arXiv:2304.00802v1 [math.AP] 3 Apr 2023

某些一维退化抛物方程和多孔介质方程的非负行波解分类

Yu Ichida [*, †], Takashi Okuda Sakamoto [‡]

2023年4月4日

摘要

本文报告了一维空间退化抛物方程中行波解（包括非负弱意义解）的分类结果。这些结果通过动力系统理论和几何方法（尤其是 Poincar´e 紧化）获得。行波解分类是指列举存在的行波解，并介绍各解的性质，例如其剖面和渐近行为。研究考察了方程中包含的另一组参数，并采用了早期研究中讨论的相同技术：[Y. Ichida, 离散与连续动力系统丛书B辑, 28 (2023), no. 2, 1116–1132]。与此前的研究明显不同，本文得到的分类结果以及对已知变换的成功应用，也为具有特殊非线性项的一维空间多孔介质方程和最简单的多孔介质方程中的（弱）非负行波解分类提供了结果。最后，本文证明了刻画这些行波解的二维常微分方程中会发生无穷远分岔。

关键词：一维退化抛物方程、一维多孔介质方程、Poincar´e 紧化、非负行波解、渐近行为

数学主题分类：34C05, 35B40,35C07, 35K65

1 引言

本文研究以下三个抛物型偏微分方程的非负（弱意义下）行波解的分类。第一个是空间一维退化抛物方程：

$$U_t = U^p(U_{xx} + \mu U) - \delta U, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

其中 $0 < p < 1$、$\mu > 0$ 和 $\delta = 0$ 或 1。第二个是空间一维多孔介质方程

$$V_t = (V^m)_{xx} + \mu V^m - \delta(1-p)V, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad m = \frac{1}{1-p} > 1 \tag{1.2}$$

*明治大学研究与知识产权战略协调机构，东京都千代田区神田骏河台1-1，邮编101-8301，日本，ichidayu@meiji.ac.jp

†日本学术振兴会特别研究员（日本学术振兴会研究员）

‡明治大学理工研究生院，日本神奈川县川崎市多摩区东三田1-1-1，邮编214-8571，sakamoto@meiji.ac.jp

其线性项和非线性项具有特殊形式。(1.2) 是通过应用该变换得到的方程

$$U(t,x) = (1-p)^{-\frac{1}{p}}(V(t,x))^{\frac{1}{1-p}} \tag{1.3}$$

至于（1.1），Winkler [21]也介绍了这一方程。最后，第三种是简单的一维空间多孔介质方程

$$V_t = (V^m)_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad m > 1. \tag{1.4}$$

这是通过（1.2）中的 $\delta = 0$ 和 $\mu = 0$ 得到的。

首先，简要介绍方程（1.1）的背景。对于 $\delta = 0$ ，（1.1）源于某类平面曲线的时间演化问题。与 $p = 1$相邻时， $0 < p < 1$的情形与扩张曲线的运动问题有关，而 $p > 1$ 的情形则与曲线缩短问题有关（例如参见 [15] 及其中的参考文献）。根据 [2, 19] 及其中的参考文献，对于 $\delta = 0$ ，（1.1）源于天体物理学中太阳耀斑的建模，以及被约束在两壁之间的等离子体中无力磁场的电阻扩散。尽管 $\delta = 1$ 下的（1.1）没有具体现象作为背景，但正如下文所述，它对于理解该方程的解结构具有重要作用。

接下来，我们说明（1.1）中的数学问题。关于 $\delta = 0$ 这一情形下（1.1）中的爆破解，已有大量研究（参见 [2, 3, 4, 5, 15, 19, 21]）。根据这些文献，当 $0 < p < 2$时，解会发生I型爆破。当$p \geq 2$时，解会发生II型爆破。特别是，近年来已有大量研究致力于推导 $p \geq 2$ 中的爆破解（例如参见 [2, 19, 3] 及其中的参考文献）。在这些研究中，使用了以下方程；该方程将 $\delta = 0$时（1.1）中所考虑的（t， x）范围限制为：

$$\bar{U}_t = \bar{U}^p(\bar{U}_{xx} + \mu\bar{U}), \quad (t,x) \in (0,T) \times (-L,L), \tag{1.5}$$

其中 $p \in \mathbb{R}$ 和 $T < \infty$，并施加狄利克雷边界条件或周期边界条件。注意¯ ¯，为与（1.1）区分，未知函数记为 $U = U$（t， x）。 [3, 5, 12, 19, 21]„U（τ， x）满足

$$\tilde{U}_\tau = \tilde{U}^p(v_{xx} + \mu\tilde{U} - \tilde{U}^{-p+1}), \quad (\tau,x) \in (0,+\infty) \times (-L,L) \tag{1.6}$$

通过引入以下重标度函数：

$$\tilde{U}(\tau,x) = (pT)^{\frac{1}{p}}e^{-\tau}\bar{U}(t,x), \quad t = T(1-e^{-p\tau}), \quad \tau \in (0,+\infty).$$

该变换源自自相似解，并将爆破时间移至无穷远。需要注意的是，在本文中，(1.5) 和 (1.6) 被合并处理，而 (1.1) 关于空间被视为全空间。之所以考虑全空间，是因为本文不研究爆破解，并且将在后文讨论的主要结果的证明仅着眼于方程的结构。在 [5, 19, 3], (1.6) 的行波解的行为˜中，对 $U(\tau, 0)$ 进行了研究，这对于研究爆破速率起着重要作用。可以看出，这些先前的研究利用 (1.6) 中行波解的信息，成功地推导出了爆破速率的一个下界。根据 [5], ，(1.6) 中的行波解对应于考察 (1.5) 的一个特殊自相似解。更确切地说，这些行波解对应于曲线缩短的特殊自相似解，而曲线缩短通过同时旋转和收缩而演化。

接下来，我们简要回顾 (1.6) 和 (1.1) 的行波解的结果。˜设 $U(\tau, x) = U_c(\xi)$ ($\xi = x - ct$) 为 (1.6) 的行波解。Angenent [4] 和 Angenent-Vel´azquez [5] 证明了，对于 (1.6) 中的 $p = 2$ 和 $\mu = 1$，存在唯一的行波解 $U_c(\xi)$，满足以下性质：

$$U_c'(0) = 0, \quad U_c'(\xi) > 0 \quad \text{for} \quad \xi < 0, \quad U_c(\xi) \to 0 \quad \text{as} \quad \xi \to -\infty$$

存在。在 Lin-Poon-Tsai [15] 和 Poon [19], 中，这一结果被推广到 $p > 2$ 和$\mu = 1$的情形。这些结果通过相平面分析方法得到证明。受这些研究启发，Ichida-Sakamoto [12] 考察了一维全空间上的方程 (1.1)，并对行波解进行了分类，其中还包括针对特殊 p的弱意义解。更具体地说，该研究给出了方程 (1.1) 在 $p \in 2\mathbb{N}$、 $\mu = 1$以及 $\delta = 0$ 和 $\delta = 1$ 两种情形下，（弱）行波解的存在性、形态和渐近行为信息。请注意，这一结果涵盖了上述先前研究 [4, 5, 15, 19] 的结果。在 [12], 中，主要结果是通过应用动力系统理论、Poincar´e 紧化（详见下文）以及一种称为爆破技术的向量场去奇异化几何方法得到的（参见 [1, 7, 9]）。解的分类之所以有意义，是因为上述方法揭示了由行波坐标得到的二维常微分方程系统（简称常微分方程）的全部动力学，包括无穷远处的动力学。此外，值得注意的是， $\delta = 1$ 的弱行波解在 [12] 的定理2中得到，并被部分用于 [3]的讨论。如 [13], 所述，Ichida-Matsue-Sakamoto [11] 通过恰当的渐近研究和 Lambert W 函数的性质，得到了先前工作 [12], 中尚未获得的精细渐近行为。在 [12, 11], 中，由于讨论过程采用了爆破技术，因此必须沿用先前研究 [1, 7, 9], 的假设 $1 < p \in \mathbb{N}$。因此，文中没有讨论一般的$1 < p \in \mathbb{R}$。因此，作者 [13] 研究了该方程的非负（弱）行波解

$$u_t = uu_{xx} - \gamma(u_x)^2 + ku^2 - \delta pu, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1.7}$$

通过引入变换得到的 u

$$u(t, x) = (U(t, x))^p, \quad \gamma = \frac{p-1}{p}, \quad k = p\mu. \tag{1.8}$$

然后，利用与 [12]相同的论证，可以得到方程（1.7）的行波解分类。对于这一结果，通过使用 $U = u^{1/p}$（即（1.8）的逆变换），可以得到（1.1）中 $1 < p \in \mathbb{R}$在$\delta = 0$ 和 $\delta = 1$ 两种情况下的非负行波解分类。该论证的关键在于：通过（1.8）得到方程（1.7）的行波解分类时，无需使用爆破技术，因为在计算过程中， p 出现在系数部分而非指数部分。更多细节见 [13] 。这一结果将 [12, 11] 的结果推广到了 $1 < p \in \mathbb{R}$。

简要介绍上述先前研究中采用的方法（尤其是庞加莱紧化） [12, 13] 。庞加莱紧化是本文的关键方法。详情及几何图像请参见 [9, 10, 12, 13, 16, 17] 。这是对原相空间的一种紧化，即将 $\mathbb{R}^n$ 嵌入 $\mathbb{R}^{n+1}$单位上半球中。下面简要介绍这种方法的步骤。如 [16], 所述，这种紧化使原相空间中的无穷远点对应于紧流形的边界。无穷远处被划分为若干部分，每一部分都投影到与无穷远处对应的局部坐标中。随后考察每个

局部坐标中的动力学，即包括分段无穷远部分在内的动力学。结合这些局部坐标中获得的信息，便可以得到原相空间中包括无穷远处在内的动力学（下文称为庞加莱圆盘上的动力学）。例如，这种方法已用于分析李纳方程（[9] 及其中的参考文献），也用于从动力系统理论的角度重构常微分方程的爆破解（参见 [16, 17]）。

最初，人们关注行波解对阐明爆破速率所作的贡献。已有研究指出，在讨论 [12, 11, 13], 时，借助动力系统理论和几何方法（尤其是庞加莱紧化），可以获得有关行波解的丰富且此前未知的性质。本文尝试对 $0 < p < 1$ 时方程 (1.1) 的非负行波解进行分类，而这一问题此前尚未得到阐明。需要指出的是，这纯粹是一个数学问题，并非为了更精确地推导爆破速率而对行波解进行分析。即使像 [12, 11], 中那样，通过引入行波坐标，将方程 (1.1) 直接归结为研究二维常微分方程的行为，这仍是一个非平凡问题，无法像 [12, 11] 那样通过对 $0 < p < 1$ 的分析来研究。因此，我们首先考虑在 $0 < p < 1$ 中对方程 (1.7) 的非负行波解进行分类，并使用在 [13] 中也曾引入的同一变换 (1.8)。接着，仿照 [13], 中的论证，我们利用庞加莱紧化研究由行波坐标满足的一个包含无穷远点的二维常微分方程系统的动力学。通过使用 $U = u^{1/p}$，得到方程 U 中的结果。尽管这与 [13], 的问题相似，但应强调，本文的工作意义重大，因为通过引入变换 (1.8)，可以像 $1 < p \in \mathbb{R}$ 中那样，对非平凡 $0 < p < 1$ 中的非负行波解进行研究。在方法上，我们采用了 [12, 11, 13] 中使用的庞加莱紧化。

