。该模式的形成是因为谐振器 1 和 2 不仅与量子比特耦合，还通过电感 L_1, L_2 彼此耦合。在微波功率较低时，该模式的频率因其与量子比特的耦合而发生色散性上移，其中$\chi = 22$ MHz，传输 S_{31} 和 S_{42} 在频率 $f_h + \chi = 6.784$ GHz 处呈现谐振。在高功率下，混合模与量子比特解耦，共振频率从 $f_h + \chi$ 移至 f_h。在中等功率水平下，系统呈现量子 Duffing 振子 [39–41]所特有的强非线性行为。使系统进入强非线性区域所需的最低功率出现在共振频率 $f_h + \chi$处。我们将这种功率记为

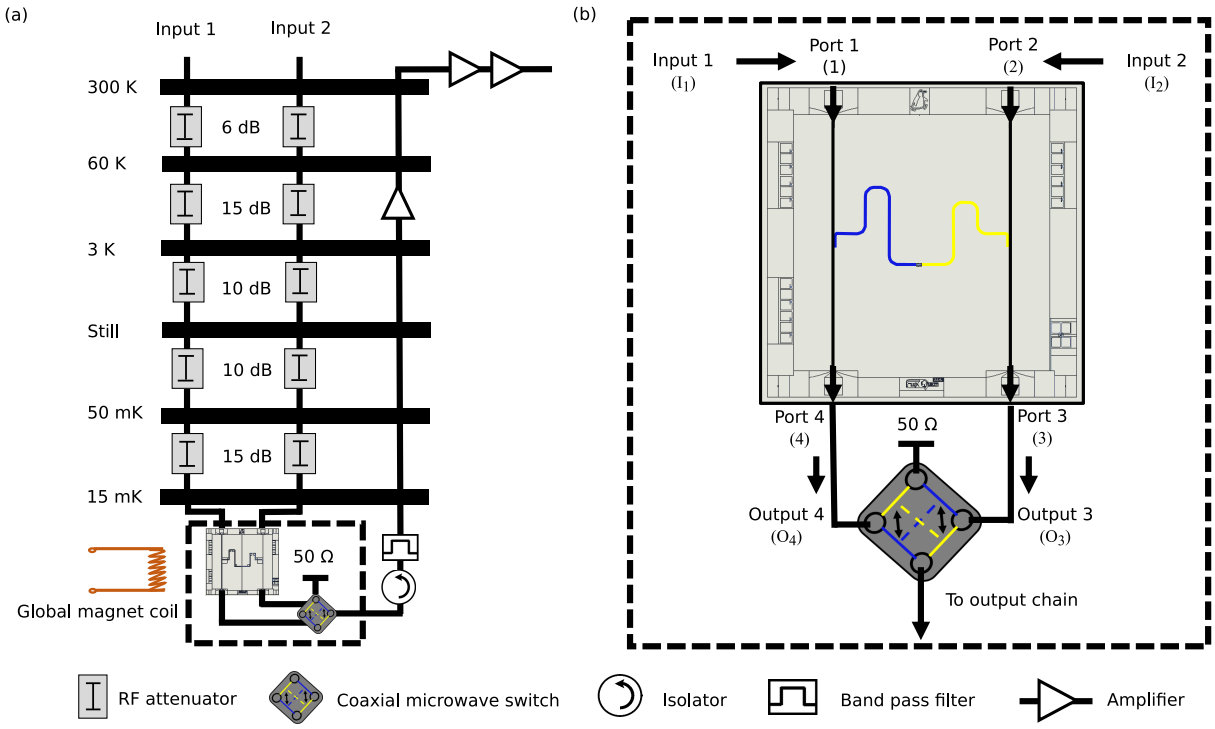

图 3. 测量装置。(a) 制冷机的不同温度级及各级对应的衰减。输入线 1 和 2 的衰减在标称值上相同。(b) 混合室中样品装置的放大图。输入 1 连接到端口 1，输入 2 连接到端口 2。输出端口 3 和 4 连接到低温同轴微波开关。该开关由直流 (V) 偏置驱动，可将其中一个输入端口（图中的输入 4）连接到输出端，同时将另一个输入端口（图中的输入 3）接入 50 Ω 终端。

P_j^{nl}，其中索引 j 表示注入驱动功率的谐振器。在图 4 (a) 中，我们用黑色实线箭头标出功率 $P_1^{\mathrm{nl}} = -112$ dBm，在图 4 (b) 中，我们用黑色虚线箭头标出 $P_2^{\mathrm{nl}} = -117$ dBm。测得的功率差为 5 dB，即 4.3 f W。这给出了我们器件中传输整流的功率标度。

我们将传输整流比 (R)43] 定义为 [42,

$$R = \left| \frac{|S_{42}|^2 - |S_{31}|^2}{|S_{42}|^2 + |S_{31}|^2} \right| \tag{1}$$

在图 5 (a,d,g) 中，我们绘制了该比值随频率和磁通的变化关系，分别对应三个不同的注入微波功率水平，以显示传输整流比随注入功率增大而上升的趋势。为抑制背景噪声，这些图中仅保留总和 $|S_{42}|^2 + |S_{31}|^2$ ex-ceeds 某一阈值的数据点，该阈值标注在图上方。我们观察到，在对应于谐振器和量子比特混合模的谐振频率附近，传输整流更强。这些模式也可通过常规单音光谱测量揭示，见附录 C 中的图 8。为进一步说明传输整流效应，我们在图 5 (b,c,e,f,h,i) 中绘制了传输系数。

$|S_{42}|^2$ 和 $|S_{31}|^2$ 在相同的三个微波功率水平以及两个选定的磁通值下，即 $\Phi/\Phi_0 = 0.45$和 $\Phi/\Phi_0 = 0.5$。在最低功率 -134 dBm下，传输整流仅发生在谐振频率附近，见图5 (a,b,c)。相比之下，在高功率 -99 dBm 下（见图5 (g,h,i)），避免交叉点附近宽达 ≈ 250MHz的频带内，传输整流比超过60%；在6.81 GHz至6.86 GHz之间，宽达50 MHz的范围内，传输整流比超过90%。在中等功率 -114 dBm下，我们观察到传输系数S_{42} 中的单线分裂为两条，而传输系数 S_{31} 仍保持一条线，与低微波功率下的情况相同（见图5 (f)）。

我们器件中二极管效应的起因是量子比特的非线性。因此，当输入功率 P_1^* 和 P_2^* 超过阈值时，以频率 $f_h + \chi$ 为中心的传输系数 $|S_{31}|^2$ 和 $|S_{42}|^2$ 中的单条洛伦兹谱线会分裂为两条谱线。在我们的样品中（见图 4），当 $P_1^* > P_2^*$ 时便会发生这种情况。分裂后两个峰的位置，即对于 $P > P_j^*$，由以下表达式给出

$$f_{\pm}(P_j) = f_h + \chi \pm \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{\kappa_h}{2\pi} \sqrt{\frac{P_j^{\mathrm{in}}}{P_j^*} - 1}. \tag{2}$$

这里，$\kappa_h/(2\pi) = 1.1$ MHz 是峰的线宽

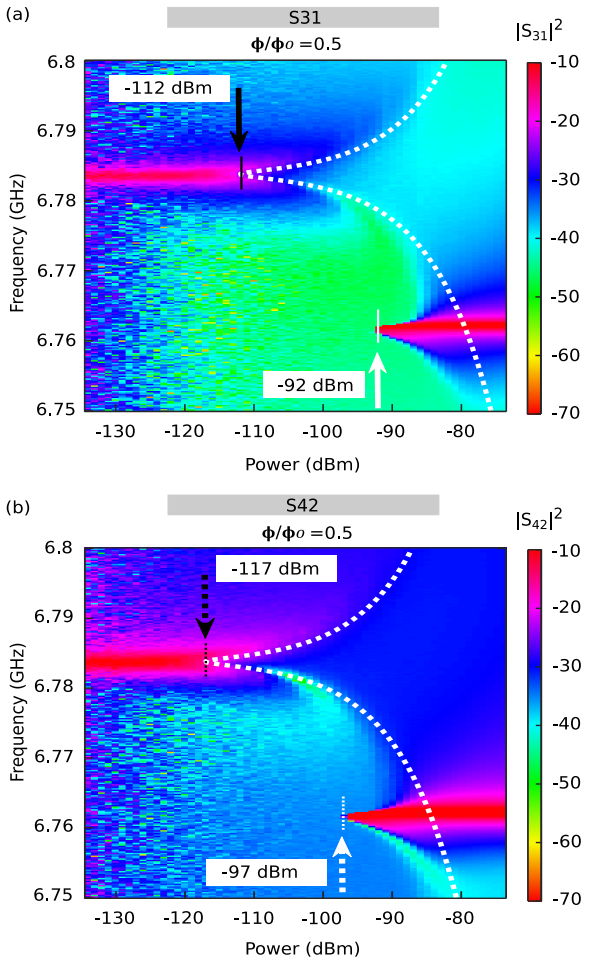

图 4. 器件的传输系数随注入微波功率和频率的变化。(a) 传输系数 $|S_{31}|^2$。(b) 传输系数$|S_{42}|^2$。点线表示根据公式（2）理论预期的峰值最大点位置。

处于低功率时。公式（2）的推导见附录 B。在图 4 中，我们用白色虚线标出了峰的位置（2）。它们与实验观测到的位置吻合良好。在实验中，我们观测到比值 $P_1^*/P_2^* = 3.2$，对应于对数刻度上 5 dB 的功率差。当功率为 $P \gtrsim P_2^*/3$ 时，会出现强烈的传输整流效应 $R \sim 1$，此时 $|S_{31}|^2$ 和 $|S_{42}|^2$ 中的峰仅有少量重叠。附录 B 中的理论模型预测，比值 P_1^*/P_2^* 按照 $P_1^*/P_2^* \propto \kappa_{h2}/\kappa_{h1}$ 缩放，其中 κ_{h1} 和 κ_{h2} 是混合模阻尼率的部分贡献，分别由能量经电容器 C_{K1} 和 C_{K2} 泄漏所致。因此，通过使这些电容器不相等，可以进一步增强我们系统中的二极管效应。

III. 结论

我们提出了一种磁通可调的片上微波二极管架构。该架构基于一个与两个超导谐振器进行电感耦合的超导磁通量子比特。通过单音谱学，将半磁通量子施加于量子比特，使其调至简并点，并分别测量经由谐振器 1 或谐振器 2 输入的微波信号，我们发现，将量子比特驱动至强非线性区域所需的功率相差 5 dB。此外，在量子比特-谐振器反交叉区域附近，我们观察到较高的传输整流比：在 50 MHz 的窄频率带宽下为 $R > 90\%$，在 250 MHz 的较宽频率带宽下为 $R > 60\%$，输入微波功率为 -99 dBm。传输整流比可通过磁通调节，并且强烈依赖于输入微波功率。基于所述谐振器-量子比特-谐振器几何结构，未来的目标是在电路量子电动力学领域实现可调谐的光子量子热阀[5, 33]和量子热整流器 [30, 32]，。此外，本文报道的强非互易行为对于量子信息[5, 24, 25]，微波读出组件 [16, 20, 22]和光机械学 [48, 49]领域的潜在应用仍具有重要意义。

IV. 方法

制造

该器件制备在高电阻率的 675 μm 厚硅晶圆上，晶圆表面覆盖着一层 30 nm 厚的 Al_2O_3，介电层，该介电层采用原子层沉积（ALD）制备。接下来，采用直流磁控溅射技术沉积一层 200 nm 厚的超导铌（Nb）。随后，在 300 nm 厚的正性电子束光刻胶上对馈线、谐振器和接地平面进行图形化。之后在 150 ℃ 下烘烤 5 分钟，再采用 $CF_4 + O_2$体系进行反应离子刻蚀（RIE）。后烘步骤可增强光刻胶与衬底之间的附着力，从而尽可能避免未曝光 Nb 部分被刻蚀。在第二步光刻中，采用双层 PMMA/MMA光刻胶，通过标准 Dolan桥技术 [44]制作约瑟夫森结。分别使用甲基异丁基酮（MIBK）：异丙醇（IPA）显影液和甲基乙二醇-甲醇溶液对曝光后的衬底进行显影。采用电子束蒸发器进行金属沉积。蒸发前，对样品表面进行原位氩等离子体铣削，以去除天然氧化层，从而确保 Nb 层与 Al层之间形成洁净接触。随后，在 $+18°$ 下蒸发一层 30 nm 厚的铝金属层，并进行原位氧化，以在结