将 [13] 与本文进行比较可知，即使（1.1）中 p 的取值范围不同，庞加莱′紧化和动力系统理论方法仍然能够有效地研究行波解。这里需要强调的是，本文对（1.1）的行波解分类所得出的应用，与 [13]中的应用明显不同。如前所述，当 $0 < p < 1$时，我们应用（1.3），该方程也在 Winkler [21], 中引入，进而得到（1.2）。（1.2）是一类多孔介质方程。正如 [22], 所述，有限传播是退化扩散方程的基本特征。因此，阐明行波解（这类特征解）的存在性及其各种性质，是需要研究的问题之一。例如，参见 [18] ，其中研究了 $\delta = 0$时（1.2）的行波解。 [18], 中还给出了关于行波解整体存在性和有限传播的结果。然而，尚无关于非负行波解分类的结果。本文将（1.1）中 $0 < p < 1$时非负（弱）行波解分类的结果加以应用，得到（1.2）中非负（弱）行波解的分类。在（1.2）中，令 $\mu = 0$ 和 $\delta = 0$, 即可得到（1.4）以及最简单的多孔介质方程的非负行波解分类。关于最简单的多孔介质方程的背景及其数学问题，可参见 [6, 22]及其中的参考文献。

对于将行波坐标代入 (1.4) 得到的二维常微分方程，应用 Poincar´e 紧化法很难正确提取无穷远处的结构。换言之，要以与 ′ 相同的论证获得空间一维简单多孔介质方程的行波解分类,

是很困难的。从这个意义上说，本文中由定理1推导出的一个系统，其结果（推论 3）具有重要意义。

接下来，在讨论主要结果之前，我们根据在讨论中起核心作用的行波坐标推导二维常微分方程组。然后，对于(1.7)，我们引入以下变量替换：

$$\phi(\xi) = u(t,x), \quad \xi = x - ct, \quad 0 < c \in \mathbb{R}.$$

$\phi(\xi)$的方程随后化简为

$$\phi\phi'' = -c\phi' + \gamma(\phi')^2 - k\phi^2 + \delta p\phi, \quad \left(' = \frac{d}{d\xi}, \quad '' = \frac{d^2}{d\xi^2}\right). \tag{1.9}$$

于是，(1.9)等价于

$$\begin{cases} \phi' = \psi, \\ \psi' = -c\phi^{-1}\psi + \gamma\phi^{-1}\psi^2 - k\phi + \delta p, \end{cases} \qquad \left(' = \frac{d}{d\xi}\right). \tag{1.10}$$

这也在 [13], 中得到了推导，其与 $k > 0$相同，但在 $\gamma < 0$方面有所不同。与 [13], 类似，通过庞加莱紧化，可以获得(1.10)在无穷远处及其以内的全部动力学。随后，可以对(1.10)的所有连接轨道（包括通向无穷远的轨道）进行分类。这一结果表明，庞加莱圆盘中每条连接轨道对应的非负行波解均已分类。因此，一旦知道每个行波解的存在性，就可以得到其形态和渐近行为。

综合 [13] 和本文的结果，我们还可以考察 $p > 0$下(1.10)有限平衡点和无穷远平衡点稳定性的变化。无穷远平衡点的定义见 [16] 中的定义3.13。在第5节中，如果我们在 $p = 1$之后将 p 从 $p > 1$移至 $0 < p < 1$ ，就可以观察到无穷远平衡点的分岔。这可以通过考察庞加莱圆盘中 ψ轴上的平衡点直至无穷远处，以及 p中的变化来得到。由于(1.10)刻画了(1.7)和(1.1)的行波解，因此，常微分方程中无穷远平衡点的分岔与非负行波解的定性变化有关（参见 [13]）。

本文组织如下。下一节介绍本文的主要结果。在第 3 节中，我们基于庞加莱紧化和经典动力系统理论，得到方程 (1.10) 在庞加莱圆盘上的动力学。讨论内容与 [13]，基本相同，但为方便读者，我们简要介绍其细节及其与 [13] 的差异。第 4 节完成主要结果的证明。最后，第 5 节总结本文以及 [13] 的结果，以描述二维常微分方程中包括无穷远处在内的平衡点的稳定性变化，即刻画行波解的分岔。

2 主要结果

在介绍本文的主要结果之前，我们先定义必要的术语、概念和符号。这些定义并非通用术语，而是已被 [10, 12, 13] 采用。本文采用这些定义，以便将所得结果与 [13] 的结果进行比较。

定义 1

如果函数 $\phi(\xi)$ 在有限区间或半无限区间上是方程 (1.9) 的一个解，我们就称函数 $u(t, x) \equiv \phi(\xi)$ 是方程 (1.7) 的准行波。在 (1.1)、(1.2) 和 (1.4) 中也有类似定义。

定义2

如果函数 $u(t,x)$ 是方程 (1.7) 在有限区间（分别为半无限区间）上的准行波，且 $u=\phi$ 在该有限区间的有限端点（分别为半无限区间的端点）处趋于 0，而 $|u_\xi|=|\phi'|=|\psi|$ 趋于无穷大，我们就称函数 $u(t,x)\equiv\phi(\xi)$ 是方程 (1.7) 的带猝灭的准行波。更准确地说，函数 $\phi(\xi)$ 是方程 (1.9) 在有限区间（分别为半无限区间）(ξ_-,ξ_+)（分别为 $(\xi_-,+\infty)$）上的解，并且 $\phi(\xi)$ 满足 $\phi(\xi)\in C^2(\xi_-,\xi_+)\cap C^0[\xi_-,\xi_+]$, $-\infty<\xi_-<\xi_+<+\infty$（分别为 $\phi(\xi)\in C^2(\xi_-,+\infty)\cap C^0[\xi_-,+\infty)$，$|\xi_-|<\infty$）。此外，该函数满足

$$\begin{aligned}&\lim_{\xi\nearrow\xi_+-0}\phi(\xi)=0,\quad \lim_{\xi\nearrow\xi_+-0}|\phi'(\xi)|=\infty,\\&\lim_{\xi\searrow\xi_-+0}\phi(\xi)=0,\quad \lim_{\xi\searrow\xi_-+0}|\phi'(\xi)|=\infty\end{aligned}\tag{2.1}$$

（分别地，仅满足（2.1））。在（1.1）、（1.2）和（1.4）中也有类似定义。

定义3

如果函数 $u(t,x)\equiv\phi(\xi)$ 是方程（1.7）的带奇异性的准行波，则称之为方程（1.7）的带奇异性的准行波，其中函数 $u(t,x)$ 在某个半无限区间上是方程（1.7）的准行波，且 ϕ 达到 0 时只能进行左导数运算，并且在该半无限区间的有限端点处变为常数。更确切地说，函数 $\phi(\xi)$ 是半无限区间 $(-\infty,\xi_+)$ 上的方程（1.9）的一个解（$\phi(\xi)\in C^2(-\infty,\xi_+)$, $|\xi_+|<\infty$），并满足

$$\lim_{\xi\nearrow\xi_+-0}\phi(\xi)=0\quad\text{and}\quad\lim_{\xi\nearrow\xi_+-0}\phi'(\xi)=-C\tag{2.2}$$

其中 $C>0$。此定义同样适用于半无限区间 $(\xi_-,+\infty)$ 和有限区间 (ξ_-,ξ_+)。

在有限区间的一端满足 (2.1)、另一端满足 (2.2) 的函数，现称为带猝灭和奇异性的准行波。注意，这一概念并未出现在 [12, 13]，中，而是 [12, 13] 中定义的概念的组合，也是本文首次定义的术语。

定义4

设 u（ξ）是 (1.7) 在有限区间上的带猝灭的准行波。则称函数

$$u^*(\xi)=\begin{cases}u(\xi), & \xi\in(\xi_-,\xi_+),\\ 0, & else\end{cases}$$

为 (1.7) 的弱行波解（带猝灭）。如果 u（ξ）是 (1.7) 在有限区间或半无限区间上的带奇异性的准行波（分别为带猝灭和奇异性的准行波），则以相同方式定义 (1.7) 的弱行波解（带奇异性（分别为带猝灭和奇异性））。(1.1)、(1.2) 和 (1.4) 中也类似定义。

上述定义表明，$u^*(\xi)$ 满足

$$\int_{\mathbb{R}}\left[u\varphi_\xi(c-u_\xi)+(\gamma+1)(u_\xi)^2\varphi-u^2(\varphi_{\xi\xi}+k\varphi)+\delta pu\varphi\right]\,d\xi=0$$

对所有 $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ 均成立。注意，这与 [13] 相同。

根据这些定义，本文的主要结果如下。注意， $\phi(\xi) = u(\xi)$ 和 $\phi'(\xi) = \psi(\xi) = u_\xi(\xi)$ 均成立。下文中，符号 $f(\xi) \sim g(\xi)$ 中的 $\xi \to a$ 表示如下：

$$\lim_{\xi \to a} \left| \frac{f(\xi)}{g(\xi)} \right| = 1.$$

首先，我们分别给出关于 $\delta = 0$ 和 $\delta = 1$时，方程 (1.7) 的非负行波解（包括弱意义下的解）的分类结果。

命题1
假设 $0 < p < 1$, $\gamma < 0$, $k > 0$, $\mu > 0$ 和 $\delta = 0$。那么，对于给定的正常数 c，方程 (1.7) 有以下三类弱行波解：

(I) 存在一族带有猝灭的弱行波解，它对应于 (1.10) 中的轨道族。每个解 $u(\xi)$ 都满足以下条件：

(I1) $\lim_{\xi \searrow \xi_- + 0} u(\xi) = \lim_{\xi \to +\infty} u(\xi) = \lim_{\xi \to +\infty} u'(\xi) = 0, \lim_{\xi \searrow \xi_- + 0} u'(\xi) = +\infty.$
(I2) 对于 $\xi \in (\xi_-, +\infty)$, $u(\xi) > 0$ 成立；对于 $\xi \in (-\infty, \xi_-]$, $u(\xi) = 0$ 成立。
(I3) 存在常数 $\xi_0 \in (\xi_-, +\infty)$，使得以下条件成立：对于 $\xi \in (\xi_-, \xi_0)$, $u'(\xi) > 0$, 并且对于 $\xi \in (\xi_0, +\infty)$, $u'(\xi_0) = 0$ 且 $u'(\xi) < 0$。

此外， $u(\xi)$ 和 $u'(\xi)$ 在 $\xi \searrow \xi_- + 0$ 时的渐近行为为

$$\begin{cases} u(\xi) \sim A_1(\xi - \xi_-)^p, \\ u'(\xi) \sim A_2(\xi - \xi_-)^{p-1} \end{cases} \quad \text{as} \quad \xi \searrow \xi_- + 0, \tag{2.3}$$

其中， A_j 为正常数，且 $u(\xi)$ 和 $u'(\xi)$ 在$\xi \to +\infty$ 时的渐近行为为

$$\begin{cases} u(\xi) \sim ck^{-1}\xi^{-1}, \\ u'(\xi) \sim -ck^{-1}\xi^{-2}, \end{cases} \quad \text{as} \quad \xi \to +\infty. \tag{2.4}$$

(II) 存在一族带猝灭的弱行波解，对应于 (1.10) 中的轨道族。每个解 $u(\xi)$ 都满足以下条件：

(II1) $\lim_{\xi \searrow \xi_- + 0} u(\xi) = \lim_{\xi \nearrow \xi_+ - 0} u(\xi) = 0, \lim_{\xi \to \xi_- + 0} u'(\xi) = +\infty, \lim_{\xi \nearrow \xi_+ - 0} u'(\xi) = -\infty.$ (II2) $u(\xi) > 0$ 对 $\xi \in (\xi_-, \xi_+)$ 成立，且 $u(\xi) = 0$ 对 $\xi \in (-\infty, \xi_-] \cup [\xi_+, +\infty)$ 成立。(II3) 存在常数 $\xi_0 \in (\xi_-, \xi_+)$，使得以下条件成立： $u'(\xi) > 0$ 对 $\xi \in (\xi_-, \xi_0)$ 成立， $u'(\xi_0) = 0$，且 $u'(\xi) < 0$ 对 $\xi \in (\xi_0, \xi_+)$ 成立。

此外， $\xi \searrow \xi_- + 0$ 时 $u(\xi)$ 和 $u'(\xi)$ 的渐近行为表示为 (2.3)，而 $\xi \nearrow \xi_+ - 0$ 时 $u(\xi)$ 和 $u'(\xi)$ 的渐近行为

$$\begin{cases} u(\xi) \sim A_3(\xi_+ - \xi)^p, \\ u'(\xi) \sim -A_4(\xi_+ - \xi)^{p-1} \end{cases} \quad \text{as} \quad \xi \nearrow \xi_+ - 0,$$

其中 A_j 为正常数。

(III) 存在一个弱行波解（伴有猝灭和奇点），它对应于（1.10）中的轨道。解 $u(\xi)$满足（II2）、（II3）以及以下条件：

(III1) $\lim\limits_{\xi\searrow\xi_-+0} u(\xi) = \lim\limits_{\xi\nearrow\xi_+-0} u(\xi) = 0$, $\lim\limits_{\xi\searrow\xi_-+0} u'(\xi) = +\infty$, $\lim\limits_{\xi\nearrow\xi_+-0} u'(\xi) = -C$ *with* $C > 0$.

此外，$\xi \searrow \xi_- + 0$ 时，$u(\xi)$和 $u'(\xi)$的渐近行为表示为(2.3)，而 $\xi \nearrow \xi_+ - 0$ 时，$u(\xi)$和 $u'(\xi)$的渐近行为为

$$u(\xi) \sim A_1(\xi_+ - \xi), \quad u'(\xi) \sim -C \quad \text{as} \quad \xi \nearrow \xi_+ - 0$$

其中 $C > 0$为正常数。

命题2
假设 $0 < p < 1$、$\gamma < 0$、$k > 0$、$\mu > 0$和 $\delta = 1$成立。那么，对于给定的正常数 c，方程(1.7)有三类弱行波解，以及一个行波解，其中包括命题1中的(II)和(III)。其余两种情况如下：

(IV) 存在一个弱行波解族（发生猝灭），它对应于(1.10)中的轨道族。每个解 $u(\xi)$满足(I2)、(I3)以及下列条件：

(IV1) $\lim\limits_{\xi\searrow\xi_-+0} u(\xi) = 0$, $\lim\limits_{\xi\to+\infty} u(\xi) = \mu^{-1}$, $\lim\limits_{\xi\searrow\xi_-+0} u'(\xi) = +\infty$.

此外，$\xi \searrow \xi_- + 0$ 时，$u(\xi)$和 $u'(\xi)$的渐近行为表示为(2.3)，而 $\xi \to +\infty$ 时，$u(\xi)$的渐近行为为

$$u(\xi) \sim \frac{1}{\mu} \sim \begin{cases} B_1 e^{\omega_1 \xi} + B_2 e^{\omega_2 \xi} + \dfrac{1}{\mu}, & (D > 0), \\ (B_3 \xi + B_4) e^{\omega \xi} + \dfrac{1}{\mu}, & (D = 0), \\ e^{-\frac{\mu c}{2}\xi} \bar{Z}(\xi) + \dfrac{1}{\mu}, & (D < 0), \end{cases} \tag{2.5}$$

其中 B_j $(1 \le j \le 4)$为常数，且

$$\omega_1 = \frac{-\mu c + \sqrt{D}}{2} < 0, \quad \omega_2 = \frac{-\mu c - \sqrt{D}}{2} < 0, \quad \omega = -\frac{\mu c}{2} < 0, \quad D = \mu^2 c^2 - 4k.$$

$$\bar{Z}(\xi) = B_5 \cdot \sin[\frac{\sqrt{|D|}}{2}\xi] + B_6 \cdot \cos[\frac{\sqrt{|D|}}{2}\xi]$$

其中常数为$B_{5,\ 6}$。

(V) 存在一个行波解，使其对应于(1.10)中的轨道。该解 $u(\xi)$满足以下条件：

(V1) 当 $\xi \in \mathbb{R}$ 时，$\lim_{\xi\to-\infty} u(\xi) = 0$，$\lim_{\xi\to+\infty} u(\xi) = \mu^{-1}$.；(V2) $u(\xi) > 0$ 成立。

此外， $u(\xi)$ 在 $\xi \to \infty$ 时的渐近行为如 (2.5) 所示，而 $u(\xi)$ 在 $\xi \to -\infty$ 时的渐近行为为

$$u(\xi) \sim \frac{Mc^2 e^{\frac{p}{c}\xi}}{M(\mu c^2+1)e^{\frac{p}{c}\xi}-1} \quad \text{as} \quad \xi \to -\infty,$$

其中， $M<0$ 是一个依赖于初始状态 $\phi(0)=\phi_0$的常数。

接下来，对于命题1和命题2的结果，我们使用变换(1.8)。于是，可以立即得到当 $\delta=0$ 和 $\delta=1$ 均为 $0<p<1$ 时，方程(1.1)的非负行波解（包括弱意义下的解）的分类结果。正如前面提到的，这一论证与 [13]相同。因此，以下结果与 [13] 中的推论1、推论2和推论 3在$1<p\in\mathbb{R}$的情况下，关于 $1<p\in\mathbb{R}$ 时方程(1.1)的非负行波解（包括弱意义下的解）的结果相比较。图2.1展示了定理1中得到的行波解（包括弱意义下的解）的剖面图。

定理1
假设 $0<p<1$、 $\mu>0$和 $\delta=0$。那么，对于给定的正常数 c，方程 (1.1) 有以下三类弱行波解：

(i) 存在一族带有奇点的弱行波解。每个解 $U(\xi)$ 满足以下条件：

(i1) $\lim\limits_{\xi\searrow\xi_-+0} U(\xi) = \lim\limits_{\xi\to+\infty} U(\xi) = \lim\limits_{\xi\to+\infty} U'(\xi) = 0, \lim\limits_{\xi\searrow\xi_-+0} U'(\xi) = A_2$ 具有正常数 A_2。(i2) $U(\xi)>0$对 $\xi\in(\xi_-,+\infty)$ 成立，且 $U(\xi)=0$对 $\xi\in(-\infty,\xi_-]$ 成立。(i3) 存在常数 $\xi_0\in(\xi_-,+\infty)$，使得以下关系成立： $U'(\xi)>0$对 $\xi\in(\xi_-,\xi_0)$ 成立， $U'(\xi_0)=0$，且 $U'(\xi)<0$对 $\xi\in(\xi_0,+\infty)$ 成立。

此外，当 $\xi\searrow\xi_-+0$ 时， $U(\xi)$ 和 $U'(\xi)$ 的渐近行为为

$$\begin{cases} U(\xi)\sim A_1(\xi-\xi_-), \\ U'(\xi)\sim A_2 \end{cases} \quad \text{as} \quad \xi\searrow\xi_-+0, \tag{2.6}$$

其中 A_j 为正常数，并且当$\xi\to+\infty$ 时， $U(\xi)$ 和 $U'(\xi)$ 的渐近行为为

$$\begin{cases} U(\xi)\sim\left(\frac{c}{k}\xi\right)^{-1/p}, \\ U'(\xi)\sim-\frac{1}{p}\left(\frac{k}{c}\right)^{-\frac{1}{p}}\xi^{-\frac{p+1}{p}}, \end{cases} \quad \text{as} \quad \xi\to+\infty. \tag{2.7}$$

(ii) 存在一族带有奇点的弱行波解。每个解 $U(\xi)$ 满足以下条件：

(ii1) $\lim\limits_{\xi\searrow\xi_-+0} U(\xi) = \lim\limits_{\xi\nearrow\xi_+-0} U(\xi) = 0$, $\lim\limits_{\xi\searrow\xi_-+0} U'(\xi) = A_2$, $\lim\limits_{\xi\nearrow\xi_+-0} U'(\xi) = -A_4$，其中 C_j 为正常数。(ii2) 对于 $\xi\in(\xi_-,\xi_+)$， $U(\xi)>0$ 成立；对于 $\xi\in(-\infty,\xi_-]\cup[\xi_+,+\infty)$， $U(\xi)=0$ 成立。(ii3) 存在常数 $\xi_0\in(\xi_-,\xi_+)$，使得以下结论成立：对于 $\xi\in(\xi_-,\xi_0)$， $U'(\xi)>0$；对于 $\xi\in(\xi_0,\xi_+)$， $U'(\xi_0)=0$ 且 $U'(\xi)<0$。

此外，$\xi \searrow \xi_- + 0$ 时 $U(\xi)$ 和 $U'(\xi)$ 的渐近行为由 (2.6) 给出，而 $\xi \nearrow \xi_+ - 0$ 时 $U(\xi)$ 和 $U'(\xi)$ 的渐近行为为

$$\begin{cases} U(\xi) \sim A_3(\xi_+ - \xi), \\ U'(\xi) \sim -A_4 \end{cases} \quad \text{as} \quad \xi \nearrow \xi_+ - 0,$$

其中 A_j 为正常数。

(iii) 存在一个弱行波解（带有奇点）。解$U(\xi)$满足(ii2)、(ii3)以及以下条件：

(iii1) $\lim\limits_{\xi \searrow \xi_- + 0} U(\xi) = \lim\limits_{\xi \nearrow \xi_+ - 0} U(\xi) = 0$, $\lim\limits_{\xi \nearrow \xi_+ - 0} U'(\xi) = +\infty$, $\lim\limits_{\xi \searrow \xi_- + 0} U'(\xi) = -C$ *with* $C > 0$.