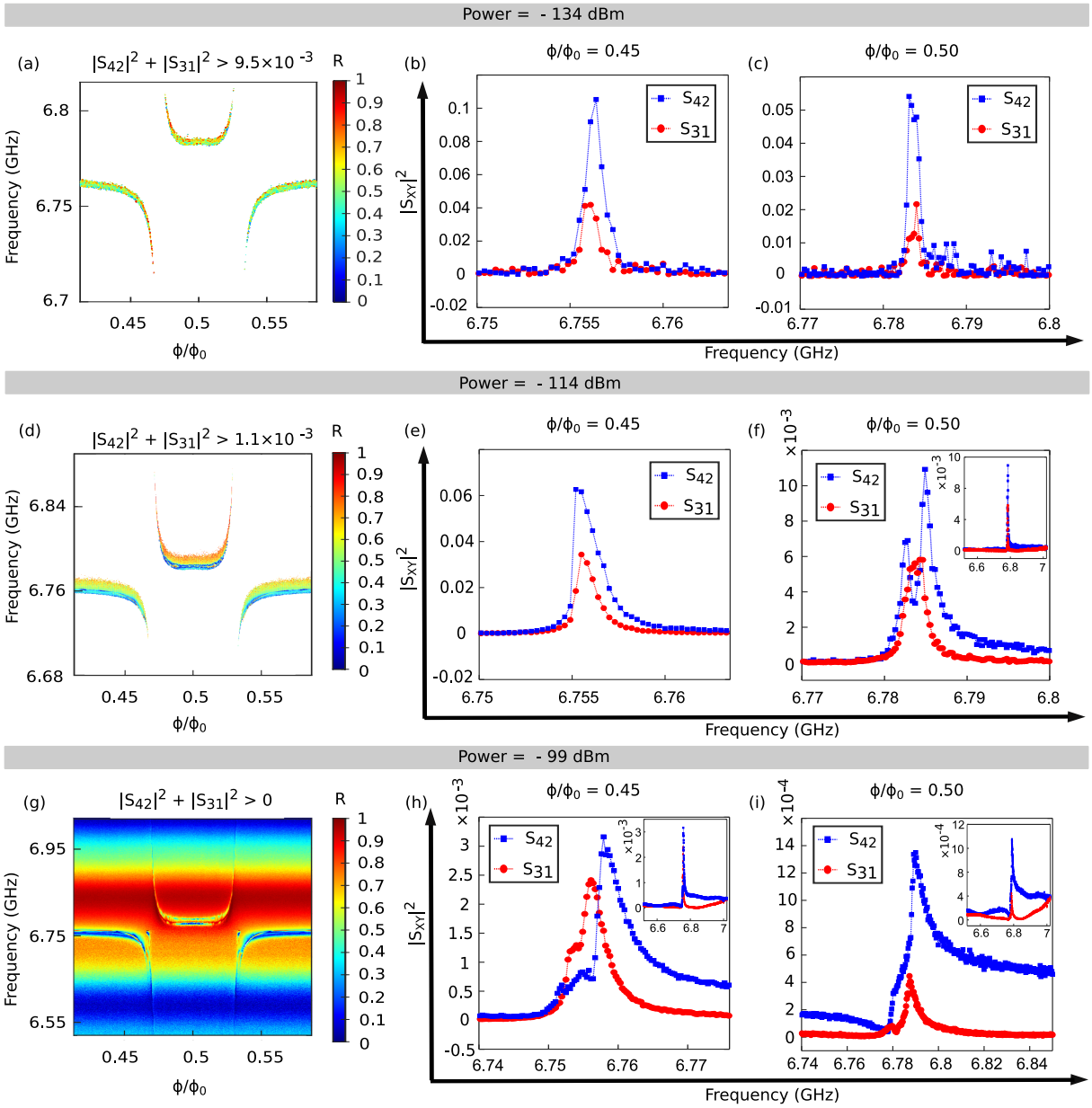

图5. (a,d,g) 在三个不同注入微波功率 P（-134 dBm、-114 dBm 和 -99 dBm）下测得的式(1)中的传输整流比 R。此处， Φ 为外部磁通， $\Phi_0\,(=h/2e)$为磁通量子。(b,e,h) 在相同的三个功率水平和磁通值 $\Phi/\Phi_0=0.45$ 下的传输系数 $|S_{31}|^2$ 和 $|S_{42}|^2$。(c,f,i) 在磁通值 $\Phi/\Phi_0=0.5$ 下的传输系数 $|S_{31}|^2$ 和 $|S_{42}|^2$。

中形成隧道势垒。随后，在 -18°下蒸发第二层 30 nm 厚的铝层。为去除未曝光区域上的沉积金属，将样品浸入热丙酮中 40 分钟。进行切割和测量前，先通过电子显微镜对样品进行目视检查。在同一芯片上制备、用于模拟实际器件的测试超导量子干涉器件，其室温电阻测得为 $R\approx 2.6$ kΩ。

背景校准

为确保测量的准确性，我们按照下文所述进行原位校准。考虑从输入 1（I_1）到输出 4（O_4）的测量传输系数 $S_{O_4I_1}$（见图 3 (b)）。它可以表示为

$$\tilde{S}_{O_4I_1}=\tilde{S}_{1I_1}+\tilde{S}_{41}+\tilde{S}_{O_44}. \tag{3}$$

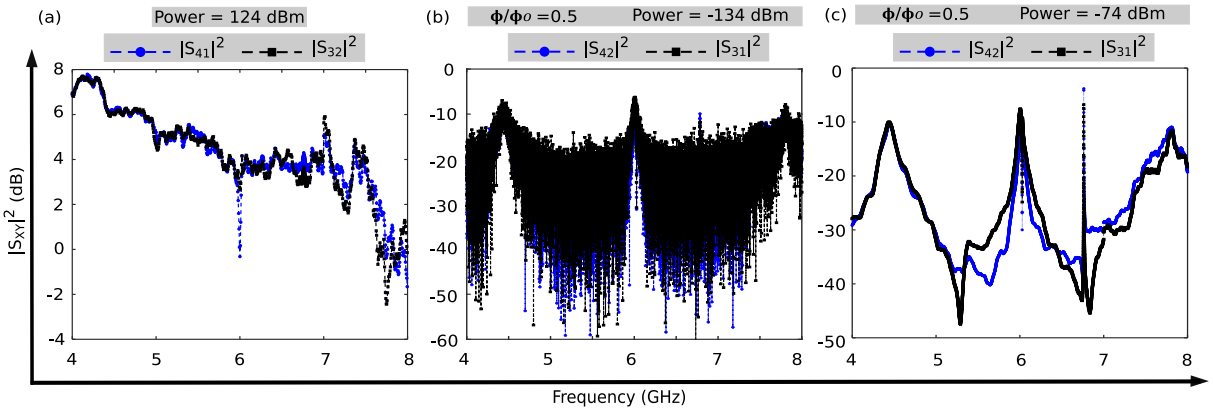

图 6. 宽带传输系数图。(a) 对侧 S41 和 S32 的传输系数进行绘图并重构，以获得用于背景校准的传输基线。(b、c) 根据公式 (7) 和公式 (8) 得到的校准后传输系数图，分别在 -134 dBm 和 -74 dBm 微波功率下对器件进行测量。

这里，$\tilde{S}_{ij} = 10\log_{10}(|S_{ij}|^2)$ 是以分贝（dB）表示的传输系数~，S_{1I_1} 是从~输入线路 1 到器件端口 1 的衰减因子，S_{41} 是端口 1 与端口 4 之间的传输系数，也就是我们~要测量的量，而 $S_{O_4 4}$ 是器件端口 4 与微波开关输入端口之间的衰减。

类似地，我们可以将从输入端口 2 (I_2) 到输出端口 3 (O_3) 的传输写为

$$\tilde{S}_{O_3 I_2} = \tilde{S}_{2I_2} + \tilde{S}_{32} + \tilde{S}_{O_3 3}, \tag{4}$$

以及器件两侧的传输写为

$$\tilde{S}_{O_3 I_1} = \tilde{S}_{1I_1} + \tilde{S}_{31} + \tilde{S}_{O_3 3}, \tag{5}$$

$$\tilde{S}_{O_4 I_2} = \tilde{S}_{2I_2} + \tilde{S}_{42} + \tilde{S}_{O_4 4}. \tag{6}$$

我们将器件的端口 3 和 4 通过长度相同且相对较短的导线连接到微波开关的输入端口 O_3 和 O_4。因此，我们可以假设~~和 $S_{O_3 3} = S_{O_4 4} = 0$。