此外，当 $\xi \searrow \xi_- + 0$时，$U(\xi)$和 $U'(\xi)$的渐近行为由(2.6)给出；当 $\xi \nearrow \xi_+ - 0$时，$U(\xi)$和 $U'(\xi)$的渐近行为为

$$U(\xi) \sim A_1(\xi_+ - \xi)^{\frac{1}{p}}, \quad U'(\xi) \sim -A_2(\xi_+ - \xi)^{-\frac{p-1}{p}} \quad \text{as} \quad \xi \nearrow \xi_+ - 0$$

其中 $A_j > 0$为正常数。

注1
定理1的(i)中结果对应于 *[13],* 的推论1，只有 $\xi \searrow \xi_- + 0$ 中的渐近行为不同。另一方面，定理1中的(2.7)与 *[13]*的结果一致。

通过比较 *[13]* 中的结果与定理1中的结果，结果（ii）和（iii）表明，对于 $1 < p \in \mathbb{R}$ 中不存在的行波解，在 $0 < p < 1$中却存在。换言之，这表明行波解的结构在 $p = 1$处发生变化。在 $p = 1$中，若采用与本文相同的庞加莱紧化方法来研究行波解的结构，则由行波坐标导出的二维常微分方程在无穷远处的平衡态附近可能存在中心流形。我们将研究该中心流形的近似及其上的流动，并利用所得信息确定原始行波解的渐近行为。然而，目前还无法像 *[11, 12],* 中那样获得中心流形的良好近似，而这对于确定渐近行为是必要的。参见注释5。因此，$p = 1$ 的情形需要进行更细致的分析，应与本文分开讨论。

注释2
请注意，定理1中 ξ_- 附近的行波剖面对应于 *[22]* 中的非-C^1尖锐型（具体而言，是分段-C^1尖锐波）。

定理2
假设 $0 < p < 1$、$\mu > 0$和 $\delta = 1$。那么，对于给定的正常数 c，方程 (1.1) 有三类弱行波解和一个行波解，其中包括定理1中的 (ii) 和 (iii)。其余两种刻画如下：

(iv) 存在一族带有奇点的弱行波解。每个解 $U(\xi)$ 满足 (i2)、(i3) 以及以下条件：

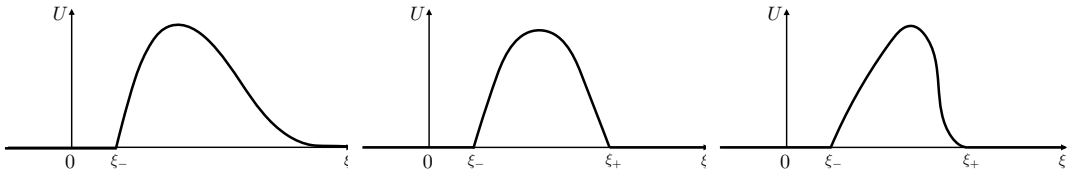

图2.1：定理1中得到的行波解示意图。需要注意的是，在我们的研究中，奇点 ξ_- 和 ξ_+ 的位置尚未确定，但为方便起见，图中标出了它们。 [左：定理1 (i)中的弱行波解。] [中：定理1 (ii)中的弱行波解。] [右：定理1 (iii)中的弱行波解。]

(iv1) $\lim_{\xi\searrow\xi_-+0} U(\xi) = 0$, $\lim_{\xi\to+\infty} U(\xi) = \mu^{-1/p}$, $\lim_{\xi\searrow\xi_-+0} U'(\xi) = C$ *with a positive constant* C.

此外， $U(\xi)$ 和 $U'(\xi)$ 在 $\xi \searrow \xi_- + 0$ 时的渐近行为表示为 (2.6)，而 $U(\xi)$ 在 $\xi \to +\infty$ 时的渐近行为为

$$U(\xi) \sim \mu^{-\frac{1}{p}} \sim \begin{cases} \left(B_1 e^{\omega_1 \xi} + B_2 e^{\omega_2 \xi} + \dfrac{1}{\mu}\right)^{\frac{1}{p}}, & (D > 0), \\ \left((B_3\xi + B_4) e^{\omega \xi} + \dfrac{1}{\mu}\right)^{\frac{1}{p}}, & (D = 0), \\ \left(e^{-\frac{\mu c}{2}\xi} \bar{Z}(\xi) + \dfrac{1}{\mu}\right)^{\frac{1}{p}}, & (D < 0), \end{cases} \tag{2.8}$$

其中 B_j $(1 \le j \le 4)$为常数。

(v) 存在一个行波解，使其对应于(1.1)中的轨道。该解 $U(\xi)$满足以下条件：

(v1) $\lim_{\xi\to-\infty} U(\xi) = 0, \lim_{\xi\to+\infty} U(\xi) = \mu^{-1/p}$.(v2) $U(\xi) > 0$ 对于 $\xi \in \mathbb{R}$成立。

此外，当 $\xi \to \infty$ 时， $U(\xi)$ 的渐近行为表示为 (2.8)，而当 $\xi \to -\infty$ 时， $U(\xi)$ 的渐近行为为

$$U(\xi) \sim \left(\frac{Mc^2 e^{\frac{p}{c}\xi}}{M(\mu c^2 + 1)e^{\frac{p}{c}\xi} - 1}\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{as} \quad \xi \to -\infty, \tag{2.9}$$

其中， $M < 0$ 是一个取决于初始状态 $\phi(0) = \phi_0$ 的常数。

注3
定理2(iv)中的结果对应于 *[13],* 中的推论2，且 (2.8) 与 *[13]* 中的结果一致。注意，$\xi \searrow \xi_- + 0$ 中的渐近行为有所不同。定理2(v)中的结果对应于 *[13],* 中的推论 3，且 (2.9) 与 *[13]* 中的结果一致。将 *[13]* 中的结果与定理2中的结果进行比较，可以看出，正如注1所述，行波解的结构在 $p = 1$ 附近发生变化。然而，正如注1所述， $p = 1$ 情形下行波解的讨论仍有待开展。

注 4
注意，定理2(iv)中的行波剖面对应于 *[22]*中的非单调波前分段-C^1 型尖锐波。

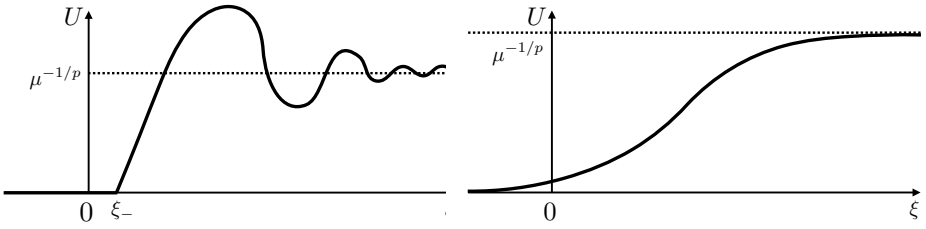

图2.2：定理2中得到的行波解示意图。需要指出的是，在我们的研究中，奇点的位置 ξ_- 并未确定；不过，为方便起见，图中仍标出了该位置。 [左：当 $D<0$时，定理2 (iv)中的弱行波解。] [右：当 $D>0$时，在 $\xi\in\mathbb{R}$ 上得到的定理2 (v)中的行波解。]

图2.2展示了定理2中得到的行波解剖面（包括弱意义下的解）。

接下来，利用定理1、定理2以及变换(1.3)，即可得到在 $\delta=0$ 和 $\delta=1$两种情况下，方程(1.2)中 $m>1$ （包括弱意义下）的非负行波解分类结果。

推论1
设 $m>1$、 $k>0$、 $\mu>0$且 $\delta=0$。则对于给定的正常数 c，方程(1.2)有以下三类弱行波解：

(A) 存在一个弱行波解族（伴有猝灭）。每个解 $V(\xi)$ 满足以下条件：

(A1) $\lim_{\xi\searrow\xi_-+0}V(\xi)=\lim_{\xi\to+\infty}V(\xi)=\lim_{\xi\to+\infty}V'(\xi)=0$，$\lim_{\xi\searrow\xi_-+0}V'(\xi)=+\infty$。(A2) $V(\xi)>0$适用于 $\xi\in(\xi_-,+\infty)$，而 $V(\xi)=0$适用于 $\xi\in(-\infty,\xi_-]$。
(A3) 存在常数 $\xi_0\in(\xi_-,+\infty)$，使得以下条件成立： $V'(\xi)>0$适用于 $\xi\in(\xi_-,\xi_0)$，$V'(\xi_0)=0$，且 $V'(\xi)<0$适用于 $\xi\in(\xi_0,+\infty)$。

此外， $V(\xi)$和 $V'(\xi)$在 $\xi\searrow\xi_-+0$ 时的渐近行为为

$$\begin{cases}V(\xi)\sim A_1(\xi-\xi_-)^{\frac{1}{m}},\\ V'(\xi)\sim A_2(\xi-\xi_-)^{-\frac{m-1}{m}}\end{cases}\qquad \text{as}\quad \xi\searrow\xi_-+0, \tag{2.10}$$

其中， A_j 为正常数，且 $V(\xi)$和$V'(\xi)$在$\xi\to+\infty$ 时的渐近行为为

$$\begin{cases}V(\xi)\sim m^{-\frac{1}{m-1}}\left(\dfrac{k}{c}\right)^{-\frac{1}{m-1}}\xi^{-\frac{1}{m-1}},\\ V'(\xi)\sim -(m-1)^{-1}m^{-\frac{1}{m-1}}\left(\dfrac{k}{c}\right)^{-\frac{1}{m-1}}\xi^{-\frac{m}{m-1}},\end{cases}\qquad \text{as}\quad \xi\to+\infty. \tag{2.11}$$

(B) 存在一族弱行波解（伴有猝灭）。每个解 $V(\xi)$满足以下条件：

(B1) 当$\lim_{\xi\searrow\xi_-+0}V$趋于$\xi$时，$=$趋于$\lim_{\xi\to\xi_+-0}V$；当$\lim_{\xi\to\xi_-+0}V'$趋于$\xi$时，$=+\infty$；当$\lim_{\xi\searrow\xi_+-0}V'$趋于$\xi$时，$=-\infty$。(B2) $V(\xi)>0$对$\xi\in(\xi_-,\xi_+)$成立，而$V(\xi)=0$对$\xi\in(-\infty,\xi_-]\cup[\xi_+,+\infty)$成立。

(B3) 存在常数 $\xi_0 \in (\xi_-, \xi_+)$，使得以下结论成立：对于 $\xi \in (\xi_-, \xi_0)$，$V'(\xi) > 0$；对于 $\xi \in (\xi_0, \xi_+)$，$V'(\xi_0) = 0$ 且 $V'(\xi) < 0$。

此外，当 $\xi \searrow \xi_- + 0$ 时，$V(\xi)$和 $V'(\xi)$的渐近行为由(2.10)给出；当 $\xi \nearrow \xi_+ - 0$ 时，$V(\xi)$和 $V'(\xi)$的渐近行为为

$$\begin{cases} V(\xi) \sim A_3(\xi_+ - \xi)^{\frac{1}{m}}, \\ V'(\xi) \sim -A_4(\xi_+ - \xi)^{-\frac{m-1}{m}} \end{cases} \quad \text{as} \quad \xi \nearrow \xi_+ - 0,$$

其中 A_j 为正常数。

(C) 若 $1 < m < 2$，则存在一个弱行波解（具有猝灭和奇点）。该解 $V(\xi)$满足(B2)、(B3)以及以下条件：

$$(C1)\ \lim_{\xi \searrow \xi_- + 0} V(\xi) = \lim_{\xi \nearrow \xi_+ - 0} V(\xi) = 0,\ \lim_{\xi \searrow \xi_- + 0} V'(\xi) = +\infty,\ \lim_{\xi \nearrow \xi_+ - 0} V'(\xi) = 0.$$

此外，当 $\xi \searrow \xi_- + 0$ 时，$V(\xi)$和 $V'(\xi)$的渐近行为由(2.10)给出；当 $\xi \nearrow \xi_+ - 0$ 时，$V(\xi)$和 $V'(\xi)$的渐近行为为

$$\begin{cases} V(\xi) \sim A_5(\xi_+ - \xi)^{\frac{1}{m-1}}, \\ V'(\xi) \sim -A_6(\xi_+ - \xi)^{-\frac{m-2}{m-1}} \end{cases} \quad \text{as} \quad \xi \nearrow \xi_+ - 0, \tag{2.12}$$

其中 A_j 为正常数。

若 $m = 2$，则存在一个弱行波解（具有猝灭和奇点）。该解 $V(\xi)$满足(B2)、(B3)以及以下条件：

$$(C2)\ \lim_{\xi \searrow \xi_- + 0} V(\xi) = \lim_{\xi \nearrow \xi_+ - 0} V(\xi) = 0,\ \lim_{\xi \searrow \xi_- + 0} V'(\xi) = +\infty,\ \lim_{\xi \nearrow \xi_+ - 0} V'(\xi) = -C \ with\ C > 0.$$

此外，$V(\xi)$ 和 $V'(\xi)$ 在 $\xi \searrow \xi_- + 0$ 时的渐近行为表示为（2.10），而 $V(\xi)$ 和 $V'(\xi)$ 在 $\xi \nearrow \xi_+ - 0$ 时的渐近行为表示为（2.12）。

如果 $m > 2$，则存在一个弱行波解（具有猝灭和奇点）。解 $V(\xi)$ 满足（B1）、（B2）和（B3）。此外，$V(\xi)$ 和 $V'(\xi)$ 在 $\xi \searrow \xi_- + 0$ 时的渐近行为表示为（2.10），而 $V(\xi)$ 和 $V'(\xi)$ 在 $\xi \nearrow \xi_+ - 0$ 时的渐近行为表示为（2.12）。

推论2
假设 $m > 1$、$k > 0$、$\mu > 0$ 和 $\delta = 0$。那么，对于给定的正常数 c，方程（1.2）具有三类弱行波解，以及一个包含推论1中（B）和（C）的行波解。其余两种刻画如下：

(D) 存在一族弱行波解（伴有猝灭）。每个解 $V(\xi)$ 满足 (A2)、(A3) 以及以下条件：

$$(D1)\ \lim_{\xi \searrow \xi_- + 0} V(\xi) = 0,\ \lim_{\xi \to +\infty} V(\xi) = m^{-1/(m-1)} \mu^{-(m-1)/m^2},\ \lim_{\xi \searrow \xi_- + 0} V'(\xi) = +\infty.$$

此外，当 $\xi \searrow \xi_- + 0$ 时， $V(\xi)$ 和 $V'(\xi)$ 的渐近行为如 (2.10) 所示；当 $\xi \to +\infty$ 时，$V(\xi)$ 的渐近行为为

$$
\begin{aligned}
V(\xi) &\sim m^{-1/(m-1)}\mu^{-(m-1)/m^2} \\
&\sim \begin{cases}
m^{-\frac{1}{m-1}}\left(B_1 e^{\omega_1 \xi} + B_2 e^{\omega_2 \xi} + \dfrac{1}{\mu}\right)^{-(m-1)/m^2}, & (D>0), \\
m^{-\frac{1}{m-1}}\left((B_3\xi + B_4)e^{\omega \xi} + \dfrac{1}{\mu}\right)^{-(m-1)/m^2}, & (D=0), \\
m^{-\frac{1}{m-1}}\left(e^{-\frac{\mu c}{2}\xi}\bar{Z}(\xi) + \dfrac{1}{\mu}\right)^{-(m-1)/m^2}, & (D<0),
\end{cases}
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

其中 B_j $(1 \le j \le 4)$ 为常数。

(E) 存在一个行波解。该解 $V(\xi)$ 满足以下条件：

(E1) $\lim_{\xi \to -\infty} V(\xi) = 0, \lim_{\xi \to +\infty} V(\xi) = m^{-1/(m-1)}\mu^{-(m-1)/m^2}$. (E2) $V(\xi) > 0$ 对 $\xi \in \mathbb{R}$ 成立。

此外， $V(\xi)$ 在 $\xi \to \infty$ 时的渐近行为由式 (2.13) 给出，而 $V(\xi)$ 在 $\xi \to -\infty$ 时的渐近行为为

$$
V(\xi) \sim m^{-\frac{1}{m-1}}\left(\frac{Mc^2 e^{\frac{p}{c}\xi}}{M(\mu c^2+1)e^{\frac{p}{c}\xi} - 1}\right)^{(m-1)/m^2} \quad \text{as} \quad \xi \to -\infty,
$$

其中 $M < 0$ 为依赖于初始状态 $\phi(0) = \phi_0$ 的常数。

最后，我们结合推论1中关于 $\delta = 0$ 和 $\mu = 0$ 的分类结果，从而得到多孔介质方程 (1.4) 的非负弱行波解分类结果。

推论 3
假设 $m > 1$、 $\mu = 0$ 和 $\delta = 0$ 成立。那么，对于给定的正常数 c，方程 (1.4) 有三类弱行波解，与推论1相同。推论1中的 (B) 和 (C) 在此处也成立。然而，由于 (A) 中弱行波解的渐近行为 (2.11) 在 $\mu = 0$ 处当 $\xi \to +\infty$ 趋于零时（$k = p\mu$，见 (1.8)），我们只能确定 (A1) 成立（见推论1）。

图 2.3 和图 2.4 是推论 3 中得到的弱行波解剖面的示意图。

3 方程 (1.10) 在庞加莱圆盘上的动力学

本节通过庞加莱紧化研究 $\mathbb{R}^2 \cup \{(\phi,\psi) \mid \|(\phi,\psi)\| = +\infty\}$，即所谓的庞加莱圆盘上的动力学。讨论内容与 [13]，几乎相同，但为方便读者，我们简要讨论其细节以及与 [13] 的差异。

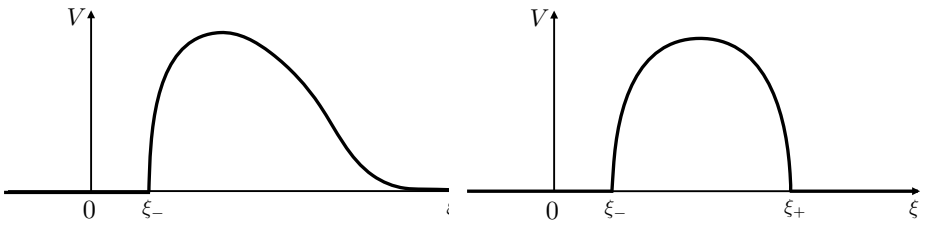

图 2.3：推论 3 中得到的行波解示意图。需要指出的是，在我们的研究中，奇点 ξ_- 和 ξ_+ 的位置尚未确定，但为方便起见，图中标出了它们。 [左：推论 3 (A) 中的弱行波解。] [右：推论 3 (B) 中的弱行波解。]

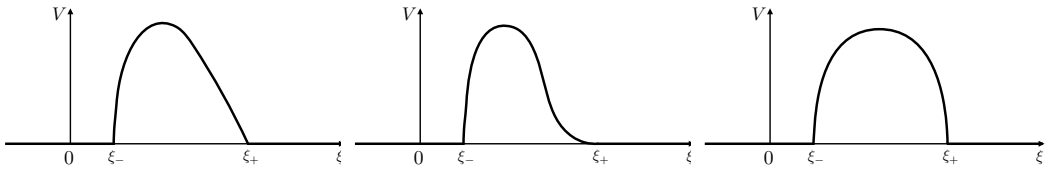

图 2.4：推论 3 中得到的行波解示意图。需要指出的是，在我们的研究中，奇点 ξ_- 和 ξ_+ 的位置尚未确定，但为方便起见，图中标出了它们。 [左：当 $1 < m < 2$ 时，推论 3 (C) 中的弱行波解。] [中：当 $m = 2$ 时，推论 3 (C) 中的弱行波解。] [右：当 $m > 2$ 时，推论 3 (C) 中的弱行波解。]

3.1 有限平衡点附近的动力学

首先，我们研究方程 (1.10) 的有限平衡点附近的动力学。当 $\delta = 0$ 时，不存在平衡点。若 $\delta = 1$，该方程有一个平衡点 E_1：$(\phi, \psi) = (\mu^{-1}, 0)$，位于 $\{\phi > 0\}$。注意，$\phi = 0$ 有一个奇点。该平衡点的存在性及其附近的行为与文献 [13] 中的讨论完全相同。本文也利用了该平衡点附近的信息，因此尽管结果与文献 [13] 中的结果有所重叠，仍在本文中加以描述。向量场 (1.10) 在 E_1 处的雅可比矩阵为

$$E_1 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -c\mu \end{pmatrix}.$$

令 J_1 为该矩阵。那么，解在 E_1 附近的行为因 $D = \mu^2 c^2 - 4k$ 的符号而异。例如，当 $D > 0$ 时，矩阵 J_1 有两个不同的实特征值；其他情形也可类似地得出。若 $c > 0$，则当 $D \geq 0$ 时，E_1 是一个稳定结点；当 $D < 0$ 时，它是一个稳定焦点（螺旋汇）。

其次，为了研究（1.10）在 Poincar´e 圆盘上的动力学，我们通过时间尺度去奇异化对其进行去奇异化：

$$ds/d\xi = \phi^{-1}$$

如 [13] 中所示。关于时间尺度去奇异化的说明，参见 [13] 中的注9。此外，关于通过时间重标度进行去奇异化的解析处理，请参阅 [14] 的第7.7节及其中的参考文献。注意，这使我们能够纳入 $\phi = 0$。由于我们考虑的是非负解，即 $\phi \geq 0$，在该区域内，经过这种去奇异化后时间方向不会改变。因此我们有

$$\begin{cases} \phi' = \phi\psi, \\ \psi' = -c\psi + \gamma\psi^2 - k\phi^2 + \delta p\phi, \end{cases} \qquad \left(' = \frac{d}{ds}\right). \tag{3.1}$$

无论 δ 如何，（3.1）都有以下平衡点：

$$E_0 : (\phi, \psi) = (0, 0), \quad E_2 : (\phi, \psi) = \left(0, c\gamma^{-1}\right).$$

注意，这与 [13] 不同，因为 $\gamma < 0$。（3.1）的向量场在这些平衡点处的雅可比矩阵为

$$E_0 : \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \delta p & -c \end{pmatrix}, \quad E_2 : \begin{pmatrix} c\gamma^{-1} & 0 \\ \delta p & c \end{pmatrix}.$$

- 当 $\delta = 0$ 时，E_2 是鞍点，因为其特征值为 $c\gamma^{-1} < 0$ 和 $c > 0$。对应于各特征值的特征向量分别为 $(1, 0)^T$ 和 $(0, 1)^T$，其中 T 表示转置。接着，可以应用中心流形理论研究 E_0 附近的动力学，如 [13] 中所示（例如，参见 [8]）。我们可以得到中心流形（图像）的近似如下：

$$\{(\phi, \psi) \mid \psi(s) = -kc^{-1}\phi^2 + O(\phi^4)\}.$$

因此，(3.1) 在 E_0 附近的动力学与下列方程的动力学拓扑等价：

$$\phi'(s) = -kc^{-1}\phi^3 + O(\phi^5).$$

这些结果与 [13] 的第3.1小节相同。更详细的过程请参见 [12] 的第3.2小节。

• 当 $\delta = 1$ 时， E_2 是一个鞍点。对应于各特征值的特征向量分别为 $(1, c^{-1}p(\gamma^{-1}-1)^{-1})^T$ 和 $(0,1)^T$ 如 [13], 中所述，按照与 [12] 的第3.2小节和 [11], 的第2节相同的论证，我们可以研究平衡点 E_0 周围在 $\delta = 1$ 下的动力学。我们得出中心流形（图像）的近似为

$$\{(\phi, \psi) \mid \psi(s) = pc^{-1}\phi - pc^{-3}(\mu c^2 + 1)\phi^2 + O(\phi^3)\}$$