接下来，我们在不同磁通点测量非共振频率下的光谱。由于量子比特与谐振器之间的耦合很强，施加磁通后色散频移的变化大于共振线宽。因此，通过扫描磁通，我们可以将器件调至非共振~~区间，使每个频率都对应 $S_{41} = S_{32} = 0$，从而测量与实验相关的整个频率范围内的背景传输系数

~~~
~~~

VI. 作者贡献

概念构想由 R.U. 和 G.T. 提出。器件设计和制造由 R.U. 完成。测量由 R.U. 完成。数据分析由 R.U.、Y-C.C. 和 D.S.G. 进行。理论模型由 D.S.G. 与 G.T. 合作构思。微波仿真由 Y-C.C. 和 A.G. 完成。在这项工作中，D.S.G. 和 Y-C.C. 的贡献相同。技术支持由 J.T.P. 提供。该工作由 J.P.P. 资助并监督。稿件由 R.U. 撰写，所有作者均作出了重要贡献。

附录A：模拟

我们使用集总元件电路仿真器（QUCS）和高频射频/微波电磁分析软件（SONNET）对这两个曲折导线并联谐振器进行模拟，以确保测得的谐振合理，如图7所示。谐振器中共面波导部分的长度，左侧为 4620 um，右侧为 4007 um。左侧（$L_{1'}$）和右侧（$L_{2'}$）曲折导线对应的电感分别为 ≈ 0.1 nH 和 ≈ 0.25 nH [37]。通过有限元分析软件（COMSOL Multiphysics），我们计算出传输线与谐振器（C_{left} andC_{right}）之间的耦合电容为 6.98 fF，并将其用于模拟。QUCS 模拟得到的谐振频率为 6.072 GHz 和 6.394 GHz。Sonnet 模拟显示，中心线的频率分别为 5.311 GHz 和 6.130 GHz。由于在所报告的器件中，我们使用空气桥连接电路周围的接地平面，因此现在在 Sonnet 中使用空气桥重新进行模拟。在超导量子器件中，空气桥 [45, 46]可平衡中心线周围的接地平面，降低因模式混合导致微波损耗的可能性，并避免伪谐振。图7（b、c）展示了使用和未使用空气桥的模拟设计。加入空气桥以模拟所报告的器件后，模拟频率升至 5.706 GHz 和 6.182 GHz。这两个频率均低于左右谐振器设计的裸频率，这可能是由于传播微波的隔离不完善所致。我们观察到，在器件一侧的谐振频率处，模拟电流场分布显示部分场泄漏到了另一侧；这是因为曲折并联支路周围的接地不平衡，可能导致波沿着被失谐谐振器中心线围绕的接地部分传播。我们在图7（d）所示位置，即曲折导线之间，放置一个理想导电块，连接器件的上方（接地1）和下方（接地2）接地平面，验证了这一不平衡问题。结果发现频率升至非常接近 QUSC 的值。实验观察到的较低频率（6.027 GHz）处于 Sonnet 和 QUCS 模拟所得的合理范围内，但较高频率（6.762 GHz）高于 QUCS 的模拟频率。如图7（a）所示，在曲折导线的悬空端之间加入约 0.5 nH 的电感以模拟约瑟夫森结，可将频率提高至 6.7 GHz。因此，我们测得的两个频率都处于合理范围内，并用于附录 B 的计算。

附录 B：理论

本附录简要介绍我们器件中传输整流效应的理论。该系统由哈密顿量描述：

$$H = H_{\rm res} + H_{\rm loop} + H_{\rm int}. \tag{B1}$$

两个谐振器的哈密顿量为：

$$H_{\rm res} = \sum_{j=1}^{2}\left[\hbar\omega_j a_j^\dagger a_j + \sqrt{\frac{\hbar\kappa_{cj}Z_0}{\omega_j^3}}\frac{dI_j(t)}{dt}(a_j^\dagger + a_j)\right] - \hbar g_{12}(a_1^\dagger + a_1)(a_2^\dagger + a_2), \tag{B2}$$

其中，$\omega_j = 2\pi f_j$ 为谐振器 1 和 2 的基模角频率（在我们的样品中为$\omega_2 > \omega_1$），a_j 为相应的升降算符，κ_{c1}，κ_{c2} 为谐振器通过电容耦合至传输线所产生的阻尼率，

$$\kappa_{cj} = \frac{2\omega_j^3 Z_0^2 C_{Kj}^2}{\pi}, \tag{B3}$$

Z_0 是谐振器阻抗，C_{K1}, C_{K2} 是将谐振器连接到传输线的电容器（见图 1c），$I_1(t)$ $I_2(t)$是输入微波电流，与入射功率的关系为$P_j^{\rm in} = Z_0 I_j^2(t)$（此处横线表示时间平均），而$g_{12}$ 是两个谐振器之间的耦合强度。超导环路的哈密顿量 $H_{\rm loop}$ 用升降算符 $b, b^\dagger$ 表示，这些算符描述其低频模式；磁通相关的量子比特频率为 $\omega_0(\Phi) = 2\pi f_{01}(\Phi)$，

$$H_{\rm loop} = \hbar\omega_0(\Phi)b^\dagger b - \frac{E_C}{12}(b^\dagger + b)^4. \tag{B4}$$

这里，E_C 是环路低频模式的有效充电能，它决定量子比特的非谐性。根据图 8 (e,f) 所示的光谱测量结果，我们估计 $E_C/(2\pi\hbar)$ ≈为 200 MHz。最后，哈密顿量 (B5) 中描述环路与谐振器之间相互作用的最后一项为

$$H_{\rm int} = -\hbar g_1(a_1^\dagger + a_1)(b^\dagger + b) - \hbar g_2(a_2^\dagger + a_2)(b^\dagger + b), \tag{B5}$$