并且， E_0 附近的 (3.1) 的动力学与下列方程的动力学拓扑等价:

$$\phi'(s) = pc^{-1}\phi^2 - pc^{-3}(\mu c^2 + 1)\phi^3 + O(\phi^4).$$

由于 γ 的符号仅在 [13], 处不同，有限平衡态 E_2 的位置会发生变化，而 E_0 和 E_2 附近的稳定性与动力学保持不变。从下一小节开始，我们可以考虑该方程在坐标图 $\overline{U}_j$ （$j = 1, 2$）和 $\overline{V}_2$ 上的动力学，因为我们正在考虑 $\phi \geq 0$。

3.2 坐标图 $\overline{U}_2$ 上的动力学

为了得到坐标图 $\overline{U}_2$ 上的动力学，我们通过以下公式引入坐标（λ, x）：

$$\phi(s) = x(s)/\lambda(s), \quad \psi(s) = 1/\lambda(s).$$

在此坐标图中，它对应于 $\phi \to 0$ 和 $\psi \to +\infty$ ，而 x 为正的方向对应于 ϕ 为正的方向。几何图像见 [10] 的图 2 和 [12] 的图 2。于是，我们有

$$\begin{cases} \lambda' = c\lambda - \gamma + kx^2 - \delta p\lambda x, \\ x' = p^{-1}\lambda^{-1}x + cx + k\lambda^{-1}x^3 - \delta p x^2. \end{cases}$$

通过时间尺度去奇异化 $d\tau/ds = \lambda^{-1}$，我们可以得到

$$\begin{cases} \lambda_\tau = c\lambda^2 - \gamma\lambda + k\lambda x^2 - \delta p\lambda^2 x, \\ x_\tau = p^{-1}x + c\lambda x + kx^3 - \delta p\lambda x^2, \end{cases} \tag{3.2}$$

其中 $\lambda_\tau = d\lambda/d\tau$ 和 $x_\tau = dx/d\tau$。到此为止，这与 [13], 相同，但对下述平衡点的讨论有所不同。系统 (3.2) 在$\{\lambda = 0\}$ 上的平衡点为

$$E_3 : (\lambda, x) = (0, 0).$$

向量场 (3.2) 在该平衡点处的雅可比矩阵为

$$E_3 : \begin{pmatrix} -\gamma & 0 \\ 0 & 1/p \end{pmatrix}.$$

因此， E_3 是源。注意， [13] 中的 $p > 1$ 是一个鞍点，因为 γ 是 $0 < \gamma < 1$。

注释5
当 $p = 1$ 时，可以应用中心流形定理研究 E_3 附近的动力学。如注1所述，这一点需要进行细致而艰难的分析，且仍是一个未解决问题。

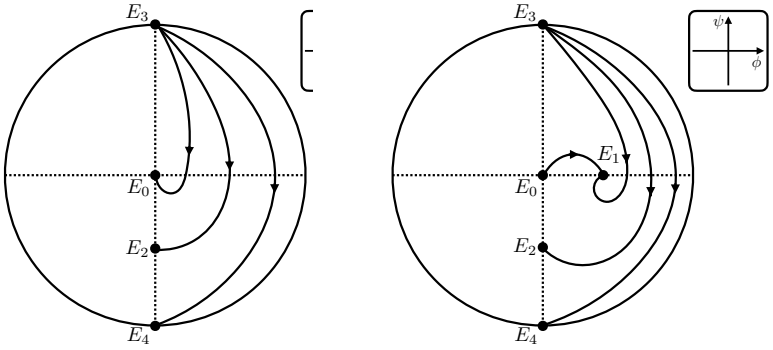

图3.1：在情形$0 < p < 1$下，庞加莱′圆盘上的动力学示意图。 [左： $\delta = 0$。] [右： $\delta = 1$。]

3.3 坐标图 $\overline{V}_2$ 和 $\overline{U}_1$上的动力学

通过引入与 citecDNPE 中相同的变换和时间尺度变换，我们在每个局部坐标下得到相同的方程。与第3.2小节类似，我们得出结论：平衡点 $E_4 : (\lambda, x) = (0, 0)$ 存在，且为汇点。另一方面，与关于 [13] 的论证相同， $\overline{U}_1$ 中的微分方程组没有平衡点。

3.4 庞加莱′圆盘上的动力学与连接轨道

结合坐标图 $\overline{U}_j$（$j = 1, 2$）和 $\overline{V}_2$上的动力学，我们可以得到庞加莱′圆盘上的动力学，这与方程（1.10）（或（3.1））的动力学等价（另见图3.1）。集合 Φ 表示 $\Phi = \{（\phi, \psi） \in \mathbb{R}^2 \cup \{\| （\phi, \psi） \| = +\infty\}\}$。

本小节旨在证明连接轨道的存在性（另见图3.1）。连接轨道的证明策略与 [12, 11, 13] 相同。不过需要注意的是，平衡点的位置比在 [12, 11, 13]中更复杂。在此之前，我们先对圆盘作一些说明。

注6（[13], 注11）
在图3.1中，我们需要谨慎处理点 E_0。为方便读者，下面说明这种处理方式，尽管这只是对 *[12, 11, 13]*的重述。当我们考虑圆盘上的参数 s 时， E_0 是方程（3.1）的平衡点。然而，E_0 是直线 $\{\phi = 0\}$ 上的一个点，其关于参数 ξ存在奇点。我们看到，除奇点 $\{\phi = 0\}$ 外，$d\phi/d\psi$ 在由（1.10）和（3.1）定义的向量场上取值相同。如果轨线从参数为 s时的平衡点 E_0 出发（或进入该点），那么它们就从关于 ξ的点 E_0 出发（或进入该点）。 E_2、E_3和 E_4的情况也相同。

首先，我们证明在 $\delta = 0$ 处连接轨道的存在性（另见图3.1）。由于$\{\phi = 0\}$ 在(3.1)中是不变的，从 $\{(\phi, \psi)$上的一点出发的任何轨线都不能到达 $\{(\phi, \psi)$。根据 Poincar´e-Bendixson 定理，能够到达 $\mathcal{W}^s(E_2)$上一点的轨线，只能是从 $\mathcal{W}^s(E_3)$上的一点出发的轨线。令 $\mathcal{W}^s(E_2)$为动力系统(3.1)中 E_2 的稳定流形， $\mathcal{W}^u(E_3)$为动力系统(3.1)中 E_3 的不稳定流形。因此，在(3.1)中，证明了存在一条从 E_3 到 E_2 的轨线，该轨线从 $\mathcal{W}^u(E_3)$上的一点出发，并到达 $\mathcal{W}^s(E_2)$上的一点。这里，如注6所述，由于 $d\phi/d\psi$在由(1.10)和(3.1)定义的向量场上取值相同，因此通过(3.1)得到的这些轨线也由(1.10)继承。由此，在(1.10)中，证明了存在一条轨线

从 E_3 到 E_2 ，该轨线从 $\mathcal{W}^u(E_3)$上的一点出发，并到达$\mathcal{W}^s(E_2)$上的一点。类似地，也证明了在 $\delta=0$ 处存在连接轨道，分别连接 E_3 与 E_0 、 E_3 与 E_4 。

接下来，我们证明 $\delta=1$ 的连接轨道存在性。 $\mathcal{W}^{cu}(E_0)$ 表示在 $\delta=1$ 的情况下，动力系统 (3.1) 中 E_0 的中心不稳定流形。 $\mathcal{W}^s(E_1)$ 表示在 $\delta=1$ 的情况下，动力系统 (1.10) 和 (3.1) 中 E_1 的稳定流形。 $\mathcal{W}^s(E_4)$ 表示在 $\delta=1$ 的情况下，动力系统 (3.1) 中 E_4 的稳定流形。根据 Poincar´e-Bendixson 定理，从 $\mathcal{W}^{cu}(E_0)$ 上一点出发的轨线只能到达 $\mathcal{W}^s(E_1)$ 或 $\mathcal{W}^s(E_4)$ 上的一点。假设从 $\mathcal{W}^{cu}(E_0)$ 上一点出发的轨线到达 $\mathcal{W}^s(E_4)$。由于

$$\psi'\big|_{0<\phi<\mu^{-1},\,\psi=0}=-p\phi(\mu\phi-1)>0$$

在 (3.1) 中，这条轨线将经过 ϕ 轴上满足 $\phi>\mu^{-1}$ 的一点，并朝向 $\mathcal{W}^s(E_4)$ 上的一点。在这种情况下，朝向 $\mathcal{W}^s(E_1)$ 上某一点的轨线，是一条从 $\mathcal{W}^u(E_3)$ 上一点出发的轨线。然而，这条轨线与假设的轨线相交，产生矛盾。如果假设从 $\mathcal{W}^{cu}(E_0)$ 上一点出发的轨线朝向 $\mathcal{W}^s(E_2)$，同样的论证也会导出矛盾。由此可知，从 $\mathcal{W}^{cu}(E_0)$ 上一点出发的轨线只能到达 $\mathcal{W}^s(E_1)$ 上的一点。也就是说，在 (3.1) 中，证明了 E_0 与 E_1 之间存在连接轨道。采用与 $\delta=0$ 相同的论证，可以证明在 δ 为 $\delta=1$ 的情况下， E_0 与 E_1、 E_3 与 E_1，以及 E_3 与 E_4 之间存在连接轨道。

综上，如图3.1所示，对于 $\delta=0$ 和 $\delta=1$ ，庞加莱圆盘上所有连接轨道的存在性均得到了证明。

4 主要结果的证明

本章将证明主要结果。如第2节所述，我们首先证明命题1和命题2。然后，利用这些结果和（1.8），通过与 [13], 相同的论证，我们得到定理1和推论1，同时得到定理2和推论2。因此，命题1和命题2的证明是本章的核心和基础。

如果初始数据位于 $\Phi\backslash\{\phi<0\}$ 上，则解的存在性由常微分方程的标准理论得到。因此，我们考察庞加莱圆盘上连接平衡点的轨线的存在性、平衡点附近的详细动力学及其渐近行为。由第 3.4 小节中的论证可知，不存在穿过 ψ-轴的轨道，因此不存在变号解。

4.1 命题1的证明

第 3.4 小节的讨论揭示了在 $\phi\geq 0$ for$\delta=0$ 条件下方程 (1.10) 的所有连接轨道。因此，我们得到与以下三类轨线相对应的三类行波的存在性： E_3 与 E_0之间的轨线、 E_3 与 E_2 之间的轨线，以及 E_3与 E_4之间的轨线。请注意， E_3 与 E_2之间只有一条连接轨道，而根据对平衡点附近动力系统的讨论，其他连接轨道则构成一个连接轨道族。

首先，我们证明 (I)。通过与 [12, 13], 相同的论证，我们得到 (I2)、(I3) 和 (2.4)，但

$$\lim_{\xi\to+\infty}u(\xi)=\lim_{\xi\to+\infty}u'(\xi)=0$$

且 ξ_- 存在。对于 (I2)，由事实 $\phi(\xi) > 0$ 成立可知 $u(\xi) > 0$ 成立。对于 (I3)，可以证明轨道经过 ϕ-轴，对应于 $u'(\xi) = 0$。还需证明的是 $-\infty < \xi_- < +\infty$ 的存在性以及 (2.3)。

以下讨论与 [13]似乎相似。然而，不同之处在于， [13] 使用有限平衡态附近解的近似，而以下讨论使用无穷远处的平衡态附近解的近似。其写法与 [13], 相同，但为方便读者，下面给出证明。

E_3 附近的解可近似表示为

$$\begin{cases} \lambda(\tau) = A_1 e^{-\gamma\tau}(1 + o(1)), \\ x(\tau) = A_2 e^{p^{-1}\tau}(1 + o(1)) \end{cases}$$

其中常数为 $A_j > 0$ ($j = 1,2$)。利用该方程，我们得到

$$\frac{d\tau}{d\xi} = \frac{d\tau}{ds}\frac{ds}{d\xi} = \lambda^{-1}\phi^{-1} = x^{-1} \sim A_3 e^{-p^{-1}\tau} \quad \text{as} \quad \tau \to -\infty.$$

由此结果可得 $d\xi/d\tau \sim A_4 e^{p^{-1}\tau}$。这给出 $\xi(\tau) \sim A_5 e^{p^{-1}\tau} + A_6$。然而， A_6 是常数，而另一个 A_j 是正常数。令

$$\xi_- = \lim_{\tau \to -\infty} \xi(\tau),$$

则有

$$\xi - \xi_- \sim A_7 e^{p^{-1}\tau} \quad \text{as} \quad \tau \to -\infty$$

其中有一个正常数 $A_7 > 0$ ， 与 [10, 12, 13, 16, 17]中的讨论相同。因此，我们得到

$$\begin{aligned} \phi(\xi) &= \lambda^{-1}x \sim A_8 e^{\tau} \sim A_9(\xi - \xi_-)^p \quad \text{as} \quad \xi \searrow \xi_- + 0, \\ \psi(\xi) &= \lambda^{-1} \sim A_{10} e^{\gamma\tau} \sim A_{11}(\xi - \xi_-)^{p-1} \quad \text{as} \quad \xi \searrow \xi_- + 0 \end{aligned}$$

其中 A_j 为正常数。由于轨线位于 $\{(\phi, \psi) \mid \phi > 0, \psi > 0\}$ 上，因此有 $A_9 > 0$ 和 $A_{11} > 0$ （另见图3.1）。由于 $u(\xi) = \phi(\xi)$ 以及 $u_\xi = \psi(\xi)$ 成立，我们可以推导出（2.3）。

可以使用与（I）和上文 [12, 13] 中相同的论证来得到（II）和（III）中的结果。结合上述结果，命题1得证。□

4.2 命题2的证明

关于 $\delta = 1$ 的结论可以按照第4.1小节和 [12, 11, 13] 中的方法得到。详细内容请参见这些参考文献。□

5 讨论

本文利用庞加莱紧化和经典动力系统理论，对（1.10）在相空间 $\mathbb{R}^2 \cup \{\|(\phi, \psi)\| = +\infty\}$, $\setminus \{\phi < 0\}$ 上的所有连接轨道进行分类。这些轨道刻画了（1.7）的非负（包括弱意义下的）行波解，其存在性、剖面和渐近行为由命题 1 和命题2给出。利用这些结果和（1.8），得到了非负

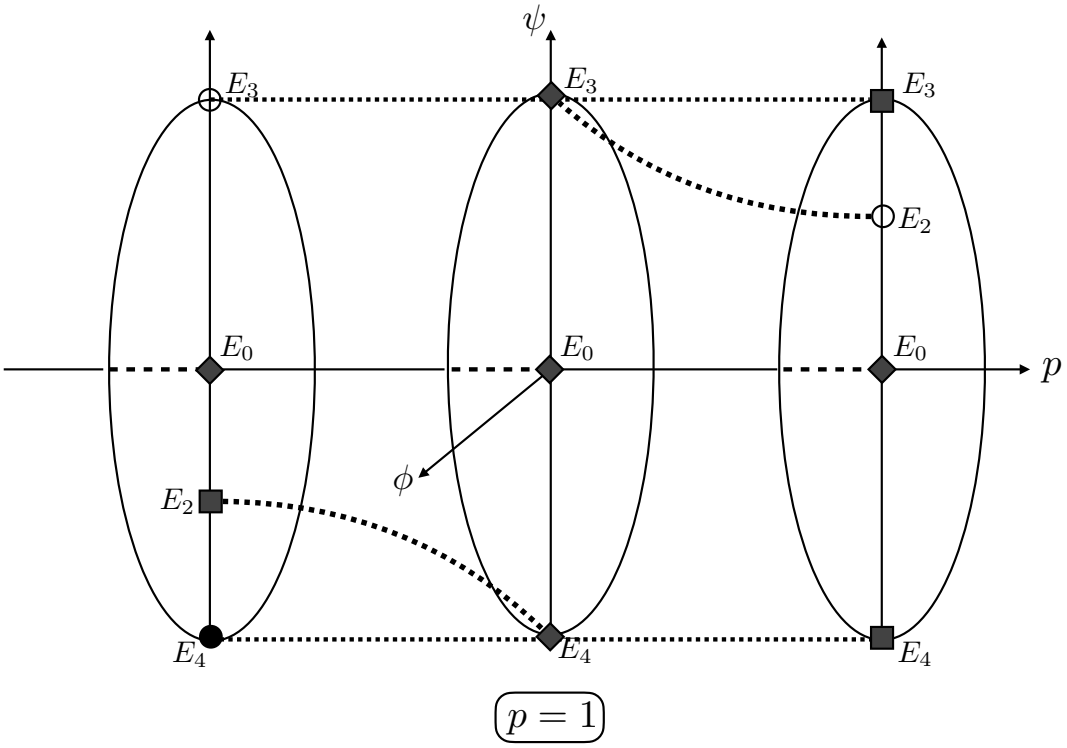

图 5.1：Poincar´e 圆盘上有限平衡点与无穷远平衡点的示意图。白色圆圈和黑色圆圈分别表示源和汇平衡点。灰色方块表示鞍点平衡，灰色菱形表示具有中心流形的平衡点。左、中、右三个圆盘分别对应 $0<p<1$、 $p=1$ 和 $p>1$ 的情形。

（包括弱意义下的）行波解的分类。对于（1.1）中的 $0<p<1$ ，定理1和定理2给出了相应结果。需要注意的是，这一思路本质上与 [13]，相同，但作者此前的研究 [11, 12] 尚未得到 p 范围内的结果。此外，本文对（1.3）的变换使我们能够得到空间一维多孔介质方程的非负弱行波解分类结果，例如推论 3。

本节讨论在 [13] 和第 3 节中得到的式 (1.10) 的全部动力学，包括无穷远处的情形。我们描述无穷远平衡点和有限平衡点的稳定性变化，即以 p 为参数时式 (1.10) 中平衡点的分岔。

图 5.1 使用符号展示了 $0<p<1$、 $p=1$ 和 $p>1$ 时，Poincar´e 圆盘上 ψ 轴上平衡点的位置及其各自的稳定性。由于 E_3 和 E_4 是无穷远处的平衡点，图 5.1 中的 ψ 轴表示

$$\{-\infty\}\cup\{-\infty<\psi<+\infty\}\cup\{+\infty\}.$$

各 p 上平衡点稳定性的符号说明见图 5.1 的图注。将 [13] 中得到的关于 $p>1$ 的结果与本文得到的关于 $0<p<1$ 的结果进行比较，可以观察到方程 (1.10) 中有限平衡点和无穷远平衡点的稳定性变化。令 p 从 $p>1$ 变为 $0<p<1$，并以 $p=1$ 为临界值，则各平衡点的稳定性变化可概括如下：

- 无穷远处的平衡态 E_3: $(\phi,\psi)=(0,+\infty)$ 在 $p>1$处是一个鞍点，但在 $0<p<1$ 经过 $p=1$后变为一个源。也就是说，稳定维数与不稳定维数，它们

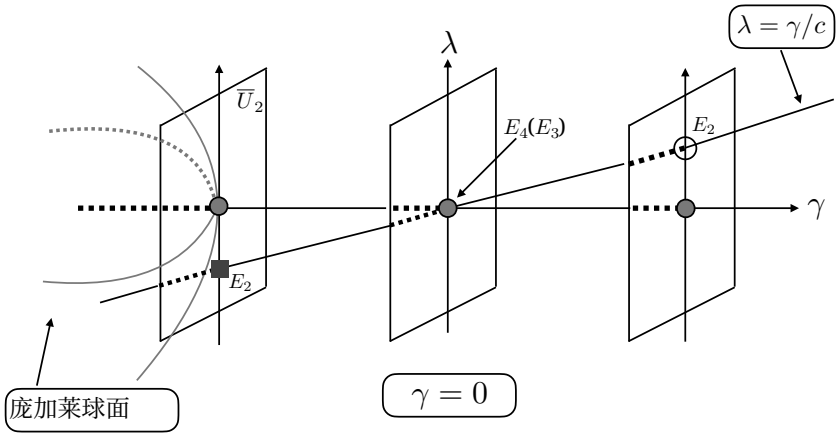

图 5.2： $\overline{U}_2$上的分岔示意图。灰色圆圈对应于$\overline{U}_2$上的平衡点 E_3 和 E_4 。

对于 $p > 1$，每种情况均为 1；在 $p = 1$ 处稳定维数减少 1；而对于 $0 < p < 1$，稳定维数为 0，不稳定维数为 2。

- 无穷远处的平衡点 E_4: $(\phi, \psi) = (0, -\infty)$ 与 E_3 相似。
- 对于有限平衡态 E_0: $(\phi, \psi) = (0,0)$，这是一个适用中心流形定理的平衡点，其中 $0 < p < 1$ 、 $p = 1$ 和 $p > 1$。
- 对于有限平衡态 E_2: $(\phi, \psi) = (0, pc/(p-1))$，当 $p > 1$ 时，不稳定维数为 2。当 $0 < p < 1$ 时，它存在于 $\psi < 0$ 中，且不稳定维数为 1。当 $p = 1$ 时， E_2 不存在。这可以解释为 $\psi = pc/(p-1) \to \pm\infty$，其中有 $p \to 1 \pm 0$ （对应图 5.1 中的灰色虚线）。

此外，由此可知，对于给定的 $\varepsilon > 0$，在区域 $\{|p-1| < \varepsilon\}$ 上存在彼此不拓扑等价的动力系统。事实上，将 (3.2) 限制在 $\{x = 0\}$ 上的动力学为

$$\lambda_\tau = (c\lambda - \gamma)\lambda, \quad (\gamma = (p-1)/p,\ c > 0). \tag{5.1}$$

于是，在 $p = 1$ 附近， $\gamma = (p-1)/p = (p-1) + O((p-1)^2)$ 成立，因此我们可以看到，在 (5.1) 中，跨临界分岔发生于 $\gamma = (p-1)/p = 0$ ，也就是说，(5.1) 的平衡点 $\lambda = 0$ 和 $\lambda = \gamma/c$ 经历了跨临界分岔。

由于我们考察 (1.10) 在 $\{\phi > 0\}$ 上的动力学，这里忽略 ψ 轴上轨线的方向，只关注与 (5.1) 的平衡点 $\lambda = 0$ 和 $\lambda = \gamma/c$ 相对应的分岔分支图（见图 5.2）。于是，局部坐标图 $\overline{U}_2$ 和 $\overline{V}_2$ 上的动力学呈倒置状态，而 $\overline{U}_2$ 的上半平面和下半平面上的分岔分支，分别是通过映射 $g_2^+ \circ f^+$ 和 $g_2^+ \circ f^-$，从 $\{(\psi, \phi) \mid \psi > 0\}$ 和 $\{(\psi, \phi) \mid \psi < 0\}$ 映射而来（见附录 A）。因此，分岔分支

$$\{(x, \lambda, \gamma) \,|\, (x, \lambda) = (0, 0)\} \quad \text{and} \quad \{(x, \lambda, \gamma) \,|\, (x, \lambda) = (0, \gamma/c)\}$$