其中，g_1 和 g_2 描述量子比特与相应谐振器之间的耦合。

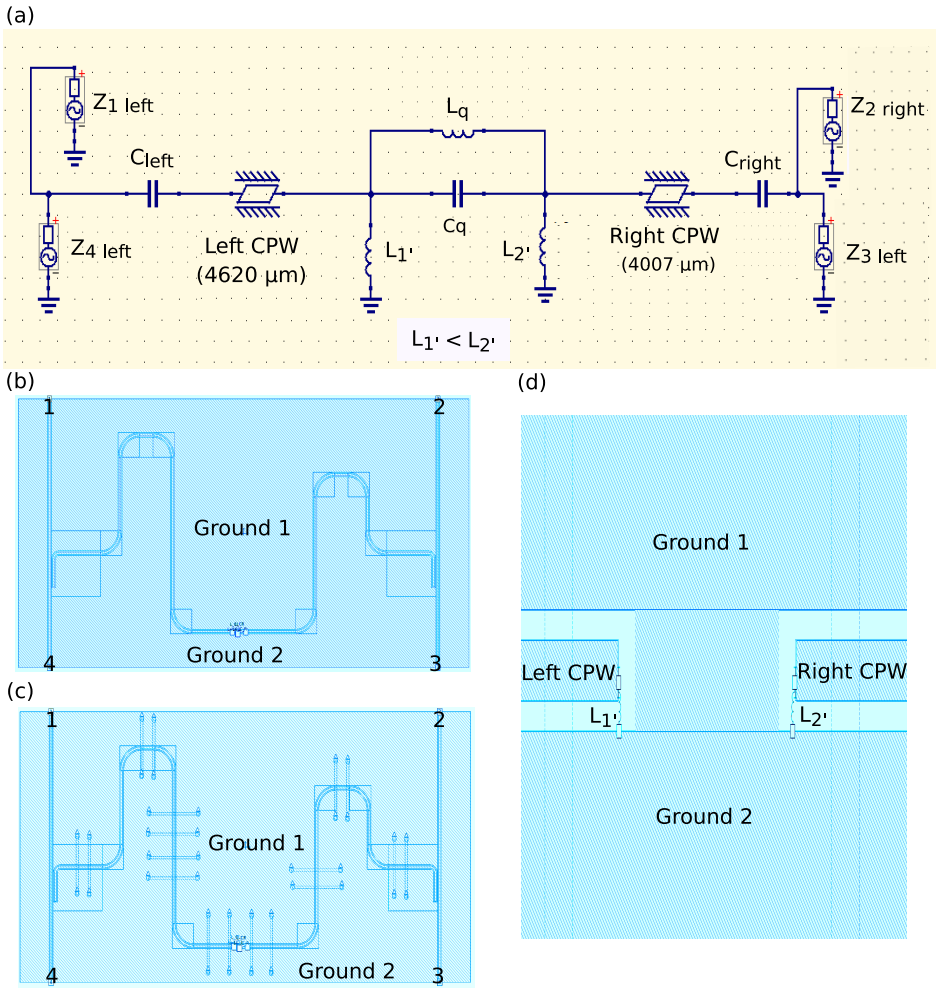

图7。（a）来自 QUCS 的模拟电路设计图，多端口网络分析。（b）使用 Sonnet 模拟的设计图，不含键合线。（c）铝键合线模拟实际器件中的连接方式，用于连接上方（接地1）和下方（接地2）接地端。（d）用金属块连接上、下接地平面。

我们对两个谐振器的哈密顿量（B2）进行对角化，并引入频率为

$$\omega_{h,l} = \sqrt{\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 \pm \sqrt{(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2 + 16 g_{12}^2 \omega_1 \omega_2}}{2}}. \quad \text{(B6)}$$

在传输整流实验中，我们探测接近 $f_h = \omega_h/(2\pi) = 6.762$ GHz 的频率范围。因此，我们仅保留高频模，并将谐振器的哈密顿量（B2）和相互作用项（B5）写成

$$H_{\rm res} = \hbar\omega_h a_h^\dagger a_h + \left(\frac{\sqrt{\kappa_{h1}}}{\omega_1^2} \frac{dI_1(t)}{dt} + \frac{\sqrt{\kappa_{h2}}}{\omega_2^2} \frac{dI_2(t)}{dt} \right) \sqrt{\hbar\omega_h Z_0} (a_h^\dagger + a_h), \quad \text{(B7)}$$

$$H_{\rm int} = -\hbar g_h (a_h^\dagger + a_h)(b^\dagger + b). \quad \text{(B8)}$$

这里，a_h，$a_h^\dagger$ 是角频率为 $\omega_h = 2\pi f_h$ 的混合模的升降算符，κ_{h1} 和 κ_{h2} 是该模式总阻尼率的部分贡献，分别来自谐振器 1 和 2 与传输线的耦合，

$$\kappa_{h1} = \frac{\omega_1}{\omega_h} \sin^2\theta\, \kappa_{c1}, \quad \kappa_{h2} = \frac{\omega_2}{\omega_h} \cos^2\theta\, \kappa_{c2}, \quad \text{(B9)}$$

角度 θ 由下式确定

$$\sin 2\theta = \frac{4 g_{12} \sqrt{\omega_1 \omega_2}}{\sqrt{(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2 + 16 g_{12}^2 \omega_1 \omega_2}}. \quad \text{(B10)}$$

混合模的总阻尼率为 $\kappa_h = \kappa_{h1} + \kappa_{h2} + \kappa_{hi}$，其中 κ_{hi} 描述谐振器的内部阻尼。

根据 (B7)，我们观察到输入电流 $I_1^{\rm in}$和 $I_2^{\rm in}$具有不同的前因子。这种差异正是我们系统中不对称性的来源。根据这些前因子，我们可以确定功率 P_1^* 和P_2^*的比值；超过这一比值后，系数 $|S_{31}|^2$ 和 $|S_{42}|^2$ 中的单条传输线会分裂成两条，而无需求解

问题。具体而言，我们得到

$$\frac{P_1^*}{P_2^*} = \frac{\omega_1^4 \kappa_{h2}}{\omega_2^4 \kappa_{h1}}. \tag{B11}$$

功率 P_1^*和 P_2^*不相等，这是因为两个谐振器的频率 f_1 和 f_2 和/或混合模与两条传输线之间的耦合 κ_{h1} 和 κ_{h2} 彼此不同。这使我们的器件成为一个与两个端口非对称耦合的非线性系统。根据理论，恰恰是这些特性使传输整流成为可能，参见例如参考文献 [47]。在我们的器件中，耦合电容 C_{K1} 和C_{K2} 标称相等， $C_{K1} = C_{K2}$。因此，比值 (B11) 可简化为 $P_1^*/P_2^* = \cot^2\theta$。在实验中，我们测得 $P_1^*/P_2^* = 3.2$，见图 4，对应于 $\theta = 0.51$。为了从方程 (B10) 得到这一数值，同时再现实验观测到的模式频率 $f_h = 6.762$ GHz 和$f_l = 6.026$ GHz（由方程 (B6) 给出），我们选取 $f_1 = 6.209$GHz、 $f_2 = 6.595$ GHz 和 $g_{12}/(2\pi) = 313$ MHz。附录A中报告的模拟表明，这些参数是合理的。为进一步验证我们的模型，我们在 COMSOL 中估算了耦合电容的数值，得到 $C_{K1} = C_{K2} = 7$fF。采用这一数值及上述参数，根据方程 (B3) 可得 $\kappa_{c1}/(2\pi) = 732.6$ kHz、 $\kappa_{c2}/(2\pi) = 878$kHz；根据方程 (B9) 可得 $\kappa_{h1}/(2\pi) = 160$ kHz、$\kappa_{h2}/(2\pi) = 653$ kHz。阻尼率 κ_{h1}， κ_{h2} 可通过拟合零磁通下的传输系数 $|S_{41}|^2$ 和 $|S_{32}|^2$ 来独立估算；此时量子比特与谐振器解耦，拟合所用表达式由我们的模型哈密顿量 (B2) 推导得出：

$$\begin{aligned} |S_{41}|^2 &= 1 - \frac{\omega_h^4}{\omega_1^4} \frac{\kappa_{h1}^2 + 2\kappa_{h1}\kappa_{h2}}{4(\omega-\omega_h)^2 + \kappa_h^2}, \\ |S_{32}|^2 &= 1 - \frac{\omega_h^4}{\omega_2^4} \frac{\kappa_{h2}^2 + 2\kappa_{h1}\kappa_{h2}}{4(\omega-\omega_h)^2 + \kappa_h^2}. \end{aligned} \tag{B12}$$