在 $\overline{U}_2$ 处分为两部分，并在庞加莱′圆盘上进行观察。这些分支对应于分岔分支

$$\{(\phi, \psi, p) \,|\, (\phi, \psi) = (0, pc/(p-1)),\ 0 < p < 1\} \cup \{(\phi, \psi) = (0, -\infty)\}$$

and

$$\{(\phi,\psi,p)\,|\,(\phi,\psi)=(0,pc/(p-1)),\,1<p\}\cup\{(\phi,\psi)=(0,+\infty)\}$$

在（1.10）的相空间中，即动力系统（1.10）中的无穷远分岔发生于 $p=1$ 处。这表明，（1.1）的行波由在（1.10）中观察到的无穷远分岔刻画。

这一结果基于通过庞加莱紧化对刻画方程 (1.1) 行波的二维常微分方程 (1.10) 的所有动力学（包括 $\{\|(\phi,\psi)\|=\infty\}$）进行的研究。据作者所知，我们的结果将为分岔分析以及庞加莱紧化在偏微分方程中的应用提供新的视角。

致谢

IY 部分获得了 JSPS KAKENHI 项目资助，项目编号为 JP21J20035。

参考文献

[1] ´Alvarez, M.J., Ferragut, A., Jarque, X.: 关于爆破技术的综述，国际分岔与混沌应用科学与工程期刊，21，3108–3118（2011）。[2] Anada, K., Ishiwata, T.: 拟线性抛物方程初边值问题解的爆破速率，微分方程期刊，262，181–271（2017）。[3] Anada, K., Ishiwata, T., Ushijima, T.: 拟线性抛物方程行波解的渐近展开，日本工业与应用数学杂志，39，889–920（2022）。[4] Angenent, S.: 曲线缩短流中奇点的形成，微分几何期刊，33，601–633（1991）。[5] Angenent, S., Vel´azquez, J.J.L.: 曲线缩短中尖点奇点的渐近形状，杜克数学期刊，77，71–110（1995）。[6] Aronson, D.G.: 多孔介质方程，载于《非线性扩散中的若干问题》（A. Fasano 和 M. Primjcerio 编），数学讲义，Springer-Verlag，纽约/柏林，1986年。[7] Brunella, M.: 通过牛顿多面体定义的平面向量场及其主部的拓扑等价性，微分方程期刊，85，338–366（1990）。[8] Carr, J.: 中心流形理论的应用，Springer-Verlag，纽约-柏林（1981）。[9] Dumortier, F., Llibre, J., Art´es, C.J.: 平面微分系统定性理论，Springer-Verlag，柏林（2006年）。[10] Ichida, Y., Sakamoto, T.O.: 存在负幂非线性的反应扩散方程中的猝灭拟行波，日本学士院院刊A辑数学科学，96，1–6（2020年）。[11] Ichida, Y., Matsue, K., Sakamoto, T.O.: 退化非线性抛物方程行波解的精细渐近行为，日本工业与应用数学会快报，12，65–68（2020年）。

[12]Ichida, Y., Sakamoto, T.O.: 退化非线性抛物方程的行波解，《椭圆抛物方程杂志》，6，795–832（2020年）。[13] Ichida, Y.: 一维退化抛物方程非负行波解的分类，《离散与连续动力系统》B辑，28，第2期，1116–1132（2023年）。[14] Kuehn, C.: 多时间尺度动力学，Springer，柏林（2015）。[15] Lin, Y.C., Poon, C.C., Tsai, D.H.: 曲率慢速下收缩凸浸入闭平面曲线，《美国数学学会汇刊》，364，5735–5763（2012）。[16] Matsue, K.: 具有庞加莱型紧化的微分方程爆破解，《SIAM应用动力系统杂志》，17，2249–2288（2018）。[17] Matsue, K.: 自治常微分方程有限时奇点的几何处理与共同机制，微分方程期刊，267，7313–7368（2019）。[18] De Pablo, A., V´azquez, J.L.: 反应扩散方程中的行波与有限传播，微分方程期刊，93，19–61（1991）。[19] Poon, C.C.: 退化非线性抛物方程解的爆破速率，《离散与连续动力系统》B辑，24，5317–5336（2019）。[20]Wiggins, S.: 应用非线性动力系统与混沌导论，Springer-Verlag，纽约，2003年。[21] Winkler, M.: 非散度形式退化抛物方程解的爆破，微分方程期刊，192，445–474（2003）。[22] Xu, T., Yin J.: 退化扩散方程中的行波，《数学研究通讯》，39，36–53（2023年）。

附录 A：庞加莱型紧化概述

庞加莱紧化是原相空间的一种紧化（将 $\mathbb{R}^n$ 嵌入 $\mathbb{R}^{n+1}$的单位上半球）。本附录将简要介绍庞加莱紧化。这里重述了 [10, 12] 的第2节内容。此外，更多细节请参见 [9] 。设

$$X = P(\phi,\psi)\frac{\partial}{\partial\phi} + Q(\phi,\psi)\frac{\partial}{\partial\psi}$$

是定义在 $\mathbb{R}^2$上的多项式向量场，换言之

$$\begin{cases}\dot{\phi} = P(\phi,\psi),\\ \dot{\psi} = Q(\phi,\psi),\end{cases}$$

其中 $\cdot$ 表示 d/dt，而 P、 Q 是关于变量 ϕ和 ψ的任意次数多项式。

我们将 $\mathbb{R}^2$ 视为由 $(y_1, y_2, y_3) = (\phi, \psi, 1)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中定义的平面。我们将球面 $\mathbb{S}^2 = \{y \in \mathbb{R}^3 \,|\, y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1\}$ 称为庞加莱球面。我们将球面划分为

$$H_+ = \{y \in \mathbb{S}^2 \,|\, y_3 > 0\}, \quad H_- = \{y \in \mathbb{S}^2 \,|\, y_3 < 0\}$$

and

$$\mathbb{S}^1 = \{y \in \mathbb{S}^2 \,|\, y_3 = 0\}.$$

考虑将向量场 X 从 $\mathbb{R}^2$ 嵌入到 $\mathbb{S}^2$，其定义为

$$f^+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2, \quad f^- : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2,$$

其中

$$f^{\pm}(\phi, \psi) := \pm \left(\frac{\phi}{\Delta(\phi,\psi)}, \frac{\psi}{\Delta(\phi,\psi)}, \frac{1}{\Delta(\phi,\psi)} \right)$$

其中 $\Delta(\phi,\psi) = \sqrt{\phi^2 + \psi^2 + 1}$。

接着，我们考虑 $\mathbb{S}^2$ 上由 $U_k = \{y \in \mathbb{S}^2 \,|\, y_k > 0\}$, $V_k = \{y \in \mathbb{S}^2 \,|\, y_k < 0\}$ 给出的六个局部坐标图，其中 $k = 1$、2、3。考虑局部投影

$$g_k^+ : U_k \to \mathbb{R}^2, \quad g_k^- : V_k \to \mathbb{R}^2$$

定义为

$$g_k^+(y_1, y_2, y_3) = -g_k^-(y_1, y_2, y_3) = \left(\frac{y_m}{y_k}, \frac{y_n}{y_k} \right)$$

对于 $m < n$ 和 $m, n \neq k$。投影向量场可由以下向量场得到

在面上

$$\overline{U}_k = \{y \in \mathbb{R}^3 \,|\, y_k = 1\}, \quad \overline{V}_k = \{y \in \mathbb{R}^3 \,|\, y_k = -1\}$$

对于每个局部坐标图 U_k 和 V_k。我们用 (x, λ) 表示任意 k 对应的 $g_k^{\pm}(y)$ 的值。

例如，可以得出

$$(g_2^+ \circ f^+)(\phi, \psi) = \left(\frac{\phi}{\psi}, \frac{1}{\psi} \right) = (x, \lambda),$$

因此，通过变量替换$\phi = x/\lambda$和 $\psi = 1/\lambda$，我们可以得到局部坐标图 $\overline{U}_2$ 上的动力学。Poincar´e 球面、(ϕ, ψ)-平面和$\overline{U}_2$的位置如图 A.1 所示。本文沿用此处用于 Poincar´e 紧化的记号。只需考察 $H_+ \cup \mathbb{S}^1$上的动力学，该区域称为 Poincar´e 圆盘。

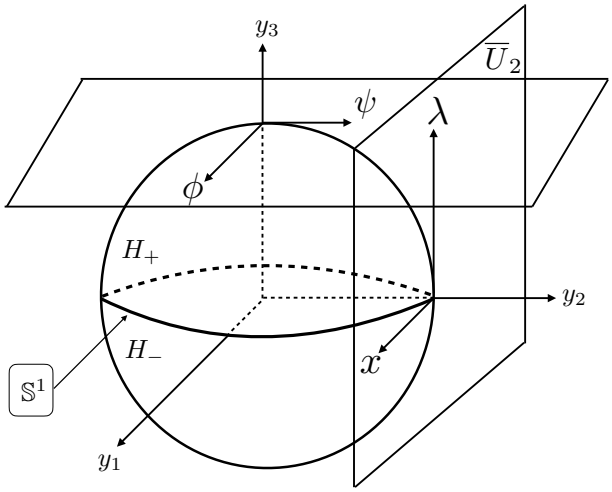

图 A.1：Poincar´é 球面和坐标图 $\overline{U}_2$ 的位置。

附录B：刻画方程 (1.4) 行波解的二维常微分方程

本文通过 (1.1) 对 (1.4) 的非负弱行波解进行分类。如第 1 节所述，要掌握刻画 (1.4) 行波解的二维常微分方程的动力学并不容易。本节将说明理解这些动力学为何困难。

引入行波坐标

$$\phi(\xi) = V(t,x), \quad \xi = x - ct, \quad c > 0$$

代入方程 (1.4)，并令 $\psi(\xi) = d(\phi^m)/d\xi$，可得以下方程：

$$\begin{cases} \phi' = m^{-1}\phi^{1-m}\psi, \\ \psi' = -m^{-1}c\phi^{1-m}\psi \end{cases} \qquad \left(' = \frac{d}{d\xi}\right)$$

为了能够处理 $\phi = 0$ 并防止出现经过 $\phi = 0$的轨线，我们通过时间尺度去奇异化对其进行去奇异化：

$$\frac{ds}{d\xi} = \frac{1}{m}\phi^{-m}$$

于是有

$$\begin{cases} \phi' = \phi\psi, \\ \psi' = -c\phi\psi \end{cases} \qquad \left(' = \frac{d}{ds}\right)$$

通过与本文类似的简单计算，可以预期，对于该系统，整个ϕ 轴和 ψ 轴都是平衡点集合，并且在 ϕ 轴和 ψ 轴上各点的邻域内都存在中心流形。然而，要对这两条轴上各点处的中心流形进行近似，需要仔细分析，这仍是一个未解决问题。也就是说，关于方程 (1.4) 的非负弱渐进行波解分类的结果，并非通过推导上述刻画方程 (1.4) 渐进行波解的二维常微分方程的动力学而获得；目前，像本文一样通过方程 (1.1) 采用一种方法更为明智。