这样的拟合过程得到 $\kappa_{h1}/(2\pi) = 160$ kHz、$\kappa_{h2}/(2\pi) = 430$ kHz 和 $\kappa_h/(2\pi) = 787$ kHz。虽然 κ_{h1} 与上述理论估算一致，但实验速率 κ_{h2} 略低于理论预测。取这些参数，功率之比 (B11) 变为 2.1，与测量结果仍相差不远。因此，我们确认实验观测结果与模型相当吻合。

图 4 所示传输系数 $|S_{31}|^2$和 $|S_{42}|^2$ 对功率的依赖关系可以这样理解：在功率足够低时，我们可以近似将两个谐振器和量子比特替换为一个具有如下哈密顿量的非线性系统

$$\begin{aligned} H = \hbar\omega_r a^+ a + \frac{\hbar K}{6}(a^\dagger + a)^4 \\ + 2\hbar(\epsilon_1 + \epsilon_2)\cos\omega t (a^\dagger + a). \end{aligned} \tag{B13}$$

这里， $\omega_r = \omega_h + 2\pi\chi$ 是混合模与量子比特相互作用后发生偏移的频率， K 是复合系统的克尔非线性，以及

$$\epsilon_j = \frac{\omega_h^2}{\omega_j^2}\sqrt{\frac{\kappa_{hj} P_j^{\rm in}}{2\hbar\omega_h}}. \tag{B14}$$

实验已证明，这种近似能够很好地描述与我们类似的系统 [39, 40]。为了求出低功率下的传输系数 $|S_{31}|^2$，我们令 $\epsilon_2 = 0$，并构造如下比值：

$$|S_{31}|^2 = \frac{P_3}{P_1^{\rm in}} = \frac{\kappa_{h2}\hbar\omega_r}{2P_1^{\rm in}}\langle a^\dagger a\rangle. \tag{B15}$$

这里， P_3 是到达端口 3 的功率，分母中的因子 2 表示从谐振器 2 输出的功率在端口 2 和端口 3 之间均分，即我们令 $\kappa_{h2}\hbar\omega_r\langle a^\dagger a\rangle = P_2 + P_3$ 并假设$P_2 = P_3$。哈密顿量 (B13) 的平均值 $\langle a^\dagger a\rangle$ 已在参考文献 [41] 中求得。基于这一结果，我们得到如下形式的传输系数表达式

$$\begin{aligned} |S_{31}|^2 \approx \frac{\kappa_{h1}\kappa_{h2}}{4(\omega-\omega_r)^2 + \kappa_h^2} \\ \times \frac{\left|{}_0F_2\left(1 - \frac{\omega-\omega_r - i\frac{\kappa_h}{2}}{K}, -\frac{\omega-\omega_r+i\frac{\kappa_h}{2}}{K}, \frac{2\kappa_h^2 P_1^{\rm in}}{9K^2 P_1^*}\right)\right|^2}{\left|{}_0F_2\left(-\frac{\omega-\omega_r - i\frac{\kappa_h}{2}}{K}, -\frac{\omega-\omega_r+i\frac{\kappa_h}{2}}{K}, \frac{2\kappa_h^2 P_1^{\rm in}}{9K^2 P_1^*}\right)\right|^2}, \end{aligned} \tag{B16}$$

其中， ${}_0F_2(x)$ 是广义超几何函数，并且

$$P_1^* = \frac{2}{9}\frac{\hbar\kappa_h^2\omega_1^4}{\kappa_{h1}\omega_h^3} \tag{B17}$$

是洛伦兹峰在 $|S_{31}|^2$ 处分裂为两个峰时的功率。传输系数 $|S_{42}|^2$ 和功率 P_2^* 的表达式与上述相同，只需将指标 1 和 2 互换。分析表达式 (B16) 可知，在极限 $\kappa_h \ll K$ 下，出现在 P的$_1 > P_1^*$处的两个峰的极大值对应的频率为

$$\omega_\pm = \omega_r \pm \frac{\sqrt{2}\kappa_h}{3}\sqrt{\frac{P_1^{\rm in}}{P_1^*} - 1}. \tag{B18}$$

将此公式反解可得，对于给定的探测频率 ω，透射系数的峰值出现在功率为

$$P_{\rm peak,1} = P_1^*\left(1 + \frac{9(\omega-\omega_r)^2}{2\kappa_h^2}\right). \tag{B19}$$

图 4 中，我们用白色虚线标出了功率 $P_{\rm peak,\ 1}$ 和 $P_{\rm peak,\ 2}$。我们采用了阻尼率$\kappa_h = 1.1$ MHz，该值是通过拟合低功率下、磁通值为 $\Phi = 0.5\Phi_0$ 时的传输系数 (B12) 得到的；图 4 中所示的数据正是在该磁通值下采集的。阈值功率 $P_1^* = -112$dBm 和 $P_2^* = -117$ dBm 被作为拟合参数处理。根据拟合结果，我们还估算出非谐性为 $K/(2\pi) \approx -11.5$ MHz。

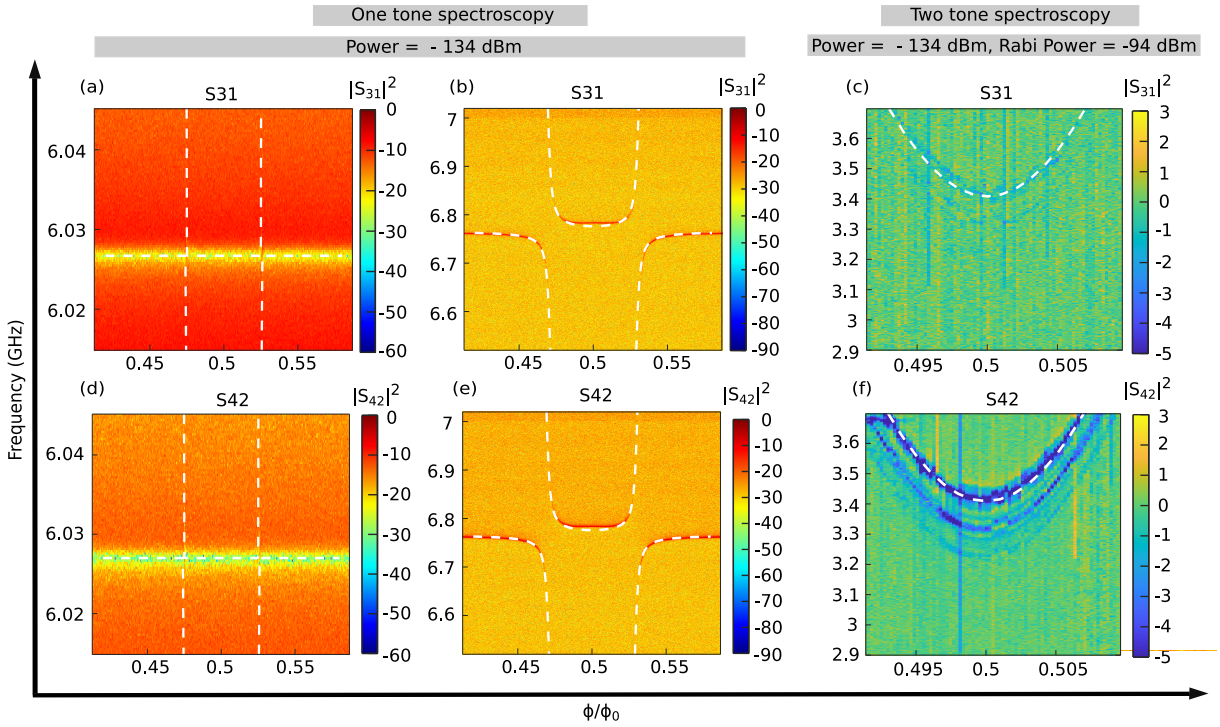

图 8. 输入探测功率为 -134 dBm 时的单音和双音光谱测量。面板 (a) 和 (b) 显示单音光谱测量数据，面板 (c) 显示双音光谱测量数据，探测信号经由端口 1 输入。类似地，面板 (d) 和 (e) 显示单音光谱测量数据，面板 (f) 显示双音光谱测量数据，探测信号经由端口 2 输入。面板 (c) 和 (f) 中的泵浦音调功率（拉比功率）为 -94 dBm。

最后需要指出的是，在功率足够高时，关于量子比特非线性较弱的假设不再适用，此时应考虑量子比特中三个约瑟夫森结的完整正弦电流-相位关系。本文不讨论这一工作区间。不过众所周知，在这一极限下，谐振器会与量子比特解耦，而 $|S_{31}|^2$ 和 $|S_{42}|^2$ 中的传输线都会移至混合模 f_h 的裸频率，见图 4。

附录 C：双音光谱测量

为确定量子比特跃迁频率，我们进行了如下双音光谱测量。对于每个磁通值，我们使用矢量网络分析仪（VNA）选择连续弱微波信号“探测音”（音调一）的探测频率。选定特定磁通对应的探测频率后，再使用独立的微波信号发生器施加“泵浦音”（音调二），以激发量子比特能级。单音和双音光谱测量的结果汇总于图 8。

为了对获得的光谱进行数值拟合，并求出量子比特与谐振器之间的耦合常数，我们采用了以下流程。首先，按照文献 [37] 中的描述，使用二维平面波对磁通量子比特的哈密顿量进行对角化。由此，我们得到了与谐振器解耦的量子比特中最低能级与第一激发态之间的跃迁频率$f_{01}(\Phi)$ 随磁通 Φ 变化的关系。将得到的 $f_{01}(\Phi)$ 关系拟合到远离反交叉点处的光谱测量结果，据此估算磁通量子比特的参数。具体而言，我们求得了不对称参数 $\alpha = 0.632$，以及超导量子干涉器件环中两个较大结的约瑟夫森能量：$E_J/(2\pi\hbar) = I_C/4\pi e = 37.5$ GHz。接下来，我们使用描述两个耦合振子的方程，

$$f_r = \sqrt{\frac{f_i^2 + f_{01}^2 \pm \sqrt{\left(f_i^2 - f_{01}^2\right)^2 + 16 g_i^2 f_i f_{01}}}{2}}, \quad \text{(C1)}$$

以拟合图 8 中谐振器混合模（由索引 i 标示）与磁通相关的量子比特频率之间的每个避免交叉。在图示频率范围内，我们观察到两个混合谐振器模式：低频模式（索引 l）和高频模（索引 h）。这些模式的频率分别为 f_l =6.027 GHz 和 $f_h = 6.762$ GHz，相应的耦合强度分别为 $g_l \approx 1$ MHz 和 $g_h \approx 175$ MHz。

[1] Clarke, J. & Wilhelm, F.K. 超导量子比特。《自然》**453**, 1031 (2008). [2] Wendin, G., & Shumeiko, V.S. 超导量子电路、量子比特与量子计算。arXiv:cond- mat/0508729 (2005). [3] Devoret, M.H., Wallraff, A. & Martinis, J.M. 超导量子比特：简短综述。arXiv:cond- mat/0411174 (2004). [4] Gu, X., Kockum, A.F., Miranowicz, A., Liu, Y. & Nori, F. 超导量子电路中的微波光子学。《物理学报告》**718**, 1 (2017). [5] Ronzani, A., Karimi, B., Senior, J., Chang, Y.-C., Peltonen, J.T., Chen, C. & Pekola, J.P. 量子热阀中的可调谐光子热输运。《自然·物理》**14**, 991 2018( ). [6] Rasmussen, S.E., Christensen, K.S., Pedersen, S.P., Kris- tensen, L.B., Bækkegaard, T., Loft, N.J.S., & Zinner, N.T. 超导电路指南——实例详解入门。PRXQuantum **2** , 040204 (2021). [7] Orlando, T. P., Mooij, J. E., Tian, L., Van der Wal, C. H., Levitov, L. S., Lloyd, S. & Mazo, J. J. 一种超导持久电流量子比特。《物理评论B辑》**60**, 15398 (1999). [8] Loss, D. & DiVincenzo, D.P., 基于量子点的量子计算。《物理评论A辑》**57**, 120 (1998). [9] Kane, B.E., 一种基于硅的核自旋量子计算机。《自然》**393**, 133 (1998). [10] Goto, A., Hashi, K., Ohki, S. & Shimizu, T. 光泵浦下自旋回波衰减所揭示的砷化镓中光诱导核自旋-自旋耦合。《量子信息》**8**, 59 (2022). [11] Petta, J. R., Johnson, A. C., Taylor, J. M., Laird, E.A., Yacoby, A., Lukin, M. D., Marcus, C. M., Hanson,M. P. & Gossard, A. C. 半导体量子点中耦合电子自旋的相干操控。《科学》**309**, 2180 (2005). [12] Wang, Z., Yuan, Y., Liu, X., Muruganathan, M., Mizuta, H. & Sun, J. 可控掺杂石墨烯纳米带中的双量子点类输运。Appl. Phys. Lett. **118**, 083105 (2021). [13] Hanson, R., Kouwenhoven, L. P., Petta, J. R., Tarucha, S. & Vandersypen, L. M. K. 少电子量子点中的自旋。Rev. Mod. Phys. **79**, 1217 (2007). [14] Mooij, J. E., Tian, L., Van der Wal, C. H., Levitov, L. S., Lloyd, S. & Mazo, J. J. 约瑟夫森持久电流量子比特。《科学》**285**, 1036 (1999). [15] Pozar, D. M. 《微波工程》，第4版。Wiley，新泽西州霍博肯 (2012). [16] Hamann, A. R., M¨uller, C., Jerger, M., Zanner, M., Combes, J., Pletyukhov, M., Weides, M., Stace, T. M. & Fedorov, A. 通过量子非线性实现非互易性。《物理评论快报》**121**, 123601 (2018). [17] Kodera, T., Sounas, D.L. & Caloz, C. 无磁非互易超材料（MNM）技术：在微波元件中的应用。IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques **61**, 1030 (2018). [18] Viola, G. & DiVincenzo, D.P. 霍尔效应回转器与环行器。**4**, 021019 (2014). [19] Ranzani, L., Kotler, S., Sirois, A.J., DeFeo, M. P., Beltran, M. C., Cicak, K., Vale, L. R. & Aumen- tado, J. 通过频率转换实现宽带隔离约瑟夫森结传输线。《物理评论应用》**8**，054035（2017）。[20] Kamal, A., Clarke, J. & Devoret, M. H. 微波超导量子干涉器件放大器中的增益、方向性与噪声：输入-输出方法。《物理评论B辑》**86**，144510（2012）。[21] Yaakobi, O., Friedland, L., Macklin, C. & Siddiqi, I. 嵌入约瑟夫森结的传输线中的参量放大。《物理评论B辑》**87**，144301（2013）。[22] Lecocq, F., Ranzani, L., Peterson, G. A., Cicak, K., Simmonds, R. W., Teufel, J. D. & Aumentado, J. 利用现场可编程约瑟夫森放大器实现非互易微波信号处理。《物理评论应用》**7**，024028（2017）。[23] O'Brien, K., Macklin, C., Siddiqi, I. & Zhang, X. 约瑟夫森结行波参量放大器的共振相位匹配。《物理评论快报》**113**，157001（2014）。[24] Vinjanampathy, S. & Anders, J. 量子热力学。《当代物理》**57**，545（2016）。[25] Kosloff, R. & Amikam, L. 量子热机与制冷机：连续运行器件。《物理化学年度评论》**65**，365（2014）。[26] Erdman, P. A., Cavina, V., Fazio, R., Taddei, F. & Giovannetti, V. 二能级热机和制冷机的最大功率及相应效率：快速循环的最优性。《新物理学杂志》**21**，103049（2019）。[27] Menczel, P., Pyh¨aranta, T., Christian, F.& Kay, B. 介观制冷机的双冲程优化方案。《物理评论B辑》**3**，224306（2019）。[28] Giazotto, F. & Mart´ınez-P´erez, M. 约瑟夫森热干涉仪。《自然》**492**，401–405（2012）。[29] J. O. Miranda, J. O., Joulain, K., Meneses, D., Ezzahri, Y. & Drevillon, J. 基于超导体的光子热二极管。《应用物理学杂志》**122**，093105（2017）。[30] Roßnagel, J., Dawkins, S. T., Tolazzi, K. N., Abah, O., Lutz, E., Kaler, F. S. & Singer, K. 单原子热机。《科学》。**352**，325（2016）。[31] Karimi, B. & Pekola, J.P. 基于超导量子比特的奥托制冷机：经典与量子性能。《物理评论B辑》**94**，184503（2016）。[32] Senior, J., Gubaydullin, A., Karimi, B., Peltonen, J. T., Ankerhold, J. & Pekola,J. P. 通过超导人工原子实现热整流。《通讯物理》**3**，40（2020）。[33] Lu, Y ., Lambert, N., Kockum, A. F., Funo. K., Bengts- son, A., Gasparinetti. S., Nori, F., & Delsing, P. 单个人工原子与波导耦合时的稳态热传输与功：无外部驱动下的发射。《PRX量子》**3**，020305（2022）。[34] Yan, F., Gustavsson, S., Kamal, A. et al. 重新审视磁通量子比特以提升相干性和可重复性。《自然通讯》**7**，12964（2016）。[35] Abdumalikov, A. A., Astafiev, O., Nakamura, Y., Pashkin, Yu. A. & Tsai, J. 磁通量子比特与共面波导谐振器强耦合导致的真空拉比劈裂。《物理评论B辑》**78**，180502(R)（2008）。[36] Bourassa, J., Gambetta, J. M., Abdumalikov, A. A. Jr., Astafiev, O., Nakamura, Y. & Blais, A. 相位偏置磁通量子比特腔量子电动力学的超强耦合区。《物理评论A辑》**80**，032109（2009）。

[37] Upadhyay, R., Thomas, G., Chang, Y-C., Golubev, D.S., Guthrie, A., Gubaydullin, A., Peltonen, J. T. & Pekola, J.P. 电路量子电动力学中的稳健强耦合架构。《物理评论应用》**16**, 044045 2021( )。[38] Miyanaga, T., Tomonaga, A., Ito, H., Mukai, H. & Tsai, J.S. 超强可调耦合器：连接超导LC谐振器。《物理评论应用》**16**，064041（2021）。[39] Yamamoto, T., Inomata, K., Koshino, K., Billangeon, P.-M., Nakamura, Y. & Tsai, J. S. 电容耦合至LC谐振器的超导磁通量子比特。《新物理学杂志》**16**，015017（2014）。[40] Yamaji, T., Kagami, S., Yamaguchi, A., Satoh, T., Koshino, K., Goto, H., Lin, Z. R., Nakamura, Y., & Ya- mamoto, T. 光谱观测经典Duffing振子向Kerr参数振子转变的过程。《物理评论A辑》**105**，023519（2022）。[41] Drummond, P. D., and Walls, D. F. 光学双稳态的量子理论。I：非线性极化率模型。《物理学杂志A：数学与一般》**13**，725（1980）。[42] Fratini, F., Mascarenhas, E., Safari, L., Poizat,J-Ph., Va- lente, D., Auff`eves, A., Gerace, D.& Santos, M.F. 采用量子镜的法布里-珀罗干涉仪：非线性光传输与整流。《物理评论快报》**24**, 243601（2014）。[43] Marcos, A.V., Lopez, C.J., Ruiz, M.G.& Sanchez, R. 利用相互作用电子通道实现热整流：发挥简并、量子叠加和干涉的作用。《物理评论B》**98**, 035414（2018）。[44] G.J.Dolan. 用于剥离光刻工艺的偏置掩模。《应用物理快报》**31**, 337（1977）。[45] Abuwasib, M., Krantz, P.& Delsing, P. 用于超导量子电路的大尺寸铝空气桥的制造。《真空科学与技术B》**31**, 031601（2013）。[46] Janzen, N., Kononenko, M.,Ren, s. & Lupascu, A. 采用单步电子束光刻工艺制备、用于超导量子器件的铝空气桥。《物理快报》**121**, 094001（2022）。[47] Segal, D. & Nitzan, A. 自旋-玻色子热整流器。《物理评论快报》94, 034301（2005）。[48] Pirkkalainen, JM., Cho, S., Massel, F., Tuorila. J., Heikkil¨a. T.T., Hakonen. P.J. & Sillanp¨a¨a, M.A. 由量子两能级系统介导的腔光力学。《自然通讯》**6**, 6981（2015）。[49] Barzanjeh, S., Xuereb, A., Gr¨oblacher, S., Paternostro, M., Regal A. C. & Weig. M. E. 面向量子技术的光机械学。《自然·物理》**18**, 15–24（2022）。